

## 積分量の時間変化の応用例 (講義録で書き漏らしたこと)

講義録では体積分の時間変化の式については、例として Liouville の定理を挙げたが、面積分や線積分の時間変化に関する応用例を書くことを忘れていたので、ここにそれらを取り上げることにしよう。

一応、積分量の時間変化の式を次のようにまとめて再掲しておく（これらの導出は講義録を参照のこと）。きちんと導出するのは、外微分形式がよいと思われるが、素早く直感的に求めるのは、講義録にあるようなポンチ絵を思い浮かべるのがよいであろう。

### [体積分の時間変化]

$$\frac{d}{dt} \int f dV = \int \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \mathbf{v}) \right] dV \quad (1)$$

### [面積分の時間変化]

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\operatorname{div} \mathbf{A}) \mathbf{v} + \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{v}) \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\operatorname{div} \mathbf{A}) \mathbf{v} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

### [線積分の時間変化]

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{v} \right) \cdot d\mathbf{r} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v})_2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v})_1 \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \oint \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{v} \right) \cdot d\mathbf{r}$$

以下では、主として面積分の時間変化の式の応用として、(1) ファラデーの電磁誘導の法則 (Faraday's law of induction)、(2) ケルビンの渦定理 (Kelvin's circulation theorem)、(3) アルヴェーンの磁場凍結の定理 (Alfven's theorem) について述べる。

### (1) Faraday's law of induction

よく知られているように、ファラデーの電磁誘導の法則は、図 1 の抵抗の両端にかかる誘導電圧、 $V$  が、

$$V = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (4)$$

と磁束、 $\Phi$  の時間変化で与えられるというものである。

ちなみに、 $\Phi$  の単位は、

$$[\Phi] = \text{Weber} = \text{Tesla} \cdot \text{m}^2 = \text{Volt} \cdot \text{sec}$$

である（多分、これらの単位は記憶に値する。）また、磁束は、

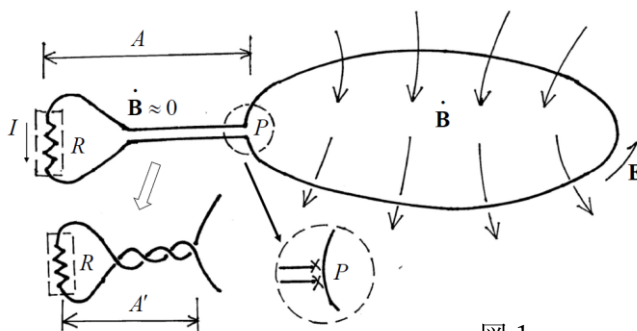


図 1

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (5)$$

であり、導線を境界とするような面上の磁場の積分である。

なお、抵抗の付近、図1のA部の積分は小さいものとして、無視してもよいであろう。つまり、A部はないものとして、図1のP部のように、導線を閉じて考えてもよいであろう。それは、A部の面積が小さいこと、抵抗付近では磁場（の時変化）がゼロになっていることからである。さらに、図1のA'のように線

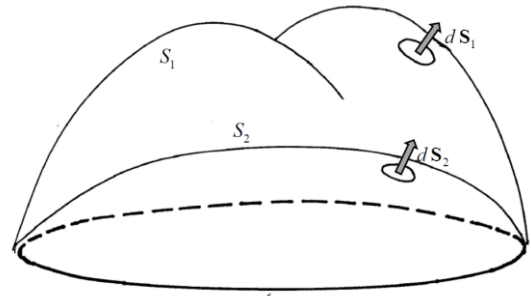


図2

がねじってある場合には、磁場の向きに対して面積ベクトルの方向が交互に反転するので、磁場の面積分はほぼゼロとして全く問題はないであろう（とにかく、こうすればポンチ絵を描くのもたいへん楽になるのである）。

さて、ファラデーの法則は、この導線を境界とする面の形状はどのようなものであっても求める電圧は同じであるということを行っている。つまり式(5)の磁束は面上の積分なのに形状はどうでもよいと言っているわけで、一見、とんでもない法則のように思える。しかし、これは、マクスウェル方程式の一つである、

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (6)$$

を使えば、形状がどうでもよいことがわかる。それは、図2を参照すると、

$$\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} - \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{S_1-S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int \text{div } \mathbf{B} dV = 0 \quad (7)$$

となるからである。次に、式(2)を使って、磁束、 $\Phi$ の時間変化を具体的に書くと、

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\text{div } \mathbf{B}) \mathbf{v} + \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (8)$$

となる。ここで、右辺の被積分の第二項は式(6)によってゼロとなり、また第三項は線積分で表すと、

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} - \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} \quad (9)$$

となる。ここで、 $\mathbf{v}$ は、境界、つまり導体が動く速度である。この $\mathbf{v}$ がゼロの場合は、

$$V = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (10)$$

であり、これはよく出てくる、磁場（のみ）が変化する場合の誘導電圧を与える式である。

次に、マクスウェル方程式の一つの式、

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (11)$$

を式(9)の第一項に適用して、これを線積分で表すと、

$$V = - \frac{d\Phi}{dt} = \oint (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} = \oint \mathbf{E}_L \cdot d\mathbf{r} \quad (12)$$

ときれいな形にまとまる。ここで、 $\mathbf{E}_L$ は、「Lorentz 電場」と言ってもよいもので、

$$\mathbf{E}_L = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (13)$$

である。以上から、ファラデーの電磁誘導で発生する電圧は、磁場変動や動く導体中に生じる Lorentz 力で電荷を押そうとする「圧力」のようなものであることがわかる（電場の線積分であるので、単位電荷に与えるエネルギー、「電圧」といってもよいであろう。ただし、通常の電圧は電場の線積分にマイナスの符号がつくが・・・）。なお、式(12)の導出には、いわゆる電磁誘導の式(11)だけでなく、 $\text{div} \mathbf{B}$  と Lorentz 力（Lorentz 電場）も合わせた、三つのことが関与しているのである。

しかしながら、ファラデーの法則の説明は、これで「めでたし、めでたし」とはならないのである。なぜなら、以上の議論は、「物理的」には、全く間違いであると言ってよさそうだからである（ただし、数学的には導出は正しく、実際の誘導電圧（実験値）も（ほぼ）合っているはずである。）なぜなら、そもそも、上述の最後の議論は何となく怪しげで、今一信用がおけないように思えるからである。さらに、全く間違いであろうということは、図1で抵抗の場所以外の導体内の抵抗がゼロである（またはゼロに近い）とすると、導体内の電場はゼロ（またはほぼゼロ）となるからである。よって式(12)からは、電圧はまったく誘起されないことになってしまうのである。この「矛盾の解消」については、ベクトル解析という本題からは外れると思われるので、別稿（多分、次稿として予定している「回路に関するコメント等～外野の視点から～（仮題）」）できちんと議論するつもりであるが、ここでも一応の説明はしておくことにしよう（これでも怪しいと感じられるかもしれないが、間違っていないであろう）。

導体内で電場がゼロになるためには、導体内に、Lorentz 電場と逆符号の電場が発生しているということになる。そして、この逆符号の電場を線積分したものが誘導電圧となるのである。

- ・まず、イメージ的には（導体は固定していると仮定して）、

$$\mathbf{E} = 0 = -\text{grad} \phi - \partial \mathbf{A} / \partial t$$

とした場合、第二項は、電磁誘導による電場で、第一項がそれをキャンセルするスカラー・ポテンシャル（電圧）による電場になるであろうということである。これを心の中にバックグラウンドとして留めておくのがよいかもしれない。

注）この項はこの意味だと必ずしも決めつけるわけにはいかない（ゲージ変換による任意性あり）が、以下では、これをはっきりさせることは必要としない。

- ・次に、抵抗に何がしかの電流が流れているとすると、その両端には電圧がかかるはずで、その電圧は、積分路にはよらないことから、導体にも同じ電圧がかかることになる。すると、この電圧によって（ローレンツ電場に対して）逆符号の電場が発生する（ここで、電流は、ローレンツ電場の方向に流れているとし、また、導体の抵抗はゼロであると仮定）。
- ・この逆電場がちょうどローレンツ電場とキャンセルして、導体内の電場がゼロになるものとする、式(12)の積分が電圧の値となるはずである（符号も合っている）。よって、これから、ファラデーの法則が導かれるのである（当然、電流値は、「何がしか」の値ではなく、きちんと  $I = V/R$  と決まる）。
- ・以上は、導体の抵抗がゼロで、その中の電場もゼロとしているのであるが、より一般的には、図1の導体のもつ抵抗  $R_0$  も含めた全抵抗値、 $R_T = R + R_0$  と、流れる電流、 $I$  を使って、

$$R_T I = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (14)$$

と与えられる（つまり、式(14)の右辺の「電圧」がそのまま抵抗にかかるわけではない。これは、簡単な議論で導くことができるが、別稿を参考のこと）。

さて、上述のことを、逆に言えば、導体がないければ、誘導電圧はゼロとなる、つまり、架空の線路では、誘導電場は発生しても、電圧は発生しないのである。例えば、ベータトロン方式の加速器の場合、その加速に誘導電場を直接、利用しているが、加速のための電圧を発生させる導体はないのである。一方、導体であるコイル（インダクタ）の場合には、通常、その両端で誘導電場を打ち消すように発生した電圧を利用しているのである。つまり、標語的に言えば、ファラデーの法則が成り立つためには、二つのマクスウェル方程式（直接、物質に関係しない「純」理論的な式）と Lorentz 電場に加えて、導体の存在が必要であるということである。

なお、通常、物理学では、ファラデーの法則は、電磁気学の基礎方程式であるマクスウェルの方程式を学ぶための「通過点」に過ぎないので、あまり「うるさい」議論はしていないように思われる。一方、エンジニアリングの分野では、現代の「電気文明」の根幹をなす、エネルギーの発生（発電機）、エネルギーの利用（動力モータ）、電圧・電流変換やエネルギーの配送（トランス）などにおけるファラデーの法則の役割はたいへん大きなものがあると思われる。門外漢でもそう思うのであるから、実際には計り知れないほどの役割を果たしているであろう。電波、光の分野では、マクスウェル方程式が、まさに縦横無尽に活躍しているのであるが、この「電気文明」の根幹部では、主に活躍するのはファラデーの法則（+他の知識、技術）であって、マクスウェル方程式が登場する場面はほとんどない、よってこれを知らなくてもよいと言っても過言ではないかもしれない。

注）しかしながら、磁場の変化が急峻な場合（または、周波数が高い場合）には Faraday の法則は成り立たなくなるであろう。抵抗がゼロ、またはゼロに近い場合も同様であろう。今であれば、このような場合にどうなるか、マクスウェル方程式による計算機シミュレーションで容易に解が得られるであろう・・・しかし、これについては、残念ながら、高齢かつ寡聞のため、私は知らない。

## (2) Kelvin's circulation theorem

（ほぼ）すべての流体は、多かれ、少なかれ粘性を持っており、この粘性のために、流体は多様で複雑な様相を呈すると言われている。よって粘性のない（仮想的な）流体を解析することにはある意味、非現実的で無用であるとも言えるが、粘性の効果が小さい（レイノルズ数が大きい）、速度の空間変化が小さいなどの領域を取り扱う場合には、流体を粘性がないとして取り扱ってもよいとされている。また、この非粘性流体は、流体に特徴的な多くの性質を把握するのに非常に役に立つのである。しかも美しい結果が得られている。その一つがここで取り上げるケルビンの渦定理である。

流体粒子という描像が成り立つとすると、粒子の運動は、ニュートンの運動方程式に従って、

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f} \quad (15)$$

と与えられる（ $m$  と  $\mathbf{f}$  は通常の意味である）。ここで、単位体積あたりの式にするために、

$$m = \rho \Delta V, \quad \mathbf{f} = \mathbf{F} \Delta V$$

とすると（ここで  $\mathbf{F}$  は単位体積あたりの力である）、（単位体積あたりの）粘性のない（inviscid）流体の運動方程式は（さらに、（単質量あたりの）外力がポテンシャル、 $U$  によると仮定すると）、

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{F} \quad (16)$$

$$\mathbf{F} = -\text{grad } p - \rho \text{grad } U$$

と与えられる。ここで、粒子に関する時間微分を流体の場に関するラグランジェ微分で置き換えている。

$$\frac{d}{dt} = \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \quad (17)$$

### [余分な話]

運動方程式の導出からわかることは、流体の運動には、圧力の一階の空間微分のみが関係するという当たり前かもしれないが、著しい特徴がある。つまり、圧力そのもの（0階微分）や高階の微分は（絶対に）入ってこないのである。これは、粘性などの流体粒子の表面に働く一般的なテンソル力の場合も同様に一階の空間微分のみが関係するのである。よって、運動という観点からすると、深海艇も深海生物も圧力、ストレスの一階の空間微分（または圧力差）のみが関係することになる。しかし、現実の深海艇の最大の課題は、耐圧（圧力そのもの）である。一方、深海生物の場合は、流体粒子と同様に自身の圧力は周囲とほぼ同じであるので、基本的には全く問題にならないのである（耐圧シェルのようなものは不要で、むしろ耐圧がない柔構造の方がよいかもしれない）。しかしながら、実際には圧力そのものが生体の物性に大きな影響を与えるであろうことから、全く問題にならないというのは若干、言い過ぎであろう（もし問題がないとすると、人間が素潜りで深海まで到達できるはず・・・）

さらに、流体は、バロトロピック（barotropic）とすると、流体の運動方程式(16)は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\text{grad}(P + U) \\ P &= \int \frac{dp}{\rho(p)} \end{aligned} \quad (18)$$

と書ける（barotropic：圧力が密度のみの変数として表される場合をいう。例えば、等温や断熱を仮定した場合などである）。

ここで、ベクトル解析の公式、

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (19)$$

を思い出そう（できれば憶えておくと便利）。もし忘れた場合には、

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) &= \mathbf{A} \times (\nabla_{\mathbf{B}} \times \mathbf{B}) = \nabla_{\mathbf{B}} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla_{\mathbf{B}}) \mathbf{B} \\ (\mathbf{A} \cdot \nabla_{\mathbf{B}}) \mathbf{B} + \mathbf{A} \times (\nabla_{\mathbf{B}} \times \mathbf{B}) &= \nabla_{\mathbf{B}} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \end{aligned}$$

であることを使えば、すぐに「思い出す」ことができる。これから、

$$\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = 2(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (20)$$

となるので、運動方程式(18)は、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = -\text{grad} \left( \frac{\mathbf{u}^2}{2} + P + U \right) \quad (21)$$

と書ける。ここで、渦度 (vorticity)、 $\boldsymbol{\omega}$  を、

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \quad (22)$$

とおくと、式(21)は、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = -\text{grad} \left( \frac{\mathbf{u}^2}{2} + P + U \right) \quad (23)$$

とも書ける。よって、両辺の curl (rot) をとると、

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = 0 \quad (24)$$

という渦度の運動方程式は得られる。明らかに(22)から、

$$\text{div} \boldsymbol{\omega} = 0 \quad (\because \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0) \quad (25)$$

である。よって、式(2)から、

$$\frac{d}{dt} \int \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} = \int \left( \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\text{div} \boldsymbol{\omega}) \mathbf{u} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (26)$$

であるが、式(24)、(25)を使うと、

$$\frac{d}{dt} \int \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (27)$$

となる。

つまり、流体内に任意にとった (流体とともに動く) 二次元表面上の渦度の積分 (より正確には表面に垂直な成分の積分) は、流体が運動しても変化しないということである。

これを、ラグランジェ (Lagrange) (またはヘルムホルツ (Helmholtz)) の「渦の不生不滅の定理」ともいう。つまり、粘性がないバロトロピック流体の場合には、渦は決して消えることはないということである (また新たに発生することもない)。さて、

$$\int \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} = \int (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \Gamma \quad (28)$$

であるので、流れの循環、 $\Gamma$  が不変であることを言っている (ケルビン (Kelvin) の定理)

次に、二次元表面がある領域 (3次元領域) を包んでいる場合には、式(2)の二番目の式が適用できることになるが、一見では、値がゼロにはならないようにも見える。しかし、この場合には、積分の値自体がそもそもゼロであることが次のようにわかる。

$$\int \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} = \int (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{S} = \int \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) dV = 0 \quad (29)$$

(ほとんど繰り返しであるが) 同様のことをすると、式(2)二番目の式は、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \oint \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} &= \oint \left( \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\text{div} \boldsymbol{\omega}) \mathbf{v} \right) \cdot d\mathbf{S} = \oint \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \oint \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \oint \left( \nabla \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = \int \nabla \cdot \left( \nabla \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) dV = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

となることがわかる。

ここで、ある時点での  $\boldsymbol{\omega}$  方向に沿った「渦線」を考え、さらにこの渦線を束ねた「渦管」を考えること

にしよう (図3を参照)。すると、次のようなことが言える。

(1) 渦管の側面では、当然、 $\int \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} = 0$ であるが、これは時間的に不変であるので、渦管の側面は、側面のままである。このことと式(29)から、

(2) 渦管の上面と下面での  $\int \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S}$  の積分は等しい (ただし、下面の垂直方向は、渦管の内側とする)。また、値も時間的に不変である。なお、上面と下面の渦管での位置は任意であるので、この積分値は渦管の任意の断面で同じ値をとる。

以上のことから、渦管は、流体内である種の物体のように振舞うことがわかる。さて、この面積積分の領域の大きさは任意であるので、ここで、面積の大きさが微小 (面積:  $\sigma$ ) であり、断面が渦度と垂直に交わるとすると、この積分は、

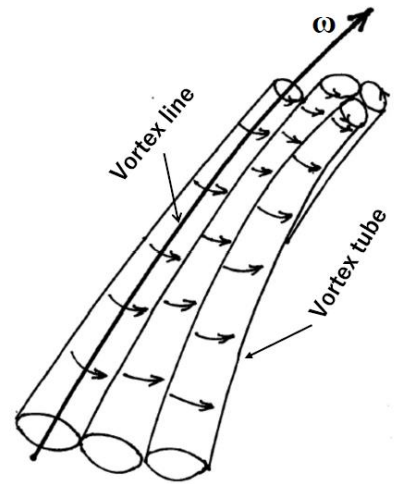


図3

$$\int \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} = \omega \sigma = \int \boldsymbol{\omega}_0 \cdot d\mathbf{S}_0 = \omega_0 \sigma_0 = \text{const.} \quad (31)$$

となる。つまり、面積が減ると、渦度が増すということがわかる。つまり、これは、流体粒子が縮むと、回転速度が増えるというもっともらしいことを表している (なお、流体粒子のスピンの角速度  $\boldsymbol{\Omega}$  は、 $\boldsymbol{\omega}/2$  である。流体の回転を、 $\mathbf{u} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$  とし、丁寧に書くと (いろいろなところに出てくるものであるが)、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = (\nabla \cdot \mathbf{r}) \boldsymbol{\Omega} + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega} - (\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{r} - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{r} \\ &= (\nabla \cdot \mathbf{r}) \boldsymbol{\Omega} - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{r} = 3\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} = 2\boldsymbol{\Omega} \end{aligned}$$

となる。)

(注: 初めに断面が渦度に直交していたとしても、その後も流体粒子で構成されるこの断面が渦度と直交するというわけではないので、この  $\sigma$  は、その時点での渦管の側面に垂直な断面で、それを構成している流体粒子は初めに断面を構成していた流体粒子というわけではない。図4を参照)。

さて、(31)の式から、安直に、

$$\boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} = \boldsymbol{\omega}_0 \cdot d\mathbf{S}_0$$

としてしまいそうになるかもしれないが、積分記号を安直に外して、「等しい」と置くことは全く保証されていない (※講義録を参照)。しかしながら、積分記号はつけなくても、これは微分形式であると「主張」すれば、「等しく」なる。外積記号を省略しないで、これを丁寧に成分で表すと、

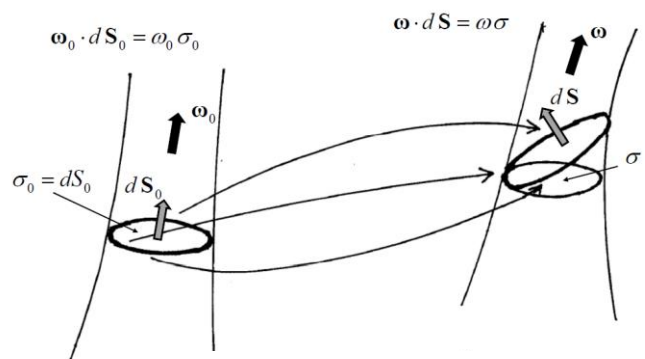


図4

$$\begin{aligned} \omega^1 dy \wedge dz + \omega^2 dz \wedge dx + \omega^3 dx \wedge dy \\ = \omega_0^1 dy_0 \wedge dz_0 + \omega_0^2 dz_0 \wedge dx_0 + \omega_0^3 dx_0 \wedge dy_0 \end{aligned} \quad (32)$$

(ただし、上付き記号を、 $x \rightarrow 1, y \rightarrow 2, z \rightarrow 3$  とした)

この両辺に  $dx$  をかけると (外積をとると)、

$$\omega^1 dx \wedge dy \wedge dz = \omega_0^1 dx \wedge dy_0 \wedge dz_0 + \omega_0^2 dx \wedge dz_0 \wedge dx_0 + \omega_0^3 dx \wedge dx_0 \wedge dy_0$$

これから、

$$\begin{aligned} \omega^1 dx \wedge dy \wedge dz &= \omega_0^1 \frac{\partial x}{\partial x_0} dx_0 \wedge dy_0 \wedge dz_0 + \omega_0^2 \frac{\partial x}{\partial y_0} dy_0 \wedge dz_0 \wedge dx_0 + \omega_0^3 \frac{\partial x}{\partial z_0} dz_0 \wedge dx_0 \wedge dy_0 \\ &= \left( \omega_0^1 \frac{\partial x}{\partial x_0} + \omega_0^2 \frac{\partial x}{\partial y_0} + \omega_0^3 \frac{\partial x}{\partial z_0} \right) dx_0 \wedge dy_0 \wedge dz_0 \end{aligned} \quad (33)$$

と求まる。さて、質量保存則は、

$$\int \rho dV = \int \rho_0 dV_0$$

であり、この質量保存則の微分形式は、

$$\rho dV = \rho dx \wedge dy \wedge dz = \rho_0 dV_0 = \rho_0 dx_0 \wedge dy_0 \wedge dz_0 \quad (34)$$

となる。これらから、

$$\omega^1 \rho dx \wedge dy \wedge dz = \omega^1 \rho_0 dx_0 \wedge dy_0 \wedge dz_0 = \rho \left( \omega_0^1 \frac{\partial x}{\partial x_0} + \omega_0^2 \frac{\partial x}{\partial y_0} + \omega_0^3 \frac{\partial x}{\partial z_0} \right) dx_0 \wedge dy_0 \wedge dz_0$$

となる。第二式は、式(34)を代入したもので、第三式は第一式に式(33)を代入したものである。第二式と第三式の係数を比較すると、また、他の成分も同様にして比較すると、

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \frac{\rho}{\rho_0} \left( \omega_0^1 \frac{\partial x}{\partial x_0} + \omega_0^2 \frac{\partial x}{\partial y_0} + \omega_0^3 \frac{\partial x}{\partial z_0} \right) \\ \omega^2 &= \frac{\rho}{\rho_0} \left( \omega_0^1 \frac{\partial y}{\partial x_0} + \omega_0^2 \frac{\partial y}{\partial y_0} + \omega_0^3 \frac{\partial y}{\partial z_0} \right) \\ \omega^3 &= \frac{\rho}{\rho_0} \left( \omega_0^1 \frac{\partial z}{\partial x_0} + \omega_0^2 \frac{\partial z}{\partial y_0} + \omega_0^3 \frac{\partial z}{\partial z_0} \right) \end{aligned} \quad (35)$$

と求まる。これはコーシー (Cauchy) の積分というものである。ここでは、微分形式をつかって導出したが、これを使わない場合には、その導出は結構、面倒であろう。上の式から、初めに渦度がゼロであると、その後も引き続いて渦度が (そのどの成分も) ゼロであることが明示的にわかる。一方、式の導出から明らかなように、下付きの0がついているのといないものは入れ替えてもよいことがわかるので、ある時点で渦度がゼロであるすると、それは初めからゼロあったことがわかる。

さて、通常のように、長さを  $s$  で表し、その方向を渦線方向であるとすると、

$$\omega_0^1 = \omega_0 \frac{dx_0}{ds_0}$$

と書けるので、



$$\omega^1 = \frac{\rho \omega_0}{\rho_0} \left( \frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{dx_0}{ds_0} + \frac{\partial x}{\partial y_0} \frac{dy_0}{ds_0} + \frac{\partial x}{\partial z_0} \frac{dz_0}{ds_0} \right) = \frac{\rho \omega_0}{\rho_0} \frac{dx}{ds_0}$$

一方、質量保存則は、

$$\rho \sigma ds = \rho_0 \sigma_0 ds_0$$

であるので、

$$\omega^1 = \frac{\rho \omega_0}{\rho_0} \frac{dx}{ds_0} = \frac{\rho \omega_0 \sigma_0}{\rho_0 \sigma_0} \frac{dx}{ds_0} = \omega_0 \sigma_0 \frac{\rho dx}{\rho \sigma ds} = \frac{\omega_0 \sigma_0}{\sigma} \frac{dx}{ds}$$

よって、3成分をまとめて書くと、

$$\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\omega} = \sigma \boldsymbol{\omega} \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \sigma \boldsymbol{\omega} \mathbf{n} = \omega_0 \sigma_0 \mathbf{n} \quad (36)$$

(注： $d\mathbf{r}$  は渦線上にある。また、最右辺の  $\mathbf{n}$  は、当然であるが (一般的には)  $\mathbf{n} \neq \mathbf{n}_0$ )

となる。つまり、(若干、複雑に見えた) コーシーの積分は、先に、(31)に関して述べたこと以上のことは言っていないように見える (結局、もとに戻ったことになる)。特に、最後の等式は、ベクトル、 $\mathbf{n}$  がなんであっても成り立つ式であり、意味があるのは絶対値のみである。

さて、ここで、(28)の循環、 $\Gamma$ の保存を線積分の時間変化の式(3)の二番目の式を使って直接、確認してみよう。

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dt} &= \frac{d}{dt} \oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \oint \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} \right) \cdot d\mathbf{r} = - \oint \text{grad} \left( \frac{\mathbf{u}^2}{2} + P + U \right) \cdot d\mathbf{r} \\ &= - \left( \frac{\mathbf{u}^2}{2} + P + U \right) \Big|_p = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

ここで、最後から二番目の式はスカラー関数のある点での一周前後の差であるので、ゼロとなる (うるさいことを言えば、このスカラー関数は、その内容から明らかに一価関数であるので・・・)

ここで、

$$\varepsilon = \frac{\mathbf{u}^2}{2} + P + U \quad (38)$$

とすると、式(23)は、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = -\text{grad} \varepsilon \quad (39)$$

と書ける。次に二つのケースについて、考えてみよう。

Case A : 時間変化がない場合 (渦があってもよい)

Case B : 渦がない場合 (時間変化があってもよい)

I. まずは、Case A & Case B の場合 (時間変化なし、渦なしの場合)

式(39)から、直ちに、

$$\text{grad} \varepsilon = 0 \quad (40)$$

となる。これから、流体全体で、

$$\varepsilon = \frac{\mathbf{u}^2}{2} + P + U = \text{const.} \quad (\text{流体の全領域}) \quad (41)$$

となる（うるさいことを言えば、流体が占める領域は連結であるとするのである）。

これが、通常、ベルヌーイの定理（Bernoulli's principle）と言われているものであり、高校（？）でも習ったもので、たいへん有用な式である（習った式は、多分、 $\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gh = \text{const.}$  というような式であったと思う。）

## II. Case A の場合

この場合、式(39)は、

$$\mathbf{0} = \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon \quad (42)$$

となるので、

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon = \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon = 0 \quad (43)$$

であることがわかる。これから、

$$\varepsilon = \frac{\mathbf{u}^2}{2} + P + U = \text{const.} \quad (\text{流線に沿って}) \quad (44)$$

となることがわかる（時間変化がない場合のベルヌーイの定理）。

## III. Case B の場合

この場合には、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= -\text{grad } \varepsilon \end{aligned} \quad (45)$$

となる。ここで、物理やその他の多くの分野の「常識（?）」に従えば、式(45)の一番目の式から、

$$\mathbf{u} = \text{grad } \Phi \quad (46)$$

となることがわかる。

---

### [余分なこと]

ここで、「常識」とは、

$$\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = \text{grad } \Phi \quad (47)$$

である。逆方向が成り立つのは、「当たり前」であるが、この常識（の方向）は一般には当たり前ではない。講義録でも述べたように、電磁気学の場合には、全空間で成り立つと信じれば、式(46)が成立するのであるが、さすがに流体の場合には、（流体がない場所も含めて）全空間で成り立つと信じる者はまずはいないであろう。実際、信じない方が「正解」である。しかしながら、通常は、式(47)が成り立つものとして話を進めても大きな障害にはならないであろう。矛盾が生じるようなら、この  $\Phi$  は多価関数であると言って「取り繕えば」よいのである。例えば、ポアンカレの補題（講義録を参照）を使えば、局所的には式(47)が成り立ち、それを延長すれば、大域的にも成り立つようできるが、多価関数にならざるを得ない場合もあるのである。例えば、柱状の物体の周りの二次元的流れの場合、渦なしでも、一般には物体の周りの循環はゼロではない。流体（領域）は渦なしでも、物体中に「仮想的な渦」が存在するのである。

$$\Gamma = \oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \oint \text{grad } \Phi \cdot d\mathbf{r} = \Phi|_p \neq 0 \quad (48)$$

とにかく、ここでは、式(46)を使うことにすると、式(45)の二番目の式から、

$$\text{grad}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \varepsilon\right) = 0 \quad (49)$$

これから、

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} + P + U = \text{const.} \quad (\text{流体の全領域}) \quad (50)$$

となる（これを圧力方程式という。）なお、 $\text{grad } f = 0$  なら、連結した全領域で、 $f = \text{const.}$  である。これから、 $\Phi$  自体はさておき、その時間微分は一価であることがわかる。理想流体の場合、（定常の）流体中の物体は抵抗（流体からの圧力）を受けないというダランベールのパラドックスというものがあるが、流速が変化する場合には物体には圧力が働き、この圧力は式(50)を使って求めることができる（流体力学の教科書を参照のこと。）

以上のように、ベルヌーイの定理は場合分けが必要で、これに注意する必要があるが、ケルビンの渦定理は場合分けによらず成り立つという特徴がある。

最後に、ついでに、(3)の一番目の式はどうなるかを見てみることにしよう。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} &= \int_1^2 \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} \right) \cdot d\mathbf{r} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})_2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})_1 \\ &= - \int_1^2 \text{grad} \left( \frac{\mathbf{u}^2}{2} + P + U \right) \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{u}_2^2 - \mathbf{u}_1^2 \\ &= \left( \frac{\mathbf{u}^2}{2} + P + U \right) \Big|_2^1 + \mathbf{u}_2^2 - \mathbf{u}_1^2 \end{aligned} \quad (51)$$

となる。今、上記の I. の場合、または II. でかつ線積分が流線に沿った場合には、式(51)は、簡単に、

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{u}_2^2 - \mathbf{u}_1^2 \quad (52)$$

となる。後者の場合には、流体は時間的に変化しないのであるから、流線の線分上で変わるのは両端だけとなり、

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} \approx \left( \mathbf{u} \cdot \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right)_2 - \left( \mathbf{u} \cdot \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right)_1 \quad (53)$$

と見なせることから、明らかである。しかし、前者の場合（I. の場合）には、それほど明らかではないかもしれない。

最後にコーシーの積分をもう一度、取り上げることにしよう（式(36)の後に述べたようなコメントで終わってしまったのは、コーシー先生にたいへん失礼というものであろう。）

式(35)の各成分に基底ベクトルをかけて、加えると、

$$\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} = \frac{\omega^1}{\rho} \mathbf{i} + \frac{\omega^2}{\rho} \mathbf{j} + \frac{\omega^3}{\rho} \mathbf{k} = \frac{\omega_0^1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x_0} \mathbf{r} + \frac{\omega_0^2}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y_0} \mathbf{r} + \frac{\omega_0^3}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_0} \mathbf{r} = \left( \frac{\boldsymbol{\omega}_0}{\rho_0} \right) \cdot \nabla_0 \mathbf{r} \quad (54)$$

Lagrange 的な見方をすると、位置座標は、（流体を物体と見たときの物体座標と時間を使って）

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, a, b, c)$  と書けるが、ここで座標、 $a$  の方向を初期（時間=0）の渦度ベクトルの方向にとると、

渦は流体とともに動くことから  $(\mathbf{r}(t, a, b, c))$  と  $(\mathbf{r}(t, a + \Delta a, b, c))$  は同じ渦線上にあるので、

$$\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} = \frac{\omega_0}{\rho_0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta a} = \frac{\omega_0}{\rho_0} \frac{\Delta \ell}{\Delta a} \mathbf{n} \quad (55)$$

となる（注：ここで、 $\omega_0$  はスカラーである。）つまり、（ $\rho$  を一定とすると）渦線が伸びると、伸びた分だけ渦度が強くなる。なお、これを書き換えると、 $\omega \propto \rho \Delta \ell \rightarrow \omega \Delta S \propto \rho \Delta \ell \Delta S = \text{const.}$  と先に述べたのと同じ結果になる。

次に、基底ベクトルを  $\left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  とおくと（同一して同じことをやると）、

$$\frac{\omega^1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\omega^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\omega^3}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\omega_0^1}{\rho_0} \left( \frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x_0} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x_0} \frac{\partial}{\partial z} \right) + \dots \quad (56)$$

となるが、ここで、

$$\frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x_0} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x_0} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x_0}$$

等々を使うと、式(56)は、

$$\frac{\omega^1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\omega^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\omega^3}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\omega_0^1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\omega_0^2}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y_0} + \frac{\omega_0^3}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_0} \quad (57)$$

となる。もう少し見やすくすると、これは、

$$(a^i \partial_i)_1 = (a^i \partial_i)_0 \quad (58)$$

であると言っているのと同じである（ここで、 $\partial_i = \partial / \partial x^i$  であり、また添え字の簡約則を使っている。）

これは、流体の運動を時間、 $t$  をパラメータとする座標変換（Lagrange 的な見方での流体粒子の座標変換）であると見なすと、式(58)は、ベクトル的な  $a_i$  がこの座標変換で不変であるということを行っている（ベクトルは、座標変換で、その成分は変わっても、ベクトル自体は不変である。）つまり、 $\boldsymbol{\omega} / \rho$  は、この座標変換では不変で、ベクトルであるということになる（注：現実の空間座標は、流体が動いてもそのままであるが・・・）ちなみに、式(58)を、 $(a^i \partial_i)_y = (a^i \partial_i)_x$  とすると、

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j} \quad (59)$$

であるので、

$$a_y^i \frac{\partial}{\partial y^i} = a_x^j \frac{\partial}{\partial x^j} = a_x^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^i} \quad (60)$$

となり、通常の座標変換の式が得られる。

$$a^i_y = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} a^j_x \quad (61)$$

(以上は、粒子の運動を座標変換と見なすという、ある意味、Lagrange 的な見方であるが、これを Euler 的な見方での座標変換 (普通の座標変換) とチャンポンで考えると、多分、頭の中が混乱することになるであろう。)

以下、しばらく、この「変な」座標変換のまま、(あまり見かけないかもしれない) 計算を行う。  
式(58)から、時間 (または座標変換のパラメータ) の微分は、

$$\frac{D}{Dt}(a^i \partial_i) = (\dot{a}^i \partial_i) = 0 \quad (62)$$

となる。

(以下、偏微分記号による基底は、座標変換を考える場合に便利なので、そのままとしよう。) きて、式(62)は、

$$\dot{a}^i \partial_i + a^i \dot{\partial}_i = 0 \quad (63)$$

となるが、ここで、 $\delta^j_i = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} x^j$  を時間微分すると、

$$\left( \frac{\dot{\partial}}{\partial x^i} \right) x^j + \frac{\partial}{\partial x^i} u^j = 0 \quad (64)$$

さらに、 $\left( \frac{\dot{\partial}}{\partial x^i} \right) = c_i^k \frac{\partial}{\partial x^k}$  と展開し、式(64)に代入すると、 $c_i^j = -\frac{\partial u^j}{\partial x^i}$  と求まる。これを式(63)に代入すると、

$$\dot{a}^i \partial_i = a^i \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \partial_j \quad (65)$$

となる。これをベクトル表記で書けば、

$$\dot{\mathbf{a}} = (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (66)$$

となる。よって、Lagrange 的な座標変換で不変な  $\boldsymbol{\omega} / \rho$  も、

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) = \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} \quad (67)$$

と書ける。なお、(57)をベクトル的に書くと、

$$\left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right)_1 = \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right)_0 \quad (68)$$

となり、この微分演算子も Lagrange 的な座標変換で不変となる。なお、式(54)を時間微分すると、

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) = \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right)_0 \mathbf{u} \quad (69)$$

となるが、式(68)を使うと、式(67)が再び得られる。ところが、式(54)に式(68)を直接、使うと、  
 $((\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{r} = \mathbf{a}$  であるから)

$$\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} = \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{r} = \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{r} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \quad (70)$$

と、あまりにも明らかな結果となってしまふ。Lagrange 的な計算は一般に複雑なようであるが、すでに上述のような結果が得られているのであるから、これらの導出をよりやさしい Euler 的な見方でやってみよう（流体力学の教科書等で普通にやられている方法である）。

式(24)のベクトル積を展開すると、

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} + (\nabla \cdot \mathbf{u}) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{u} \quad (71)$$

よって、

$$\frac{D \boldsymbol{\omega}}{Dt} + (\nabla \cdot \mathbf{u}) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (72)$$

となる。一方、連続の式（質量保存則）は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 &\rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ &\rightarrow \frac{D \rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{D \rho}{Dt} \end{aligned} \quad (73)$$

となる。式(72)の両辺を  $\rho$  で割って、これを使うと、直ちに、式(67)と同じ式、

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) = \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} \quad (74)$$

が得られる。また、式(70)にある自明な関係式、

$$\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} = \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{r} \quad (75)$$

を時間微分すると、

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) = \frac{D}{Dt} \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{r} + \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} \quad (76)$$

となるが、式(74)から、

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{r} = 0 \quad (77)$$

となることがわかる。これから、

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) = 0 \quad (78)$$

とするのがもっともらしいことがわかる（実際、ある空間に関する微分演算子、 $A_t$ の時間微分は、

$\dot{A}_t = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{A_{t+\delta t} - A_t}{\delta t}$  であるので、これも同様に空間に関する微分演算子となる。よって、任意の関数、

$f(\mathbf{r})$  について、 $\dot{A}_t f(\mathbf{r}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot \dot{A}_t \mathbf{r}$  となり、式(77)の場合には、任意の関数について、

$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) f(\mathbf{r}) = 0$  となるので、式(78)が成り立つ。または、時間微分を Lagrange 的に考え、式(78)

の左辺を基底ベクトル、 $\partial_i$  で展開したとすると、式(77)からその係数はゼロであることがわかる。) よ

って、式(78)が成り立つとすると、 $\boldsymbol{\omega}/\rho$  の (Lagrange 的) 座標変換に対する不変性を示す式(57)などが得られるのである。

### (3) Alfvén's theorem (磁場凍結の定理、frozen-in flux theorem)

この定理は、理想電磁流体 (ideal MHD) (粘性なし、伝導率：無限大) の場合、磁場がプラズマに凍結する (プラズマと磁場と一緒に動く) という定理 (frozen-in flux theorem) である。しかし、実際は、このアルヴェーンの定理は、伝導率が無限大であるという仮定をおきさえすれば、運動方程式には関係なく成立するのである (必要なことは伝導率が無限大ということのみである。) ケルビンの渦定理でも、渦の方程式(24)をみると、その中には運動に関する物理量 (圧力、外力など) が含まれておらず、一見、流体の物理量とは関係がないように見える。ただし、式(24)を導くのに、式(23)の中で「力」の相当する項がスカラー関数の gradient であるということが使われている。一方、アルヴェーンの定理は、このようなことはまったく必要なく、必要なのは、「純粋に」電磁気学のみである。とは言え、オームの法則は使うので、そこには荷電粒子の運動の結果が含まれているとも言えなくもないが・・・(実際、オームの法則は、電流が電場に瞬時に対応して流れる、かつそれに比例して流れるというものであり、荷電粒子の運動という観点から見ると、かなり大胆な仮定、近似と言ってもよいかも・・・?)

さて、このオームの法則はよく知られているように、電流密度は、

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (79)$$

と書かれる。ここで、 $\sigma$  は伝導率であるが、 $\mathbf{E}$  は荷電粒子に働く力であるので、磁場がある時は、この働く力は「ローレンツ電場」(プラズマ中の流体粒子が感じる電場) によるものとなる。よって、

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (80)$$

ここで、電流密度は (たとえ  $\sigma \rightarrow \infty$  となっても) 無限大に近づくことないという「物理的条件」を課すと (電流が無限大になると、とんでもないことになる、unrealistic であるというのは「物理的常識」であろう?)、

$$\sigma \rightarrow \infty, \quad \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \quad (81)$$

となる (良導体中では、 $\mathbf{E} \approx 0$  であるが、磁場があり、かつ導体が運動している場合には、 $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \approx 0$  となる。この意味しているところを「感覚的に」理解するのはむづかしいかも・・・)。式(81)の curl (rot)

をとって、マックスウェル方程式の一つ、 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ を代入すると、

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) = 0 \quad (82)$$

が得られる。これは渦の方程式(24)と全く同じ形をしており、さらに、 $\text{div} \mathbf{B} = 0$ は $\text{div} \boldsymbol{\omega} = 0$ に対応しているので、

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (83)$$

という結果（アルヴェーンの定理）が得られ、渦の議論がそのまま適用できるのである。

全く同様にして、式(35)から、磁場に関するコーシーの関係式、

$$\begin{aligned} B^1 &= \frac{\rho}{\rho_0} \left( B_0^1 \frac{\partial x}{\partial x_0} + B_0^2 \frac{\partial x}{\partial y_0} + B_0^3 \frac{\partial x}{\partial z_0} \right) \\ B^2 &= \frac{\rho}{\rho_0} \left( B_0^1 \frac{\partial y}{\partial x_0} + B_0^2 \frac{\partial y}{\partial y_0} + B_0^3 \frac{\partial y}{\partial z_0} \right) \\ B^3 &= \frac{\rho}{\rho_0} \left( B_0^1 \frac{\partial z}{\partial x_0} + B_0^2 \frac{\partial z}{\partial y_0} + B_0^3 \frac{\partial z}{\partial z_0} \right) \end{aligned} \quad (84)$$

が得られる。その他、式(36)からは、

$$\sigma \mathbf{B} = \sigma B \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \sigma B \mathbf{n} = B_0 \sigma_0 \mathbf{n} \quad (85)$$

が得られる。さらに、式(57)からは、

$$\frac{B^1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{B^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{B^3}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{B_0^1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{B_0^2}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y_0} + \frac{B_0^3}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z_0} \quad (86)$$

が、式(67)から、

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\mathbf{B}}{\rho} \right) = \left( \frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} \quad (87)$$

が得られる。以下、同様である。

式(83)をベクトル・ポテンシャルで書き直すと、

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (88)$$

となり、ベクトル・ポテンシャルのループ積分が保存するということがわかる。同じことを、式(3)の二番目の式を使って示してみよう。

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \oint \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{v} \right) \cdot d\mathbf{r} \quad (89)$$

であるが、被積分の項は、 $\mathbf{E} = -\text{grad} \phi - \partial \mathbf{A} / \partial t$ であるので、

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{v} = -(\text{grad} \phi + \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (90)$$

となる。プラズマ中では、ローレンツ電場はゼロとしているので、式(89)は、



$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \oint (\nabla \phi) \cdot d\mathbf{r} = \phi|_p = 0 \quad (91)$$

となり、式(88)が得られる。

以上は、 $\sigma \rightarrow \infty$ と仮定してきたが、もし、(80)で、

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{j} / \sigma = \text{grad } \Psi \quad (92)$$

となっていると仮定すると、つまり、ローレンツ電場が、ある関数の gradient で表されるとすると、 $\sigma$  がどんな値でも、アルヴェーンの定理が成立することになる。しかし、このような状況はあまり現実的でないかもしれない（ファラデーの電磁誘導では似たような状況が生じるが・・・）。

なお、より現実に近い状態で、アルヴェーンの定理が適用できるかどうかを見定める指標として、磁気レイノルズ数というものがある。これを求めるのも、(プラズマの) 運動方程式は必要としない。電流密度、 $\mathbf{j}$  にアンペールの法則（マックスウェル方程式の一つで、変位電流を無視したもの）を使うと、式(80)から、

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\mu_0 \sigma} \quad (93)$$

となる。ここで、透磁率 (permeability) は  $\mu_0$  であるとしている。さらに、伝導率も一定であると仮定して、両辺の curl (rot) をとって、整理すると、

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = 0 \quad (94)$$

ここで、 $\text{rot rot} = \text{grad div} - \Delta$  という「記憶すべき式」と  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  を使うと、

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \Delta \mathbf{B} \quad (95)$$

と書ける。この式の右辺の第二項が第一項に比較して無視できれば、アルヴェーンの定理が成り立つとしてよいことになる。各項の大きさの程度を見積もって条件を書くと、

$$\frac{BU}{L} \gg \frac{1}{\mu_0 \sigma} \frac{B}{L^2} \quad (96)$$

となり（記号の説明は省略）、これから、磁気レイノルズ数 (magnetic Reynolds number) が、

$$R_m = \frac{UL}{1/\mu_0 \sigma} \gg 1 \quad (97)$$

を満たす場合には、アルヴェーンの定理が（かなり）成り立つと見なせることがわかる。

#### [余分なこと]

一般に、拡散係数、 $\nu$  は、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \nu \Delta \Phi \quad (98)$$

の右辺の比例係数であり、その次元は（式(98)から明らかに）

$$[\nu] = \frac{m^2}{\text{sec}} \quad (99)$$

である。（普通の）流体のレイノルズ数、

$$R = \frac{UL}{\nu} \quad (100)$$

であり、レイノルズ数は無次元であることを前もって知っていれば、 $[\nu] = m^2 / \text{sec}$ となるが、直接、これを示すに

は、 $[p] = [\text{Stress}] = [\eta \partial u / \partial x]$ であることから、動粘性係数、 $\nu$ は、

$$[\text{粘性係数} / \text{密度}] = [\eta / \rho] = Pa \cdot \text{sec} \cdot \frac{m^3}{kg} = \left( \frac{m}{\text{sec}^2} / m^2 \right) \cdot \text{sec} \cdot m^3 = \frac{m^2}{\text{sec}}$$

また、熱伝導方程式の場合には、

$$\rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T \quad (101)$$

である（ここでも記号の説明は省略）。ここで、熱流束  $\mathbf{J}$  が、 $\mathbf{J} = -\kappa \text{grad} T$  であることから、熱伝導率は、

$$[\kappa] = \frac{W}{m^2} \cdot \frac{m}{K} = W / (m \cdot K) \text{となる。これから、熱の拡散係数、}\nu_T \text{は、}$$

$$\nu_T = \frac{\kappa}{\rho C_v} \rightarrow [\nu_T] = \frac{W / (K \cdot m)}{J / (K \cdot m^3)} = \frac{m^2}{\text{sec}} \quad (102)$$

となる。シュレーディンガー方程式も自由空間の場合、時間を虚時間 ( $\tau = it$ ) で書くと、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \frac{\hbar}{2m} \Delta \Phi \quad (103)$$

となるので、その（虚の）拡散係数、 $\nu_s$ は、

$$\nu_s = \frac{\hbar}{2m} \rightarrow [\nu_s] = \frac{J \cdot \text{sec}}{kg} = (m / \text{sec})^2 \text{sec} = \frac{m^2}{\text{sec}} \quad (104)$$

となる。さて、式(95)、(97)の  $1/\mu_0 \sigma$  も拡散係数と同じ次元をもつはずであるが、実際、

$$[\mu_0] = H / m = \Omega \cdot \text{sec} / m, \quad [\sigma] = 1 / (\Omega \cdot m) \quad (105)$$

であるので、

$$[1/\mu_0 \sigma] = 1 / (\text{sec} / m^2) = \frac{m^2}{\text{sec}} \quad (106)$$

となる。ここで、

$$L = \mu_0 n^2 S / \ell \rightarrow [\mu_0] = H / m$$

$$V = L \frac{d}{dt} I \rightarrow H = \Omega \cdot \text{sec}$$

$$R = (1/\sigma) \ell / S \rightarrow [1/\sigma] = \Omega \cdot m$$

などを思い出すとよいであろう。

最後に、参考として、粘性がある場合の渦の式を書いておこう。バロトロピック (barotropic) 流体の運動方程式 (ナビエーストークス方程式、Navier-Stokes equation : 適当な流体力学の教科書を参照のこと) は、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = -\text{grad} \left( \frac{\mathbf{u}^2}{2} + P + U \right) + \nu \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nu \text{grad}(\text{div} \mathbf{u}) \quad (107)$$

である（ここで、うるさいことを言えば、第2粘性率=ゼロというストークスの仮説を使っている。よく使われる簡易版（非圧縮近似等）では、右辺の最後の項は無視する（または見かけ上、第一項の圧力の項に繰り込む）。）式(107)の curl (rot) をとると、

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) + \nu \Delta \boldsymbol{\omega} \quad (108)$$

となり、磁場の式(95)と全く同じ形の式が得られることになる。