

指数関数的増大 (exponential growth) は べき乗的増大 (power-law growth) を凌駕する! ?

この表題の「事実」は、我々(我々=理系人間)にとっては常識であり、疑いをはさむ余地はないものであろう。そして、これは、何かを議論しているときの「殺し文句」にもなっているものである。

では、次に、図1を見てみよう (これは何か二つの測定のグラフであるとしてみよう)。二つのグラフのどっちが、 x とともに大きくなっていくだろうかと言えば、「疑いをはさむ」までもなく、グラフ(a)が急峻に増えていき、 $x \rightarrow \infty$ では相対的にグラフ(b)の大きさは無視できると見るであろう。どう見たって、そうに違いないと判断して当然であろう (もし、そのように見えない人がいたとしたら、多分、その人は、センスがないと判断されもしようがないであろう)。

しかし、実際は、二つのグラフの式は、

$$\text{グラフ(a)} : y = x^{80}$$

$$\text{グラフ(b)} : y = e^x$$

であり、急峻に増大しているのは、べき乗の方で、全く「常識」に反して見える。これに対して、すぐに出てくる反論は、グラフ(a)の式の80乗が非常識な数である、まあ、この非常識は許すとしても、 x が図1のものより、かなり大きくなれば、所詮はグラフ(b)が圧倒的に大きくなるであろう・・・というようなものであろう。

それでは、次に、図2を見てみよう。依然としてグラフ(a)が圧倒的に大きく、しかも図2に出てくる数値は、我々が感覚的に把握できる数値の範囲を大きく外れている。それでもグラフ(b)はグラフ(a)を越えないのである (もしかしたら、80乗ぐらいに大きくすると、超えることができないのではないかという疑いの念さえ浮かんでしまうかもしれない?)

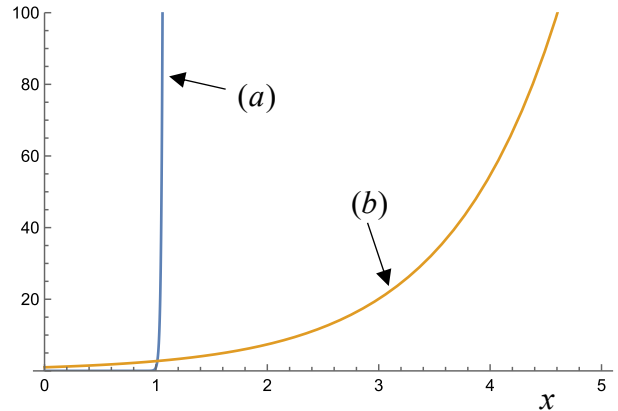


図1

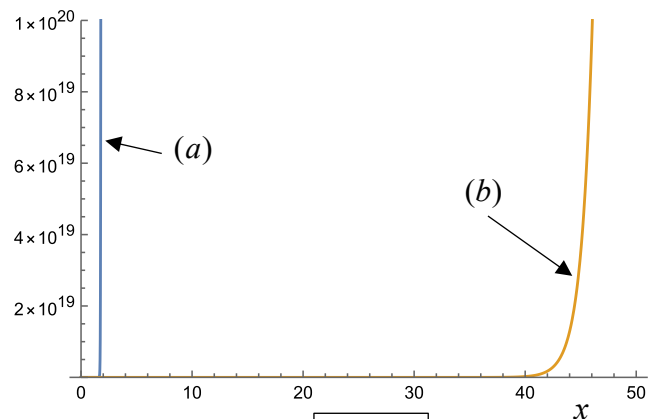


図2

しかし、言うまでもなく、図のイメージや疑念等にも拘わらず、理系人間の「頑固な」常識では、 $x \rightarrow \infty$ の矢印の先端に限りなく近づいていくに従って正しくなるというのが確信であろう。しかし、図からも明らかのように、場合によっては、(我々の日常的な数値の範囲では) べき乗的増大 (power-law growth) が指数関数的増大 (exponential growth) を完全に凌駕することもあるということは気に留めておくべき

かもしれない。

[蛇足]

80 乗という値自体は、今回の話とは直接、関係しない（適当に選んだ）値である。

これは、全宇宙の陽子（+中性子）の数が、

the number of protons and neutrons in the universe $\sim 10^{80}$

であることから、採用した数値である（多分、古い値かもしれないが・・・）。ちなみに、

$M_{\odot} \approx 2 \times 10^{33} g$, the mass of a galaxy $\sim 10^{12} M_{\odot}$,

the number of galaxies in the universe $\sim 10^{11}$

ということから、 $10^{11} \times 10^{12} \times 2 \times 10^{33} \times 6 \times 10^{23} \sim 10^{80}$ となる。

(A) 初等的証明

さて、この常識の証明はどうであったか、思い出してみよう。この証明は全く初等的ではあるが、以下に、二つ例を取り上げる。

ここで指数関数的増大を表す代表的な式、 $f(x)$ として、

$$f(x) = \exp(x)$$

を採用し、べき乗的増大を表す代表的な式、 $g(x)$ として、

$$g(x) = x^n$$

を採用しよう。

(1) ロピタルの定理 (l'Hôpital's rule) を使う方法

ロピタルの定理は、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g'(x)}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g''(x)}{f''(x)} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g^{(n)}(x)}{f^{(n)}(x)} = \dots$$

(今の場合には、この定理を使う際の注意事項はほとんど気にしなくてよいので、ここでは触れないことにする。) これから、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{\exp(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n x^{n-1}}{\exp(x)} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{\exp(x)} = 0$$

となり、指数関数的増大は、べき乗的増大を「圧倒」することがわかる。

(2) 若干、粗雑な初等的方法

$x > 0$ とすると、

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dots > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

(注：ここで、次数を $n+1$ (またはそれ以上) にとるのが、ミソである。)

よって、

$$\frac{x^n}{\exp(x)} < \frac{x^n}{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)!}{x}$$

これから、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{\exp(x)} < \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{x} = 0$$

となることがわかる。

(B) いつ exponential growth が power-law growth に追いつくのか？

これは、

$$x^{80} = e^x$$

または、

$$80 \log x = x$$

となる x を求めればよい。Mathematica によれば、

$$x = 496.627\dots$$

と求まる (図2を見よ)。なお、このとき、

$$x^{80} = e^x = 4.8132 \times 10^{215}$$

と、(非日常的な、非物理的な) 膨大な値となる。つまり、こうなるまで power-law の方が支配的なのである。

ちなみに、 x^n の n が小さい場合には、図3のように普通にお目にかかるような感じになる。図3から、 $n=1, 2$ の場合には、 $x (> 0)$ の全領域で、 $e^x > x$, $e^x > x^2$ であり、 $n=3$ の場合には、

$e^x < x^3$ となるような x の領域があることがわ

かる。これから、もしかしたら、 $n=e$ のばあいには、二つのグラフが接するのではないかと推測されるが、実際もそうなっているのである。

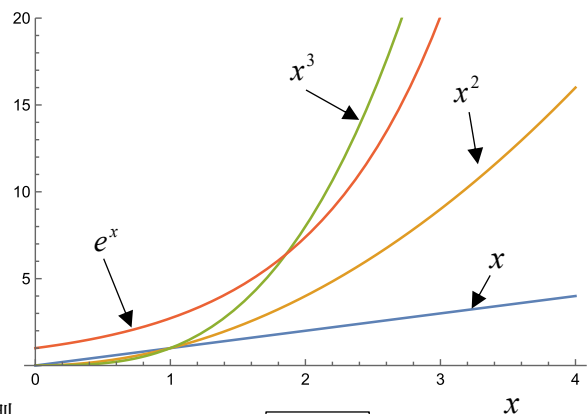


図3

$$f(x) = e^x - x^a$$

なる式を考えて、これが重根をもつとすると、

$$f(x_0) = 0, \quad f'(x_0) = 0$$

から、

$$a = e, \quad x_0 = e$$

と求まる。これらを図示すると、図4のようになる。つまり、 x^n の指数、 n が e より大きい場合には、 x のある範囲で、power-lawの方がexponentialより大きくなるが、小さい場合には、常にexponentialの方が大きい。

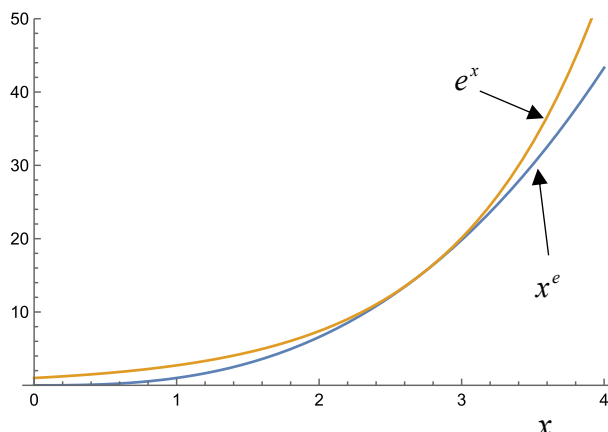


図4

(C) 対数グラフでの表示

非常に大きな数の振る舞いや大きな数の領域の全貌を把握するためには、対数グラフで眺めてみるのがよいというのはよく知られていることである。

多くの人が対数グラフの有難味を知ったのは、多分、学生実験で、測定データを対数グラフ（片対数、両対数）で表した時ではなかったかと思われる（かつては、データ・プロットは手書きであったので、学生実験でもなければ、こんな面倒なことはしなかったであろう。）対数表示をすることで、データの全体的な振る舞いをつかむことができるというメリットがある（個人的には、下手くそな学生実験の測定誤差を目立たなくしてくれるメリットの方が大きかったように思うが・・・）。

対数を取ると、

$$\begin{aligned} x^{80} &\rightarrow 80 \log x \\ e^x &\rightarrow x \end{aligned}$$

となり、この形からも指数関数（対数では直線）がべき乗（対数ではlog関数）を「圧倒」することは明らかである。また、ロピタルの定理を使った証明も微分が一回ですむ。図5に、これらに対数グラフで示しているが、これを見ると、なぜ指数的増大がべき乗的増大を「圧倒」するのが感覚的にわかったような気になる（もっとも対数を感覚的に把握するのはたいへんむづかしいかも・・・）。

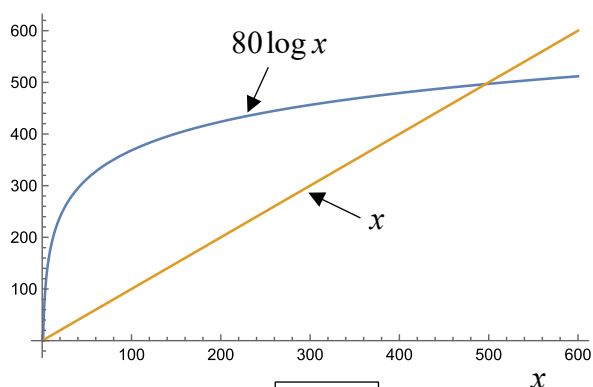


図5

(D) 増大関数の大小

増大関数には、最も急激に増大する、つまり他のどんな関数よりも早く増大するような関数は存在しないのである。もしそのような関数があったと仮定すると、例えば、それに、 $\exp(x)$ をかければ、これは元の関数を完全に凌駕する増大関数となるからである。

(蛇足：しかし、そうは言っても、例えば、 $x=1$ のような関数を考えれば、 $x>1$ では、縦軸の値は ∞ (無限大) となり、これがもっとも急激な増大する関数 (の一つ) であると主張できるかもしれない。しかしながら、無限大というものは数値ではない (少なくとも実数ではない) ので、 $x=1$ のようなものは $x>1$ の領域に無限大の値をもつ関数と考えてはいけなないのである。なお、周知のように、実数 (有理数、複素数) は、少なくとも (ゼロによる除算を除いて) 四則演算が (真っ当に) できる数でないといけなないので、無限大はこれには含まれないのである。勿論、実数に無限大を加えて、拡張された実数 (extended reals) を考えると便利であることはよく知られている。その際、演算は、よく知られた極限の演算に従うとするのであった。よって、 $\infty \cdot 0$, $\infty \div \infty$, $\infty - \infty$ は不定とするのであった。話が逸れたついでに言えば、Lebesgue 積分では、 $\infty \cdot 0 = 0$ であると宣言しているが、なぜなのかとはきちんとした説明があまりないように思われる (多分、不勉強のため知らないだけかもしれないが・・・いづれにしろ、このようなことを宣言しているのは Lebesgue 積分だけ (?) ではないだろうか)。さらに、その他、Lebesgue 測度、カラテオドリ (Caratheodory) の可測条件、Lebesgue 積分等についても、「なぜ、そのようにするとよいのか」という素朴な質問に対する初等的説明はあまりないように思われる。そこで、いつか (未定であるが・・・2、3年後?)、これらの初等的説明を HP に載せるのも悪くないのではないかと考えている。)

いづれにしろ、増大関数の種類には限りがないのであるが、ここでは、代表的なものとして、以下のものあげておこう。

- (1) x^n
- (2) e^x
- (3) $x!$
- (4) x^x

ここで、 $x! = \Gamma(x+1)$ である ($n! = \Gamma(n+1)$ の実数への拡張)。これらを図示すると、図 6 のようになる。さて、

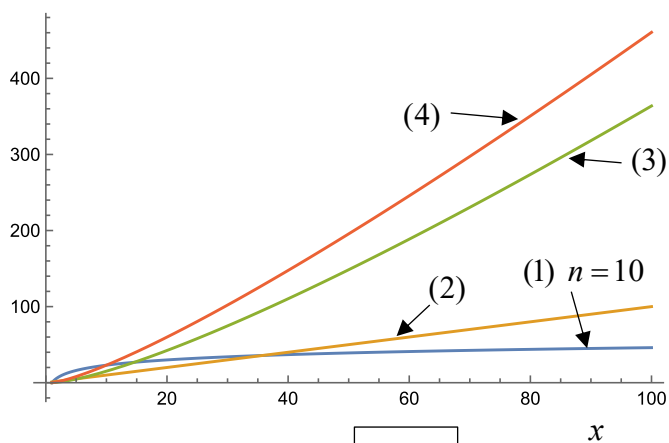


図 6

$$e^n = \underbrace{e \times e \times \cdots \times e}_n \times e$$

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n = \frac{1 \times 2}{3 \times 3} 3 \times 3 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$$

$$n^n = \underbrace{n \times n \times n \times \cdots \times n}_n \times n$$

等を使うと、 x (or n) $\rightarrow \infty$ では、よく知られているように、

$$x^x \gg x! \gg e^x \gg x^n$$

となる。

(E) スターリングの公式 (Stirling's formula)

統計力学の演習問題をたくさんやったことのある人は、(統計力学自体は忘れても?)、スターリングの公式、

$$\log n! \sim n \log n - n$$

は、頭の中に残っているであろう。記憶のよい人は、

$$\log n! \sim \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n - n + \frac{1}{2} \log(2\pi)$$

または、

$$x! = \Gamma(x+1) \approx \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x}$$

を覚えているであろう。さらに、マニアックで、かつ優れた記憶力の持ち主は、

$$x! \approx \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x} \left(1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} + \dots\right)$$

という漸近展開の何項も先まで覚えているかもしれない。

さて、第一項は非常に大雑把には (x が大きいと \sqrt{x} も大きい)、これを無視すると、

$$x! \sim x^x / e^x$$

と、おもしろい形をしていることがわかる。

しかし、スターリングの公式のすごいところは、 $x \rightarrow \infty$ となると、

$$x! = \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x}$$

と、厳密に等号が成り立つという点である (より正確には、相対誤差がゼロになる)。例えば、 $x=100$ ぐらいでも、相対誤差は 10^{-3} 程度であり、 $x=10^{10}$ になると、 10^{-11} の誤差となる。それも

$\sqrt{2\pi}$ という係数 (+ 指数関数) からなる右辺の式と、単なる整数の積 (例えば、 $100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 99 \cdot 100$) が (ほぼ) 等しくなるのであるから、すごい公式と言えるであろう。以上のようなことから、(上記で、何度も、しつこく書いた) スターリングの公式、

$$x! \approx \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x} \left(= \sqrt{2\pi} x^{x+1/2} e^{-x}\right)$$

は憶えておいて損はないであろう (多分、実用的にも損はない?) (できれば、漸近展開の第二項まで覚えていれば、さらによいかもしれない)。

なお、この公式 (の第一項) は、よく知られているように、簡単に導くことができる。

$$x! = \Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x dt = \int_0^\infty \exp(-t + x \log t) dt$$

ここで、最急降下法 (鞍点法) を使うと、

$$f(t) = -t + x \log t$$

で $f'(t) = 0 \rightarrow t = x$ となるので、

$$f(t) = -x + x \log x - \frac{1}{2x}(t-x)^2 + \dots$$

となる。また、積分範囲を $-\infty$ まで広げても、それによる積分への寄与は無視できるので、

$$x! = e^{-x} x^x \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2x}(t-x)^2\right) dt = e^{-x} x^x \sqrt{2\pi x}$$

ここで、第2式の積分は、例えば、

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}x^2\right) dx = 1$$

を思い出せば、積分の変数変換などをしなくても、すぐにわかる。この導出は、以上のように書くと、若干、長くなるが、慣れてくれば、ほとんど暗算で求めることができるであろう。一方、漸近展開の高次項を求めるのは、暗算というわけにはいかないと、若干、面倒くさい計算が必要となる（これについては、適当な教科書を参照のこと）。

[蛇足]

最後に、大きな数の例をいくつか取り上げてみよう。

（注：以下では中性子も陽子としてカウントし、すべて物質は陽子からできているとしよう。当然、電子の数も陽子とほぼ同数あるのであるが、軽いので無視することにしよう。また、以下の（）の数値は、陽子換算での陽子数である。）

まずは、身の周りの軽そうなものとして、例えば、舞い散る雪の重さは、

雪片 (snow flake) : 0.003 g (代表値 : 約 100 個の雪の結晶からなる) (2×10^{21})

<https://hypertextbook.com/facts/2001/JudyMoy.shtml#:~:text=A%20typical%20snowflake%20made%20of,to%20be%20about%203%20mg.&text=It%20has%20been%20said%20that,each%20snowflake%20as%20it%20falls.>

であり、これを構成する、

雪の結晶 : 0.00001~0.00005 g \rightarrow 0.00002 g (10^{19})

(小3の子供からの質問への回答)

https://hokkaidogaku.org/yukipro/html/question_.html

とのことである。一方、桜吹雪の花びらは snowflake より重く、

桜の花びら (1枚) [実測値] : 0.01 g (6×10^{21})

<https://www.omosaya.com/fun/pg221.html#:~:text=%E4%B8%80%E6%9E%9A%E5%B9%B3%E5%9D%870.01%EF%BD%87%EF%BC%81>

であるとのことである。

次にこれらよりはるかに重いものとして、
(私が住んでいる) つくばでも見かける超カワイイ女子高生の体重 [(直接、確認できていないの
で) 丸めた推定値] : $100 \text{ キロ} = 10^5 \text{ g} (6 \times 10^{28})$

がある。さすがに重いだけあって、陽子の数も急激に増えている。

では、一つ飛びに、地球の重さを調べると、
地球の質量 ($1M_{\oplus}$) : $6 \times 10^{27} \text{ g} (3.6 \times 10^{51})$

となる。

なお、地球上には、現代の石油文明を支える、(かつては無尽蔵(?) のつもりでいた) 石油、石炭が存在し、さらに、再び米国を石油大国にしたシェールガスも存在する。さらには、原子エネルギーのためのウラン、そして核融合エネルギーのための (今は無尽蔵とも言われる) 重水素も存在する (注: たとえ核融合が実用化されても、それで石油・石炭を 100% 代替できるわけではない。代替できるのは、石油・石炭のもつエネルギーとしての役割 (それも現実には、100%は無理?) だけであろう)。その他、地球上には、鉄、アルミ等の鉱物、さらには金、プラチナ、レアアース等々の豊富な資源がある。しかし、これらのすべては、地球の表面のほんの皮の部分に存在するものであり、言うまでもなく地球全体では膨大な物量 (何であるかは詳しくはわかっていないようであるが...) が存在するのである。これらから、人類が利用可能な物質の量 (最大限努力して無駄遣いしたときの物質質量) の最大推定値は、キリよく言えば、陽子換算で、

$$10^{50} \quad (\text{陽子の数})$$

となるであろう。これが多いと感じるか、少ない (たったこれだけ) と感じるかは人によって異なるであろうが、この数値は、人類にとって、一つのキー・ナンバーかもしれない。

最後は、本文の最初の方でも取り上げた、太陽と全宇宙の陽子の数である。

$$\text{太陽の質量} (1M_{\odot}) : 2 \times 10^{33} \text{ g} (10^{57})$$

であるが、太陽は、何億 (~何十億) 年にもわたって、地球上の (人類を含む) 全生物に命を授け、これを育ててきた偉大なる星であるが、その陽子の数は、10 の 57 乗であり、見方によってはたったこれだけしかないのか思ってしまうかも……。さらに、全宇宙でも、10 の 80 乗しかないのかと思ってしまうかもしれない。逆に言えば、この 10 の何乗という数の表現形式が我々の感覚を麻痺させているのかもしれない。さらにその逆を言えば、10 の何乗という形式を使えば、いとも簡単に身近な数で、我々の感覚では把握できないような数も表すことができるということであろう (例えば、80 という数で、全宇宙の陽子数を...)。

さて、それでは物質から離れたら、大きな数としてどんなものがあるであろうか。以下は、その二、三の例である。

(似非) 囲碁の可能な棋譜の数

多分、囲碁で実現可能な棋譜の数を正確に計算した人はいないであろう。実際には、途中で相手の石を取ったり、コウ (3 コウになってもやめなければ、永遠に棋譜が続く) になったり、はたまた

こうと研鑽を積んでいる、または既にかなり近づいているかもしれないプロ棋士を相手に、まったくの素人がいくら勝負を挑んでも、ただの一回も勝つことができないであろう。たとえば、囲碁の規則も知らないような素人に対して、一回でも勝ったら、10億円を差し上げるという提案があったとしても、絶対にこれに乗ってはいけないのである。相手は、神に相当近いと思われるプロなので、何回やっても絶対に勝てないであろう（まぐれで神の一手を打つことができるという幸運は、全く絶望的にないのである）。よって、こんな提案に乗るのは馬鹿げており、そんなことをするよりは、宝くじを買った方が絶対によい。私は、宝くじに当たるは、1億分の一ぐらいだろうと山勘で想像していたが、そうでもないようである。

年末ジャンボ宝くじの発行予定枚数は4億6000万枚で、1等7億円が23本ということで、一等が当たる確率は、「約2000万分の1という天文学的な低確率」となるようである。

<https://news.yahoo.co.jp/articles/1d1946fc808a8614b50a2385da3414124a7ae8ce>

前後賞で、10億円（最悪でも8.5億円）を得ようと、連番で10枚買えば、当たる確率は、200万分の1の高確率になる。要するに、10枚買って、あとは寝ていれば、高確率で約10億円が得られるので、絶対にこの方がお得であるのは間違いないであろう（おまけに、今までも、誰かが必ず当たっているという「ファクト」もある）。

一方で、以下のようなニュースもある。

「囲碁AI、こわれる 人間の悪手に翻弄、大石死す AI社会に警鐘」

<https://ameblo.jp/sansiroh/entry-12822065716.html>

これを読むと、プロ棋士相手はあきらめた方がよいが、囲碁AIが相手なら、10億円をゲットできるかもと思ってしまうが・・・はたして、どうであろうか。

アボガドロ数 (Avogadro number) の階乗

(古典) 統計力学では、分子の数の階乗というような数が出てくるので、次の大きな数として、アボガドロ数及びその階乗を取り上げるのは悪くないであろう。かつては、アボガドロ数は、 $6.02 \cdots \times 10^{23}$ といかにも実数 (近似値) のような数で与えられていたが、今では、光速と同じように、定義値として、厳密な値、 $6.02214076 \times 10^{23}$ で与えられている (表記の小数点以下、長い数値が続くが、実際は、(本来あるべき形の?) 整数値 (個数) となっている)。

私のパソコンで、Mathematica に、 $10^{23}!$ と入力してみると、何もしないで出力される。そこで、 $N[10^{23}!]$ と

入力すると、計算中にオーバーフローしたと回答がある。つまり、このくらいの数 (実際は、ありふれた分子数) の階乗の計算になると、Mathematica でも苦しいようである。そこで、数を大幅に減らして、 $10^{10}!$ を入力してみると、何か計算を始めたと思う間もなく、パソコンがロック状態になり、マウス操作もできない、ようやくマウス操作ができるようになって、Mathematica の Abort 操作が不可、他の動いているソフトも停止さえできない等々、明らかにパソコンが発狂状態となった。さすが階乗の計算と感心しているわけにはいかないのが、パソコンの Power OFF という強制終了の救済措置によって、なんとか回復することができた。

勿論、この状況に陥ったのは、Mathematica のバージョンが少し古い、パソコンも比較的高性能だから数年物である等の事情もあるであろうが、今は、再現をチャレンジする勇気はないので、OK である。私のパソコンでは、

$N[10^8!]$ はすぐに計算できるが、 $N[10^9!]$ は、すぐには出力しないようであるので、一応の限界数値 (実用最

大値)は、 $10^8!$ (一億の階乗) ぐらいまでではないか (少なくとも私のパソコンでは・・・)。とは言え、

$$10^8! \approx 1.617203794921462 \times 10^{756570556}$$

であり、とてつもなく膨大な数値である。

そこで、アボガドロ数に行く前に、まずは、この $10^8!$ を対数で調べてみよう。Mathematicaで計算すると、

$$\begin{aligned} (\ast) \quad \log_{10}(10^8!) &= N[\text{Log10}[10^8!], 32] = \\ &7.5657055620876475177585670114355 \times 10^8 \end{aligned}$$

となる。また、スターリングの式の対数をとると、

$$(\ast\ast) \quad \log_{10}(x!) \approx \frac{1}{\log(10)} \left\{ \left(x + \frac{1}{2} \right) \log x - x + \frac{1}{2} \log 2\pi + \frac{1}{12x} \right\}$$

と近似できる。最後の項は、 $\log(1+1/12x+\dots)$ からきている。最後の項を無視すると、

$$\log_{10}(10^8!) \approx 7.5657055620876475141394463289084 \times 10^8$$

と近似できる。最後の項の値は、 $3.619120682527098 \dots \times 10^{-10}$ であり、これを加えると、(※)の末尾まで一致することがわかる。

対数の相対誤算

ある値が、相対誤差、 Δ ($\ll 1$) を使って、

$$A = A_0(1 + \Delta)$$

と表されたとすると、その対数は、

$$\log A = \log A_0 + \log(1 + \Delta) \approx \log A_0 + \Delta$$

よって、対数の相対誤差は、

$$(\ast 3) \quad \frac{\Delta}{\log A_0}$$

と与えられる。なお、対数として、常用対数 (\log_{10}) を使っても、その相対誤差は、自然対数での値、(※3)と同じもので与えられることに注意。言うまでもないことであるが、ここでは、相対誤差を考えているので、いくら、 A_0 の値が大きくても相対誤差は、 Δ である。一方、 A_0 が巨大な数であるすると、それに伴い、その対数も非常に大きな値になるので、(※3)から、対数の相対誤差は非常に小さくなる (小さく表示されてしまう)。逆に言えば、対数表示でみて、相対誤差が非常に小さくても、元の値 (対数を取る前の値) の相対誤差は非常に大きくなるということになる。

さて、アボガドロ数の場合であるが、この領域になると、Mathematicaでも直接的な計算は無理となり、スターリングの公式の世界となるであろう。スターリングの公式 (+Mathematica) を使う

と、例えば、

$$\log_{10}\left(\left(6.02214076 \times 10^{23}\right)!\right) \approx 1.405896246705875 \times 10^{25}$$

となる。なお、当然のことながら、スターリングの公式 (**) の最後の項は、無視できる。よって、

$$\left(6.02214076 \times 10^{23}\right)! \approx 10^{1.405896246705875 \times 10^{25}}$$

と高い精度が得られるが・・・これは、見ているだけでも、頭がクラクラするような圧倒的に膨大な数である。10の肩にある指数でも非常に大きい数であるが、それでも0を25個ぐらい並べればよいので手書きでも（指数表示をしなくても）書くことができる。しかし、上記の数を10の肩の指数を外して（指数表示でなく通常の表記で）書こうとすると、手書きでは全く不可能で、計算機を使っても不可能であろう。これは、今まで誰も書いたことはないし、これからも（多分、未来永劫）ないであろう。もし通常の表記でないと、数の大きさが感覚的にはわからないとすると（異常な感覚の持ち主でないかぎりはそのようであろう）、この数は、その大きさを実感できないような数ということになる。そのために、これを感覚的にとらえようとする、頭がクラクラするのである。

閑話休題

ところで、先の超カワイイ女子高生の話は、その後、どうなったのだろうか・・・？ 「奇跡的な」存在に関する話になることは間違いないのだが・・・しかし、この場合、別の意味でも頭がクラクラするかもしれない。