「超簡単！ベクトル解析」の一例

　これは、代表的な例というのではなく、全く適当に選んだものである。ランダウの教科書、“Electrodynamics of Continuous Media”, L.D. Landau and E. M. Lifshitz, Course of Theoretical Physics, Vol. 8, 2nd ed. (revised and enlarged)の Sec.29 (Static Magnetic Field), p.106 に次のような記述がある。

$$\int \mathbf{r}\times\overline{\rho\mathbf{v}}\,dV/2c=\frac{1}{2}\int \mathbf{r}\times\mathrm{curl}\,\mathbf{M}\,dV \tag{1}$$

の右辺を変形して、

$$\int \mathbf{r}\times\overline{\rho\mathbf{v}}\,dV/2c=\int \mathbf{M}\,dV \tag{2}$$

を導こうというものである。その際に、

$$\int \mathbf{r}\times\mathrm{curl}\,\mathbf{M}\,dV=-\oint \mathbf{r}\times\left(\mathbf{M}\times d\mathbf{f}\right)-\int\left(\mathbf{M}\times\mathrm{grad}\right)\times\mathbf{r}\,dV \tag{3}$$

と（ここで、$d\mathbf{f}$ は、通常よく使われる $d\mathbf{S}$ （面積要素）のことである)、

$$\left(\mathbf{M}\times\mathrm{grad}\right)\times\mathbf{r}=-\mathbf{M}\,\mathrm{div}\,\mathbf{r}+\mathbf{M}=-2\mathbf{M} \tag{4}$$

を使うというものである（さらに、物体の表面、実際はそのわずかに外側では、$\mathbf{M}$ は、ゼロであるので、表面積分は消えるということを使う。）教科書には式(3)の導出の記述はない。また、これはちょっと見ただけでは、すぐには導出できそうもないようにも見える。そこで、これを、「超簡単！ベクトル解析」の一例として取り上げることにしよう。なお、式(1)の左辺は、局所的な magnetic moment の体積積分である。また、式(1)と(2)は、Gauss 単位系で書いたものであるので、これを MKSA 単位系で書き直すと、

$\mathbf{j}_M=\overline{\rho\mathbf{v}}=\mathrm{curl}\,\mathbf{M}$ として、

$$\int \mathbf{r}\times\mathbf{j}_M\,dV/2=\frac{1}{2}\int \mathbf{r}\times\mathrm{curl}\,\mathbf{M}\,dV \tag{5}$$

$$\int \mathbf{r}\times\mathbf{j}_M\,dV/2=\int \mathbf{M}\,dV \tag{6}$$

となる。

さて、式(3)の右辺の第一項は、二つのベクトル積の各項を入れ替えると、

$$\oint \mathbf{r}\times\left(\mathbf{M}\times d\mathbf{f}\right)=\oint\left(d\mathbf{f}\times\mathbf{M}\right)\times\mathbf{r} \tag{7}$$

となる。この右辺に（講義録にある、または、下記の付記にもある）「ガウス型」の積分公式を適用すると、

$$\oint\left(d\mathbf{f}\times\mathbf{M}\right)\times\mathbf{r}=\int dV\ \left(\nabla\times\mathbf{M}\right)\times\mathbf{r} \tag{8}$$

となる。ここで、∇ は、その右にあるものすべてにかかる（作用する）ことに注意。記号の上に矢印等をつけるのは煩わしいので、∇_L という記号でその作用を印すことにしよう（下付きの添え字、L は Leibniz の L としゃれたつもりである）。
すると、

$$\begin{aligned}&\left(\nabla\times\mathbf{M}\right)\times\mathbf{r}=\left(\nabla_L\times\mathbf{M}\right)\times\mathbf{r}=\left(\nabla_M\times\mathbf{M}\right)\times\mathbf{r}+\left(\nabla_{\mathbf{r}}\times\mathbf{M}\right)\times\mathbf{r}\\&=-\mathbf{r}\times\left(\nabla\times\mathbf{M}\right)-\left(\mathbf{M}\times\nabla\right)\times\mathbf{r}\end{aligned} \tag{9}$$

と変形できる。最後の式では、添え字をつけなくても混乱はないであろう（通常の ∇ の作用と同じであるので。）これを式(8)に代入したものと、式(3)で項を移行した式、

$$\int\mathbf{r}\times\mathrm{curl}\,\mathbf{M}\,dV+\int\left(\mathbf{M}\times\mathrm{grad}\right)\times\mathbf{r}\,dV=-\oint\mathbf{r}\times\left(\mathbf{M}\times d\mathbf{f}\right) \tag{10}$$

を比べれば、式(3)が導出できたことになる。
式(4)は、次のように変形できる。

$$\begin{aligned}&\left(\mathbf{M}\times\mathrm{grad}\right)\times\mathbf{r}=-\mathbf{r}\times\left(\mathbf{M}\times\nabla_{\mathbf{r}}\right)=-(\nabla\cdot\mathbf{r})\mathbf{M}-(\mathbf{r}\cdot\nabla_{\mathbf{r}})\mathbf{M}+\nabla_{\mathbf{r}}(\mathbf{M}\cdot\mathbf{r})\\&\quad=-3\mathbf{M}+\nabla_{\mathbf{r}}(\mathbf{M}\cdot\mathbf{r})\end{aligned} \tag{11}$$

ここで、$\nabla\cdot\mathbf{r}=3$ である。また、最後の $\nabla_{\mathbf{r}}(\mathbf{M}\cdot\mathbf{r})$ は、成分で書けば、

（$\mathbf{M}\cdot\mathbf{r}=M_x x+M_y y+M_z z$ と書けるので）直ちに、$\mathbf{M}$ であることがわかる。

よって、式(3)、(4)から、式(2)または式(6)が導かれることになる。

さて、この導出は、以下のようにすると、若干、簡単になる。

$$\nabla\left(\mathbf{M}\cdot\mathbf{r}\right)=(\mathbf{M}\cdot\nabla)\mathbf{r}+\left(\mathbf{r}\cdot\nabla\right)\mathbf{M}+\mathbf{M}\times\left(\nabla\times\mathbf{r}\right)+\mathbf{r}\times\left(\nabla\times\mathbf{M}\right) \tag{12}$$

である。これは憶えておいてもよいかもしれない公式、

$$\nabla\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\right)=\left(\mathbf{A}\cdot\nabla\right)\mathbf{B}+\left(\mathbf{B}\cdot\nabla\right)\mathbf{A}+\mathbf{A}\times\left(\nabla\times\mathbf{B}\right)+\mathbf{B}\times\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)$$

そのままである。ここで、$(\mathbf{M}\cdot\nabla)\mathbf{r}=\mathbf{M}$ （$\left(\mathbf{a}\cdot\nabla\right)\mathbf{r}=\mathbf{a}$ は憶えておくと便利であった)、$\nabla\times\mathbf{r}=0$ であるから、

$$\mathbf{r}\times\left(\nabla\times\mathbf{M}\right)=\nabla\left(\mathbf{M}\cdot\mathbf{r}\right)-\left(\mathbf{r}\cdot\nabla\right)\mathbf{M}-\mathbf{M} \tag{13}$$

となる。さらに、∇_L を利用すると、

$$\left(\nabla_L\cdot\mathbf{r}\right)\mathbf{M}=\left(\nabla_{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}\right)\mathbf{M}+\left(\mathbf{r}\cdot\nabla_{\mathbf{M}}\right)\mathbf{M}=3\mathbf{M}+\left(\mathbf{r}\cdot\nabla\right)\mathbf{M} \tag{14}$$

であるので、式(13)は、

$$\mathbf{r}\times\left(\nabla\times\mathbf{M}\right)=\nabla\left(\mathbf{M}\cdot\mathbf{r}\right)-\left(\nabla_L\cdot\mathbf{r}\right)\mathbf{M}+2\mathbf{M} \tag{15}$$

となる。右辺の第一項の ∇ は、当然、∇_L のことであるので、

$$\int dV\,\mathbf{r}\times\left(\nabla\times\mathbf{M}\right)=\oint d\mathbf{S}\left(\mathbf{M}\cdot\mathbf{r}\right)-\oint\left(d\mathbf{S}\cdot\mathbf{r}\right)\mathbf{M}+2\int dV\,\mathbf{M} \tag{16}$$

となるのである。ここで、表面積分がゼロであるとすると、結果が導かれたことになる。

なお、本稿ではあくまでもベクトル解析の例題として取り上げたものであって、式の物理的意味については、ランダウの教科書や他の電磁気学の教科書を参照されたい。

［蛇足］

実は、

$$\int_V \mathbf{j}_M\,dV=0 \tag{17}$$

が成り立っているが、これは、次のように簡単に示せる。

$$\int_V \mathbf{j}_M\,dV=\int_V dV\,\nabla\times\mathbf{M}=\int_S d\mathbf{S}\times\mathbf{M}=0 \tag{18}$$

ここでも、やはり、物体の表面、実際はそのわずかに外側では、$\mathbf{M}$ は、ゼロであるので、表面積分は消えるということを使うのである。式(17)は、どんな体積要素でも成り立ち、そこで平均の電流（電流密度）がゼロであることを言っている。いくら細かく砕いても、破片の平均電流はゼロとなる。さらに、通常、電流を「定義する」ような平面をもつ薄い平板でも（それがどんな方向を向いていても)、電流がゼロであるということになる。いくら $\mathbf{j}_M$ の実体が怪しげなものとは言え、マクロ的にはきちんと存在するにも拘わらず、断面を横切る電流が消えているように見えるのは、どうしたことであろうか？ 何か、クイズみたいな話になってきたが、その答えは、物体の表面のわずか外側では、$\mathbf{M}$ は、ゼロであるとしたこ

とによるのである。つまりある物体について考えると、その内部の電流をキャンセルするように物体表面に電流が流れるのである（平板の場合でも同様である)。(簡単のために）図 1 のような状況を考えると、

$$\int_S \mathbf{j}_M \cdot d\mathbf{S} = \int_S d\mathbf{S}\cdot(\nabla\times\mathbf{M}) = \int_\ell \mathbf{M}\cdot d\mathbf{r} \tag{19}$$

であるので、図 1 から、(単位長さ当たりの）表面電流、I は、

$$I\,\Delta\ell = M\,\Delta\ell \tag{20}$$

となり、また、同様に、図 1 から、

$$\mathbf{I} = \mathbf{M}\times\mathbf{n} \tag{21}$$

となることがわかる。ただし、図 1 の場合には、物体内部の電流はゼロで、表面の電流がお互いにキャンセルするように流れている場合である（内部では $\mathbf{M}$ が一定であるので、$\mathbf{j}_M = \mathrm{curl}\,\mathbf{M} = 0$ である)。

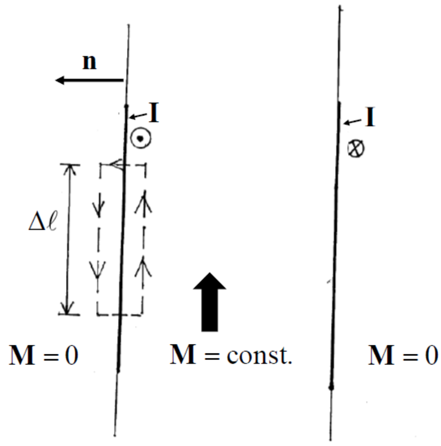

図 1

==

[付記]

$$\int_V dV\,\nabla = \int_S d\mathbf{S} \qquad \text{(Gauss型)}$$

$$\int_S d\mathbf{S}\times\nabla = \int_\ell d\mathbf{r} \qquad \text{(Stokes型)}$$

$$\int_\ell d\mathbf{r}\cdot\nabla = \Big| \qquad \text{(FTC型)}$$

注）これらをベクトル等に作用させる場合、∇ は、本文中の ∇_L と同じと見なされるべきである。