

超簡単！ベクトル解析、他

神谷 幸秀

ベクトル解析の知識としては、パワポ3枚もあれば十分で、公式集は、多分、不要である。実際、どんな公式も必要な時にすぐに導くことができることを説明する。また、余裕があれば、「感覚的に」わかりにくいかもしれない微分形式への超イントロを行い、「抵抗感」を少しでも減らしたい。

※ パワポ3枚程度： Appendix A

テキストの枚数から、一見、
カンバンに偽りあり！

(講義の趣旨)
それでも、パワポ3枚で十分と言いたい

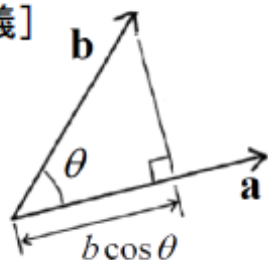
Appendix A (1)

ベクトル: $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$

内積(inner product)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$$

[幾何学的定義]



$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

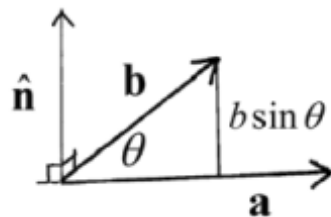
[代数的定義]

外積(cross product)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \hat{\mathbf{n}} |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$$

$\hat{\mathbf{n}}$: $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ に垂直な単位ベクトル

[幾何学的定義]



$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_3$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \mathbf{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \mathbf{e}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

[代数的定義]

二つの基本的な関係式

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$$

※ ベクトル積(内積、外積)の重要な性質: 双線形性(bilinearity)

Appendix A (2)

ベクトルの微分

微分の重要な性質: ライプニッツ則 (Leibnitz's rule)

$$d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg \quad \frac{\partial}{\partial x}(f \cdot g) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f\right) \cdot g + f \cdot \frac{\partial}{\partial x} g$$

$$(f, g \text{ はスカラー関数}) \quad \partial = \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{と以下、簡略}$$

(※: 重要な「当たり前の」性質: f, g に関する双線形性)

$d = d_f + d_g$ 、 $\partial = \partial_f + \partial_g$ と「記号的に」微分を分けると

$$(\partial_f + \partial_g)(f \cdot g) = \partial_f(f \cdot g) + \partial_g(f \cdot g) = (\partial_f f) \cdot g + f \cdot (\partial_g g)$$

ベクトル積(内積、外積)の双線形性から、

$$\partial(\mathbf{f} * \mathbf{g}) = (\partial \mathbf{f}) * \mathbf{g} + \mathbf{f} * \partial \mathbf{g} \quad (*: \text{内積または外積})$$

($\mathbf{f}, \mathbf{g}$ はベクトル関数)

$$\mu \partial * \mathbf{f} = \mu * \partial \mathbf{f}$$

(※ 時々、有用な notation)

$$\overleftarrow{f} \partial = \partial f$$

ベクトルの積分

$$\int_V dV \nabla = \int_S d\mathbf{S} \quad (= \int_S \mathbf{n} dS) \quad (\text{Gauss型})$$

$$\int_S d\mathbf{S} \times \nabla = \int_\ell d\mathbf{r} \quad (= \int_\ell \mathbf{t} d\ell) \quad (\text{Stokes型})$$

$$\int_\ell d\mathbf{r} \cdot \nabla = \quad | \quad (\text{FTC型})$$

FTC: Fundamental Theorem of Calculus on the curve

FTC型の右辺の $|$ は、次の積分の $|$ と同じ意味: $\int_a^b \frac{df}{dx} dx = f(x) \Big|_a^b$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (\nabla \cdot \mathbf{A} = \text{div } \mathbf{A}) \quad (\text{Gaussの公式})$$

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \int_\ell \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{or} \quad \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_\ell (\mathbf{A} \cdot \mathbf{t}) d\ell \quad (\text{Stokesの公式})$$

$$(\nabla \times \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{A})$$

$$\int_a^b \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}) \Big|_a^b = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) \quad (\text{FTC})$$

Appendix A (3)

座標変換(直交変換)

ベクトルの「行列表示」

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 \\ &= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

直交変換

(orthogonal transformation)

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3) P$$

(旧基底) (新基底)

$$P P^T = I \quad (I: \text{unit matrix})$$

※ ベクトル自体は座標変換で不変ある (定義)

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}' \times \mathbf{b}' &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}'_1 & a'_1 & b'_1 \\ \mathbf{e}'_2 & a'_2 & b'_2 \\ \mathbf{e}'_3 & a'_3 & b'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \mathbf{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \mathbf{e}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \det P \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \mathbf{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \mathbf{e}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= \det P (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\end{aligned}$$

ベクトルの座標変換

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}$$

外積または擬ベクトルの座標変換

$$\mathbf{c}' = (\det P) \mathbf{c}$$

外積または擬ベクトルの座標成分の変換

$$(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3) \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \end{pmatrix} = \det P (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \det P (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3) P \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \end{pmatrix} = (\det P) P \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Appendix A (4)

ベクトルの変換(回転)

※ ベクトルの回転: 基底は変わらない

ベクトルの「成分ベクトル」の変換: R

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{\text{もし、基底も回転したとすると、}} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

$$PR = I \quad R = P^{-1} = P^T$$

※ 直交曲線座標の話は省略
(講義録を参照)

付録: 直交曲線座標(orthogonal curvilinear coordinates)

※ パワポ3枚程度のカンパンの外

線、面積及び体積要素

$$d\mathbf{r} = h_1 dq_1 \mathbf{e}_1 + h_2 dq_2 \mathbf{e}_2 + h_3 dq_3 \mathbf{e}_3$$

$$d\mathbf{S} = h_2 h_3 dq_2 dq_3 \mathbf{e}_1 + h_3 h_1 dq_3 dq_1 \mathbf{e}_2 + h_1 h_2 dq_1 dq_2 \mathbf{e}_3$$

$$dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$$

grad, div, rot, Laplacian

$$\nabla f = \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \mathbf{e}_3$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 A_3) \right]$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial q_3} \right) \right]$$

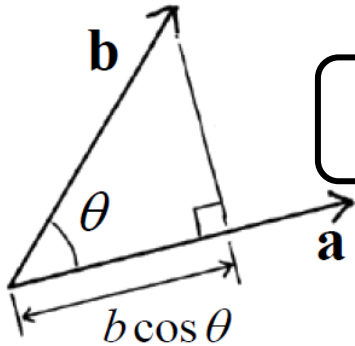
内積 (inner product)

[幾何学的定義]

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$$

[代数的定義]

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

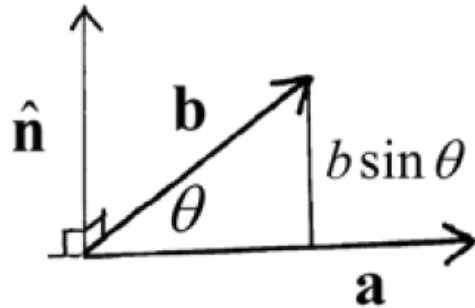


外積 (cross product)

[幾何学的定義]

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \hat{\mathbf{n}} |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$$

$\hat{\mathbf{n}}$: $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ に垂直な単位ベクトル



[代数的定義]

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_3$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \mathbf{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \mathbf{e}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

※ 幾何学的定義と代数的定義が同じであること

※ ベクトル積(内積、外積)の重要な性質: 双線形性(bilinearity)

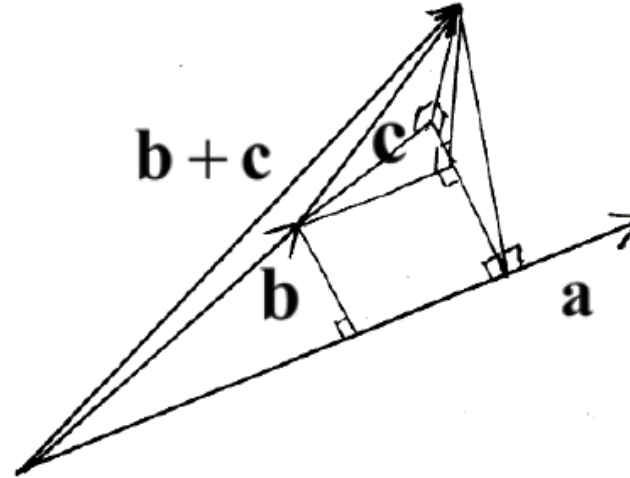
→ (講義録を参照)

「幾何学的」定義における（双）線形性

内積

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \cos \theta_{ij} = \delta_{ij}$$

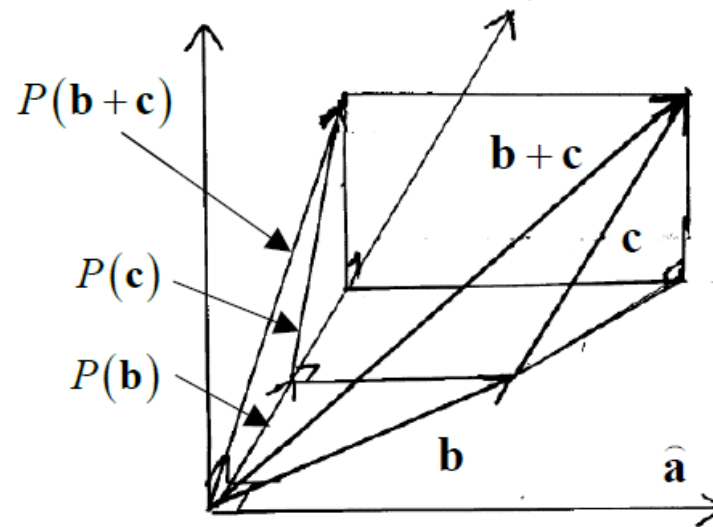


三垂線の定理

外積

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

90度回転した外積＝射影ベクトルの和



※ 詳細は、講義録を参照

二つの基本的な関係式（多分、これだけで十分）

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{a}^* = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}, \quad \mathbf{b}^* = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}, \quad \mathbf{c}^* = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}$$

逆格子空間における基底ベクトル
双対空間 (dual space) の基底

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

※ これを覚えていると、後が簡単になる！

[略証]

線形性と形から

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = f(\mathbf{a}, \mathbf{c})\mathbf{b} + g(\mathbf{a}, \mathbf{b})\mathbf{c}$$

$\mathbf{b}, \mathbf{c}$ の反対称性から $g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -f(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

f はスカラー関数

$$f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

最後に、たとえば

$$\mathbf{j} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i}$$

なぜ内積と外積しかないのか？

二つの前提：双線形性 (bilinearity) と空間の等方性 (isotropic)



ベクトルの2項関係：

スカラー



内積

ベクトル



外積

※ 詳細は、講義録 (Appendix B) を参照 (そこには別 (代数的証明) も掲載)

[略証 (スカラー)]

双線形性



$$f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i,j} a_i b_j f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$$

$$f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i * \mathbf{e}_j$$

たとえば $\mathbf{e}_1 * \mathbf{e}_2 = c$

$$\mathbf{e}_1 * \mathbf{e}_3 = c$$

$$\mathbf{e}_1 * (\cos \theta \mathbf{e}_2 + \sin \theta \mathbf{e}_3) = c$$

$$c(\cos \theta + \sin \theta) = c$$

$$c = 0$$

$$\mathbf{e}_i * \mathbf{e}_j = 0 \quad (i \neq j)$$

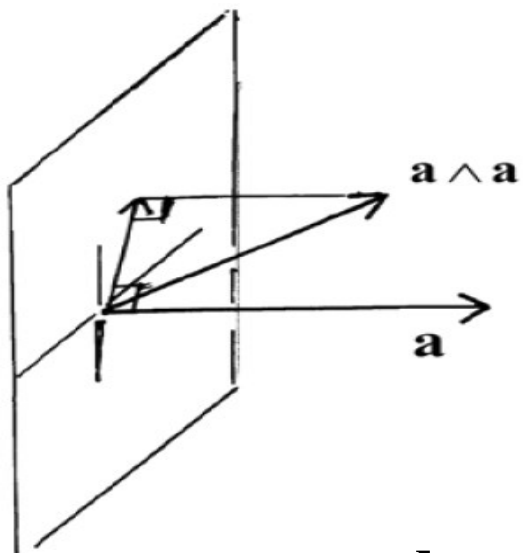
等方性



$$\mathbf{e}_1 * \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 * \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 * \mathbf{e}_3$$

$$f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (\lambda : \text{ある定数})$$

【略証 (ベクトル)】



等方性 $\longrightarrow \mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = f(\mathbf{a})\mathbf{a}$

f スカラー $\longrightarrow f(\mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$

等方性 $\longrightarrow \mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = 0$ 反対称性の「原因」

(双) 線形性 $\longrightarrow \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$

$\swarrow$
 $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = f(\mathbf{b})\mathbf{a} + g(\mathbf{a})\mathbf{b} + \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

反対称性

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} + \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

等方性

$\mathbf{c} = 0$

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

ベクトル解析の事始め

ハミルトン (Hamilton) の四元数
(quaternion)

マクスウェル (Maxwell) の (電磁場理論)
の著作に影響

ベクトル解析の創始

ギブス (Gibbs) とヘビサイド (Heaviside) が
Maxwell理論をやさしくしようと努力

Quaternion

$$\mathbf{i}\mathbf{i} = \mathbf{j}\mathbf{j} = \mathbf{k}\mathbf{k} = \mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{k} = -1$$

$$\mathbf{i}\mathbf{j} = -\mathbf{j}\mathbf{i} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j}\mathbf{k} = -\mathbf{k}\mathbf{j} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k}\mathbf{i} = -\mathbf{i}\mathbf{k} = \mathbf{j}$$

$$p = p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}$$

$$q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$$

$$pq = p_0q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}$$

3次元ベクトル

$$\mathbf{p} = p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{q} = q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$$

pure imaginary

$$p = \mathbf{p}, \quad q = \mathbf{q}$$

$$pq = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}$$

内積・外積しかない!

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} I \\ -i\sigma_1 \\ -i\sigma_2 \\ -i\sigma_3 \end{pmatrix}$$

$$p = \left(\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{n} \right)$$

$$p = e^{\frac{\theta}{2}\mathbf{n}}$$

$$(a' =) pap' = e^{\frac{\theta}{2}\mathbf{n}} a e^{-\frac{\theta}{2}\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{a}' = e^{\frac{\theta}{2}\mathbf{n}} \mathbf{a} e^{-\frac{\theta}{2}\mathbf{n}}$$

$$e^{\frac{\theta}{2}\mathbf{n}} \Leftrightarrow e^{-i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}}$$

quaternion

vector

※ 微積分の導入以前では、有用な関係式は多くないであろう。

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$$

[Jacobi identity]

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\varepsilon^{ijk} \varepsilon^{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$$

$$\varepsilon^{ijk} a_j b_k \varepsilon^{ilm} c_l d_m = a_j c_j b_k d_k - a_j d_j b_k c_k$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_a \quad \left((\mathbf{e}_a)_i = \delta_{ia} \right)$$

$$\varepsilon^{ijk} \delta_{ja} \delta_{kb} \varepsilon^{ilm} \delta_{lc} \delta_{md}$$

$$= \delta_{ja} \delta_{jc} \delta_{kb} \delta_{kd} - \delta_{ja} \delta_{jd} \delta_{kb} \delta_{kc}$$

$$\varepsilon^{iab} \varepsilon^{icd} = \delta_{ac} \delta_{bd} - \delta_{ad} \delta_{bc}$$

ベクトルの微分

微分の重要な性質: ライプニッツ則 (Leibniz's rule)

$$d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg \quad \frac{\partial}{\partial x}(f \cdot g) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f\right) \cdot g + f \cdot \frac{\partial}{\partial x} g \quad \partial = \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{と以下、簡略}$$

(f, g はスカラー関数)

(※: 重要な「当たり前の」性質: f, g に関する双線形性)

$$d = d_f + d_g \quad \partial = \partial_f + \partial_g \quad \text{と「記号的に」微分をわけると}$$

$$(\partial_f + \partial_g)(f \cdot g) = \partial_f(f \cdot g) + \partial_g(f \cdot g) = (\partial_f f) \cdot g + f \cdot (\partial_g g)$$

ベクトル積(内積、外積)の**双線形性**から、

$$\partial(\mathbf{f} * \mathbf{g}) = (\partial \mathbf{f}) * \mathbf{g} + \mathbf{f} * \partial \mathbf{g} \quad (*: \text{内積または外積})$$

($\mathbf{f}, \mathbf{g}$ はベクトル関数)

$$\Delta(\mathbf{f} * \mathbf{g}) = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) * \mathbf{g}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) * \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

$$\mu \partial * \mathbf{f} = \mu * \partial \mathbf{f}$$

(※ 時々、有用なnotation)

$$\overset{\leftarrow}{f} \partial = \partial f$$

※ 周知の定義であるが、これ以降、具体的な表現はほとんど出てこないであろう。

ナブラ記号 (nabla) またはデル記号 (del)

gradient

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla f$$

発散 (divergence)

$$\text{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

回転 (rotation)

$$\text{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_3$$

$$\text{rot} \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \partial_1 & A_1 \\ \mathbf{e}_2 & \partial_2 & A_2 \\ \mathbf{e}_3 & \partial_3 & A_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix}$$

$$\nabla(f \cdot g) = (\nabla f)g + f(\nabla g)$$

$$\nabla \times \nabla \phi = \text{rot grad } \phi = 0$$

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = \nabla \phi \cdot \mathbf{A} + \phi \nabla \cdot \mathbf{A}$$

$$\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = \nabla \phi \times \mathbf{A} + \phi \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) \\ &\quad + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} \\ &\quad + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \end{aligned}$$

Leibniz's rule

$$\nabla \times \nabla = 0$$

(ラプラシアン (Laplacian) の定義)

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot (\overleftarrow{\nabla} \times \overleftarrow{\nabla}) (= (\nabla \times \nabla) \cdot \mathbf{A}) = 0$$

Leibniz's rule

注意！ $\nabla \times (\mathbf{A} \phi) \neq \mathbf{A} \times \nabla \phi + (\nabla \times \mathbf{A}) \phi$

Leibniz's rule

Leibniz's ruleとベクトル演算の基本関係式

$$\left(\begin{aligned} \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \nabla_{\mathbf{A}}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + \nabla_{\mathbf{B}}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \\ \mathbf{A} \times (\nabla_{\mathbf{B}} \times \mathbf{B}) &= \nabla_{\mathbf{B}}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla_{\mathbf{B}}) \mathbf{B} \\ \mathbf{B} \times (\nabla_{\mathbf{A}} \times \mathbf{A}) &= \nabla_{\mathbf{A}}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{B} \cdot \nabla_{\mathbf{A}}) \mathbf{A} \end{aligned} \right)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$$

ベクトル演算の基本関係式

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

$$\nabla^2 = \text{grad div} - \text{rot rot}$$

記憶に値する表式

しかし、表記の記号が悪い（直交曲線座標の場合、間違い）

=> 「悪名高き」表式と言ってもよい

直交曲線座標の場合、 ∇^2 の表記（が意味するところ）が明確でない

つまり、左辺 $\times$ 、右辺は $\circ$

直交曲線座標の場合、 ∇^2 とは、 $\text{grad div} - \text{rot rot}$ とするのである

座標ベクトルに関する微分

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$$

$$\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{r} = \mathbf{a}$$

露骨に座標で表して計算するのがはやい

$$\mathbf{a} \cdot \nabla$$

特別な性質： 内積の形であるので、座標変換に対して不変、しかし、「一項関係」である。よって、ベクトル、 $\mathbf{a}$ と同一視が可能

$$\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (= \mathbf{e}_r = \mathbf{n}) \quad (r \neq 0)$$

$$\longleftarrow r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \quad 2r \nabla r = 2(\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{r} + 2\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{r})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{n} = \frac{2}{r}$$

$$\longleftarrow \nabla \cdot \mathbf{r} = \nabla \cdot (r \mathbf{n})$$

$$\nabla \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \longleftarrow \mathbf{0} = \nabla \times \mathbf{r} = \nabla \times (r \mathbf{n})$$

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{\mathbf{n}}{r^2} \quad (r \neq 0)$$

$$\nabla \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{n}}{r^2} \right) = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{n}}{r^2} + 2 \frac{\mathbf{n}}{r^3}$$

$$\nabla \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 0 \quad (r \neq 0)$$

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{r})$$

$(\mathbf{c} : \text{const. vector})$

$$\nabla \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{r}) = 0$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot (\nabla \times \mathbf{c}) - \mathbf{c} \cdot (\nabla \times \mathbf{r})$$

$$\nabla (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{c}$$

$$\nabla (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) = (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{r} + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{c} + \mathbf{c} \times (\nabla \times \mathbf{r}) + \mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{c})$$

$$\nabla \times (\mathbf{c} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{c}$$

$$\nabla \times (\mathbf{c} \times \mathbf{r}) = (\nabla \cdot \mathbf{r}) \mathbf{c} - (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{r} = 3\mathbf{c} - \mathbf{c} = 2\mathbf{c}$$

一様磁場のベクトル・ポテンシャル

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B}_0 \times \mathbf{r} \quad (\mathbf{B}_0 = \text{const.}) \longrightarrow \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}_0$$

$$(\mathbf{a} \times \nabla) \cdot \mathbf{r} = 0$$

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{n} = \frac{\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}}{r}$$

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{n} = (\mathbf{a} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{r}}{r} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \nabla \left(\frac{1}{r} \right)$$

閑話休題：

$$\mathbf{a} \cdot d\mathbf{a} = a da$$

$$\mathbf{a} = a \mathbf{n}$$

$$d\mathbf{a} = da \mathbf{n} + a d\mathbf{n} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \cdot d\mathbf{a} = a da$$

$$\mathbf{n} \cdot d\mathbf{n} = 0$$

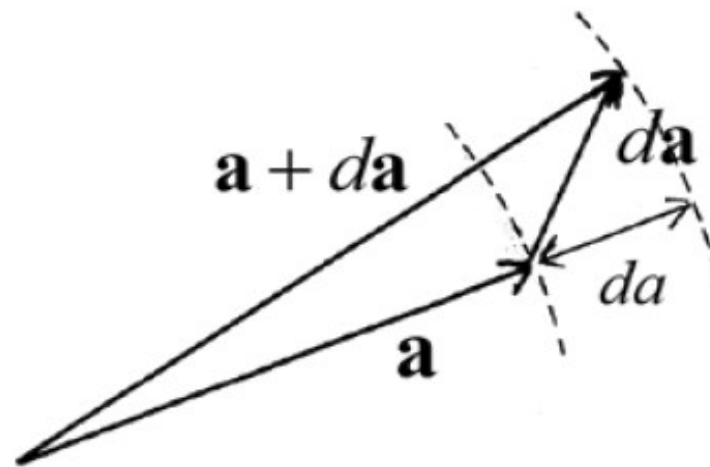
$$\mathbf{b} \parallel \mathbf{a} \quad \mathbf{b} = b \mathbf{n} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b} \cdot d\mathbf{a} = b da$$

$$\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{a}} = a \dot{a}, \quad \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{a}} = b \dot{a}$$

$$\mathbf{a} \times d\mathbf{a} = a^2 \mathbf{n} \times d\mathbf{n}$$

$$\mathbf{a} \times \dot{\mathbf{a}} = a^2 \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{b} \times \dot{\mathbf{a}} = b a \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{b} \times d\mathbf{a} = b a \mathbf{n} \times d\mathbf{n}$$



ベクトルの積分

$$\int_V dV \nabla = \int_S d\mathbf{S} \quad (= \int_S \mathbf{n} dS) \quad (\text{Gauss型})$$

$$\int_S d\mathbf{S} \times \nabla = \int_\ell d\mathbf{r} \quad (= \int_\ell \mathbf{t} d\ell) \quad (\text{Stokes型})$$

$$\int_\ell d\mathbf{r} \cdot \nabla = \quad | \quad (\text{FTC型})$$

FTC: Fundamental Theorem of Calculus *on the curve*

FTC型の右辺の $|$ は、次の積分の $|$ と同じ意味: $\int_a^b \frac{df}{dx} dx = f(x) \Big|_a^b$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (\nabla \cdot \mathbf{A} = \text{div } \mathbf{A}) \quad (\text{Gaussの公式})$$

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \int_\ell \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad , \quad \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_\ell (\mathbf{A} \cdot \mathbf{t}) d\ell \quad (\nabla \times \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{A}) \quad (\text{Stokesの公式})$$

$$\int_a^b \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}) \Big|_a^b = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) \quad (\text{FTC})$$

Gauss型

$$\int_V dV \nabla \phi = \int_S \phi d\mathbf{S}$$

$$\int_V dV \nabla \cdot \mathbf{A} = \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}$$

$$\int_V dV \nabla \times \mathbf{A} = \int_S d\mathbf{S} \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} = \phi \nabla \psi$$

$$\int (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) dV = \int \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS$$

$$\text{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \nabla \phi \cdot \nabla \psi + \phi \nabla \cdot \nabla \psi \quad \longrightarrow$$

$$= \int \phi \mathbf{n} \cdot \nabla \psi dS = \int \phi \nabla \psi \cdot d\mathbf{S}$$

$$\mathbf{A} = \phi (\nabla \psi) - (\nabla \phi) \psi$$



$$\int (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV = \int \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS$$

$$= \int (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot d\mathbf{S}$$

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot (\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})) \\ &= (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{B} \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})) \\ & \quad - (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})) \\ &= \mathbf{A} \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})) - \mathbf{B} \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})) \end{aligned}$$



$$\int_V dV [\mathbf{A} \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})) - \mathbf{B} \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}))]$$

$$= \int_S d\mathbf{S} \cdot (\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}))$$

$$\int_V dV \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \int_S d\mathbf{S} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

$$\int_V dV [(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}] = \int_S d\mathbf{S} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

Stokes型

$$\int_S d\mathbf{S} \times \nabla \phi = \int_\ell d\mathbf{r} \phi$$

$$\int_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \cdot \mathbf{A} = \int_\ell d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}$$

$$\int_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{A} = \int_\ell d\mathbf{r} \times \mathbf{A}$$

閉曲面



$$\int_S d\mathbf{S} \times \nabla \phi = 0$$



Gauss型からも明らか

$$\int_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \int_\ell d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

$$\int_S ((\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \int_\ell d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

$$(d\mathbf{S} \times \nabla) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = d\mathbf{S} \cdot (\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}))$$



$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \longrightarrow \quad ((\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S}$$

$$\int_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \int_\ell d\mathbf{r} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

$$(d\mathbf{S} \times \nabla) \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} ((d\mathbf{S} \times \nabla) \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \cdot (d\mathbf{S} \times \nabla)) \mathbf{A} - \mathbf{B} ((d\mathbf{S} \times \nabla) \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot (d\mathbf{S} \times \nabla)) \mathbf{B}$$

$$(d\mathbf{S} \times \nabla) \cdot \mathbf{B} = d\mathbf{S} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}), \quad \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{S} \times \nabla) = (\mathbf{B} \times d\mathbf{S}) \cdot \nabla$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \longrightarrow \left[\int_S ((\mathbf{B} \times d\mathbf{S}) \cdot \nabla) \mathbf{A} - ((\mathbf{A} \times d\mathbf{S}) \cdot \nabla) \mathbf{B} \right] = \int_\ell d\mathbf{r} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

$$(d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{A} = -(\nabla \cdot \mathbf{A}) d\mathbf{S} + \nabla (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S})$$

$$= -(\nabla \cdot \mathbf{A}) d\mathbf{S} + (d\mathbf{S} \cdot \nabla) \mathbf{A} + d\mathbf{S} \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

$$\longrightarrow \int_\ell d\mathbf{r} \times \mathbf{A} = \int_S \left[-(\nabla \cdot \mathbf{A}) d\mathbf{S} + (d\mathbf{S} \cdot \nabla) \mathbf{A} + d\mathbf{S} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right]$$

$$(d\mathbf{S} \times \nabla) \cdot (f \nabla g) = d\mathbf{S} \cdot (\nabla \times f \nabla g)$$

$$= d\mathbf{S} \cdot (\nabla f \times \nabla g)$$

$$\longrightarrow \int_S d\mathbf{S} \cdot (\nabla f \times \nabla g) = \int_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \cdot (f \nabla g)$$

$$= \int_\ell f \nabla g \cdot d\mathbf{r} = \int_\ell f dg = - \int_\ell g df$$

$$\int_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \nabla f = \int_\ell d\mathbf{r} \times \nabla f$$

$$(d\mathbf{S} \times \nabla) \times \nabla f = \nabla \times (\nabla \times d\mathbf{S}) f$$

$$= \left[(d\mathbf{S} \cdot \nabla) \nabla - (\nabla^2) d\mathbf{S} \right] f$$

$$\longrightarrow \int_S \left[(d\mathbf{S} \cdot \nabla) \nabla f - (\nabla^2 f) d\mathbf{S} \right] = \int_\ell d\mathbf{r} \times \nabla f$$

FTC型

$$\int_a^b d\mathbf{r} \cdot \nabla \phi = \phi \Big|_a^b$$

$$\int_a^b (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{A} = \mathbf{A} \Big|_a^b$$

$$\oint d\mathbf{r} \cdot \nabla \phi = 0$$

$$\oint (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

Stokes型からも



$$\oint d\mathbf{r} \cdot \nabla \phi = \int_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \cdot \nabla \phi$$

$$= \int_S d\mathbf{S} \cdot (\nabla \times \nabla) \phi = 0$$



$$\oint (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{A} = \int_S ((d\mathbf{S} \times \nabla) \cdot \nabla) \mathbf{A}$$

$$= \int_S d\mathbf{S} \cdot (\nabla \times \nabla) \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

座標ベクトルに関する積分

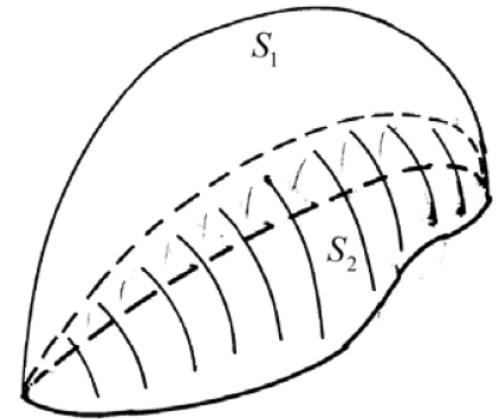
$$\int d\mathbf{r} \times \mathbf{r} = \int (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{r}$$

$$(d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{r} = \nabla_r (d\mathbf{S} \cdot \mathbf{r}) - d\mathbf{S} (\nabla \cdot \mathbf{r})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3 \qquad \nabla_r (d\mathbf{S} \cdot \mathbf{r}) = (d\mathbf{S} \cdot \nabla_r) \mathbf{r} + d\mathbf{S} \times (\nabla_r \times \mathbf{r}) = d\mathbf{S}$$

$$(d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{r} = -2 d\mathbf{S} \qquad \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = \mathbf{S} (= \int d\mathbf{S})$$

境界を共有する表面



$$\int (dV \nabla) c = \int c d\mathbf{S} \qquad \text{(閉曲面)} \int d\mathbf{S} = \mathbf{0} \qquad \int d\mathbf{S}_1 = \int d\tilde{\mathbf{S}}_1$$

$$\int dV \nabla \cdot \mathbf{r} = \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{r} \longrightarrow \int \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = 3V \qquad \text{左辺: } r 4\pi r^2$$

(球体)

$$0 = \int dV \nabla \times \mathbf{r} = \int d\mathbf{S} \times \mathbf{r}$$

$$\nabla r^2 = 2r \nabla r = 2r \mathbf{n} = 2\mathbf{r}$$

$$\longrightarrow \int \mathbf{r} dV = \frac{1}{2} \int r^2 d\mathbf{S}$$

$$\int (d\mathbf{S} \times \nabla) c = \int c d\mathbf{r} \longrightarrow \int d\mathbf{r} = \mathbf{0}$$

$$0 = \int (d\mathbf{S} \times \nabla) \cdot \mathbf{r} = \int d\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \longrightarrow \int \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

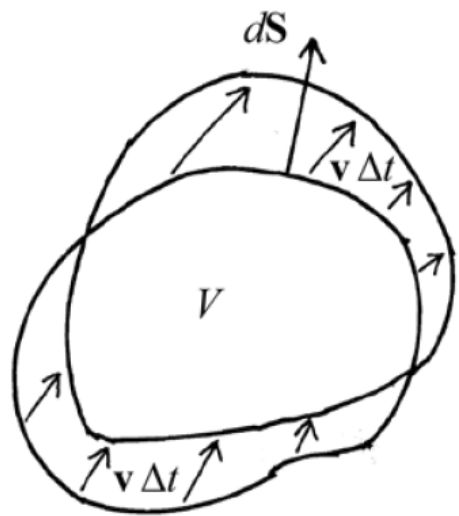
$$\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = 1/2 d\mathbf{r}^2.$$

積分量の時間変化

ラグランジュ微分 (Lagrange's derivative) :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad \left(= \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \right)$$

体積積分



$$\frac{d}{dt} \int f dV = \int \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int f \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\frac{d}{dt} \int f dV = \int \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(f \mathbf{v}) \right] dV = \int \left[\frac{Df}{Dt} + f \text{div} \mathbf{v} \right] dV$$

任意の領域で
成立するなら、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{D\mathbf{r}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{r} = 0 + \mathbf{v} = \mathbf{v}$$

位相空間 (phase space)

$$\mathbf{r}: (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$$

$$\mathbf{v}: (\dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N, \dot{\mathbf{p}}_1, \dots, \dot{\mathbf{p}}_N)$$

$$\text{div} \mathbf{v} = \sum \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \mathbf{r}_i} + \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_i}{\partial \mathbf{p}_i} \right)$$

$$\text{div} \mathbf{v} = 0$$

[Liouvilleの定理]

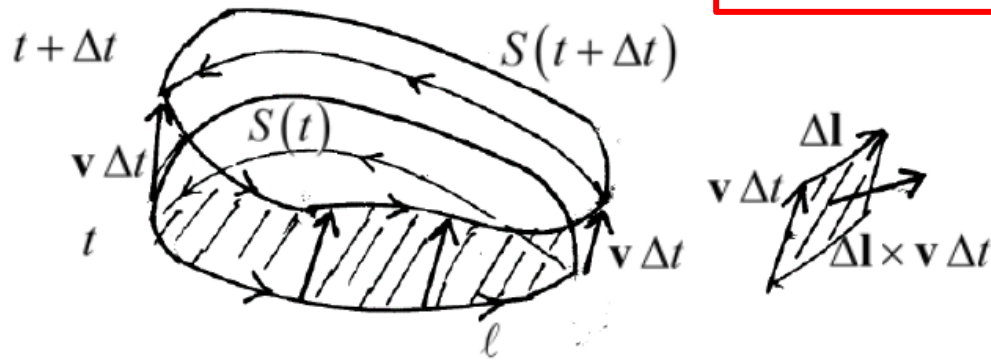
$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \mathbf{r}_i} + \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_i}{\partial \mathbf{p}_i} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i} \right) = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

一粒子系： $\frac{D}{Dt} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \dot{\mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0$ $\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0$

(冗談?) 自己撞着 (self-inconsistency) を、「物理的直観」により、自己無撞着 (self-consistency) に切り替えると、 $\longrightarrow$ **集団運動のブラソフ (Vlasov) 方程式**

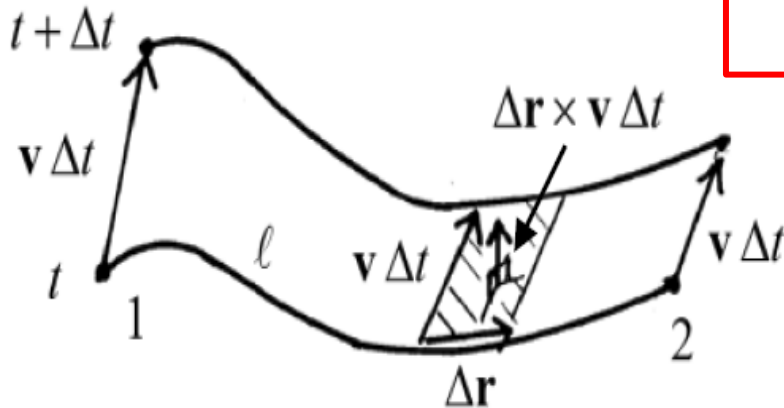
面積積分



$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\text{div } \mathbf{A}) \mathbf{v} + \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{v}) \right] \cdot d\mathbf{S}$$

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\text{div } \mathbf{A}) \mathbf{v} \right] \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{閉曲面の場合})$$

線積分



$$\frac{D}{Dt} \int_1^2 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{v} \right] \cdot d\mathbf{r} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v})_2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v})_1$$

$$\frac{D}{Dt} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \oint \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{v} \right] \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{閉曲線の場合})$$

微分形式を使った機械的な計算（体積積分）

たとえば、「物質座標」で

$$\int f(t, x, y, z) dV(t, x, y, z) = \int F(t, a, b, c) d\tilde{V}(t, a, b, c) \text{ となっていると思うことにする。}$$

$$\frac{D}{Dt} (f \, dx \wedge dy \wedge dz) = \frac{Df}{Dt} dx \wedge dy \wedge dz + f \frac{D(dx \wedge dy \wedge dz)}{Dt}$$

$$\frac{D(dx \wedge dy \wedge dz)}{Dt} = dv_x \wedge dy \wedge dz + dx \wedge dv_y \wedge dz + dx \wedge dy \wedge dv_z$$

$$f \, dv_x \wedge dy \wedge dz = d(f \, v_x) \wedge dy \wedge dz - v_x df \wedge dy \wedge dz = d(f \, v_x dy \wedge dz) - v_x \frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz$$

$$f \, dv_x \wedge dy \wedge dz = d(f \, \mathbf{v}_x d\mathbf{S}_x) - \mathbf{v}_x \frac{\partial f}{\partial x} dV$$

$$\boxed{\frac{D}{Dt} (f \, dx \wedge dy \wedge dz) = \frac{Df}{Dt} dV + d(f \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) f dV}$$

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega$$

$$\int_V d(f \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}) = \int_{\partial V} (f \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}) = \int_V \nabla \cdot (f \mathbf{v}) dV$$

$$\frac{Df}{Dt} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) f = \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt} \int f \, dV = \int \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(f \mathbf{v}) \right] dV$$

微分形式を使った機械的な計算（面積積分）

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\operatorname{div} \mathbf{A}) \mathbf{v} \right) \cdot d\mathbf{S} + \int_S d(\mathbf{A} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{r}))$$

（詳細は、講義録を参照）

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega$$

$$\int_S d(\mathbf{A} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{r})) = \int_{\partial S} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{r}) = \int_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{v}) = \int_S d\mathbf{S} \cdot (\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{v}))$$

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\operatorname{div} \mathbf{A}) \mathbf{v} + \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{v}) \right] \cdot d\mathbf{S}$$

微分形式を使った機械的な計算（線積分）

$$\frac{D}{Dt} \int_1^2 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{A} \cdot (\vec{\nabla} \times (d\mathbf{r} \times \mathbf{v})) + d(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \right]$$

（詳細は、講義録を参照）

ベクトル解析
の演習

$$\frac{D}{Dt} \int_1^2 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{r} + ((\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{r} \right] + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v})_2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v})_1$$

座標変換とベクトル変換

ベクトルとは、「絶対」空間の中に実在する（方向と量をもった）対象物で、人間が勝手に描いた座標とは無関係に存在するものである（と定義するのである）。つまり座標変換によらない、言い換えれば、座標変換に対して不変な存在としてベクトルを考えるのである。

ここで、直交変換のみを扱うことにする。

※ 共変 (covariant)、反変 (contravariant) については、講義録中のコメントを参照

変換前

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

変換後

$$\mathbf{x}' = x'_1 \mathbf{e}'_1 + x'_2 \mathbf{e}'_2 + x'_3 \mathbf{e}'_3 = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3) \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}'$$

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) P^{-1} P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3) \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3) P$$

※ 説明をわかりやすくしたために必ずしも論理的ではない。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = P^T \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3) P$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$P^T P = I$$

$$\det P = \pm 1$$

成分ベクトルと基底ベクトルの変換

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \quad \left(\Leftrightarrow (P^T)^{-1} = P \right)$$

外積ベクトルの変換

$$\mathbf{a}' \times \mathbf{b}' = \begin{vmatrix} \mathbf{e}'_1 & a'_1 & b'_1 \\ \mathbf{e}'_2 & a'_2 & b'_2 \\ \mathbf{e}'_3 & a'_3 & b'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} & P \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} & P \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \end{vmatrix} = \det P \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \mathbf{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \mathbf{e}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \det P (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

擬ベクトルの変換

$$\mathbf{c}' = (\det P) \mathbf{c}$$

擬ベクトルまたは外積ベクトルの成分の変換

$$\begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \end{pmatrix} = (\det P) P \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

ベクトルの変換（回転）

- ・ ベクトル自体が動く（回転する）とする
- ・ 線形変換であるとする

※ 基底ベクトルは変換しない

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \|\mathbf{x}'\|^2 = \|R\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 \quad \longrightarrow \quad (R\mathbf{y}, R\mathbf{x}) = (\mathbf{y}, R^T R\mathbf{x}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$$
$$R^T R = I$$

今、基底ベクトルも一緒に変換したと仮定すると

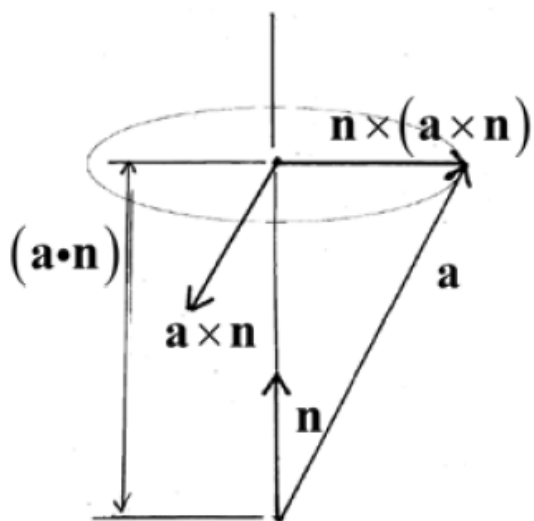
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = PR \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad PR = I \quad \longrightarrow$$
$$P = P_n P_{n-1} \cdots P_1$$

$$R = P^{-1} = P^T$$

$$R = P^{-1} = P_1^T \cdots P_{n-1}^T P_n^T$$

※ 注：変換の順番が逆になる

ある軸のまわりのベクトルの回転



$$\mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \mathbf{n} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{n}) \quad (\text{ベクトルの分解})$$

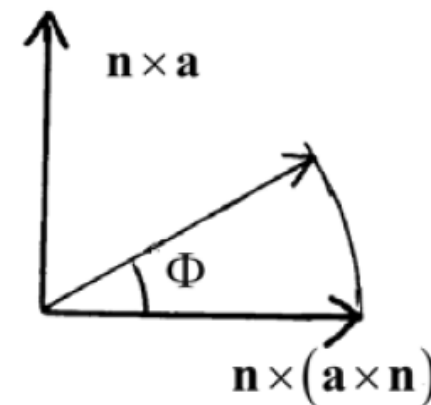
※ ベクトル演算の
基本関係式からも

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{n}) = \mathbf{a} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$$

回転後のベクトル

$$\mathbf{a}' = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \mathbf{n} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{n}) \cos \Phi + (\mathbf{n} \times \mathbf{a}) \sin \Phi$$

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} \cos \Phi + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} (1 - \cos \Phi) + (\mathbf{n} \times \mathbf{a}) \sin \Phi$$



※ Euler角による回転行列、回転軸、回転角については、講義録を参照
また、回転とquaternionの関係については、Appendix Cを参照

「はかない」ベクトル、レンツ・ベクトル (Laplace-Runge-Lenz vector)

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \mathbf{n} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{n}) \quad (\text{一般のベクトルの分解})$$



$$\dot{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \times (\dot{\mathbf{n}} \times \mathbf{n})$$

※ ただし、ベクトル演算の基本関係式を使うと元も子もないので、使わない

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{n}}) + \dot{\mathbf{n}} = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{n}}) = \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times r \dot{\mathbf{n}})$$

$$\dot{\mathbf{r}} = d(r\mathbf{n})/dt = \dot{r}\mathbf{n} + r\dot{\mathbf{n}} \quad \mathbf{r} \times r\dot{\mathbf{n}} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\frac{1}{r^3} \mathbf{r} \times \mathbf{L} + m\dot{\mathbf{n}} = 0}$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -k \frac{\mathbf{n}}{r^2} = -k \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (k = GMm) \quad \longrightarrow \quad -\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} + km\dot{\mathbf{n}} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L} - km\mathbf{n}) = 0$$

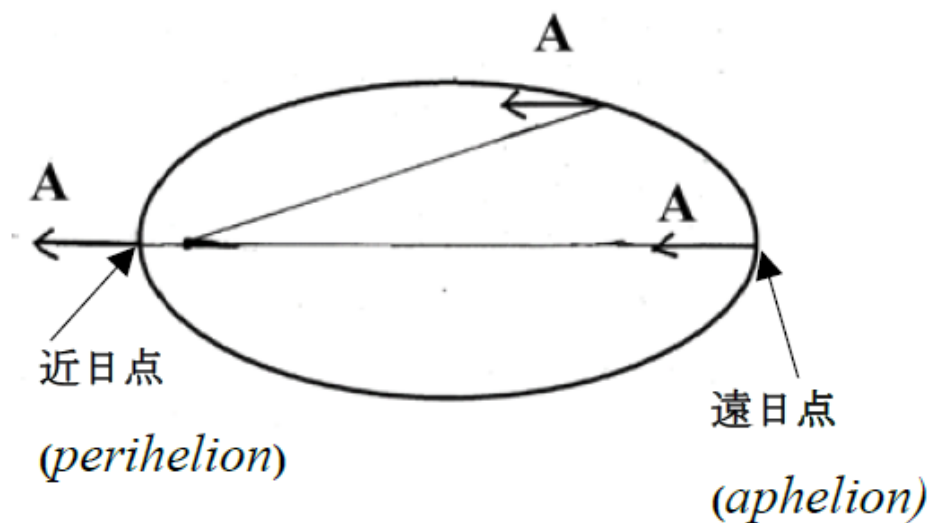
$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - km\mathbf{n}$$

(レンツ・ベクトル)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = A r \cos \theta = \mathbf{L}^2 - k m r$$

$$r = \frac{\mathbf{L}^2}{km} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{A}{km} \cos \theta\right)} = \frac{\mathbf{L}^2 / km}{1 + e \cos \theta}$$

$A = km e$ ※ 円軌道の場合、レンツ・ベクトルはゼロ



近日点または遠日点では

$$\mathbf{A} = \left(r (mv)^2 - k m \right) \mathbf{n}$$

$$m\ddot{r} = m v^2 / r - k / r^2$$

$$\mathbf{A} = m^2 r^2 \ddot{r} \mathbf{n}$$

電磁気学： $\text{div } \mathbf{B} = 0 \longrightarrow \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ は、OKか？

※ これは、信仰（または盲信）によって、救済される！？

※ $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ または $\text{rot}(\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t) = 0$
 $\longrightarrow \mathbf{E} = -\text{grad } \Psi$ または $\mathbf{E} = -\text{grad } \Psi - \partial \mathbf{A} / \partial t$ についても同様

電磁気学では、普通（？）

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$



$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

球体の外部空間でも、安易に（？）、上の式が成立するとする



これは信仰の対象？
※これは、講義録にはない例である。

流体力学

縮まない流体： $\text{div } \mathbf{v} = 0$

結論？ $\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{A}$

$$\partial S = 0$$



$$\int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

流体力学（続き）

球表面からの等方的な湧き出し（動径方向に一様な湧き出し）を仮定

$$\int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi r^2 v = Q$$



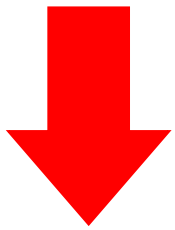
$$\mathbf{v} = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2} \mathbf{n}$$

$$\mathbf{v} = -\text{grad} \frac{Q}{4\pi r}$$

※ 球の外部では、 $\text{div} \mathbf{v} = 0$

正しい結論：

$$\mathbf{v} \neq \text{rot} \mathbf{A}$$



球内への仮想的な延長： 球内では

$$\text{div} \mathbf{v} = q \neq 0$$

$$q = Q / \left(\frac{4\pi a^3}{3} \right)$$

電磁気学でも、 $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$ とはできないのではないか？

※ 境界値問題としては、数学的な根拠もないのである。



深刻な精神的ストレス



信仰によってのみ救済される

「かすかな」光明は、球内でも $\text{div} \mathbf{B} = 0$ であろうこと

ヘルムホルツ (Helmholtz) の定理

$$\mathbf{A} = -grad \Phi + rot \mathbf{B}$$

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(r)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int \mathbf{A}(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' = -\frac{1}{4\pi} \int \mathbf{A}(\mathbf{r}') \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' = -\frac{\nabla^2}{4\pi} \int \mathbf{A}(\mathbf{r}') \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV'$$

$$\nabla^2 = grad(div) - rot rot$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -grad \underbrace{\left[\frac{\nabla}{4\pi} \cdot \int \mathbf{A}(\mathbf{r}') \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' \right]}_{\Phi} + rot \underbrace{\left[\frac{\nabla}{4\pi} \times \int \mathbf{A}(\mathbf{r}') \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' \right]}_{\mathbf{B}}$$

$$\mathbf{A} = -grad \Phi + rot \mathbf{B}$$

$$\nabla' f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = -\nabla f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$$

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{div' \mathbf{A}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{A}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot d\mathbf{S}' , \quad \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{rot' \mathbf{A}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{A}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times d\mathbf{S}'$$

無限遠点での境界積分(1)

$$\Phi_S = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{A}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \cdot d\mathbf{S}'$$

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{R} \left(1 + \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}}{R^2} + \dots \right) \quad \leftarrow \mathbf{R} = \mathbf{r}'$$

$$\Phi_S = -\underbrace{\frac{1}{4\pi R} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}_{I_1} - \underbrace{\frac{1}{4\pi R^3} \int (\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}_{I_2}$$

$$I_1 = -\frac{1}{4\pi R} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{1}{4\pi R} \int \text{div} \mathbf{A} dV$$

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{1}{4\pi R^3} \int (\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{1}{4\pi R^3} \int \nabla \cdot ((\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{A}) dV \\ &\xrightarrow{\nabla(\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{r}} = -\frac{1}{4\pi R^3} \int (\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}) \text{div} \mathbf{A} dV - \frac{1}{4\pi R^3} \mathbf{r} \cdot \int \mathbf{A} dV \end{aligned}$$

[仮定 1]

$\int \text{div} \mathbf{A} dV$: 有限

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{a}$$

$$\mathbf{R} \rightarrow \infty$$

$$I_1 \rightarrow 0 \quad I_2 \rightarrow -\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{3} \quad \leftarrow \int \mathbf{A} dV \rightarrow \frac{4\pi R^3}{3} \mathbf{a}$$

[仮定 2]

$$\text{div} \mathbf{A} = 0$$

$$I_1 = 0, \quad I_2 = -\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{3} \quad \longrightarrow \quad \Phi \rightarrow -\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{3}$$

※ 体積積分 : ゼロ

$$\text{div} \mathbf{A} = 0 \longrightarrow \Phi = 0$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{6} (\mathbf{a} \times \mathbf{r})$$

無限遠点での境界積分(2)

$$\mathbf{B}_S = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{A}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times d\mathbf{S}'$$

$$\mathbf{B}_S = \underbrace{\frac{1}{4\pi R} \int \mathbf{A} \times d\mathbf{S}}_{I_3} + \underbrace{\frac{1}{4\pi R^3} \int (\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{A} \times d\mathbf{S}}_{I_4}$$

$$I_3 = \frac{1}{4\pi R} \int \mathbf{A} \times d\mathbf{S} = -\frac{1}{4\pi R} \int \nabla \times \mathbf{A} dV$$

$$I_4 = \frac{1}{4\pi R^3} \int (\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{A} \times d\mathbf{S} = -\frac{1}{4\pi R^3} \int \nabla \times ((\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{A}) dV = -\frac{1}{4\pi R^3} \int (\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}) \text{rot} \mathbf{A} dV - \frac{1}{4\pi R^3} \mathbf{r} \times \int \mathbf{A} dV$$

[仮定 1]

$\int \nabla \times \mathbf{A} dV$: 有限

$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{a}$

$\mathbf{R} \rightarrow \infty$

$I_3 \rightarrow 0$

$I_4 \rightarrow \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{r}}{3}$

$\longleftarrow \int \mathbf{A} dV \rightarrow \frac{4\pi R^3}{3} \mathbf{a}$

[仮定 2]

$\text{rot} \mathbf{A} = 0$

$I_3 = 0, \quad I_4 = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{r}}{3}$

$\longrightarrow$

$\mathbf{B} \rightarrow \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{r}}{3}$

※ 体積積分 : ゼロ

$\text{rot} \mathbf{A} = 0 \longrightarrow \mathbf{B} = 0$

$\Phi = -\frac{2}{3} \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$

簡単な場合 (Helmholtzの定理)

$$\mathbf{r} \rightarrow \infty \quad \text{十分速く} \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{0}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -(-\nabla^2 \mathbf{A})$$

$$\nabla^2 \phi = -\rho \quad \rightarrow \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla'^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

※ 個人的に気に入っている解法

$$\nabla^2 = \text{grad}(\text{div}) - \text{rot rot}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla'(\text{div}' \mathbf{A}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times (\text{rot}' \mathbf{A}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

$$\nabla' f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = -\nabla f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$$

無限遠点で境界積分がゼロとすると

$$\mathbf{A} = -\text{grad} \Phi + \text{rot} \mathbf{B}$$

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{div}' \mathbf{A}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{\text{rot}' \mathbf{A}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV'$$

ポアンカレの補題 (Poincare lemma)

ポアンカレの補題 $\omega = d\alpha \longrightarrow d\omega = dd\alpha = 0$ ※ 外微分の定義から自動的に成る

ポアンカレの補題 (の逆) $d\omega = 0 \longrightarrow \omega = d\alpha$ ※ 無条件ではない

この逆もポアンカレの補題と言ふことが多いようである

- ※ ポアンカレの補題が成り立つためには、
 - 対象の空間が可縮空間であればよい。
 - 特に空間が星形領域 (star-shaped region) であれば具体的表式が得られる。



星形領域
(star-shaped region)

$$\omega = d(K\omega)$$

※ 詳細は、講義録を参照のこと

電磁気学： $\text{div } \mathbf{B} = 0 \longrightarrow \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ を救済するには

境界も含め、対象の空間の外でも、 $\text{div } \mathbf{B} = 0$ が成り立つと信じることである。

※ 単純に言えば、Maxwell方程式は、全空間で成り立つと信じることである。また境界（条件）もそれが成り立つようなものしか考えないことにするのである。

[Helmholtzの定理]

- 全空間でMaxwell方程式が成り立つとすると、かなりゆるい条件で、救済される
- ただし、全空間という条件が必要
- 場は、その源と考えることができる、場の div と rot で表される。

[Poincareの補題]

- 対象の空間を含む、「単純な」領域（星形領域のような可縮空間）でMaxwell方程式が成り立つとすると、救済される
- 全空間という条件は必要ではないが、あらゆる場合にも救済されるためには、所詮は、全空間でMaxwell方程式が成り立つ必要がある
- 場は、その源というようなものを考えるのではなく、対象の空間内での場の「様相」のようなものによって決まる



信じる者は
救われる！

磁場への応用

$$\frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2\mu_0} \int_{air} \mathbf{B}^2 dV = \frac{1}{2} \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} dV$$

※ 第二式は、鉄心の中の透磁率が ∞ と見なせる場合

相互インダクタンス $L_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{s}_i \cdot d\mathbf{s}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$

[ノイマン (Neumann) の公式]

※ 講義録には、その他の若干の話題も載せてある

導波管内の電磁場への応用

$$\mathbf{E}_\perp = \frac{i}{\gamma^2} \left[k \nabla_\perp E - \left(\frac{\omega}{c} \right) \mathbf{n} \times \nabla_\perp (Z_0 H) \right]$$

$$\gamma^2 = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - k^2, \quad c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}},$$

$$Z_0 \mathbf{H}_\perp = \frac{i}{\gamma^2} \left[\left(\frac{\omega}{c} \right) \mathbf{n} \times \nabla_\perp E + k \nabla_\perp (Z_0 H) \right]$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i \omega \varepsilon_0 \mathbf{E} , \quad \nabla \times \mathbf{E} = i \omega \mu_0 \mathbf{H} \quad \longrightarrow \quad \nabla \times Z_0 \mathbf{H} = -i \left(\frac{\omega}{c} \right) \mathbf{E} , \quad \nabla \times \mathbf{E} = i \left(\frac{\omega}{c} \right) Z_0 \mathbf{H}$$

$$c=1, Z_0=1 \quad \longrightarrow \quad \nabla \times \mathbf{H} = -i \omega \mathbf{E} , \quad \nabla \times \mathbf{E} = i \omega \mathbf{H}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x, y) \exp(i k z - i \omega t)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0(x, y) \exp(i k z - i \omega t)$$

$$\longrightarrow \quad \nabla_{\perp} \times \mathbf{H}_{\perp} = -i \omega E \mathbf{n} , \quad \nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp} = i \omega H \mathbf{n}$$

$$\nabla \cdot = 0 \quad (\nabla_{\perp} + i k \mathbf{n}) \cdot = 0 \quad \nabla_{\perp}^2 + (\omega^2 - k^2) = 0$$

$$-i k \nabla_{\perp} H + (\omega^2 - k^2) \mathbf{H}_{\perp} = i \omega \mathbf{n} \times \nabla_{\perp} E \quad -i k \nabla_{\perp} E + (\omega^2 - k^2) \mathbf{E}_{\perp} = -i \omega \mathbf{n} \times \nabla_{\perp} H$$

2次元領域（導波管の断面）の固有値問題

$$\nabla_{\perp}^2 E = -\gamma^2 E , \quad \nabla_{\perp}^2 H = -\gamma^2 H$$

$$\gamma^2 = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - k^2 = \beta_n^2 \geq 0$$

$$\omega/c = \beta \cosh \theta , \quad k = \beta \sinh \theta$$

$$\text{phase velocity: } v_{\text{ph}} = \omega/k = c \coth \theta \quad (> c)$$

$$\text{group velocity: } v_{\text{g}} = d\omega/dk = c \tanh \theta \quad (< c)$$

位相速度は、光速より速くてもよいのか？

光速より十分に遅い東海道新幹線の「ひかり」の車両列の動きは、光速より速くできる
同様に（人間による）手旗信号も光速より速くできる

TEM mode

導波管内の電磁場の式を使うことにすると、 $E, H \rightarrow 0 \Rightarrow \omega^2 \rightarrow k^2$

$E, H \propto \omega^2 - k^2$ として、簡約すると、

$$\mathbf{E}_{\perp} = \nabla_{\perp} \phi - \mathbf{n} \times \nabla_{\perp} \psi$$

$$\mathbf{H}_{\perp} = \mathbf{n} \times \nabla_{\perp} \phi + \nabla_{\perp} \psi$$

一見、二つの別々の関数が必要であるように見えるが・・・
複素関数論を使うと一つで十分ということがわかる。

$$f(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$$

※ 詳細は、講義録を参照のこと

微分形式への超イントロ

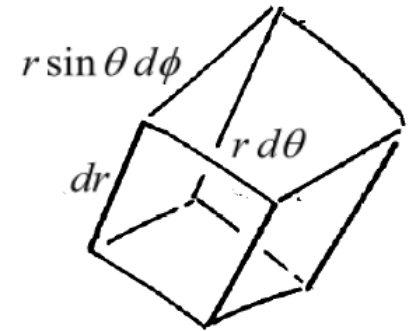
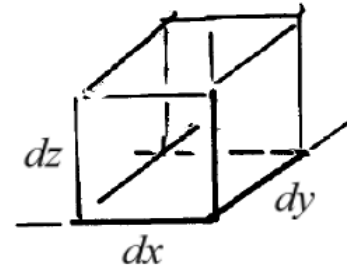
直交座標と極座標での体積積分

○
$$\int_V f(x, y, z) dx dy dz = \int \tilde{f}(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

体積要素



$$dx dy dz \neq r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$



微分形式

$$dx \wedge dy \wedge dz = r^2 \sin \theta dr \wedge d\theta \wedge d\varphi$$

幾何学的考察なしに式を導くことができるか？

局所的体積の表式が等しくないとすると=> 何かとまずい

積分の線形性

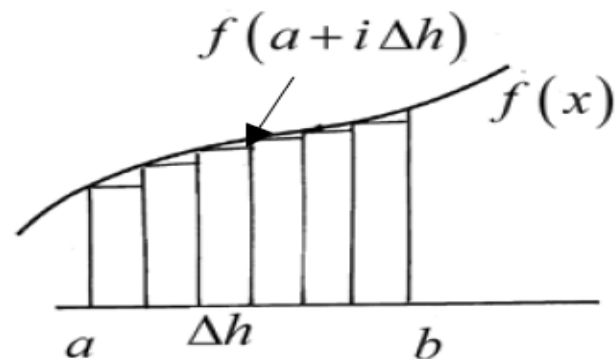
$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\sum_{i=1}^n f(a + i \Delta h) \Delta h = \sum_{i=1}^1 f(a + i \Delta h) \Delta h$$

$$\approx \int_b^a f(x) dx$$

$$S(f; \{a, b\}) = \int_a^b |f(x)| dx \quad \text{を積分の定義とはしない}$$

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx \quad ?$$



a, b, c の大小にかかわらず

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad ?$$

積分の再定義

$$\int_C f(x) dx \approx \sum_i f(x_i) dx(\Delta \mathbf{a}_i)$$

$$\Delta \mathbf{a}_i = \Delta h_i \mathbf{i}$$

$$dx(\Delta \mathbf{a}_i) = \Delta h_i$$

$$\sum_i f(x_i) dx(\Delta \mathbf{a}_i) = \sum_i f(x_i) \Delta h_i$$

体積とは？

体積： $V = l w h$

微小体積： $dV = dx dy dz$

斜体の体積：

$$V = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$$

斜体の微小体積：

$$d\mathbf{a} = \mathbf{a} du, \quad d\mathbf{b} = \mathbf{b} dv, \quad d\mathbf{c} = \mathbf{c} dw$$

$$dV = d\mathbf{c} \cdot (d\mathbf{a} \times d\mathbf{b}) = \det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] du dv dw$$

n次元の斜体の体積：

$$V = \det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n]$$

n次元の斜体の微小体積：

$$dV = \det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n] du_1 du_2 \cdots du_n$$

体積積分の表式（例）

$$\int f(\mathbf{y}) dy_1 dy_2 \cdots dy_n = \int f(\mathbf{y}(\mathbf{x})) \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \right| dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

※ detの絶対値は、「いただけない」

n 次元の体積

n個のベクトル、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ による体積

$$V = a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad V = \det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad V = \det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$n-1$ 次元空間の $n-1$ 個のベクトル、 $\mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$

による体積

$$\det \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$V' = \det [P\mathbf{a}_1, P\mathbf{a}_2, \dots, P\mathbf{a}_n] = \det P \cdot \det [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n] = V$$

座標変換

$$\begin{aligned}x_1 &= x_1(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ \vdots &\quad \quad \quad \vdots \\ x_n &= x_n(u_1, u_2, \dots, u_n)\end{aligned}$$

微分変換

$$d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_1 \\ \vdots \\ du_n \end{pmatrix}$$

$$d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} = \mathbf{a}_1 du_1 + \cdots + \mathbf{a}_n du_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_1 \\ \vdots \\ du_n \end{pmatrix}$$

体積要素

$$dV = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{bmatrix} du_1 du_2 \cdots du_n$$

$$dV_u = \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} du_1 \cdots du_n$$



$$dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} du_{i_1} du_{i_2} \cdots du_{i_n}$$

似て非なるものであるが、このまま捨てるのは忍びない（形がよいので・・・）

そこで、勝手に以下のようにおいてみよう

$$du_i du_i = 0 \quad du_i du_j = -du_j du_i$$

$$dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

$$= \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} du_1 \wedge \cdots \wedge du_n = \det(A) du_1 \wedge \cdots \wedge du_n$$

形は、よいが、こんな「怪しげなもの」がそのまま体積を与えるはずはない。
そこで、これは演算子と考えて、たとえば、

$$dx_1(\mathbf{a}) = a_1$$

のように、座標成分を取り出すものとし、wedge積は、行列式を構成すると考える。

$$\begin{aligned} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n [\mathbf{a}_1 \Delta u_1, \cdots, \mathbf{a}_n \Delta u_n] &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Delta u_1 \Delta u_2 \cdots \Delta u_n \\ &= \det(A) \Delta u_1 \Delta u_2 \cdots \Delta u_n \end{aligned}$$

結果は、OK !

ちなみに、

$$\begin{aligned} dV_r &= dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n [\Delta x_1 \mathbf{i}_1, \Delta x_2 \mathbf{i}_2, \cdots, \Delta x_n \mathbf{i}_n] \\ &= \det \begin{pmatrix} \Delta x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Delta x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \Delta x_n \end{pmatrix} = \Delta x_1 \Delta x_2 \cdots \Delta x_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} du_1 \wedge du_2 \wedge \cdots \wedge du_n [\mathbf{a}_1 \Delta u_1, \cdots, \mathbf{a}_n \Delta u_n] \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \Delta u_1 \Delta u_2 \cdots \Delta u_n \\ &= \Delta u_1 \Delta u_2 \cdots \Delta u_n \end{aligned}$$

多重積分の定義

$$\int f(\mathbf{x}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ \approx \sum f(\mathbf{x}_i) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n [\mathbf{a}_1 \Delta u_1, \cdots, \mathbf{a}_n \Delta u_n]$$

$$= \sum f(\mathbf{x}_i) \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Delta u_1 \Delta u_2 \cdots \Delta u_n$$

$$= \sum f(\mathbf{x}_i) \det(A) \Delta u_1 \Delta u_2 \cdots \Delta u_n \approx \int f(\mathbf{x}) \det(A) du_1 \wedge du_2 \wedge \cdots \wedge du_n$$

※ 微分形式の積分は、ベクトルの組を作用させて、初めて意味があるのであるが、通常は面倒なので省略することが多い。

よく、以下のような式を書いて、左辺は微分形式で表した積分で、右辺は、通常の多重積分で表した積分とであるというような「禅問答」的表現が使われる。

$$\int f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

外微分とHodgeの星印作用素

スカラー関数の外微分 (定義)

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

ベクトルへの作用

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{i}_1 + \cdots + v_n \mathbf{i}_n$$

$$dx_i(\mathbf{v}) = v_i$$

$$df(\mathbf{v}) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \quad \longleftrightarrow \quad df(\mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) f$$

微分作用素としてのベクトル

$$X = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

$$df(X) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

$$df(X) = Xf$$

一般の微分形式の外微分 (定義)

$$\omega = \sum f_A(\mathbf{x}) dx_i \wedge dx_j \wedge \cdots \longrightarrow d\omega = \sum df_A(\mathbf{x}) \wedge dx_i \wedge dx_j \wedge \cdots$$

(微分 + wedge積)

$$\ell \text{ 次} \quad \omega = f(\mathbf{x}) dx_a \wedge dx_b \wedge \cdots$$

$$m \text{ 次} \quad \eta = g(\mathbf{x}) dx_i \wedge dx_j \wedge \cdots$$

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^l \omega \wedge d\eta$$

外微分のLeibniz則



$$\eta \wedge \omega = (-1)^{lm} \omega \wedge \eta$$

$$d(\omega \wedge \eta)$$

$$= d(f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})) dx_a \wedge dx_b \wedge \cdots \wedge dx_i \wedge dx_j \wedge \cdots = (gdf + fdg) \wedge dx_a \wedge dx_b \wedge \cdots \wedge dx_i \wedge dx_j \wedge \cdots$$

$$d(df) = d\left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_i d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \wedge dx_i = \sum_j \sum_i \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right) dx_j \wedge dx_i \longrightarrow d(df) = 0$$

$$d(d\omega) = \sum d(df_A) \wedge dx_i \wedge dx_j \wedge \cdots$$

$$d(d\omega) = 0$$

ポアンカレの不変量 (Poincare' s invariant)

$$Q = dq_1 \wedge dp_1 + dq_2 \wedge dp_2 + \cdots + dq_n \wedge dp_n$$

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= d\dot{q}_1 \wedge dp_1 + d\dot{q}_2 \wedge dp_2 + \cdots + d\dot{q}_n \wedge dp_n \\ &\quad + dq_1 \wedge d\dot{p}_1 + dq_2 \wedge d\dot{p}_2 + \cdots + dq_n \wedge d\dot{p}_n\end{aligned}$$

$$d\dot{q}_i = d \frac{\partial H}{\partial p_i} = \sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_i} dq_j + \sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_i} dp_j$$

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_i} dq_j \wedge dp_i + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_i} dp_j \wedge dp_i - \sum_{i,j=1}^n dq_i \wedge \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial q_i} dq_j - \sum_{i,j=1}^n dq_i \wedge \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_i} dp_j \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_i} dq_j \wedge dp_i - \sum_{i,j=1}^n dq_j \wedge \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j} dp_i = 0\end{aligned}$$

$$Q^n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n! dq_1 dq_2 \cdots dq_n dp_1 dp_2 \cdots dp_n$$

Liouvilleの定理

外微分とベクトルの微分との関係

$$d : f(x, y, z) \rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad \longleftrightarrow \quad \text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

$$d : \alpha = A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz \rightarrow$$

$$d\alpha = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) dx dz$$

$$\text{rot} : \mathbf{a} = A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k} \rightarrow$$

$$\text{rot } \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

$$d : \beta = B_1 dy dz + B_2 dz dx + B_3 dx dy \rightarrow$$

$$d\beta = \left(\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z} \right) dx dy dz$$

$$\text{div} : \mathbf{\beta} = B_1 \mathbf{i} + B_2 \mathbf{j} + B_3 \mathbf{k} \rightarrow$$

$$\text{div } \mathbf{\beta} = \nabla \cdot \mathbf{\beta} = \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z}$$

FTC、Stokes、Gaussの定理と拡張されたStokesの定理

$$d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$$

$$d\mathbf{S} = (dy\,dz, dz\,dx, dx\,dy)$$

$$dV = dx\,dy\,dz$$



$$df = (\nabla f) \cdot d\mathbf{r}$$

$$d(\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

$$d(\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}) = (\nabla \cdot \mathbf{B}) dV$$



$$\int_a^b \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}) \Big|_a^b$$

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \int_\ell \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} \, dV = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$



$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega$$

少なくともこの範囲では、拡張されたStokesの定理が成立する

ホッジの星印作用素 (Hodge star operator)

$$*: \Omega^k \rightarrow \Omega^{n-k} \quad *; \lambda \mapsto *\lambda$$

$$\lambda \wedge \mu = \langle *\lambda, \mu \rangle \sigma = \langle *\lambda, \mu \rangle dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad (\text{微分形式の空間の基底に関して})$$

3次元ユークリッド空間の場合 $\alpha \wedge *\alpha = dV$

$$*d\mathbf{r} = d\mathbf{S} \quad *1 = dV$$

$$*d\mathbf{S} = d\mathbf{r} \quad *dV = 1$$

n次元ユークリッド空間の場合 $\lambda \wedge *\lambda = dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad (= \sigma)$

$$\lambda = dx_{i_1} dx_{i_2} \cdots dx_{i_k} \longrightarrow *\lambda = \varepsilon(i_1 \cdots i_n) dx_{i_{k+1}} dx_{i_{k+2}} \cdots dx_{i_n}$$

$$**\lambda = \varepsilon(i_1 \cdots, i_k, i_{k+1} \cdots i_n) * (dx_{i_{k+1}} dx_{i_{k+2}} \cdots dx_{i_n})$$

$$= \varepsilon(i_1 \cdots, i_k, i_{k+1} \cdots i_n) \varepsilon(i_{k+1} \cdots i_n, i_1 \cdots, i_k) (dx_{i_1} dx_{i_2} \cdots dx_{i_k}) = (-1)^{k(n-k)} dx_{i_1} dx_{i_2} \cdots dx_{i_k}$$

ローレンツ空間の場合

$$\begin{aligned} *1 &= -dV dt \\ *d\mathbf{r} &= -d\mathbf{S} dt \\ *dt &= -dV \\ *d\mathbf{S} &= -d\mathbf{r} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} *dV dt &= 1 \\ *d\mathbf{S} dt &= -d\mathbf{r} \\ *dV &= -dt \\ *d\mathbf{r} dt &= d\mathbf{S} \end{aligned}$$

一般の不定計量空間の場合

$$*dx_{i_1} dx_{i_2} \cdots dx_{i_k} = \varepsilon(i_1 \cdots i_n) (-1)^{s_2} dx_{i_{k+1}} dx_{i_{k+2}} \cdots dx_{i_n}$$

s_2 は、 $dx_{i_{k+1}} dx_{i_{k+2}} \cdots dx_{i_n}$
の中で計量が-1であるものの個数

$$**\lambda = \varepsilon(i_1 \cdots, i_k, i_{k+1} \cdots i_n) (-1)^{s_2} * (dx_{i_{k+1}} dx_{i_{k+2}} \cdots dx_{i_n})$$

$$= \varepsilon(i_1 \cdots, i_k, i_{k+1} \cdots i_n) \varepsilon(i_{k+1} \cdots i_n, i_1 \cdots, i_k) \times (-1)^{s_2} (-1)^{s_1} (dx_{i_1} dx_{i_2} \cdots dx_{i_k}) = (-1)^{k(n-k)+s} dx_{i_1} dx_{i_2} \cdots dx_{i_k}$$

s は、 $dx_1 dx_2 \cdots dx_n$
の中で計量が-1であるものの個数

※ ホッジの星印作用素の導出は、講義録を参照
また、電磁場への応用も講義録を参照

拡張されたStokesの定理 (extended Stokes' theorem)

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega$$

例 : $\oint P dx + Q dy = \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$

n次元のGaussの定理

$$\int \operatorname{div} \mathbf{f} dV = \int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}, \quad \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = f_1 dS_1 + f_2 dS_2 + \cdots + f_n dS_n$$

$$\Delta \mathbf{S} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \mathbf{e}_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{e}_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{S} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & dx_1(\mathbf{b}) & dx_1(\mathbf{c}) & \cdots \\ \mathbf{e}_2 & dx_2(\mathbf{b}) & dx_2(\mathbf{c}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{e}_n & dx_n(\mathbf{b}) & dx_n(\mathbf{c}) & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{S} = (\mathbf{e}_1 dx_2 dx_3 \cdots dx_n - \mathbf{e}_2 dx_1 dx_3 \cdots dx_n + (-1)^{i+1} \mathbf{e}_i dx_1 \cdots dx_i \cdots dx_n + \cdots) (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \cdots)$$

$$\mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = f_1 dx_2 dx_3 \cdots dx_n - f_2 dx_1 dx_3 \cdots dx_n + (-1)^{i+1} f_i dx_1 \cdots dx_i \cdots dx_n + \cdots$$

$$d(\mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 \cdots dx_n - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 dx_1 dx_3 \cdots dx_n + \frac{\partial f_i}{\partial x_i} (-1)^{i+1} f_i dx_1 \cdots dx_i \cdots dx_n + \cdots$$

$$= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \operatorname{div} \mathbf{f} dV$$

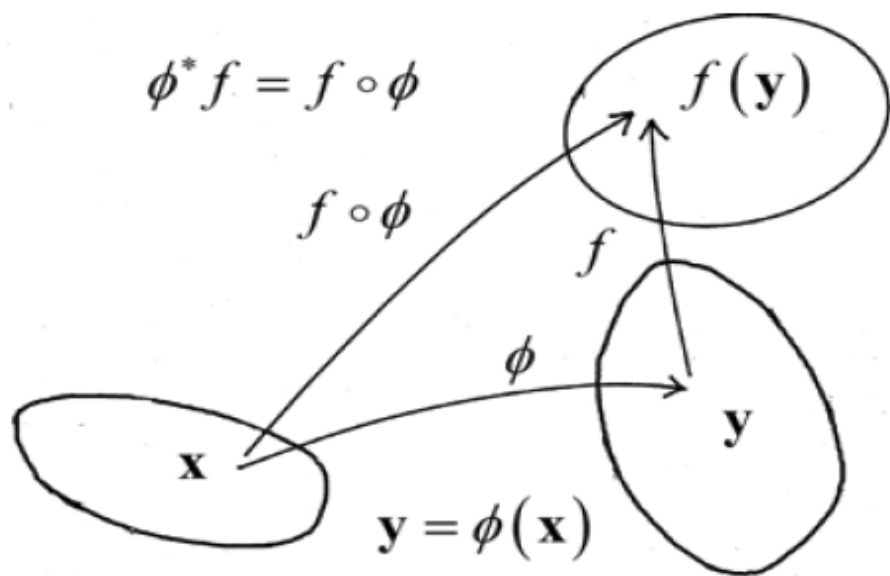
$$\omega = \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$$

$$d\omega = \operatorname{div} \mathbf{f} dV$$



$$\int_V d\omega = \int_S \omega$$

(引き戻し (pull back))



$$\phi: \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$$

$$f(\mathbf{y}) \rightarrow f(\phi(\mathbf{x}))$$

(単なる) 代入操作を「引き戻し」という

$$\phi^* f = f \circ \phi \quad (\phi^* f)(\mathbf{x}) = (f \circ \phi)(\mathbf{x}) = f(\phi(\mathbf{x}))$$

引き戻しの性質

$$\int \omega = \int \phi^* \omega \quad \phi^*(d\omega) = d(\phi^* \omega)$$

$$\int d\omega = \int \phi^*(d\omega) = \int d(\phi^* \omega)$$

$d\omega$: n次元空間のk次微分形式

ω : n次元空間のk-1次微分形式

K次元空間のGaussの定理

$$\int_V d(\phi^* \omega) = \int_S \phi^* \omega$$

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega$$

ポアンカレの補題 (Poincare lemma)

外微分の性質： $\omega = d\alpha \longrightarrow d\omega = d d\alpha = 0$

逆が成立するか？ $d\omega = 0 \longrightarrow \omega = d\alpha$ 常には成立しない

ただし、可縮空間、特に星形領域なら、成立する [Poincare lemma]



星形領域
(star-shaped region)

$$\omega = d(K\omega)$$

K homotopy operator

※ 詳細は、講義録を参照

例1

$$\alpha(\mathbf{x}) = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3 \qquad d\alpha = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \text{rot } \mathbf{A} = 0$$

$$\alpha = d(K\alpha) \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{A} = \text{grad } \phi \quad (\phi = K\alpha)$$

$$K\alpha = \int_0^1 A_1(t\mathbf{x}) dt x_1 \\ + \int_0^1 A_2(t\mathbf{x}) dt x_2 + \int_0^1 A_3(t\mathbf{x}) dt x_3$$

例2

$$\beta(\mathbf{x}) = B_1 dx_2 dx_3 + B_2 dx_3 dx_1 + B_3 dx_1 dx_2 \qquad K\beta = \int_0^1 B_1(t\mathbf{x}) t dt (x_2 dx_3 - x_3 dx_2) \\ + \int_0^1 B_2(t\mathbf{x}) t dt (x_3 dx_1 - x_1 dx_3) \\ + \int_0^1 B_3(t\mathbf{x}) t dt (x_1 dx_2 - x_2 dx_1) \\ = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3$$

$$d\beta = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \text{div } \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$$

$$\beta = d(K\beta) \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$