

Question: 26次元楕円体の体積は？

$$\text{Answer: } \frac{\pi^{13}}{13!} a \times b \times c \times d \times e \times f \times g \times h \times i \times j \times k \times l \times m \times n \times o \times p \times q \times r \times s \times t \times u \times v \times w \times x \times y \times z$$

ここで、**a, b, c, …** は、楕円体の各主軸の方向の半径（各軸の方向の長さの半分）である。
この答えは、半径 r の 26 次元球の体積が、

$$V_{26}(\text{sphere}) = \frac{\pi^{13}}{13!} r^{26} \quad (1)$$

と与えられるとすれば、各軸の方向に、拡大・縮小すれば得られる ($r/a, r/b, r/c, \dots$ とすればよい。)

(蛇足：言うまでもないことであるが、体積要素は、3次元の場合、横×縦×高さで、 n 次元の場合、 $\Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdots \Delta x_n$ であり、各座標のスケール変換に対して比例するという、体積の基本的性質は重要。)

この式を眺めると、西欧（主にキリスト教の世界）では不吉な数と言われている 13 と英文字の数、26 とは何か（深い？）関係があるのではないかと想像されるかもしれない。文字数が 13 ではあまりにも少ないので、その 2 倍の 26 に文字数をしたのではないかと、私は長い間、勝手に、そのように思い込んでいた。しかし、これは、少しウェブで調べてみると、全くの思い違いもいところであるということが直ぐに判明する。そもそも、各言語で使われているアルファベットの文字数は、まちまちであり、そのルーツも紀元前 2 千年ぐらいまで遡れるようである。また、英文字数が 26 に落ち着いたのは、近年、16 世紀ごろのようで、そうなったのも単なる歴史的な偶然によるもので、何ら宗教的、文化的な理由があるわけでもないようである。一方、13 が不吉であるということも、はるか紀元前の北欧の土着の神話がルーツであり、それをキリスト教が取り入れたために（多分、布教に利用したために？）、欧米を中心に広まったようである。一方、我が国では、13 と言えば、ゴルゴ 13 が最も有名であるだろう。その由来の有力候補は、各話にもよく出てくる、イエス・キリストの磔の刑にまつわる話である。また、刑務所の独房の番号なども候補に挙げられている。しかし、これらは、あくまでも伝聞、噂話等に過ぎないのである（ちゃんと「原書」に当たれば、断定的なことは何も言えない、真相は霧の中（闇の中？）であることがわかるのである）。なお、最近、見つけたのであるが、次の URL は、ゴルゴ 13 に関する解説として、比較的優れているように思われる（勿論、言うまでもなく、「原書」の方が断然、面白い）。

[https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%B4%E3%83%AB%E3%82%B413_\(%E6%9E%B6%E7%A9%BA%E3%81%AE%E4%BA%BA%E7%89%A9\)](https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%B4%E3%83%AB%E3%82%B413_(%E6%9E%B6%E7%A9%BA%E3%81%AE%E4%BA%BA%E7%89%A9))

さて、上の話で、13 という数と 26 という数が頭の中に印象づけられれば、式(1)の表式を思い出すのが容易になるであろう。さらに、一般の n 次元球体の体積が、

$$V_n(r) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!} r^n \quad (2)$$

で与えられることも容易に思い出すことができるであろう。なお、ここで、

$$x! = \Gamma(x+1) \quad (3)$$

であり、 n が偶数の場合には、 $(n/2)!$ は単に整数の階乗となるが、 n が奇数の場合には、ガンマ関数を使う必要がある。しかし、この場合でも、

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2}-1\right) \cdots \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2}-1\right) \cdots \sqrt{\pi}$$

となり、 $\pi^{n/2}$ から出てくる $\sqrt{\pi}$ とキャンセルするので、式(2)の係数には π の整数乗しか現れないのである。

以下では、式(2)の表式を求めてみることにしよう。これを求めるには、まずは、その表式が以下のような形になることに注意する。

$$V_n(r) = v_n r^n \tag{4}$$

すると、 n 次元球の体積は、 $n-1$ 次元球の体積の表式を使って、以下のように表される (図 1 を参照)。

$$V_n(r) = \int_{-r}^r v_{n-1} (r^2 - z^2)^{\frac{n-1}{2}} dz = 2v_{n-1} r^n \int_0^1 (1 - z^2)^{\frac{n-1}{2}} dz \tag{5}$$

これから、

$$v_n = 2v_{n-1} \int_0^1 (1 - z^2)^{\frac{n-1}{2}} dz \tag{6}$$

となる。すると、我々はすぐに、 $z = \sin \theta$ とおいて、

$$I = 2 \int_0^1 (1 - z^2)^{\frac{n-1}{2}} dz = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta d\theta \tag{7}$$

したくなる。そして、この積分は、多分、ほとんど人が憶えているもので、

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n \theta d\theta \left(= \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta \right) = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} & (n = \text{even}) \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1 & (n = \text{odd}) \end{cases}$$

と与えられる。よって、これを式(6)の漸化式に代入して、 n を下げていけば、最終の結果が得られることになるのであるが、その計算は結構、楽しめるぐらい時間がかかるであろう。そこで、以下では、もう少し簡単な導出を行うことにする。今、 $z^2 = x$ とおくと、式(7)は、ベータ関数を使って、

$$I = \int_0^1 (1-x)^{\frac{n+1}{2}-1} x^{\frac{1}{2}-1} dx = B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) \tag{8}$$

と書ける (ベータ関数、 $B(x, y)$ については、Appendix A を参照

のこと)。よって、式(6)から、

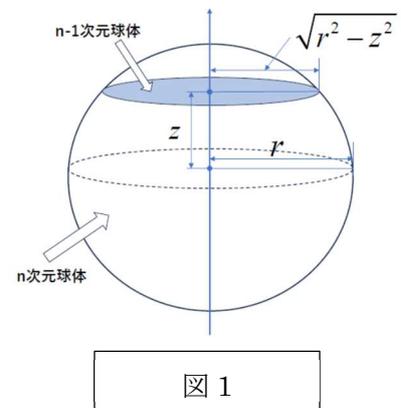


図 1

$$\begin{aligned}
v_n &= v_{n-1} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} v_{n-1} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+1\right)} \cdots \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-(n-2)+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-(n-2)}{2}+1\right)} v_{n-(n-2)-1} \\
&\cdots = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} v_1 = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} v_1
\end{aligned} \tag{9}$$

一次元球（つまり長さ $2r$ の区間）の係数、 v_1 は 2 で、

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{10}$$

であることを使うと、

$$v_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \tag{11}$$

と求まる。

ここで、 $z! = \Gamma(z+1)$ という記号を使うと、式(11)は、覚えやすい形、

$$v_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \tag{12}$$

に書ける。小さい n の値を代入すると、

$$v_1 = 2, v_2 = \pi, v_3 = \frac{4\pi}{3}, v_4 = \frac{\pi^2}{2} \tag{13}$$

となる。 $n = 1, 2, 3$ の場合は既知であろう。

以上から、(4)は、

$$V_n(r) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!} r^n \tag{14}$$

となるのがわかる。また、 n 次元球の表面積は、式(14)を r で微分することにより、

$$A_n(r) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} r^{n-1} \quad (15)$$

となる。

さて、よく知られているように、楕円の面積は、 πab であり、楕円体の体積は、 $\frac{4\pi}{3} abc$ であり、これらの係数、 v_n は、1 のオーダーであると言ってもよいが、表題の 26 次元楕円体の場合、その係数は、

$$\frac{\pi^{13}}{13!} = 4.7 \times 10^{-4} \quad (16)$$

となり、非常に小さい数であることがわかる。そこで、今、半径、1 の球体を取り、この球体に外接する立方体

を考えると、その立方体の体積は、

$$2^n \quad (17)$$

で与えられるので、この立方体の中に占める球体の体積の割合は、

$$R_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^n \left(\frac{n}{2}\right)!} \quad (18)$$

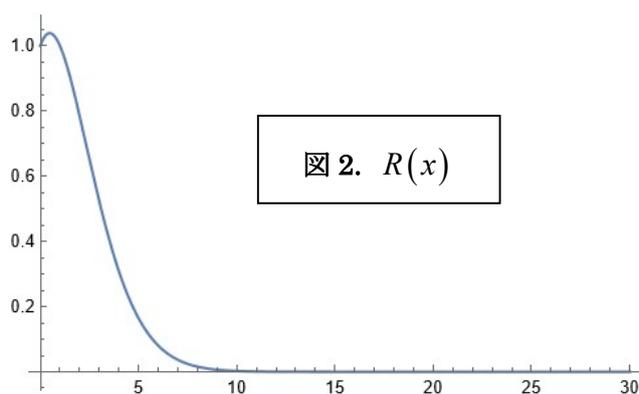
となることがわかる。次元（整数）を（仮想的に）実数まで広げて、式を書き直すと、

$$R(x) = \frac{\pi^{\frac{x}{2}}}{2^x \left(\frac{x}{2}\right)!} \quad \left(= \frac{\pi^{\frac{x}{2}}}{2^x \Gamma\left(\frac{x}{2} + 1\right)} \right) \quad (19)$$

となる。

これをグラフで表示すると、**図 2** のようになる。これからわかるように、次元数が 10 以上になると、

ほとんど球体の占める割合はゼロと見なせるほどに小さくなる。つまり、次元数が増えてくると、（体積的には）立方体に何個もの球を詰め込めることができるようになる。例えば、26 次元の場合、約 1,400 億個もの球体を詰め込むことができるのである。低次元しか実際に「感じる」ことができない我々にとって、これは大きな驚きであろう。一般の n 次元の半径 1 の球体に外接する立方体を考えると、立方体の対角線の長さ



の半分は、 \sqrt{n} である（一方、立方体の中心から、立方体の側面までの距離は明らかに 1 である。）つまり、当然のことではあるが、次元が増えると、立方体の対角線の長さは、球体の対角線の長さ（直径）は一定であるのもかわらず、どんどん長くなるのである。（誰も高次元に住んだことはないので、

わからないが・・・) 球体から見ると、立方体はますます尖ってくるように見える。一方、立方体から見ると、球体は対角線方向に縮んでいるように見えるかもしれない(紙風船の空気が抜けたような感じかもしれない。) なお、いくつもの球体を立体の中に納めるためには、そのままではだめで、詰め込む球体を変形させなければならない(26次元のように球体の体積がわずかに約 1.4×10^{11} 分の1程度であっても・・・)。それは、以下のような非常に初等的な考察からすぐにわかる。立方体は、球体に外接しているの、球体の中心が少しでもずれると、立方体からはみ出してしまうからである(詰め込む球体の中心は、当然、最初の球体及び立方体の中心からずれるので、そのずれがある方向で、 $\Delta x (> 0)$ であったすると、詰め込む球体の表面上の点は、その方向の最大値が、 $1 + \Delta x$ となるので、

立方体からはみ出してしまう。逆に、 $\Delta x (< 0)$ の時は、最低値、 $-1 + \Delta x$ を考えれば、やはりはみ出してしまうのである。) つまり、詰め込む球体をどのように配置しても、立方体から必ずはみ出すのである。このことは2次元や3次元の場合には直感的にあきらかなことであるが・・・。一方、立方体の対角線方向に着目すると、対角線の長さ、 \sqrt{n} が、球体の半径の3倍よりも大きければ、少なくとも1個の球体を並べることができる。つまり、次元が9より大きければ、一個以上の球体を対角線上に並べることができる。これは、2次元や3次元に慣れ親しんだ感覚からすると、違和感があるであろう。

さて、この2次元、3次元の場合の球体の占める割合は、2次元では $\pi/4 \approx 78.5\%$ であり、3次元では、 $\pi/6 \approx 52.4\%$ である。二次元の場合には、我々(多くの人)の感覚と大きな隔たりは感じないであろう。しかし、3次元の場合には、52%と約半分となり、多分、我々の感覚とはずれが生じているかも・・・(もしかしたら、我々は3次元を感覚的にきちんと把握できていないのかもしれない。)

今、次元数が非常に大きな空間に我々が住んでいる仮定してみよう。3次元空間では、体積(または物体の重さ)は、長さの3乗に比例する。我々は、時々、この3乗の「凄さ」に驚かされることがあるが、それでも比較的慣れ親しんでいると言ってもよいであろう。しかし、次元数が非常に大きくなる、長さがほんのわずかに増えただけで(またはほんのわずかに減っただけで)、体積(または重さ)が急激に増大(減少)することになる。つまり、もしn次元の体積とか重さが我々にとって意味をもつとし、かつある限られた数値の範囲内で生活が営まれるとすると、多分、我々は、広い空間を自由に行き来することが困難になるのではないかと想像される。つまり、実際の我々の生活は、空間の非常に限られた世界で営まれることになるのではないかと想像(妄想?)されるのである(人間は、低次元の世界に住んでいるので、幸せなのかもしれない?)

それでは、次にもっと低次元の方に行ってみよう。

図3に小さい次元数に対するグラフを示す。

さて、図2で、1以下の領域を見ると、わずかに占める割合、Rが1より大きくなっているのがわかる。

この部分を拡大すると、図4のようになる。

Rが最大になる次元を求めるために、式(19)を対数微分して、ゼロとおくと、

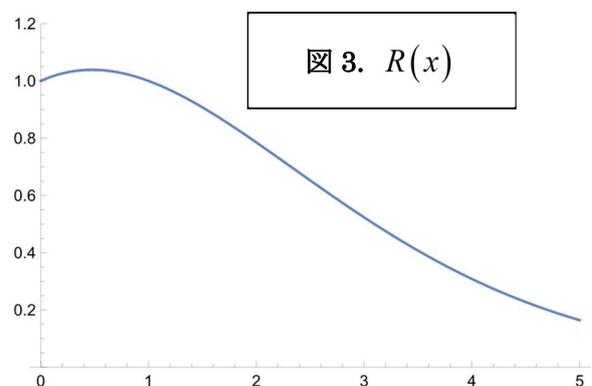


図3. $R(x)$

$$\log(\pi/4) - \psi(x/2+1) = 0 \tag{20}$$

となる。ここで、 ψ はガンマ関数の対数微分、プサイ関数（ディガンマ関数）で、 $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ である。これから、 R が最大になる次数、 d_{\max} とその最大値、 R_{\max} は、

$$d_{\max} = 0.4765825823, \quad R_{\max} = 1.03869 \tag{21}$$

となり、 R_{\max} は、わずかに1より大きな値をとる。

つまり、1より小さい小次元では、立体よりそれに内接する球体の方が、体積が大きくなるということになる。

しかしながら、以上は、単なる数遊びであって、整数でない実数次元が何を意味するか、少なくとも、 R が最大になる次元の意味も分からないのである（少なくとも私にとっては・・・）。

一方、実数値をとる次元として、ハウスドルフ次元（Hausdorff dimension、または fractal dimension）というものがある。例えば、カントール集合のハウスドルフ次元は、

$$\log 2 / \log 3 = 0.6309 \tag{22}$$

という小数次元をもっている。次の URL には、ハウスドルフ次元に関する多くの例が掲載されている。

https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_fractals_by_Hausdorff_dimension

Appendix B に、ハウスドルフ次元に関する初等的な説明及び上記の URL の例の中で次元が簡単に計算できるものを参考として挙げてある。なお、この URL にある例の多くは、そのハウスドルフ次元が、0.5~3 の間にあるものである（より高次の次元でおもしろい例もあるかもしれないが・・・）これらの例を眺めていると、ハウスドルフ次元の例としては、式(21)の値より小さいものはあまりないように見受けられる。ただし、「一般化されたカントール集合」では、ハウスドルフ次元が 0~1 の範囲をとることが上記の URL の表に挙げられている（Appendix B も参照のこと。）しかし、現実の世界または実用的な例では、0.5 より低次元のものはあまりないのかもしれない（？）

閑話休題！

子供の頃に、人間が優秀なのは、その脳にしわが多いせいであると教わったが、実は、しわの多さはカリフラワーの程度であるようだ・・・本当に人間は優秀なのだろうか？

※ 上記の URL によると、

- ・人間の脳の表面のハウスドルフ次元： ~ 2.8
- ・カリフラワーの表面のハウスドルフ次元： ~ 2.8

Appendix A： ベータ関数のいくつかの性質

ベータ関数（Beta function）の簡単で、かつ役に立つ性質を以下に挙げておこう。なお、本文で必要とするのは、(A-1)と(A-5)のみであり、その他は参考のために載せているだけである。

ベータ関数は、以下のように定義される。

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (\text{A-1})$$

ここで、うるさいことを言えば、 $\text{Re } x > 0, \text{Re } y > 0$ という条件が必要である。ただし、以下では、暗に、 x, y は実数であるとしよう。また、図 A.1 から明らかのように（または、変数変換、 $t \rightarrow 1-t$ により）、

$$B(x, y) = B(y, x) \quad (\text{A-2})$$

となり、ベータ関数は、その引数の入れ換えに対して対称であることがわかる。

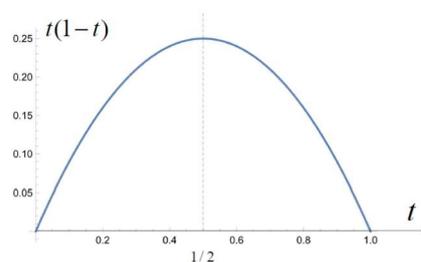


図 A.1

式(A-1)の積分変数に変換、 $t = \frac{s}{1+s}, 1-t = \frac{1}{1+s}, dt = \frac{1}{(1+s)^2} ds$ を施すと、直ちに、

$$B(x, y) = \int_0^\infty \frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}} ds \quad (\text{A-3})$$

と変形することができる。上記の式(A-1)及び(A-3)は、かなり広い範囲の種類積分を求めるのに役に立つものである。また、役に立つ別の表式は、(A-1)で $t = \sin^2 \theta$ とおくことで得られる。

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1} \theta \cos^{2y-1} \theta d\theta \quad (\text{A-4})$$

これも \sin, \cos の冪の積の積分を求めるのに便利である。

さらに、多くの場合、得られた結果の中にあるベータ関数を、次の関係式を使ってガンマ関数で表すと見やすくなる。

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (\text{A-5})$$

これは重要な関係で、記憶に値するものである。以下に、この導出を述べておこう（ただし、教科書等にある導出の方法とほとんど同じものであるが・・・）。

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-\xi} \xi^{x-1} d\xi = \int_0^\infty e^{-u^2} u^{2x-2} 2u du = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} u^{2x-1} du \quad (\text{A-6})$$

同様に、

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-\xi} \xi^{y-1} d\xi = 2 \int_0^\infty e^{-v^2} v^{2y-1} dv \quad (\text{A-7})$$

よって、

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)} u^{2x-1} v^{2y-1} dudv \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2x+2y-2} r dr \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1} \theta \sin^{2y-1} \theta d\theta \end{aligned} \quad (\text{A-8})$$

最初の積分は、

$$2 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2x+2y-2} r dr = \int_0^\infty e^{-t} t^{x+y-1} dt = \Gamma(x+y) \quad (\text{A-9})$$

後の積分は、式(A-4)そのものであるので、

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x+y)B(x,y) \quad (\text{A-10})$$

となり、式(A-5)が導かれる。なお、Laplace 変換を使うと、暗算でもこれを導くことができる。今、

$$\beta(t) = \int_0^t u^{x-1} (t-u)^{y-1} du = t^{x-1} * t^{y-1} \quad (\text{A-11})$$

とおくと、 $\beta(1) = B(x,y)$ である。ここで、*は合成積 (convolution) を表すものとする。よって、

(A-11)を Laplace 変換すると、

$$L[\beta(t)] = L[t^{x-1}] \cdot L[t^{y-1}] = \frac{\Gamma(x)}{s^x} \cdot \frac{\Gamma(y)}{s^y} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \cdot \frac{\Gamma(x+y)}{s^{x+y}} \quad (\text{A-12})$$

これを元に戻すと、

$$\beta(t) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \cdot t^{x+y-1} \quad (\text{A-13})$$

となり、これから、直ちに、

$$B(x,y) = \beta(1) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (\text{A-14})$$

を導くことができる。(注：ここで、合成積の Laplace 変換は、単なる積になること、及び

$L[t^\nu] = \Gamma(\nu+1)/s^{\nu+1}$ であることを使っている。この後者については、もし忘れたとしても、

$$L[t^\nu] = \int_0^\infty e^{-st} t^\nu dt = \int_0^\infty e^{-u} u^\nu du / s^{\nu+1} = \Gamma(\nu+1)/s^{\nu+1}$$

であることから、すぐに思い出すことができるであろう。)

以下で、2, 3のベータ関数の応用例を挙げておこう。

$$B(x,x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{\Gamma(2x)} \quad (\text{A-15})$$

であるので、左辺をガンマ関数で表すことができれば、ガンマ関数の倍数公式が導かれる。

$$B(x,x) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{x-1} dt = \int_0^1 (t-t^2)^{x-1} dt \quad (\text{A-16})$$

であり、 $t-t^2 = \frac{1}{4} - (t-1/2)^2$ であるので、 $t-1/2 = s/2$ とおくと、

$$\begin{aligned}
B(x, x) &= \int_0^1 (t-t^2)^{x-1} dt = \int_{-1}^1 \frac{(1-s^2)^{x-1}}{2^{2x-2}} \frac{ds}{2} = \frac{1}{2^{2x-2}} \int_0^1 (1-s^2)^{x-1} ds \\
&= \frac{1}{2^{2x-2}} \int_0^1 (1-u)^{x-1} \frac{1}{2\sqrt{u}} du = B(x, 1/2) / 2^{2x-1} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(1/2)}{\Gamma(x+1/2)2^{2x-1}}
\end{aligned}
\tag{A-17}$$

これを式(A-15)に代入すると、

$$\Gamma(1/2)\Gamma(2x) = 2^{2x-1}\Gamma(x+1/2)\Gamma(x) \tag{A-18}$$

または、

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}\Gamma(x+1/2)\Gamma(x)}{\sqrt{\pi}} \tag{A-19}$$

が得られる。なお、ここでもよく知られた、

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \tag{A-20}$$

を使っているが、これは、例えば、次の関係式で、 $x=1/2$ とおけば、直ちに得られる。

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \tag{A-21}$$

この関係式は、ガンマ関数における重要な関係式で、ガンマ関数の極と $\sin \pi x$ 関数のゼロ点（整数値とが一致していることを示している（ $\Gamma(x)$ はゼロ及び非負整数の極をもち、 $\Gamma(1-x)$ は正整数の極をもつ）。よく知られているように、この関係式は、ワイエルシュトラス（Weierstrass）の無限乗積の表式、

$$1/\Gamma(x) = e^{\gamma x} x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x/n} \tag{A-22}$$

と、 $\Gamma(1-x) = -x\Gamma(-x)$ 及び $\sin x$ の無限乗積、

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right) \tag{A-23}$$

を使って示すことができる。

また、これは、直接、ベータ関数の定義式(A-3)からも導くことができる。

$$I = B(x, 1-x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(1)} = \int_0^{\infty} \frac{s^{x-1}}{1+s} ds \tag{A-24}$$

ただし、 $x > 0$ $1-x > 0 \rightarrow 0 < x < 1$ とする。

この積分は、複素積分の代表的な演習問題の一つであるので、詳しくは書かないが、**図 A.2** のポンチ絵を眺めることにより、

$$(1 - e^{2\pi i(x-1)})I = 2\pi i(e^{\pi i})^{x-1} \quad (\text{A-25})$$

となり、これから、

$$I = \frac{-2\pi i e^{\pi i x}}{1 - e^{2\pi i x}} = \frac{-2i\pi}{e^{-\pi i x} - e^{\pi i x}} = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad (\text{A-26})$$

と求まる。ついでに、ベータ関数の定義式(A-3)を使った計算も示しておこう（これも複素積分の代表的な演習問題の一つと言ってもよいであろう）。

$$I = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{-x} du \quad (\text{A-27})$$

となるが、これを図 A.3 のような複素積分で考えることにする。図に積分路を示しているが、今の場合、図のような一重のループでも被積分関数の位相が元に戻るので、簡単になる。若干、面倒なのは、位相の変化に注意する必要があるということである。今、実数軸の下側では、被積分関数が実数になるようにすると（つまり積分が式(A-27)と同じになるようにすると）、 $1-u$ は u が1を回る時に、図 A.3 の対応する点で図 A.4 のようになることがわかる。 u が実軸上で1より大きい場合、 $1-u$ の位相は、 πi であることがわかる。これから、 u が大きい場合には、 $1-u \rightarrow e^{\pi i}u$ とすればよいことがわかる。つまり、被積分関数が、

$$u^{x-1}(1-u)^{-x} \rightarrow \frac{e^{-\pi i x}}{u} \quad (\text{A-28})$$

となることがわかる。後は、図 A.3 を眺めれば、

$$(1 - e^{-2\pi i x})I = 2\pi i e^{-\pi i x} \quad (\text{A-29})$$

となる（左辺は、図の C_1 上の積分、右辺は、 C_2 上の積分に対応）。

これから、直ちに、式(A-26)が得られることになる。

最後に、式(A-21)の応用例を一つ挙げて、この Appendix A を終わることにしよう。式(A-4)から、

$$B(x, 1-x) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1} \theta \cos^{1-2x} \theta d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \tan^{2x-1} \theta d\theta \quad (\text{A-30})$$

となるので、式(A-21)から、

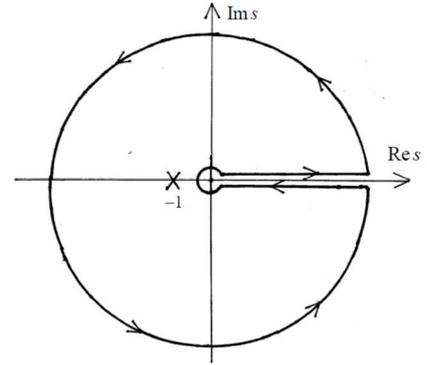


図 A.2

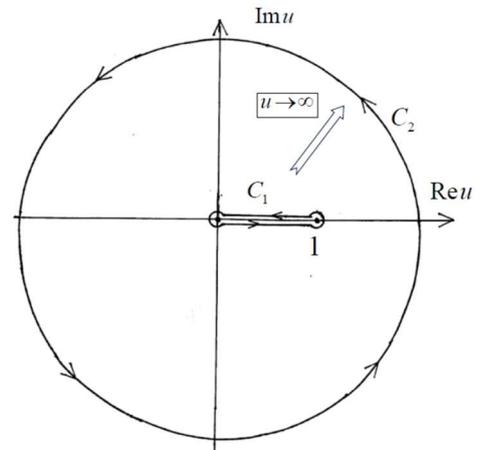


図 A.3

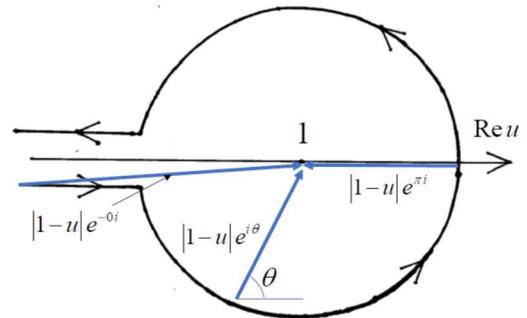


図 A.4

$$\int_0^{\pi/2} \tan^{2x-1} \theta d\theta = \frac{\pi}{2 \sin \pi x} \quad (\text{A-31})$$

となる。これに、 \sin の値がすぐにわかる x の値を入れると、

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} d\theta &= \frac{\pi}{2} \\ \int_0^{\pi/2} \tan^{1/3} \theta d\theta &= \int_0^{\pi/2} \cot^{1/3} \theta d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \\ \int_0^{\pi/2} \tan^{1/2} \theta d\theta &= \int_0^{\pi/2} \cot^{1/2} \theta d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \\ \int_0^{\pi/2} \tan^{2/3} \theta d\theta &= \int_0^{\pi/2} \cot^{2/3} \theta d\theta = \pi \end{aligned}$$

さらに、(同様に、簡単に求まるが・・・) 若干、マニアックな表を作成すると、下表のようになる。ここで、

$$\int_0^{\pi/2} \tan^a \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \tan^{-a} \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \cot^a \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \cot^{-a} \theta d\theta \quad (\text{A-32})$$

であることに注意。

x	$2x-1$	$\sin \pi x$	$\int_0^{\pi/2} \tan^{2x-1} \theta d\theta$
1/12 11/12	-5/6 5/6	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{3}-1}$
5/12 7/12	-1/6 1/6	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{3}+1}$
1/10 9/10	-4/5 4/5	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{2\pi}{\sqrt{5}-1}$
3/10 7/10	-2/5 2/5	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{2\pi}{\sqrt{5}+1}$
1/8 7/8	-3/4 3/4	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\pi}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$
3/8 5/8	-1/4 1/4	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\pi}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
1/5 4/5	-3/5 3/5	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}$
2/5 3/5	-1/5 1/5	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}$

ちなみに、最後の欄を Mathematica で求めると、 $\frac{1}{10}(-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\pi+2\sqrt{2(5+\sqrt{5})}\pi)$ となり、これ以上、簡単にしてくれないようである (少なくとも、私の Mathematica の「利用テクニック」では・・・)。勿論、手計算の変形で両者は一致するのであるが・・・。

なお、蛇足であるが、表の計算では、三角関数の半角の公式や $\pi/5$ に関する次の式などを使った。

$$\begin{aligned} \varphi = \pi/5 &\rightarrow 5\varphi = \pi \rightarrow 3\varphi = \pi - 2\varphi \rightarrow \sin 3\varphi = \sin 2\varphi \rightarrow 3\sin \varphi - 4\sin^3 \varphi = 2\sin \varphi \cos \varphi \\ &\rightarrow 3 - 4(1 - \cos^2 \varphi) = 2\cos \varphi \end{aligned}$$

Appendix B : ハウスドルフ (Hausdorff) 次元の初等的な説明

注) 専門的な説明は、私のキャパを越えるので、ここでの説明は初等的、イメージ的なものである。

今、**図 B.1** に示すような正方形 (簡単のために、その大きさを 1×1 とする) を考えることにしよう。これは明らかに 2 次元図形であり、その体積はゼロ、面積は 1 である。ではその長さは? (この質問は、普通はしないのが常識であるが・・・つまり、ナンセンスである)。さて、体積とは、通常は、基準となる立方体 (または直方体) を考えて、対象の図形がその何倍あるかで表される。勿論、対象の図形が小さい場合や複雑であった場合には、基準の立方体を細かくしたもので対象の図形を測るのである。面積も同様に基準となる正方形、または長方形の何倍に対象の図形になるかで面積を表すのである。以上に倣うと、図の正方形の長さは次のようになるであろう。例えば、横方向の辺に沿って長さ 1 の基準の線分をとり、これを縦方向に動かしながら、対象の正方形の中に何本の線分が入っているかを数えるのである。これは明らかに無限の本数が必要であることがわかる。実際には、可算無限ではなく連続無限であるが、いずれにしろ、無限大が必要。よって正方形の長さ (一次元の長さ) は無限であるということがわかる。以上を表にすると、**表 B-a** のようになる。これはあまりにもあきらかで初等的ではあるが、ハウスドルフ次元を考える上で重要であろう。

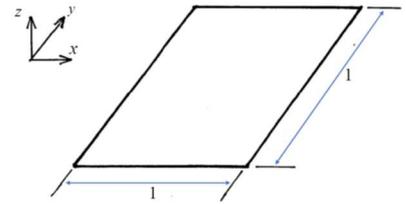


図 B.1

以上を表にすると、**表 B-a** のようになる。これはあまりにもあきらかで初等的ではあるが、ハウスドルフ次元を考える上で重要であろう。

表 B-a : 正方形の測度

測度の次元 (D)	0	1	2	3
測度 (measure)	∞	∞	1 (finite)	0

注) この表では体積、面積等の代わりに測度という言葉を使っている。

今の場合、測度の次元は、整数で discrete であるが、測度の次元 2 は、測度が 0 と ∞ になる次元、3 と 1 の間にあり、この次元 2 が正方形の次元を表しているように言うことができる。これから、もし次元 D が連続的な値を持つ仮定すると、測度が 0 と ∞ となる次元の領域が現れるが、その領域を分ける境界に対応する次元、D が対象の図形の次元を表すことができるであろうと予測されるが、この D がフラクタル次元、またはハウスドルフ次元と呼ばれるものである。

もう少し、きちんとやるには、**図 B.2** のように、正方形を一辺、 h ($=1/n$) の小さな立方体で覆って (cover して)、測度の近似値を求めてみることである。

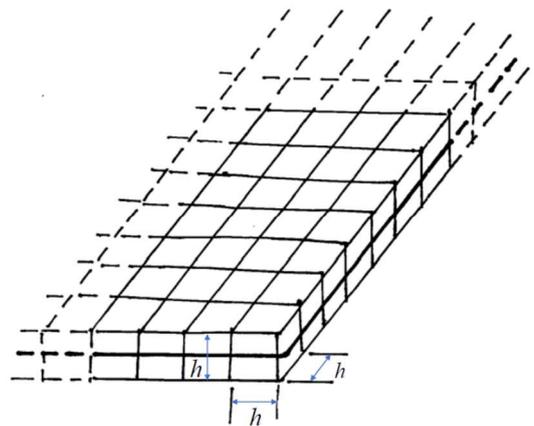


図 B.2

すると、測度の近似値は、

$$m(D) \approx \sum_n h^D = n^2 \left(\frac{1}{n} \right)^D = n^{2-D} \quad (\text{B-1})$$

となる。ここで、 $D=3$ の場合は、対象の正方形を3次元物体と見なしており、 $D=2$ の場合は、正方形を2次元物体と考えていることに相当する。今、 D が連続値をとるものとして、 $n \rightarrow \infty$ とすると、**図B.3**のようなになる。これは図示するまでもないことのように思われるが、この図は、ハウスドルフ次元を考える上での基本となる。そして、このハウスドルフ次元は、

$$D_H = \inf \{ D : m(D) = 0 \} \quad (\text{B-2})$$

と定義される。要するに、これは、測度が0と ∞ となる境界値であり、今の場合、 $D=2$ となる。ここで、また、非常に明らかなことであるが、次のことに注意する。対象の正方形を一辺の長さが1の大きな立方体で覆ったとすると、測度の近似値が、 $m(0) = m(1) = m(2) = m(3) = 1$ となる。一方、「正

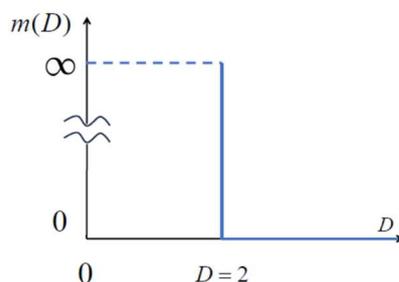


図 B.3

確な」測度は、 $m(0) = m(1) = \infty$ となり、大きな立方体で荒っぽく

覆った方が、低次元の場合、その測度（の近似値）が小さくなる。

より複雑な対象物、 A のハウスドルフ次元を求めようとする、ルベグ積分の測度、ルベグ外測度に倣ったものを使えばよいこと

になるが、上の注意を念頭におくと、一つの測度の候補として、 A を可算個の立方体、 B_i で覆って、

$$\mathbf{B}_\delta^D(A) = \inf \left\{ \sum_i h_i^D : A \subset \bigcup_i B_i, h_i < \delta \right\} \quad (\text{B-3})$$

とすればよいであろう。ここで、 h_i は立方体の辺の長さである。この表式の中の、 $h_i < \delta$ は先ほどの注意を取り入れたものになっているが、 δ が大きいくほど、 B_i の候補が増えるので、一般的には、

$\mathbf{B}_\delta^D(A)$ は小さくなる傾向になる。よって、 $\delta \rightarrow 0$ で $\mathbf{B}_\delta^D(A)$ は単調増加となるので、

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{B}_\delta^D(A) = \mathbf{B}^D(A) \quad (\text{B-4})$$

が求まることになる（極限值（ ∞ を含む）が存在する）。これから、式(B-2)と同様に、

$$D_B = \inf \{ D : \mathbf{B}^D(A) = 0 \} \quad (\text{B-5})$$

なるフラクタル次元が定義される。このようにして計算された次元を、ボックス次元 (box dimension または box-counting dimension) という。次に、立方体の代わりに、可算個の球で対象物を覆ったとすると、式(B-4)に相当する「測度」は、

$$\begin{aligned} H^D(A) &= \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_i v_D r_i^D : A \subset \bigcup_i S_i, r_i < \delta \right\} \\ &= \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_i R(D) d_i^D : A \subset \bigcup_i S_i, d_i < \delta \right\} \end{aligned} \quad (\text{B-6})$$

となる。ここで、 r_i 、 d_i は、球、 S_i の半径、直径である。また、 ν_D 、 $R(D)$ は、本文中の係数であるが、我々が関心のあるのは、測度が0か ∞ になるかであるので、この係数は省いて考えてよいことになる。さらに、この測度が0か ∞ ということのみに関心を向けると、対象物を覆うものは、立方体や球ではなくてもよくて、何が適当な集合でもよいであろうということになる（とは言え、可算個で対象物を覆えないといけなないので、例えば、ペッチャンコの立方体、つまり平板状のものでは、3次元物体を可算個で覆うことはできない）。こうすると、一般の適当な集合に対しても、「測度」は式(B-6)とほぼ同じ形の式になる。

$$H^D(A) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_i d_i^D : A \subset \bigcup_i S_i, d_i < \delta \right\} \quad (\text{B-7})$$

ただし、ここで、 d_i として、集合の S_i の「直径」(diameter)を採用するのである(勿論、半径でダメというわけではない)。一応、参考のために、この直径の定義を書いておくと、

$$d_i = \sup \{ d : d = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S_i \} \quad (\text{B-8})$$

である(要するに、集合、 S_i の直径とは、その集合の中の任意の2点間の距離で最大のもの(より厳密には上限値))。式(B-7)から、式(B-5)に従って、フラクタル次元、

$$D_H = \inf \{ D : H^D(A) = 0 \} \quad (\text{B-9})$$

が求まるが、これが通常、言われているハウスドルフ次元の定義である。上のように定義した「測度」及びフラクタル次元には、(ほとんど明らかかなことであるが)次のような性質がある。今、 $D_2 > D_1$ として、 $D_2 = D_1 + \Delta D$ ($\Delta D > 0$)とすると、式(B-7)で、

$$\sum_i d_i^{D_2} = \sum_i d_i^{D_1 + \Delta D} \leq \sum_i d_i^{D_1} \delta^{\Delta D} \quad (\text{B-10})$$

であることから、 H^{D_2} 、 H^{D_1} が有限(≥ 0)で確定値をとるとすると、

$$H^{D_2} \leq H^{D_1} \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{\Delta D} \quad (\text{B-11})$$

となる。よって、 $H^{D_2} = 0$ となる。同様の議論により、 $H^{D_2} > 0$ であるためには、少なくとも、 $H^{D_1} \rightarrow \infty$ でなければならないということがわかる。つまり、フラクタル次元と測度との関係は、図B.3のような感じになるのである。また、偶然、ある D について、 H^D が有限の正值($\neq 0$)を取ることがわかったとすると、この D がそのままフラクタル次元となるので、それ以上の詮索は不要となるのである。多分、これは実用的には重要な点であろう。例えば、最初に述べた正方形の場合、2次元であるとして面積を求めると、有限(実際、面積=1)であるので、正方形のフラクタル次元は2と求まるのである(もっともこの場合には、図形をフラクタル図形とは言わないであろうが・・・)

(次のことは明らかで、言うまでもないことであるが)もう一つ実用的に重要なことは、測度の求め方である。ご存じのように、自然が対象の場合、必要となる具体的な積分や測度の計算では、ルベーク測度、積分は(ほぼ)全く必要としないし、リーマン積分も多分、必要ではない。必要なのは、(高校レベル(?))の素朴な積分、測度計算であり、極論すれば、先に述べた、box-countingの方

法またはその改訂版による積分、測度計算である。これは数学的に言えば、「いい加減な」方法であるが、一方では、必ず計算できる、実用的にロバスト (robust) な方法であるので、現実世界の複雑怪奇な図形のフラクタル次元の計算では多用されているようである。なお、box-counting の box より、ハウスドルフの定義の S_i の方がより自由度が高いので、 $D_H \leq D_B$ となるであろうと予測される。例えば、低次元の物体が複雑に絡み合っていた場合、ハウスドルフの方がより低次元を識別できるので、次元が低くなるであろうと予想されるのである (数学的にもこの不等式がなりたつことが証明されている)。

以下では、比較的簡単に具体的なフラクタル次元が求まる例を挙げておこう。これは、

Ref-B-1 : https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_fractals_by_Hausdorff_dimension

から引用したものであり、自己相似性を有する図形に関するものである。つまりこれに挙げられているいくつかの例を演習問題と考えると、その次元を求めようとするものである。なお、以下の図で、B.6b、B.7b、B.8b、B.12b 以外の図は、Ref-B-1 の URL から転載している。

● **カントール集合 (Cantor set)** : ハウスドルフ次元 $D = \log 2 / \log 3 (= 0.630930)$

これは有名な集合なので、集合の説明は不要かもしれないが、長さ 1 の区間を 3 等分して、真ん中の部分を除き、さらに、残りの部分に同様の操作を (無限に) 繰り返すというものである。ただし、除く区間は両端の点がない开区間とする (例えば、最初に除く区間は、开区間 $(1/3, 2/3)$ である)。この操作は無限に繰り返されるので、残った点の集まり、つまりカントール集合は、バラバラの点からなっているので、その個数はせいぜい可算個程度であろうと推測するのは至極、もったもらしい。しかし、実際は、非可算である、つまり、初めの長さ 1 の区間と同じ、連続体の濃度 (cardinality)、 \mathfrak{c} (または別の表記では、 \aleph_1 や \aleph_2) をもつ (証明は多くの集合に関する教科書に載っている)。最初に除く区間の長さは、 $1/3$ であるので、残りは、 $2/3$ であるが、それ以降に除く区間は、バラバラの個々の区間の $1/3$ であるので、全体で見ると、残っていた区間の $1/3$ を除いたことになる。つまり、カントール集合の測度 (残った区間の長さの和) は、

$$(2/3)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \tag{B-12}$$

となることがわかる。一方、除かれた区間の和の測度は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2^2\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots &= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots\right) = \frac{1}{3} \frac{1}{1-2/3} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{B-13}$$

となる (なお、上式の第一式は、個々の区間で除かれる部分を数えているが、第二式では、全体で残っている区間から除かれる割合をかけて求めている式になっている)。これからも、その補集合であるカントール集合の測度は、ゼロとなることがわかる。大袈裟なことを言えば、ここではルベーグ測度の考え方が必要である (除かれた开区間はルベーグの意味で可測、开区間の和 (直和) も、可測で完全加法性をもつ。また可測集合の補集合も可測であり、その測度は有限区間の長さから和集合の測度を差し引けばよいことなど。)

次は、ハウスドルフ次元であるが、図 B-4 の上から二番目の段は、 $1/3$ の長さの物差しで測ると、それが 2 個ある。三番目の段は、 $(1/3)^2$ の長さの物差しで測



図 B.4

ると、 2^2 個あることがわかる。以下、同様にして、 $(1/3)^n$ の長さの物差しで測ると、 2^n 個あることがわかる。これから、もしハウスドルフ次元を求めるための次元を D とすると、その測度は (係数はさておき)、

$$H_D = 2^n \left(\frac{1}{3}\right)^{nD} = \exp[n \log 2 - nD \log 3] \quad (\text{B-14})$$

となる。これから、 $n \rightarrow \infty$ とすると、

$$D > \log 2 / \log 3 \text{ のとき、 } H_D \rightarrow 0$$

$$D < \log 2 / \log 3 \text{ のとき、 } H_D \rightarrow \infty$$

となることがわかる。よって、カントール集合のハウスドルフ次元は、 $\log 2 / \log 3$ であることがわかる。なお、もう一度、カントール集合の特徴をあげておくと、

- ・カントール集合は有限個の点のようにバラバラにも拘わらず (疎な集合であるにも拘わらず)、連続体濃度をもつ。
- ・連続体の濃度をもつにも拘わらず、測度はゼロある。

※ カントール集合は、その構成方法から、内点をもたないバラバラの集合であるが、一方では、(閉区間、 $[0,1]$ から開集合の和集合を除いたもので) 閉集合であるので、その閉包 (closure) に等しい。よって、この閉包は内点をもたないことから、カントール集合は、疎な (nowhere dense) 集合である。

● 一般化したカントール集合 (generalized symmetric Cantor set) :

$$\text{ハウスドルフ次元} \quad -\log 2 / \log \left(\frac{1-\gamma}{2}\right)$$

ただし、 $0 < \gamma < 1$ である。

これは、カントール集合で、除く区間の割合を $1/3$ ではなく、 γ にしようというものである (図 B.5 を参照)。後の議論はカントール集合とほとんど同じであるので、記述は簡略化する。カントール集合と全く同じように考えると、その測度は、

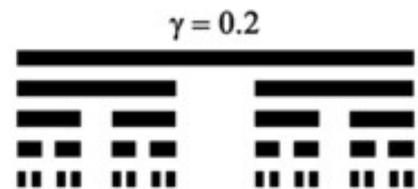


図 B.5

$$(1-\gamma)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{B-15})$$

となる。同様に、除く区間の測度は、

$$\begin{aligned} & \gamma + \gamma \cdot 2 \left(\frac{1-\gamma}{2} \right) + \gamma \cdot 2^2 \left(\frac{1-\gamma}{2} \right)^2 + \dots = \gamma + \gamma(1-\gamma) + \gamma(1-\gamma)^2 + \dots \\ & = \gamma \left(1 + (1-\gamma) + (1-\gamma)^2 + \dots \right) = 1 \end{aligned}$$

となる。また、

$$H_D = 2^n \left(\frac{1-\gamma}{2} \right)^{nD} = \exp \left[n \log 2 + nD \log \frac{1-\gamma}{2} \right] \quad (\text{B-16})$$

となるので、ハウスドルフ次元は、

$$D_H = -\log 2 / \log \left(\frac{1-\gamma}{2} \right) \quad (\text{B-17})$$

と与えられる。

● (1/4, 1/2) 非対称カントール集合 (asymmetric Cantor set) :

ハウスドルフ次元 $\log \varphi / \log 2$ (0.694242), $\varphi: \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$, golden ratio

この場合も (通常) カントール集合と同じように、残った個々の区間の 1/4 を除いていくことを繰り返すので、その測度は、

$$\left(\frac{3}{4} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{B-18})$$

となる。同様に、除く区間の測度は、

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4} \right)^2 + \dots = \frac{1}{4} \frac{1}{1-3/4} = 1 \quad (\text{B-19})$$

となり、その補集合の測度がゼロになることが確認できる。さて、次は、ハウスドルフ次元を求めることであるが、例えば、**図 B.6a** の上から 3 列目を見るとわかるように、このままでは、長さを測るための物差しが不揃いになりそうである。そこで、区間を除くステップを**図 B.6b** のようにしてみよう。すると、物差しの長さは、ステップごとに、1/2 ずつ縮小される。一方、個数 (物差しで測った時の長さ) は、図からわかるように、

$$\begin{aligned} 1 & \rightarrow 2 \rightarrow 1, 2 = 1+2 \\ 2 & \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 1, 2 = 2+1+2 \end{aligned}$$



図 B.6a

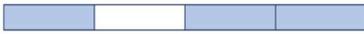
となる（分離してない長さ2のものを2
としている。）すると、どの段階でも、
長さは1と2のみからできているおり、
ステップが進むごとに、**図 B.6b** の赤枠
のようになることから、 n ステップの
個数を F_n とすると、

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (\text{B-20})$$

となることがわかる。つまり、フィ
ボナッチ (Fibonacci) 型の数列にな
ることがわかる。よって、

$$F_n = A\varphi^n + B(-1/\varphi)^n \quad (\text{B-21})$$

となる。よく知られているように、 φ
は差分方程式の特性根の一つ
($\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ の根) で、黄金比
(golden ratio)、

	物差し	個数
1/4		$1+2=3=F_3$
1/8		$2+(1+2)=5=F_4$
1/16		$(1+2)+2+(1+2)=8=F_5$

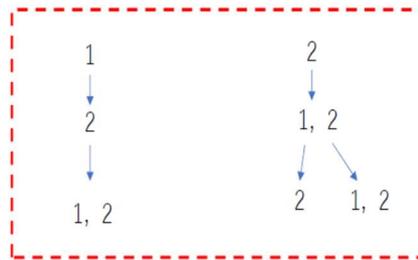


図 B.6b

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (\text{B-22})$$

である。ハウスドルフ次元を求める際の測度で必要なのは、 n が非常に大きくなる時の振る舞いであるので、式(B-21)の係数を具体的に求める必要はないし、物差しについても同様である。また、 n が大きい時は、式(B-21)の第一項が支配的であることから、ハウスドルフの測度、 H_D は、

$$H_D \propto \varphi^n \left(\frac{1}{2}\right)^{nD} \quad (\text{B-23})$$

となる。よって、ハウスドルフ次元は、

$$D_H = \frac{\log \varphi}{\log 2} \quad (\text{B-24})$$

となる。

さて、これまでの集合は、その長さ（一次元の測度）がゼロであったので、先の注（式(B-11)の後のコメント）から、具体的な数値はさておき、そのハウスドルフ次元は、1 以下であることがわかるが、確かにそうなのである。

● **SVC 集合 (Smith–Volterra–Cantor set)** ハウスドルフ次元 1

これは、(区間を除いていく) 各ステップで、個々の区間の長さに関係なく、 $1/4^n$ （ここで n はステップ数）の長さを個々の区間から除くというものである。

これから、除く区間の長さの和は、

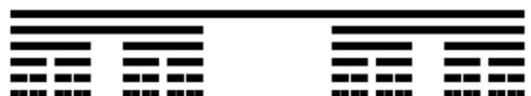


図 B.7a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4^3} + \dots \\ & = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right) = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{B-25}$$

となる。これから、その補集合である SVC 集合の測度は、1/2 (nozero の有限値) となる。よって、先の注により、SVC 集合のハウスドルフ次元は、1 であることが結論される。

つまり、これ以上の議論は不要であるとして切り上げてよいが、確認の意味も含めて、もう少し議論することにしよう。

図 B.7b に示すように、ステップ数 $n = 0 \sim 3$ における一つの区間の長さから、一般の n については、

$$h_n = \frac{2^n + 1}{2^{2n+1}} \tag{B-26}$$

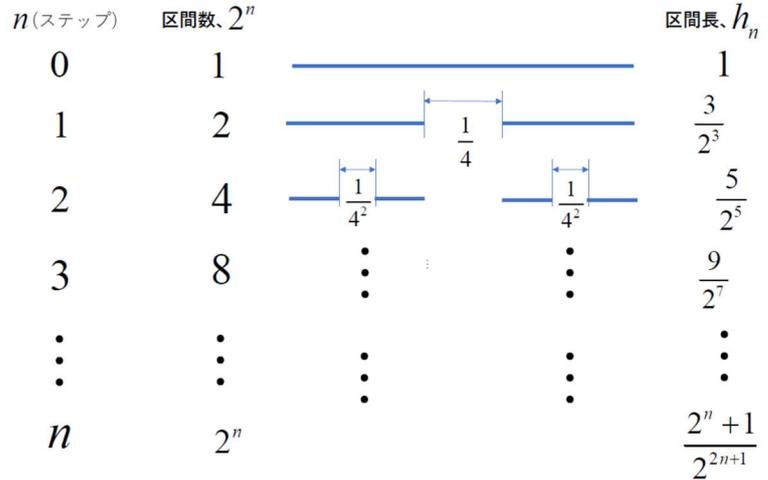


図 B.7b

になると推測される。そこで、これを仮定すると、 h_{n+1} は、

$$h_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{2^n + 1}{2^{2n+1}} - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right) = \frac{2^n + 1}{2^{2n+2}} - \frac{1}{2^{2n+3}} = \frac{2^{n+1} + 1}{2^{2n+3}} \tag{B-27}$$

となる。よって、帰納法により式(B-26)の推測は正しいことがわかる。以上から、 n ステップ後に残った区間の長さの和は、

$$2^n h_n = 2^n \left(\frac{2^n + 1}{2^{2n+1}} \right) = \frac{2^{2n}(1 + 2^{-n})}{2^{2n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \tag{B-28}$$

となり、上の結果と一致することがわかる。また、ハウスドルフ次元は、

$$2^n (h_n)^D = 2^n \left(\frac{2^n + 1}{2^{2n+1}} \right)^D \xrightarrow{n \rightarrow \text{large}} 2^n / 2^{(n+1)D} = 2^{n(1-D)-D} \tag{B-29}$$

から、 $D_H = 1$ となることがわかる。以上からもわかるように、この SVC 集合は、カントール集合と同様に疎な集合 (nowhere dense set) であるが、測度が正の値をもつという特徴がある。

- コッホ曲線 (Koch curve) ハウスドルフ次元 $\log 4 / \log 3 (=1.26186)$

このよく知られた曲線は、図 B.8a に示すようなものであるが、それを構成する方法については、図 B.8b がわかりやすいであろう。一本の線を三等分して、真ん中の部分を、図のように正三角形の形に変更しようというものである（図の点線分、三角形の底辺の部分は、除くものとする）。後は、各線分について、同じ操作を繰り返すのである。つまり、線分を3分の1にして、3分の1線分を4つにするということになるので、ハウスドルフ次元に関する今までの議論から、ハウスドルフの測度は、

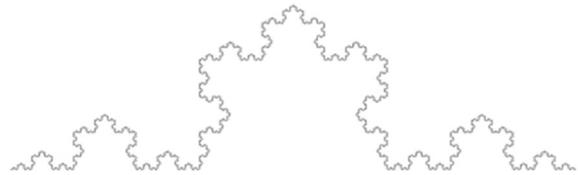


図 B.8a

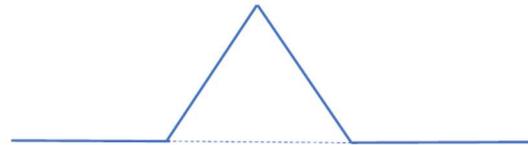


図 B.8b

$H_D^n \propto 4^n \left(\frac{1}{3}\right)^{nD}$ の形になることがわかる。よって、

ただちに、ハウスドルフ次元が、 $D_H = \log 4 / \log 3$ と求まる。なお、線分の長さは、 n とともに、 $(4/3)^n$ とスケールされるので、無限大になる。よって、 D_H は1より大きいことになるが、確かにそうになっているのである。

● 2次元カントール集合 (2-dimensional Cantor dust)

ハウスドルフ次元 $\log 4 / \log 3 (=1.26186)$

これは、二つのカントール集合の直積である。普通の図形の直積であれば、次元は、図形の次元の和になるので、この場合でも、 $\log 2 / \log 3 + \log 2 / \log 3 = \log 4 / \log 3$ となることが期待される。

さて、この集合の構成方法は、ある正方形の一边を3分割すると、9個の部分に分かれるが、このうち4個を残すというのを繰り返すというものである。

よって、コッホ曲線の場合と同様に考えると、ハウスドルフ次元が、 $D_H = \log 4 / \log 3$ と求まることになる。

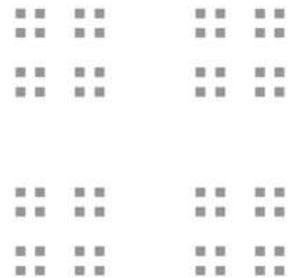


図 B.9

● ヴィセク・フラクタル (Vicsek fractal)

ハウスドルフ次元 $\log 5 / \log 3 (=1.46497)$

これは、一見すると、枝別れの方に目がいって、複雑に見えるかもしれないが、除く区域（除く四角形）に着目すると、わかりやすくなる。これも一边を3等分して、5つの区域を残すということを繰り返して作られたものである。よって、ハウスドルフ次元は、 $D_H = \log 5 / \log 3$ となる。

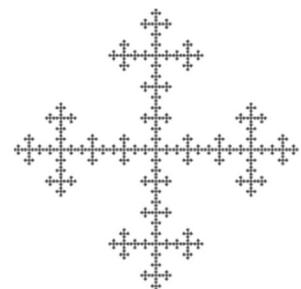


図 B.10

- シェルピンスキー・ガasket (Sierpinski gasket)

ハウスドルフ次元 $\log 3 / \log 2 (=1.58496)$

ハウスドルフの測度の式(B-7)等や集合の直径の定義からわかるように、式の係数や直径の取り方は整合性が取れてさえいれば、どのように選んでもよい。このことに注意すると、図 B.11 の図形は、辺を二等分してできた区域を3つ選ぶという操作を繰り返したものであることから、そのハウスドルフ次元は、直ちに、 $D_H = \log 3 / \log 2$ であることがわかる。

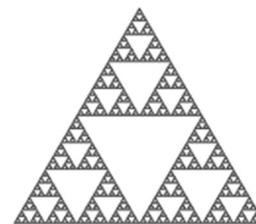


図 B.11

- シェルピンスキー六角形 (Sierpinski hexagon)

ハウスドルフ次元 $\log 6 / \log 3 (=1.63093)$

これも六角形にこだわっていると、見えにくいですが、図 B.12b のように、青線の三角形の辺を三等分して、中心の領域の中のオレンジの区域を外に折り返し、白の領域を除くという操作を繰り返すと、図 B.12a のような図形が得られる。よって、3等分して残す区域は6つであるので、ハウスドル次元は、 $D_H = \log 6 / \log 3$ となる。

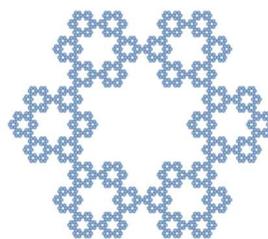


図 B.12a

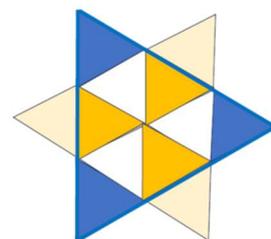


図 B.12b

- ヘキサ・フレイク(hexaflake)

ハウスドルフ次元 $\log 7 / \log 3 (=1.77124)$

この場合も、一見、わかりにくいですが、シェルピンスキー六角形の場合に除く三つの白の区域の一つを残して(除かないで)、中央に揃えたものが、このヘキサ・フレイクとなるのである。よって、ハウスドル次元は、 $D_H = \log 7 / \log 3$ となることがわかる。

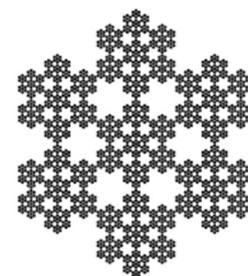


図 B.13

- リベラのフラクタル H-I (Fractal H-I de Rivera)

ハウスドルフ次元 $\log 7 / \log 3 (=1.77124)$

この場合も、まったく同じで、残る区域は7つであるので、ハウスドル次元は、 $D_H = \log 7 / \log 3$ となることがわかる。

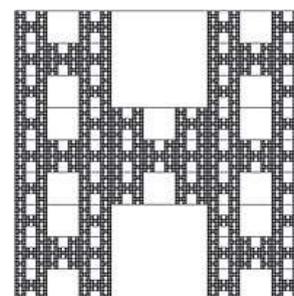


図 B.14

- シェルピンスキー・カーペット (Sierpinski carpet)

ハウスドルフ次元 $\log 8 / \log 3 (=1.89279)$

今度は、残す区域 8 つであるので、ハウスドル次元は、 $D_H = \log 8 / \log 3$ となることがわかる。

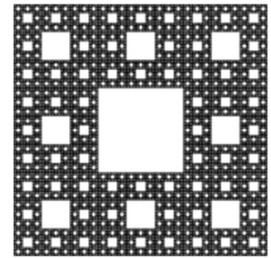


図 B.15

- 3次元カントール集合 (3-dimensional Cantor dust)

ハウスドルフ次元 $\log 8 / \log 3 (=1.89279)$

これも同様に、ハウスドル次元は、 $D_H = \log 8 / \log 3 = 3 \log 2 / \log 3$ となり、一次元のカントール集合の次元の 3 倍となる。

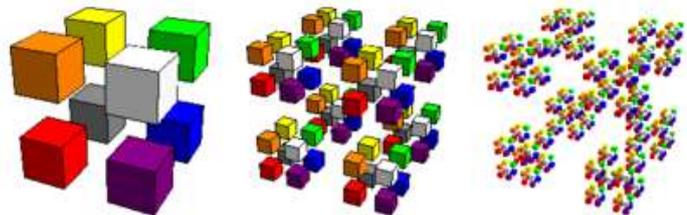


図 B.16

- ペアノ (Peano) の曲線等

ペアノの曲線は、一辺の長さ 1 の正方形を完全に覆うので、その面積 (ハウスドルフの測度) は 1 となる。よって、2 次元の測度が有限 (> 0) であるので、ハウスドル次元は、2 であると結論される。ペアノの曲線と同じように、平面のある領域を完全に覆うような曲線も、そのハウスドルフ次元は、2 となる。