

回路へのコメント(III)：キルヒホッフの法則 (Kirchhoff's laws)

[標語] グチャグチャした回路でも、キルヒホッフの2法則 (KCL、KVL) だけで解ける。

※標語であるので、若干、誇張しているが・・・(回路が焼損するなどの) 特別な場合を除けば、原理的にはキルヒホッフの法則 (KCL、KVL) だけで解が求まるということを言っているのである。そして特別な場合でも、法則とは矛盾しないのである。

※さらに、このことを保証しているのは、「回路の基本定理 (本稿だけの用語)」というものである。

※ 本稿では、表の番号付けを、図〇〇 (表) としている。それは、表なのか図なのか区別がつかないものが含まれているのと、筆者の文書作成の技術がつかないことなどからである。

- ・ (x) 回路の基本定理について
- ・ (a) 前置き (キルヒホッフの法則)
- ・ (b) キルヒホッフの法則について
- ・ (c) キルヒホッフの第一法則
 - (c-1) 電流則、KCL
 - (c-2) もう一つの電流則 (第二電流則?)
- ・ (d) キルヒホッフの第二法則、KVL
- ・ (e) (世の中に流布している?) 第二法則の導出
- ・ (f) キルヒホッフの法則の「特性」
- ・ (g) キルヒホッフの法則による回路解析
- ・ (h) (枝電流を独立変数とした) 解とその一意性及びいくつかの留意点
 - (h-1) KCL 方程式
 - (h-2) KVL 方程式
 - (h-3) 線形回路の KVL 方程式
 - (h-4) 線形回路の解法
 - (h-5) 電流源、電圧源
 - (h-6) 「もし」が成り立たない特別な場合
 - (h-7) 解の一意性について
 - (h-8) (もう一度) KCL、KVL 方程式の独立性について
 - (h-9) 若干の頭の体操
 - (h-10) トランスについて
 - (h-11) (回路素子としての) 増幅器
 - (h-12) Stability/instability (自励発振等) について
- ・ (i) 簡単な回路の具体例
 - (i-1) トランス(その1)、(その2)、(その3)、(その4)
 - (i-2) ブリッジ回路(その1)、(その2)

(i-3) オペアンプ (その 1)、(その 2)

・ (j) 非平面回路 (no-planar circuit) の例

(j-1) テトラ型

(j-2) 五角形 (ペンタゴン) + 五芒星 (ペンタグラム) 型

(j-3) 図形に関する追加のコメント

(j-4) 多面体等

・ (k) まとめ (結語)

・ [付記 1] トランスの一次側、二次側が一つのループの中にある場合

・ [付記 2] 増幅器を含む場合の (細かい) 注

・ [付記 3] 線形方程式の解への一つのコメント

このコメント (III) は、キルヒホッフの法則 (Kirchhoff's laws) に関するコメントであり、キルヒホッフの方程式の解及び一意性についても議論しようというものである。ある意味、キルヒホッフの 2 つの法則、KCL と KVL のみで回路 (少なくとも線形回路) の問題が解けるという「ご宣託」または「常識」の再確認のようなものであるとも言えるであろう。

[コメント]

多分、このご宣託、常識に逆らう人はそれほど多くはないであろう。しかし、現実の世界では、多くの人が、これに反することを多々、経験、体験しているのであるが・・・

[コメント] 初めに、蛇足あり

初めにことば (ロゴス) があった (新約聖書、ヨハネによる福音書 1.1)

光あれ (旧約聖書、創世記 1.3)

アッラーのほかには神はなし (イスラム教・タウヒード)

天岩戸から出てきた天照大御神が暗闇に包まれた世界を明るく照らすのであった (古事記・日本書紀)

※ [更なる蛇足] 他民族の最高神はすべて男性か無性のようであるが、八百万の神の中の最高神である天照大御神は、女性の神である。昨今、神の僕 (しもべ)、末裔、庶民 (市民?) の間で、天皇は男子直系であるべし (or 否) 云々という議論がかまびすしいが、こんな議論を聞いて、呆れ果てた天照大御神が再び天岩戸にお隠れになったら、世の中、真っ暗!? (ただ、この危機的状況における唯一の救いは、ストリップダンサーの元祖 (女神) が存在していることであるが・・・)

[(一見、科学的?) 天皇承継問題の参考文献 1] (べき乗 (「世代」乗) の恐ろしさを理解していないかも・・・?)

[https://japan-](https://japan-forward.com/ja/%E3%80%90%E6%AD%A3%E8%AB%96%E3%80%91%E5%A4%A9%E7%9A%87%E3%81%8C%E7%94%B7%E7%B3%BB%E7%94%B7%E5%AD%90%E3%81%AE%E7%90%86%E7%94%B1%E3%82%92%E8%AA%AC%E3%81%8F/)

[forward.com/ja/%E3%80%90%E6%AD%A3%E8%AB%96%E3%80%91%E5%A4%A9%E7%9A%87%E3%81%8C%E7%94%B7%E7%B3%BB%E7%94%B7%E5%AD%90%E3%81%AE%E7%90%86%E7%94%B1%E3%82%92%E8%AA%AC%E3%81%8F/](https://japan-forward.com/ja/%E3%80%90%E6%AD%A3%E8%AB%96%E3%80%91%E5%A4%A9%E7%9A%87%E3%81%8C%E7%94%B7%E7%B3%BB%E7%94%B7%E5%AD%90%E3%81%AE%E7%90%86%E7%94%B1%E3%82%92%E8%AA%AC%E3%81%8F/)

[(説得力のある?) 天皇承継問題の参考文献 2]

<https://www.nippon.com/ja/in->

[depth/d00954/#:~:text=%E7%9A%87%E5%AE%A4%E5%85%B8%E7%AF%84%E7%AC%AC1%E6%9D%A1,%E3%82%82%E9%99%A4%E5%A4%96%E3%81%95%E3%82%8C%E3%81%A6%E3%81%8D%E3%81%9F%E3%80%82](https://www.google.co.jp/search?q=depth/d00954/#:~:text=%E7%9A%87%E5%AE%A4%E5%85%B8%E7%AF%84%E7%AC%AC1%E6%9D%A1,%E3%82%82%E9%99%A4%E5%A4%96%E3%81%95%E3%82%8C%E3%81%A6%E3%81%8D%E3%81%9F%E3%80%82)

さらに、

神は光なりき（真光教）「手のひらから高次元の眞の光が放射されます(放射光か??)」

というもある。

※ すべては、初めにドグマありきで、普通の「敬虔な」無神論者は、話についていけないのである（正直、理解不能なのである。）また、普通は、どれが本物か偽物かはわからないのである（もっとも、この種の問自体が無意味なのが宗教かも・・・?）。

・

・

初めに光あり（Einstein's special relativity?）

※ 常識的感覚とは相容れない「事実」を初めは拒否しても、最終的にはほとんどの科学者、人々は信じているのではないだろうか。もしかしたら、権威ある大家が正しいというので・・・、または、（多くの宗教と同じように）起きている「相対論的な」事実をうまく説明できるので・・・

・

初めに二法則（KCL、KVL）あり（circuit theory）

※ 常識的、感覚的には、二法則はほとんど自明であり、説明を要しない。よって、「宗教性」は全く感じないであろう。実際、この法則をくどくどと説明しても、それはほとんど益がない。使ってなんぼ（?）のものであろう。

多分、批判好きの人たちは言うであろう、「これらの法則は、所詮は近似式であり、周波数が高くなって、その波長が回路の大きさ程度になると成り立たない、役に立たないと・・・さらには、厳密性に欠ける第二級（以下?）の法則であると・・・」。

しかし、本稿は、「その通り（言われなくてもわかっている）。だから何なのだ!」という態度に徹して、その上で、これらの法則をくどくどと説明しようというものである。

(x) 回路の基本定理（本稿だけの用語）について

※ この項の説明は、すべて読み飛ばしても、本稿の理解には全く支障はないであろう。

この項は、「はじめに」で述べたように、筆者の無知のために当初、書かれていなかった（抜けていた）事項を急遽、追加したものである。

[回路の基本定理]

$$\ell + t - b = 0 \quad (1)$$

ここで、

t (no. of twigs in tree, no. of branch-in-tree) $= n - 1$ ($n = N = V$: no. of nodes=no. of vertices)

ℓ (no. of links, no. of branch-out-of-tree) $= M$ (no. of basic meshes)
 $= F$ (no. of faces) or $(L$ (no. of indep. loops))

であり、また、式(1)は、

$$M + N - B = 1 \quad (2)$$

とも書ける。この式(2)は、次の文献、

(Ref. x) J. L. Synge, "The Fundamental Theorem of Electric Networks", Quarterly of Applied Mathematics, Vo. IX, July, 1951, No.2, p.113

にある式である。この執筆者の「意気込み」に違わず、回路解析へのグラフ理論の応用とは何かを、専門的知識がなくてもわからせてくれていると思われるので、ここに挙げておくことにする。もっとも、木 (tree) という概念を理解すれば、式(1)または式(2)を証明するのは容易であるが・・・

また、式(2)は、よく知られている、オイラー標数（以下、オイラー数という）を使うと、

$$\begin{aligned} \chi &= V - E + F = 1 \text{ (for planar circuit)} \\ \text{(modified)} \chi &= V - E + L = 1 \end{aligned} \quad (3)$$

とも表される。この式(3)は、その変形も含め、「コメント (IV)：オイラー標数」で述べる予定である。

なお、本稿で言う「回路の基本定理」は、上の文献 (Ref. x) の「Fundamental Theorem」とは同じものではない。また、この文献では、回路は「閉じている」と仮定し、この仮定の下に、独立な変数として、mesh current (mesh、または face の周囲を回る電流) を採用している。そしてすべての電流は、mesh current で表されるとするのである (KCL 方程式は自動的に満たされる)。一方、本稿では、回路は閉じていることを前提としおらず、すべての枝電流 (branch current) が独立であるとするのである。そして、この branch 電流を、(外部からの電流供給も含め) KCL 方程式が満たされるように決定しようというものである。(多分であるが)、本稿の方が、キルヒホッフの法則をそのまま定式化しているので、独立変数の数は多くなるが、より広い範囲の回路に適用できるのではないと思われる (?)。

以上で「回路の基本定理」に関する簡単な説明は終わり、以下で本題に入っていくのであるが、そこでの主題は、キルヒホッフの法則それ自体であって (つまり、回路解析は、これだけで OK か? というようなものであって)、高度な回路網解析や効率的な解析方法等に関するものではないことをお断りしておく。

(a) 前置き (キルヒホッフの法則)

まず、よく知られているように、キルヒホッフの法則とは、以下のような誰でもわかる (納得できるような)、二つの簡明な法則からなっている。

電流則 (キルヒホッフの第 1 法則、Kirchhoff's current law、KCL)

回路の中の接続点 (node、節点) に流入 (流出) する電流の和はゼロである。

つまり、これは、電流が保存するという電流保存則なのである。

電圧則 (キルヒホッフの第 2 法則、Kirchhoff's voltage law、KVL)

回路の中の閉路 (closed circuit、loop) に沿って、電圧差の和をとるとゼロとなる。

つまり、これは、電圧は道のりに依らない、位置の関数 (ポテンシャル) であるということを言っているのである。

たとえば、平山博、大附辰夫：電気学会大学講座、電気回路論 [3 版改訂]、電気学会でもキルヒホッフの法則の説明は、わずか 1 ページ余りでおしまいである。これはこの法則があまりに自明で、説明を要しないということであろう。

一方、「物理の」電磁気学の（有名な）教科書で（かつ手元にあるものに限ると）、キルヒホッフの法則に関する記述が全くないものとして、以下のものがある。勿論、電磁気学の教科書であるので、抵抗、インダクタンス、キャパシタンスやオームの法則等の説明は記載されているのであるが・・・（なお、きちんと調べたわけではないので、以下には誤りがあるかもしれない。）

(Ref.1(a)) L. D. Landau and E. M. Lifshitz, “The Classical Theory of Fields”, 3rd revised English edition, Pergamon Press, 1971

(Ref.1(b)) L. D. Landau and E. M. Lifshitz, “Electrodynamics of Continuous Media” 2nd edition revised and enlarged, Pergamon Press, 1984

全く期待していなかったのであるが、Ref.1(b)の § 61、§ 62 に回路の話が載っている。そして、p.217 で（多分であるが）突然、Kirchhoff’s second law (KVL)が使われている。しかし、法則自体の説明は、これらの Landau の教科書には載っていないようである（?）。

[Landau の教科書の Faraday の法則]

回路へのコメント(II)の Faraday の法則（続）を書いているときには気がつかなかったのであるが、Ref.1(b)の § 63 に、Faraday の法則の導出が書かれている。これがよい導出かどうかについては、ここでは述べないが、Landau の電磁気学の二つの教科書、Ref.1(a)、(b)の中で Faraday の法則が登場するのは、かなり後半に位置していること、さらに、§ 63 の題名は、「Motion of a conductor in a magnetic field」となっていることから、導体が Faraday の法則で重要であることを示唆していると言えるであろう。

(Ref.2) J. D. Jackson, “Classical Electrodynamics”, 2nd edition, John Wiley & Sons, 1975

(Ref.3) J. A. Stratton, “Electromagnetic Theory”, McGraw-Hill Book Company, Inc, 1941

(Ref.4) 砂川重信、“理論電磁気学”、第 2 版、紀伊國屋書店、1973

ただし、この Ref.4 の p.145 に DC 回路に関するキルヒホッフの法則がジュールの最小発熱の原理の証明のために説明されている。

また、当然、一行ぐらゐは、キルヒホッフの法則に関する記述があるだろうという期待が裏切られたものとして、

(Ref.5) J. C. Slater and N. H. Frank, “Electromagnetism”, Dover Publ., Inc, 1947

(Ref.6)スレイター・フランク、“電磁気学”、柿内賢信 訳、第 3 版、丸善出版、1963

ただし、回折についてはキルヒホッフの名前がある。

一方、キルヒホッフの法則、特に応用について「比較的」詳しい記述があるものに、

(Ref.7) R. P. Feynman, R. B. Leighton and M. Sands, “The Feynman Lectures on Physics”, Vol. II, The New Millennium edition, Basic Books, 2010

(Ref.8) 高橋秀俊、“電磁気学”、物理学選書 3、第 12 版、裳華房、1969

(Ref. . . .

以上のように並べてみると、何か「傾向」がありそうで、結構、おもしろいと思うのは筆者だけではないであろう。

さて、我々は、(多分) 義務教育の範囲で、電圧、電流、抵抗の関係、

$$V = RI$$

を、そして、少し進んで(義務教育の範囲外で?)、

$$V = ZI$$

を学んでいるだろう。そして、抵抗の直列接続、並列接続についても学んでいるのである(図1を参照)。

直列接続: $R_{total} = R_1 + R_2$ または、 $Z_{total} = Z_1 + Z_2$

並列接続: $1/R_{total} = 1/R_1 + 1/R_2$ または、 $1/Z_{total} = 1/Z_1 + 1/Z_2$

さらに、これらについての演習問題を解く経験も積んでいる(悩んだという経験も積んでいるはずである。)そして、このような(豊富な?) 経験に基づいて(またはこの教育のおかげで)、回路とは、直列接続と並列接続の組み合わせだけで解くことができると「錯覚」している方が多いのではないだろうか。

よって、キルヒホッフの法則とは何?、それって必要なもの?、と思っている方もいるかもしれない。しかし、「作った」演習問題でなく実用的な回路問題を解こうとすると、この錯覚はたちまち破綻をきたすのである。

例えば、回路へのコメント(I)のテブナン、ノートンの定理の図16のブリッジ回路(図2に再掲)を取り上げてみよう。テブナンの定理を使えば、抵抗、 z に流れる電流は、抵抗の直列、並列接続だけで求めることができる。しかしながら、その他の抵抗に流れる電流は、これだけでは求めることができない。さらに、電源、 V に内部抵抗がある場合、テブナンの定理を使うために、 z を外して回路の内部抵抗を求めようとする、その回路図はブリッジ回路になってしまう(ここで、さらに、この内部抵抗を外す操作は意味がない)。これからもわかるように、もっと複雑な回路の場合には、抵抗の直列、並列接続だけでは、回路に流れる電流、電圧は求めることができないのである。

そのような場合でも回路の電圧、電流を求めることができる方法がキルヒホッフの法則である。(筆者は歴史に疎いので、詳細は知らないが) キルヒホッフが、この法則を導いたのは、学生の頃であったということである。時は西暦1845年頃であったと聞けば、Maxwellの電磁気学(1865年)より20年ぐらいい早いことになる。逆に言えば、Maxwell方程式からキルヒホッフの法則が導かれたわけではないのである(Faradayの法則がMaxwell方程式より前にあったのと同じように・・・)。なお、この法則は、

直列接続 (series connection)



並列接続 (parallel connection)

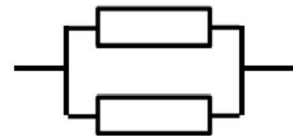


図1

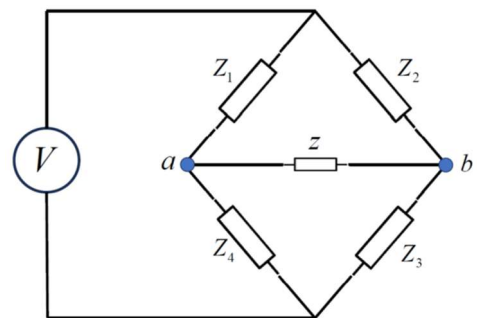


図2

最初は、直流に関するものであった（と思われる）が、その後、（経緯は知らないが）AC 回路にもどんどん適用されて、周知のように、今では、回路解析と言え、キルヒホッフの方程式を解くことであると言っても過言ではないだろう。

さて、キルヒホッフの法則が理系の物理などの分野の人に、概して、「不人気」、または関心がある人が少ないのはどうしてであろうか？ 多分、キルヒホッフの法則が対象としているのが、人工物である回路、要するに工学の対象であるということが挙げられるかもしれない。また、多分、物理分野の多くの人にとって、回路全体より、その回路素子である、導体等の抵抗、誘電体を含むコンデンサ、強磁性の鉄等を含むインダクタンスなどの性質、物性に興味があり、あまりシステムというものには関心が低いかもしれない（物性の測定には高度な回路が組み込まれた測定器を用いているのであるが、関心のあるのは測定値のみであろう）。さらに、キルヒホッフの法則は、ある意味、単純であり、そこに入ってくるのは素子の働きのみで、「物理」が入ってくる余地がないのであろう。

[余分なコメント]（不勉強な）電気専門家への質問

これは、全くの個人的な推測（偏見？）であるが、電気を専門とする不勉強な方々は、昔、マックスウェル方程式は学習したとして、その後は、あまり復習することはなかったのではないかな？

Q: Kirchhoff?

A: Certainly, I know him. He is one of the fathers of circuit theory. I can explain the Kirchhoff's laws, KCL and KVL.

Q: Maxwell?

A: Who...? Oh, yes, I just remembered him. His equations are very famous. But ..., I cannot write down the equations.

(b) キルヒホッフの法則について

上で述べたように、この法則は、あまりにも簡明かつ自明な法則であるので、説明などは必要ないと思われるかもしれない（また、所詮は近似法則なので、「第一義的に」重要な法則ではないと思われるかもしれない）。

さて、本稿では、(II) Faraday の法則（続）の最後の方に述べた、キルヒホッフの法則のための二つの基本式、

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad \mathbf{J} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4)$$

$$\oint \mathbf{E}_L \cdot d\mathbf{s} + \frac{d}{dt} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (5)$$

に基づいて、若干、くどくどと法則の説明をしようと思う。ここで、式(4)は、

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (6)$$

の div を取ることから得られたものであって、div をとることで、磁場、 $\mathbf{H}$ は消えてしまっている。つまり、磁場を作る「操作・機能」がなくなっている、またはある種の情報がなくなっているとも言える。

一方、式(5)の場合には、積分操作をすることによって、細かい（繊細な？）情報をならしてしまっている。つまり、キルヒホッフの法則は、ある種の情報を捨てて出来たものであるとも言えるのである。このように考えると、キルヒホッフの方程式から回路内の電流、電圧が決まるというのは、ある意味、不思議な感じがしないでもない。もっとも、回路の各素子の機能を求めるためには、詳細な情報は捨ててはいけないのである。例えば、磁場の値を必要とするインダクタンスを求めるためには、div を取る前の式(6)を必要とするのである。

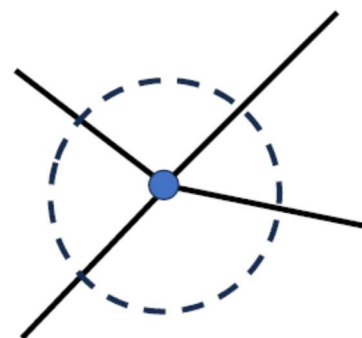


図 3

さて、この式(6)は、他のマクスウェル方程式よりは若干、複雑な内容を含んでいるように思われる。そこで、div を取って、電荷保存則になった、それでおしまいでは些か寂しい気がする。そこで、若干、蛇足かもしれないが、別稿、「余談：アンペール・マクスウェル方程式」を設けて、式(6)のアンペール・マクスウェル方程式への一つのコメント（ある観点からの説明）を載せる予定にしている。

さて、筆者は、正直、回路用語もおぼつかないが、ここでは、以下のような言葉を適宜（適当に）用いることにしたい（全部の言葉ではないが・・・）。

回路の接続点： 節点、node、幾何学的には、頂点、vertex、V

回路の線： 枝、branch、幾何学的には、辺、edge、E

閉回路： ループ、loop、幾何学的には、面、face、F、または loop

通常、以上の言葉が表す概念は明らかで、常識的、感覚的に容易に理解できるものである。しかし、例えば、節点とは何かを厳密に、かつ意味ある（有意義な）形に定義しようとする、たちまち困難に直面するであろう。これは力学で質点を定義しようとする場合と同じである。理想的な節点とは、大きさのない点でありながら、抵抗もなく自由に電流が流れる、非現実的な点である。さらに、抵抗だけでなく、キャパシタンスもインダクタンスも全くない点である。一方、現実的な節点は、線をねじってつなげた場所、ネジやハンダで何本かの線を束ねた点であるにもかかわらず、理想的な節点にかなり近いものになっているのである。

(c) キルヒホッフの電流則 (Kirchhoff's current law、KCL)

(c-1) 電流則、KCL

さて、図 3 の節点の周りの（狭い）領域で、 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ を積分し、導線以外には電流が流れないとする

$$0 = \int \operatorname{div} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dV = \oint_S \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = \sum I_i + \oint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (7)$$

となる。ここで、 I_i は領域から、線番、 i を通って流れ出る電流である。一方、この領域内で、電束密度、 $\mathbf{D}$ の時間変化がゼロであれば、式(7)の最後の項はゼロなる。これは、元に戻って、

$$\oint_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \int \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV \quad (8)$$

とすると、領域内の電荷の時間変化がゼロであることと同じである。節点（及びその付近）では電荷を貯め込むことはないとする、

$$\sum_i I_i = 0 \quad (9)$$

というキルヒホッフの電流則（Kirchhoff's current law, KCL）が得られるのである。なお、通常の回路の場合、節点付近では、電束密度、 $\mathbf{D}$ 自体がほぼゼロであるので、当然、式(8)はゼロであるが、電束密度はゼロでなくても、領域内で時間変化がなければ、式(9)は成り立つ（例えば、 $\mathbf{D} = \text{const.}$ の場合など・・・）

(c-2) もう一つの電流則（第二電流則？）

式(9)は、初等的、直感的には明らかであると思われるものである。しかし、回路では、さらにキルヒホッフの二つの電流則、電圧則にはない、電流に関する「大前提」が暗に仮定されていると思われる。それは、節点と節点を結ぶ（枝分かれのない）線（branch）では、一方の節点から入った電流は、そのまま、もう一方の節点から出るというものである。

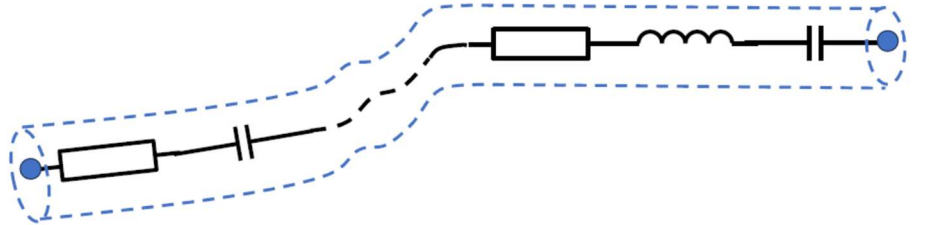


図 4

ここで、 a, b はそれぞれの節点としている。図 4 に示すように branch を囲む（筒状の）領域を考え、その領域で $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ を積分すると、

$$I_a = I_b \quad (10)$$

ここで、 a, b はそれぞれの節点としている。図 4 に示すように branch を囲む（筒状の）領域を考え、その領域で $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ を積分すると、

$$0 = \int_V \operatorname{div} \mathbf{J} dV = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_b J_b dS - \int_a J_a dS = I_b - I_a \quad (11)$$

となる。ただし、この式が成り立つためには、次の二つのことが成り立つ必要がある。

- ・ 筒状の領域の側面上では、電流（密度）はゼロであり、かつ電束密度の時間変化もゼロである（ $\partial \mathbf{D} / \partial t = 0$ ）。回路全体を筒状の領域で囲った場合には、通常、（回路への入出力の電流は除いて）このことが成り立つのは当たり前であろう（そうでないと、危険であり、回路の取り扱いに細心の注意が必要になる）。回路素子の外部では、多くの場合、電場はゼロあると考えてよいので、個々の回路素子についても（ほぼ）成り立つとしてよい（通常、このおかげで、回路全体についても成り立つのである）。
- ・ 節点、 a, b （筒状の領域の上下面上の点）は、回路素子の外部に設けるものとすれば、 $\partial \mathbf{D} / \partial t = 0$ が成り立つ。

同様に、線 (branch) 上にある回路の各素子の間にある線上の点を通過する電流についても、電流の測定点を素子の外部 (それなりに十分離れた点) にとれば、式(10)が成り立つのである。つまり、電流保存則が成り立っていると見ることができる。これらは、電荷保存則ではないので一般的状況では成り立たないが、「普通」の回路では、実際上は、これらの電流保存則は成り立っているとしてよいのである。

[コメント]

アンペール・マックスウェルの方程式の説明でよく取り上げられているように、線上にコンデンサがある場合には、コンデンサの電極の間に流れる電流はゼロとなるので、電流保存則は成り立っていないが、電流 (密度) の代わりに、 $\mathbf{J}$ を使うことで、式(11)が数学的に consistent になるのであった。逆に言えば、(回路の解析では) 節点をコンデンサの中に設けてはいけないのである。

さらに、コメントすれば、Conductor is indispensable である。ここでも (抵抗が実効的にない) 導体の存在が重要である。抵抗がないとすると、図4の節点での断面上では電場がないとしてよい。通常、回路では、抵抗は導体と別に、ある抵抗値をもった素子として導入される。もし導体の抵抗が無視できない場合には、導体は、抵抗のない導体と抵抗素子からなると見なす (または近似する) のである。また、周波数が高くなり、図4の筒状の領域の側面の電場の寄与が無視できなくなる場合には、近似的には、その箇所に (浮遊) コンデンサが存在するとするのである。勿論、この場合でも素子であるコンデンサの外では、電流保存則は成り立っている。しかしながら、この場合、branch を追加したことになるので、式(10)は成り立たないのである。

なお、式(10)の等式が言っていることは、電流の大きさが等しいというだけでなく、位相も等しいということである (ただし、電圧と電流の間では位相は異なってもよいのであるが・・・)。つまり複素表示で見れば、複素数として等しいということである。例えば、節点、 a 、 b 間で時間遅れはないということになる。これは、ある意味、驚くべきことを言っているかもしれない (もしかしたら、誤解している方がおられるかもしれないが・・・)。しかしながら、このことが成り立つためには、先に挙げた条件 (当然、成り立つであろう条件) を満たしていることが必要である。当然のことであるが、branch の途中に枝分かれがあるとすると、この条件は満たされない。また、この branch のすぐそばに、アースなどの別の線や導体があると、 $\partial \mathbf{D} / \partial t = 0$ は満たされない。極言すれば、仮に場というものがないとすれば、条件は満たされるのである。また、式(11)では、branch の長さについては何も言っていないので、どんなに長くても式(10)が成り立つことになる。これは明らかに電磁場や special relativity などの物理的原理に反することを言っていることになる。どこがおかしいのであろうか? 使っている式は、電荷保存則のみであるので、物理的原理には反しないはずである。実は、おかしいのは、使っている式でなく、状況設定がおかしいのである。筒状の側面で $\partial \mathbf{D} / \partial t = 0$ としたことは、つまるところ、branch の周りに場がないとしたことによるものである。要するに、キルヒホッフの電流則、KCL (+第二電流則) は、極論すれば、場が「活躍できる」物理的真空がないという仮定の基に成り立っていると言ってもよいであろう。このため、回路理論では線路 (branch)、節点 (node) のつながりのみが重要であって、その空間的配置はどうでもよいことになるのである。たこ足、空中配線、さらには、グチャグチャ配線

でもきちんと接続されていれば、キルヒホッフの法則は満たされるのである（現実の回路としては、大いに問題であっても・・・）。実際には、特に周波数が高い場合には、上のコメントでも述べたように浮遊容量が問題になる。この場合には、浮遊容量を lumped capacitance でモデル化することがよく行われるが、そうすると、branch が枝分かれすることになり、式(10)は満たされなくなる。勿論、この場合でも枝分かれにならないように、branch を分割して考えれば、分割後の個々の branch については、式(10)は成り立つのであるが・・・。

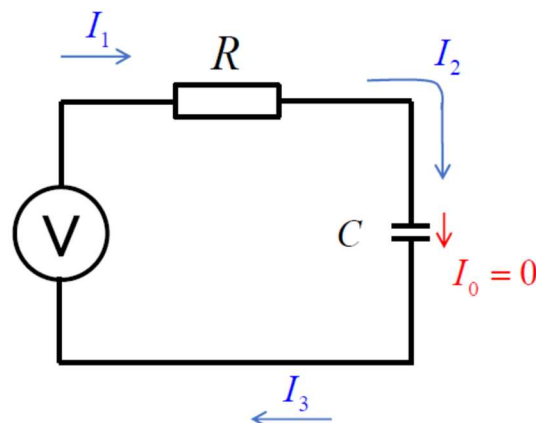


図 5

例題：RC 回路

ここで、非常に簡単な RC 回路を取り上げてみよう。

通常、図 5 の電流、 I_1 、 I_2 、 I_3 はすべて等しいとして計算するのであるが、うるさいことを言えば、これは、式(10)によって保証されているのである（しつこく言えば、例えば、 I_1 と I_3 の間にはコンデンサ、 C が挟まれているが、そこには、時間遅れはないのである）。なお、コンデンサ内の電流、 I_C は（当たり前ではあるが）ゼロである。さて、図の回路に、次に述べるキルヒホッフの KVL（次の項でうるさく説明）を適用すると、

$$RI + \frac{q}{C} = V_0 \quad (t > 0) \quad (12)$$

となる（回路のスイッチを $t=0$ で閉じるとする）。ここで、電荷、 q の初期値をゼロと仮定すると、式(12)は、

$$RI(t) + \frac{\int_0^t I(t) dt}{C} = V_0 \quad (t > 0) \quad (13)$$

となる。明らかに、 $t=0$ では、コンデンサ、 C はショート状態と見なせるので、 $I(0) = V_0 / R$ となり、時間が十分経過した後では、オープン状態になったと見なせるので、 $I(\infty) = 0$ となっているはずである。

さて、式(13)を Laplace 変換すると、

$$R\tilde{I} + \frac{\tilde{I}}{sC} = \frac{V_0}{s} \quad (14)$$

となる。よって、

$$\tilde{I} = \frac{V_0}{R(s + 1/RC)}$$

となるので、直ちに、

$$I(t) = \frac{V_0}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (15)$$

となるのである。(再度、しつこく言えば) この電流値は回路全体で (素子の外では) 共通の値である。

(d) キルヒホッフの第二法則、KVL

式(5)をもう一度、書くと、

$$\oint \mathbf{E}_L \cdot d\mathbf{s} + \frac{d}{dt} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

であり、これを回路の中の閉回路または loop に適用し、回路素子ごとの和で表したものが、キルヒホッフの電圧則 (Kirchhoff's voltage law、KVL) と呼ばれるものである。これについては、既に **Faraday の法則 (続)** の中でも使われており、また具体例で考えた方がわかりやすいので、一つ具体例 (図 6) を次に挙げよう。

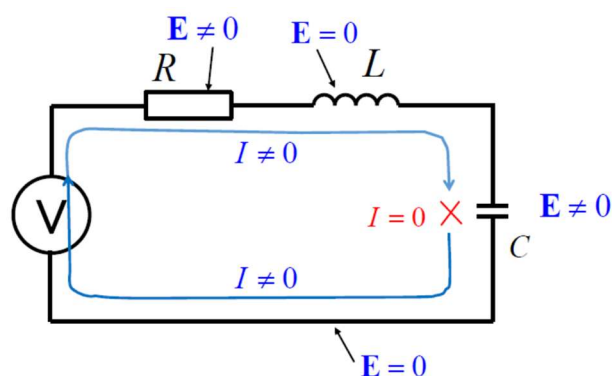


図 6

例題：(直列) LCR 回路

図 6 は、直列 LCR 回路の例である。回路素子

(L、C、R) は、「純粋な」素子でかつ lumped element (集中回路素子) とし、さらに素子間の導体の抵抗はゼロとすると、回路内の電場及び電流は、図 6 に示したようになる。そして、KCL 法則は、回路全体だけでなく、回路素子の外側の点でも「正しく」成立することになる。ここで、C の中では、電流はゼロで、遮断されている、または L の内部では、電場はゼロであることに注意。すると、図 6 から (以下、記号の説明を省略)、

$$\oint \mathbf{E}_L \cdot d\mathbf{s} = \int_R \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_V \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (16)$$

となる (ここで、 $\mathbf{E}_L$ の L は Lorentz の L であって、インダクタンスの L ではない)。ここで、符号 (正負) に注意して ($\mathbf{E}$ と $d\mathbf{s}$ の向きに注意して)、右辺の各項を書くと、

$$\int_R \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_R \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \cdot d\mathbf{s} = RI \quad (17)$$

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = V_C = \frac{q_C}{C} \quad (18)$$

$$\int_V \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -V_0 \quad (19)$$

となる。ここで、外部から回路（全体）にかかる磁場はない、自己インダクタンスは一定（動かないし、電流依存もない）とすると（勿論、浮遊インダクタンスもないとすると）、

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \frac{d}{dt} (L I) = L \frac{dI}{dt} \quad (20)$$

となる。以上から、KVL 方程式は、

$$L \frac{dI}{dt} + R I + \frac{q}{C} = V_0 \quad (21)$$

と、よく知られた（直列）LCR 回路の方程式になる。今、簡単のために、スイッチを閉じる前（ $t < 0$ ）

の初期状態では、 $I = 0$ 、 $q = 0$ とし、 $V_0(t > 0) = V e^{j\omega t}$ としよう。すると、式(21)の Laplace 変換は、

$$\left(sL + R + \frac{1}{sC} \right) \tilde{I} = \frac{V}{s - j\omega} \quad (22)$$

となる。よって、

$$\left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} \right) \tilde{I} = \frac{V}{L} \frac{s}{s - j\omega} \quad (23)$$

となるが、ここで、

$$2\lambda = R/L, \quad \omega_0^2 = 1/LC \quad (24)$$

とおくと、

$$\tilde{I} = \frac{V}{L} \frac{s}{(s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2)(s - j\omega)} \quad (25)$$

と求まる。さらに、

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}, \quad \alpha = -\lambda + j\omega_1, \quad \beta = -\lambda - j\omega_1 \quad (26)$$

とすれば、式(25)は、

$$\tilde{I} = \frac{V}{L} \frac{s}{(s - \alpha)(s - \beta)(s - j\omega)} \quad (27)$$

と簡単な形に書ける。これから、容易に、

$$\tilde{I} = \frac{V}{L} \left[\frac{1}{s - \alpha} \frac{\alpha}{(\alpha - \beta)(\alpha - j\omega)} + \frac{1}{s - \beta} \frac{\beta}{(\beta - \alpha)(\beta - j\omega)} + \frac{1}{s - j\omega} \frac{j\omega}{(j\omega - \alpha)(j\omega - \beta)} \right] \quad (28)$$

と部分分数展開できることがわかる。よって、容易に逆 Laplace 変換でき、解が求まるのであるが、初等的な式の変形が若干、面倒であるので、結果の導出は、ここには書かないこととして、次の別の方法で求めた同じ結果を式(34)に示してある。この別の方法とは、まず解を一般解と特殊解の和で表して、初期条件を満足するように係数を求めるという「常套手段」である。それは、容易に、次の形であること

がわかる。

$$I = A e^{-\lambda t} \cos \omega_1 t + B e^{-\lambda t} \sin \omega_1 t + \frac{V}{L} \frac{j \omega e^{j \omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2 j \lambda \omega} \quad (29)$$

一つの初期条件、 $I(0) = 0$ から、

$$A + \frac{V}{L} \frac{j \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2 j \lambda \omega} = 0 \quad (30)$$

となるが、もう一つの初期条件は、式(21)から、

$$L \frac{dI}{dt} = V \quad (31)$$

となる。よって、式(29)から、

$$-\lambda A + \omega_1 B + \frac{V}{L} \frac{(j \omega)^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2 j \lambda \omega} = \frac{V}{L} \quad (32)$$

以上から、 A, B は、

$$A = -j \omega \frac{V}{L} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2 j \lambda \omega}, \quad B = \frac{V}{\omega_1 L} \frac{\omega_0^2 + j \lambda \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2 j \lambda \omega} \quad (33)$$

となる。これから、式(29)は、

$$I = \frac{V}{L} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2 j \lambda \omega} \left(-j \omega e^{-\lambda t} \cos \omega_1 t + \frac{\omega_0^2 + j \lambda \omega}{\omega_1} e^{-\lambda t} \sin \omega_1 t + j \omega e^{j \omega t} \right) \quad (34)$$

となることがわかる。なお、式(34)は、初期条件、 $I(0) = 0$ 、 $dI/dt(0) = V/L$ を満たすことが容易に確認できる。

[初期条件へのコメント]

図 5、図 6 ともスイッチを閉にする前は、電流はゼロ、つまり、 $I(0-) = 0$ であるが、スイッチを閉した途端、図 5 では、式(15)からわかるように $I(0+) \neq 0$ となり、図 6 では、 $I(0+) = 0$ のままである。図 6 の場合、インダクタンス、 L があるので、電圧が突然、かかっても、電流はすぐには流れないのであるが、図 5 の場合には、それが無いので、突然、電流が流れ出すのである。

次に、抵抗成分がない共鳴状態、つまり共鳴発振（共振）する場合を考えてみよう。この場合にも、Fourier 変換でなく、Laplace 変換を使った方が簡単であろう。この場合、式(25)または式(27)から、

$$\tilde{I} = \frac{V}{L} \frac{s}{(s^2 + \omega^2)(s - j\omega)} = \frac{V}{L} \frac{s}{(s + j\omega)(s - j\omega)^2} \quad (35)$$

となる。なお、この部分分数展開は次のようにして簡単に求まる。

$$\begin{aligned} \frac{s}{(s + j\omega)(s - j\omega)^2} &= \frac{1}{2(s - j\omega)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(s + j\omega)(s - j\omega)} \\ &= \frac{1}{2(s - j\omega)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (36)$$

or

$$= \frac{1}{2(s - j\omega)^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(s + j\omega)j\omega} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(s - j\omega)j\omega}$$

[コメント]

この部分分数展開を求めるのに、未定係数法を使ってもよいが、より簡単に求めるには、ちょっとした複素関数論の知識（留数を求める方法）を使った方がよい（しかし、ここで、このテクニックの説明を始めると、多分、話が長くなりそうなので、割愛する）。これは、電気工学等の工学の分野では、Heaviside の方法とも呼ばれているものである。

すると、式(35)を逆 Laplace 変換して、

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{V}{L} \left(\frac{t}{2} e^{j\omega t} + \frac{\sin \omega t}{2\omega} \right) \\ &= \frac{V}{L} \left(\frac{t}{2} e^{j\omega t} - \frac{1}{4j\omega} e^{-j\omega t} + \frac{1}{4j\omega} e^{j\omega t} \right) \end{aligned} \quad (37)$$

と求まり、（よく知られているように）時間に比例して発振（共振）することがわかる。

[(当たり前の) コメント]

以上では、外部の電圧は、 $V e^{j\omega t}$ としているが、時間変化が $\cos \omega t$ または $\sin \omega t$ の場合には、上で得られた結果の実数部、または虚数部をとればよいのである。

(e)（世の中に流布している？）第二法則の導出

筆者の認識が間違っているかもしれないが、現在、世の中に流布している、または大学等で教えられているキルヒホッフの第二法則に関する説明の多くは、次のような二つ、(1)または(2)ではないかと（勝手に）推測している。

- (1) 図 7 のように、回路に沿ってループを描き、ループの中（ループの内側）には磁場（または磁場変動）がないと仮定しよう。すると、

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t \rightarrow \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (38)$$

となる（磁場の中で回路は動かないと仮定）。よって、

$$-\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \sum_i \Delta V_i = 0 \quad (39)$$

となり、キルヒホッフの電圧則、KVL が導かれたとするのである。

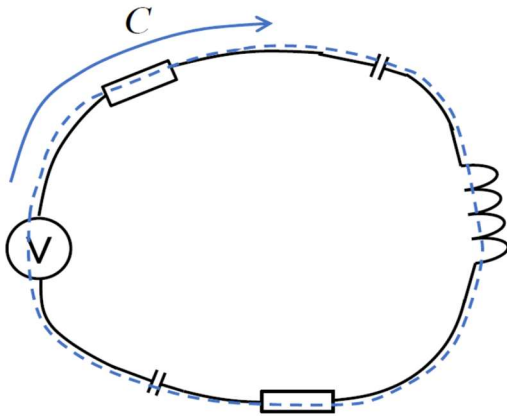


図 7

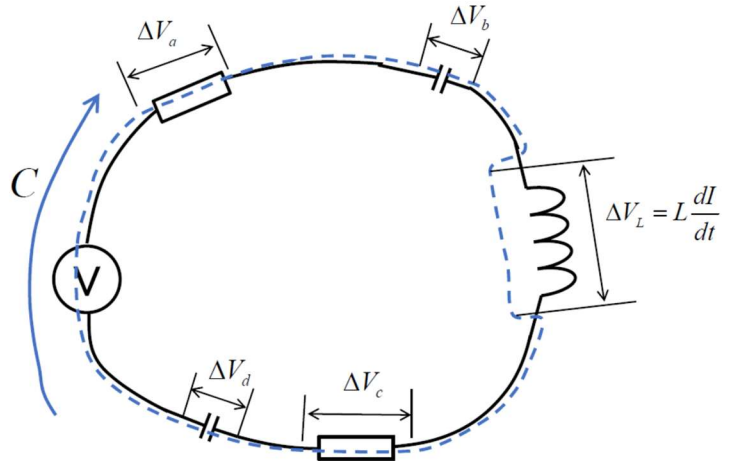


図 8

しかし、これは明らかに間違いで、錯覚であろう。それは、素子として、インダクタンスが含まれる場合を考えれば、明らかであろう。インダクタンスを構成する導体の抵抗がゼロであるとする、そこでは電場はゼロであり、よって、インダクタンスの電圧への寄与は全くないことになる。実は、(II) Faraday の法則（続）でも述べたように、式(39)の右辺は、 $\neq 0$ である。実際、回路全体にわたって磁場はないとしても、回路素子のインダクタンスを形成する巻き線には磁場がかかっている、式(38)の面積積分はゼロにはならないのである。この巻き線の部分も含めてループ積分をしないといけないのである（たとえ、頭の中がこんがらがったとしても・・・）。いずれにしろ、このような間違い（錯覚）をグチャグチャと批判しても生産的ではないので、次のような別の説明についても確認しておこう。

- (2) これは、ループとしては、図 8 のようにインダクタンスを避けたものを考え、これについて、式(38)を適用しようというものである。そして、別途、インダクタンスにかかる電圧をインダクタンスの外にかかる電場から求めて、これを式(39)の左辺に加えようというものである（具体的には、インダクタンスの電圧を $L dI/dt$ とするのである）。こうすることで、磁場があることによる（間違いやすい？）議論を避けることができるのである。

今度の場合には、（多分）議論は全く正しいのであるが、（少なくとも個人的には）この議論には何か違和感が残るのである。それは、

- ・インダクタンスだけに電圧を与えるという特別扱いは変ではないか？
- ・それなら他の素子についても、最初から電圧を与えてもよいではないか？

=> このようにすると、はなから第二法則（電圧則）そのものになってしまい、法則の説明・

導出にはならないのではないかと？

- ・インダクタンスと同様、図9のように、すべての素子についても、それを避けるようにループを作ってもよいであろう（もっとも素子とループの間には磁場はないと仮定して・・・）。

=> なんてわざわざ、素子の外部の電場を測らないといけませんか？（もし測定とした場合には、正確な測定は非常にむづかしいのではないかと？）

- ・さらに、このようなループは、結局は図

10 と等価となり、その最終的な姿は一点のみとなる。

=> よって、第二法則が成り立つのは自明となる。

等々の点である（つまり、「あなた」が議論しているのは、法則の説明ですか、それとも導出ですかという点である）。以上のように、これらの議論には何か釈然としないものが残ってしまうのである。しかし、(DC であれば、正しいが) 一般的には全く間違っている (1) の説明と、全く正しい (2) の説明の大きな欠点は、電圧に対してミスリーディングな結論を導く可能性が大である

ということであろう。それは、もし回路全体に磁場がかかっている場合には電圧は定義できないのではないかという疑念（または誤解）を抱かせてしまうということである。定義できたとしても電圧は場

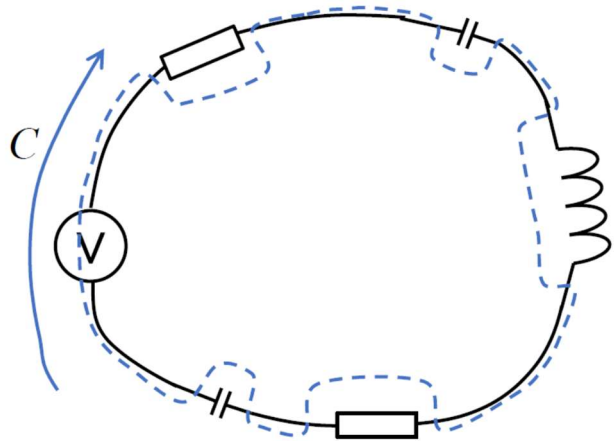


図9

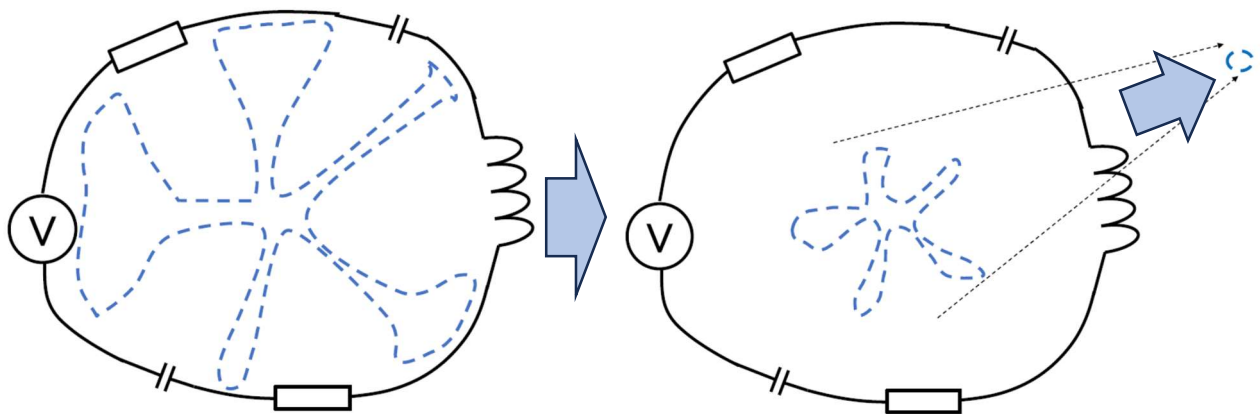


図10

所の多価関数になってしまうのではないかと、よって実際には意味がなくなってしまうのではないかとというような疑問である。それは、(1)の場合、そして所詮は(2)の場合も、 $\text{rot} \mathbf{E} \neq 0$ に伴う問題を回避できないからである。この世の中、多価関数である電圧があるとするとうどうなるのか、空想するだけで頭が変になるかもしれないが、そもそもそのような（道のりに依存する）電圧をどのようにして測定するのかも悩ましい問題であろう。しかし、現実の世界では、回路のどの場所の電圧も（磁場等の影響をないように注意して測れば、または不注意に測っても）デジボルの表示はある確定値を示すのである。ノイズで値がふらついていても・・・少なくとも多価を示すことはないのである（とどのつまり、我々は多価表示のデジボルは見たことはないのである）。しかし、現実、空想むなしく、(II) Faraday の法則（続）でも

述べたように、電圧は磁場があろうとなかろうと、スカラー関数で、場所により一意的に決まるのである。これはかなり重要なことであると思われるが、それにも拘わらず、かなりの方が誤解しているかもしれないのである。

(これは個人的な推測、感想であるが) 長年にわたり (100 年以上?)、キルヒホッフの第二法則の説明や導出が、上記のように、特に(1)のようにされてきたとするならば、そのような教育を受けた学生等はいへん不幸なことと言わざるを得ないかもしれない。そして、これは、もしかしたら世界的に「普遍的なこと」かもしれないので、かなり憂慮すべきことであるとも言えるかもしれないのである。しかしながら、幸いなことに、間違った議論の影響 (悪影響) は思いのほか、少ないと思われる。なぜなら、実際上は、キルヒホッフの (正しい) 法則のみが回路の基本法則として使われており、法則の導出自体が間違っていようがいるまいが、何の影響も与えないであろうということである。多分、回路の実務の上で必要なのは法則のみで、それ以上に遡ることはないので、「それ以上」は全く忘れてしまっても全く問題はないであろうから、間違った導出の影響はほとんどないと言ってもよいかもしれない。逆に言えば、このことが間違った導出を長きにわたって延命させている原因かもしれない。

[不逞な蛇足 (神の存在を信じたい無神論者の独り言)]

神の存在を「証明」できなくても、神を信じれば、世の中の出来事がすべてがうまく説明でき、ご利益も多々ある。神を信ずれば安心が得られ、あわよくば救済されるのである。まずは神を信じなさい、さすれば救われるのである。よって、どんな宗教でも永遠になくなることはないであろう (?) (多分、どんな宗教にも永遠の命が与えられている (??))。

キルヒホッフの法則を (グチャグチャ言わないで) 信じなさい。さすれば、世の繁栄と安寧だけでなく膨大な利益がもたらされるであろう (どんな宗教よりも・・・)。

----- (f) キルヒホッフの法則の「特性」

若干、繰り返しの感なきにしもあらずであるが、以下にキルヒホッフの法則の特性のようなものを列記しておこう。

○ 回路素子内の (local な) 電磁場は、素子内に閉じ込められており、それ以外には漏れないと仮定している。さらに、回路全体にわたるような (global な) 電磁場はなく、電流は線路 (branch) に閉じ込められているとする。

○ (b-2) 項で、若干、大袈裟に、「もう一つの電流則 (第二電流則?)」と題して説明しているが、線路上で保存するのは、線路の断面積で積分した、 $J = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$ であり、電流、 I ではないのである。

しかし、実際には、回路を解析する上で、この J を I だと見なしても (錯覚してしても) 全く問題は起きないであろう。つまり線路 (branch) 上の電流、 I は保存し、どこでも (C の中でも)、一定値であると錯覚してもよいことになる。こうすることで、「もう一つの電流則」は「消滅」して、通常の電流則、KCL だけが残ることになる (よって、以下では「もう一つの電流則」は一切、忘れることにしよう)。

- 回路解析では、基本的には、global な変位電流 (displacement current) や誘導電場 (induced electric field) がないと仮定している。もし、global な場がある場合には、キルヒホッフの法則はそのままでは成り立たないことになる (電波または磁場による誘導電場を利用したスマホの充電器の場合には、global な場を利用しているとも言えるが、回路全体で見ると、むしろ、受電部以外はこの場を遮断したものとした設計になっているであろう。) その意味で、現状では、global な場を積極的に利用するような回路 (non-Kirchhoff's circuit (?)) はほとんどないと言ってもよいのではないだろうか・・・?

勿論、式(5)や(II) Faraday の法則 (続) の内容を参照すれば、global な場がある場合でも (修正した) キルヒホッフの法則が成り立つようにすることできるだろう (ただし、本稿では、以下、global な場はないと仮定して話を進めることにする)。

- キルヒホッフの法則には、空間的配置 (距離的な位置関係) は入ってこない。入ってくるのは、回路素子のつながりだけである。よって、法則には場という概念 (または、物理的真空という概念) はない (含まれていない) のである。また、回路の線路 (枝、branch) がこんがらがっていてもかまわない。branch 同士が絡まっても「気にしない」のである (勿論、ショートさせてはいけないうが・・・)。

つまり、空間、場、真空というようなものは、基本的に考慮されていないのである。逆に言えば、キルヒホッフの法則ではトポロジーという概念が重要であることがわかる。

- 我々、素人が回路を製作すると、トポロジーが合っていれば、どうにかこうにか動くのであるが、出来上がった回路は、どうしても線がグチャグチャに入り込んだり、はたまた空中配線になったりして、立派な回路図とは似ても似つかない代物になってしまう。このため、線間の混信やノイズで満足に動作しないことが頻発するのである (勿論、家庭内の配線程度であれば、トポロジーだけでうまくいくのであるが・・・)。しかも、初期の段階では、素人は誤配線も多く、それを見つけ出すのに大変苦勞するという、トポロジー上のトラブルを引き起こすのであるが・・・。

一方、プロは誤配線があっても、これをすぐに見つけて修正し、出来上がった回路もノイズの混入が少なく、きちんと動作するのである。これが、素人とプロとの違いであろう。

[負け惜しみの蛇足]

「私 (素人) が作った回路は、マクスウェル方程式に従って動いているが、あなた (プロ) が作った回路は、単に (低レベルの?) キルヒホッフの法則に従って動いているだけではないか。」

=> 勿論、動いていればよいというものでない。ちゃんと目的に合った動作をしないようでは、所詮は、負け惜しみであるのであるが・・・

- キルヒホッフの法則に反する厄介者である線間混信や外乱ノイズと言えども、マックスウェル方程式には忠実に従っているはずである。

そして、(若干、大袈裟ではあるが・・・) マクスウェル方程式とキルヒホッフの法則の間にある「ギャップ」から「マクスウェルの悪魔」と言ってもよいものが登場してくるのである。とは言え、これは、何か新しいものではなく、日常的にあらゆるところに蔓延している、ノイズ（電磁ノイズ）、混信等のことを言い換えているに過ぎないのではあるが……。しかしながら、この「マクスウェルの悪魔」には、常に、素人のみならずプロ也大いに悩まされているもので、なんとかこれをなだめるために、多大な努力を払っているのである（努力が無駄な場合も結構ある）。この点で、この悪魔は、その存在が不明確かもしれない(?) 統計力学のマクスウェルの悪魔 (Maxwell's demon) とは存在意義が全く異なると言ってもよいであろう。

[全くの蛇足]

一方で、日本には、人々を幸せに、そして元気にしてくれる「オレンジの悪魔」が存在するのである。これは、キーワード「京都橘、橘吹奏楽部、オレンジの悪魔」等々でググると、すぐに見つけることができる（オレンジの悪魔の YouTube は、一見に価値するであろう。動画はたくさんあるので、長時間、楽しめるが、十八番（おはこ）の Sing Sing Sing は最高!）。

(g) キルヒホッフの法則による回路解析

回路解析の方法には、独立変数として、節点の電圧、ループ電流、枝電流 (branch current) をとる方法などがあるが、本稿では、一貫して branch current を求める方法を採用する。すべての branch current (branch 電流) が求まれば、これからすべての電圧、ループ電流等が求められることは明らかであろう（極端に例外的な場合を除くと・・・）。本稿の目的の一つは、回路にキルヒホッフの法則を適用するだけで、本当に解が求まるのかという「疑問」に答えることである。

まず、項目(a)で挙げた 次の教科書を引用しよう。

(Ref.8) 高橋秀俊、“電磁気学”、物理学選書 3、第 12 版、裳華房、1969

この教科書の p. 117 に、以下のような簡単な記述がある。(※ ただし、初めの部分は、用語の説明のために付け加えてあるが、それ以外は、ほぼ忠実に再掲したつもりである)。

n : 回路図の線、枝(branch)

m : 回路図のつなぎ目、節点 (node)

Kirchhoff の第 1 法則から m 個の式があるが、独立な式は（電流の総和が 0 であることから） $m-1$ 個となり、未知の電流は n 個から、

$$n - (m - 1) = n - m + 1$$

に減る。そこで、これだけ電流をきめるためには、第 2 法則を用いて、なるべく簡単に、互いに独立な $n-m+1$ の閉回路について方程式を立てて解けばよい。

今までの例のように、回路の図が平面上に交差せず書ける場合は、平面が回路によって分けられて $(n-m+1)$ 個の（互いに重ならない）多角形がつくられる。そのとき、このおのおのの多角形の周囲に

ついて、それぞれ Kirchhoff の法則を適用すれば、独立な $(n-m+1)$ 個の方程式が得られる。平面に交差せずには書けないような回路でも、適当な方法で $(n-m+1)$ 個の方程式をつくるのが可能である。

上記の「 $(n-m+1)$ 個の（互いに重ならない）多角形がつくられる。」という文章はちょっと考えれば、これは、オイラー標数（Euler characteristic、以下ではオイラー数という）に関係しているということがわかる。オイラー数については、以下で若干、詳しく説明するが、ここでは、

$$\chi = V(\text{vertex}) - E(\text{edge}) + F(\text{face}) \quad (40)$$

と定義されるということを知っていれば十分である（ポピュラーな数学解説書が好きな方はよく知っている式であろう）。ここで、平面図形（穴の開いていない図形）の場合、 $\chi=1$ であり、球面の場合、 $\chi=2$ で、ドーナツ面の場合、 $\chi=0$ であることなどもポピュラーであるだろう。よって、平面的な回路（planar circuit）の場合、 $\chi=1$ であるので、

$$F(\text{face}) = E(\text{edge}) - V(\text{vertex}) + 1 = n - m + 1 \quad (41)$$

となる。実際の回路には面（face）はなくて穴だけであるが、（仮想的な）一つの面、またはループに対応して、KVL 方程式が一つあるとするのである（面は仮想的ではあるが、この面に穴は空いていないのである。もし穴があったら仮想的な面を取り上げなかったことに相当する）。つまり、branch 電流を決めるのに十分な数の方程式があることになる。また、この平面的な回路（planar circuit）の場合には、得られる独立な式は、必要最低限の個数で、余分な式はないこともわかる（個々の（最小の）面をいくつかのつなげたものについての式を立てないことすれば・・・）。一方、上記の「平面に交差せずには書けないような回路でも、適当な方法で $(n-m+1)$ 個の方程式をつくるのが可能である」という文章については、思いつく簡単な（3 次元的）回路では、そうであることがわかるが（そして、多分、余分な式も得られるであろうが）、本当にそうなのかは検討する必要があるように思われる。なお、ドーナツ面上に回路が展開されているような場合には、 $\chi=0$ であるので、方程式の数が不足して、解が決定できないのではないかと、よって、もしかしたらドーナツ型の回路は成立しないのではないかとという疑問が生じるかもしれない。しかし、以下で不十分であるが概説するように、そして「回路へのコメント (IV)：オイラー標数」できちんと述べるように、十分な方程式の数は確保され、かつ余分な式は独立ではないことがわかるのである（勿論、実際の回路では、きちんと決まった電流が流れるはずである、つまり解は存在するはずであるので、こんなことは考えるに値しないと考える方もいるかもしれないが・・・）

[コメント]

高橋先生なら、きっと、「君ねー、これはね、これ、あれであるから、明らかである。よって検討するまでもないよ」と言われるかもしれないのであるが・・・

最後に、式(41)が言っていることをもう少し分かりやすく書いておこう。

$$V(\text{no. of KCL eq.}) - 1 + F(\text{no. of KVL eq.}) = E(\text{no. of branch currents}) \quad (42)$$

左辺の $V(\text{no. of KCL eq.}) - 1$ は、独立な KCL 方程式の数である。なお、後述するように、どんな回路（それは、実現できる回路であればどんなものでよい。例えば、素人の空中配線、グチャグチャ回路で

もよい)でも、式(42)は成り立つのである。ただし、ここで、no. of KVL eq. は、独立な KVL 方程式の数 (no. of independent KVL eq.) と読み替えるのである。これは、(変形した) オイラー数が常に 1 であり、

$$V(\text{no. of vertices}) - E(\text{no. of edges}) + L(\text{no. of independent loops}) = 1 \quad (43)$$

となることからくるものである。これは、本稿の初めに述べたように、回路の基本定理をオイラー数の用語で述べたものである。このオイラー数については、先に触れたように、別稿の「**回路へのコメント (IV)：オイラー標数**」を参照して頂くことにして、本稿では、これは了解されたものとして、話を進めることにしたい。

(h) (枝電流を独立変数とした) 解とその一意性及びいくつかの留意点

具体的な(簡単な)回路及び解については、次項に述べることにして、ここでは枝電流 (branch 電流) を独立変数とした解法及び留意点、特に解の一意性について説明しよう。なお、記述は羅列的である。

[若干、くどいコメント] branch 電流はすべて独立である (と解釈できる)

本稿では、(筆者の理解する範囲の) 回路のグラフ理論とは異なり、branch 電流はすべて独立変数として取り扱う。branch 電流をすべて独立変数にすると、KCL 方程式を満たさないのではないと思われるかもしれない (そのため回路のグラフ理論では、独立な変数として、link 電流を定義している)。しかし、本稿では、むしろ、branch 電流はすべて独立変数であるが、KCL 方程式を満たすようにこれらの値が決定されると「解釈」するのである。例えば、branch 電流の値を勝手に選ぶことで、節点で不足または過剰になった電流は、外部からの電流流入・流出によって補償されて、KCL 方程式を満足するとするのである。また、一般には、多くの節点では外部からの電流の供給はゼロとなっているが、その場合でも、節点での KCL 方程式は、「条件式」ではなく、これを満足すべき「方程式」であると「文字通りに」解釈するのである。以上のように解釈すると、branch 電流は、すべて独立変数と考えることができるのである。

(h-1) KCL 方程式

式(9)の KCL 方程式は、(branch 電流を独立変数とすると) 明らかに線形の方程式となる。また、当然であるが、回路に、たとえ非線形要素が含まれていても線形のままであることに注意。

ここで、

- ・前もって勝手に各 branch に向きを与え、それを電流の向き (電流の正の向き) とする。
- ・(本稿では) 節点から出る電流を+とし、節点に入ってくる電流を-とする。
- ・ただし、回路の外部から節点に供給される電流は+としよう (節点から外部に供給される電流は-とするのである)。

このように電流の向きを規定すると、各節点で KCL 方程式を書くことができる。例えば、**図 11** の場合には、その KCL 方程式 (の係数行列) は、**図 12 (表)** のようになることがわかる。

	...	a	b	...
α	...	1	-1	...
β	...	-1	0	...
γ	...	0	1	...

図 12 (表)

よって、節点、 α, β, γ での方程式は、

$$\begin{aligned}
 \cdots + I_a - I_b + \cdots &= J_\alpha \\
 \cdots - I_a + 0 + \cdots &= 0 \\
 \cdots + 0 + I_b + \cdots &= J_\gamma
 \end{aligned} \tag{44}$$

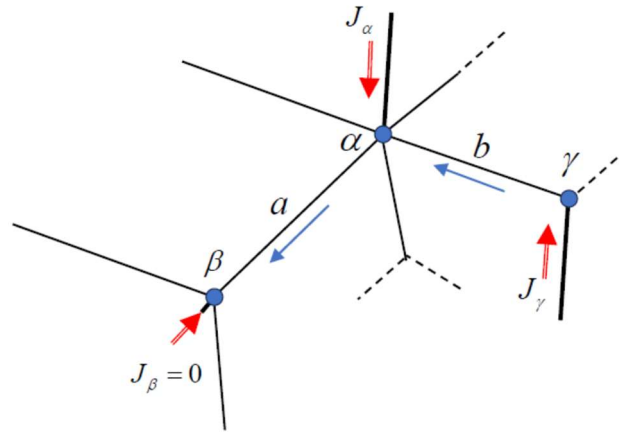


図 11

のようになる。ただし、右辺の記号、 J は電流であり、左辺の電流の記号と区別するために用いて

いる (式(4)などの J ではない)。図 12 (表) の係数行列を眺めると、その特徴は、

- ・一つの branch、例えば、branch、 a に着目すると (その列に着目すると)、ある一つの節点の場所で、1 で、もう一つの節点の場所で -1 となっており、他の場所では 0 である。

- ・よって、その列の和 (節点に関する和) はゼロになる。

- ・その他の列の和も同様にゼロとなる。

- ・これから、各節点の係数行を行ベクトルとすると、その和はゼロとなることがわかる。

つまり、これら行ベクトルは独立ではない (少なくとも一つのベクトルは、「余分」である。)

(実際の計算では、余分なベクトルに対応する節点をアースとすると便利である。)

また、これから、外部から供給される電流の和は、ゼロになることがわかる。

$$0 = J_A + J_B + \cdots \tag{45}$$

[コメント]

この結果の式(45)は、回路全体を包むような領域についての式(9)、そのものであるが・・・

この式(45)は、「電流保存則」であり、外部から供給された量の電流が外部に出ていくということを言っている。つまり、回路には電荷は溜まらないということを言っているのである。例えば、回路素子のコンデンサに溜まっている電荷は、正電荷、負電荷を合わせるとゼロになるということである (このことは、ある意味、(c-1)、(c-2) 項で述べたことの繰り返しであるが・・・)。

さて、上で述べた「余分な」ベクトルを一つ削除すれば、残りの行ベクトルは互いに独立となるであろうか？これに答えるために、まず (当然の) 前提として、回路は連結 (若干、うるさいことを言えば、本稿では、連結 = path-connected とする) であるとしよう (つまり、どの節点からも任意の節点に branch をたどっていくことが可能であるとする)。さて、一般に、独立でない (一次従属である) ベクトル、 $\mathbf{v}_i$ の間には、すべてがゼロでない係数、 c_i があって、

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + c_n \mathbf{v}_n = 0 \tag{46}$$

となる関係がある。今、ゼロでない c_i をもつベクトル、 $\mathbf{v}_i$ の添え字を（番号付けを変更して）1 とし、式(46)を c_i で割ると、

$$\mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + c_n \mathbf{v}_n = 0 \quad (47)$$

となる。ここで、もし添え字 2、つまり、節点 2 と節点 1 が、ある branch でつながっていたとすると、**図 12（表）** の係数行列からわかるように、 c_2 は、1 であることがわかる。（他の節点は、この branch とつながっていないので、 $c_2=1$ に何ら影響しない）。さらに、回路は連結であるとしたことから、節点 1, 2 は、他の節点といくつかの branch を経由してつながっている。つまり、節点 1、2 から他のある節点（例えば節点 3）に、ある branch でつながっている。よって、同様の議論により、式(47)は、

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \cdots + c_n \mathbf{v}_n = 0$$

となる。これを繰り返していけば、

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \cdots + \mathbf{v}_n = 0 \quad (48)$$

となることがわかる。よって、この n 個のベクトルは一次従属となり、この関係の一次従属しかない。これは、先に述べた、「各節点の係数行を行ベクトルとすると、その和はゼロとなる」というのと同じことを言っている。仮に、途中で ($k < n$)、

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \cdots + \mathbf{v}_k = 0 \quad (49)$$

となったとしてみよう。この場合、回路は連結であるとしているので、 $1 \sim k$ の節点の一つと、これら以外の節点 ($k < i \leq n$) の一つとは、ある branch でつながっているはずである。よって、式(49)のベクトルのみでは、この branch に対応するベクトルの成分の和をゼロにすることができない。つまり、式(49)は成立しないことがわかる。式(48)のように最後までいって、一次従属となるのである。以上の議論から、連結な回路の場合、独立な行ベクトルの数は、

$$\text{no. of independent vectors} = \text{no. of nodes (vertices)} - 1 \quad (50)$$

であることがわかる。

[コメント]

ベクトルが一次従属であることは、式(46)で「すべてがゼロでない（任意の）係数、 c_i 」があることであるが、今の場合には、 $c_i = 1 \text{ or } 0$ としてよいことに注意。

一つの例

図 13 のように、二つの独立な（連結していなかった）回路が一つの branch で（のみ）つながった場合を考えてみよう。回路の A 部の KCL 方程式の和をとると、

$$0 + I_e = \sum J_i \quad (51)$$

となることがわかる。これから、式(51)の右辺、つまり A 部の外部から供給される電流の和がゼロであるとすると（または一切、電流が

供給されないとする）、 $I_e = 0$ 、

つまり、この branch には電流が流れないということがわかる（このことは、当たり前であるとも言えるが、もしかしたら、そうでもないかもしれない）。

なお、多くの場合、二つの回路が独立に見えても、（実効的に）ア

ースでつながっている場合には、上の議論が当てはまらない。例えば、カラスやスズメなどの鳥は高压線に止まることができるが、人間などの地上動物は低压線でも触れてはいけない（活線工事をする電気屋さんを除いて・・・）。

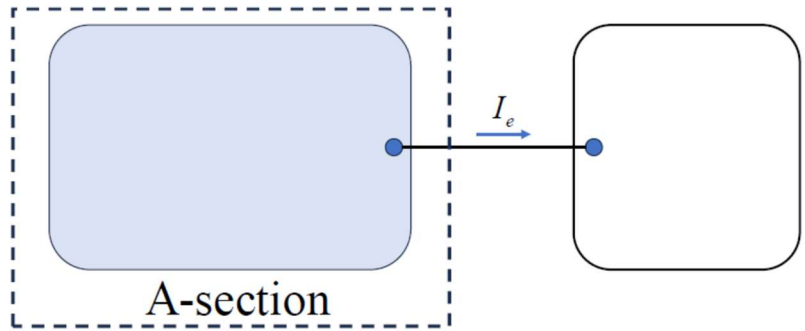


図 13

【コメント】

上記の回路の間をつないでいる branch に電流が流れないということは、 A 部の内部に電源（電流源、電圧源）があってもそうであることに注意（勿論、各電源は、 A 部の中で閉じている（リターンの線も A 部の中にある）とするのである。）

(h-2) KVL 方程式

この KVL 方程式は、あるループに関する電圧の和がゼロであるということ言っているので、電圧で見れば（電圧を独立変数として考えれば）、線形方程式である。しかし、電流（本稿の場合、branch 電流）を独立変数として選んだ場合、KVL 方程式は、一般的には非線形方程式となる。通常、このような非線形の方程式を解くのは困難で、多くの場合、数値的解析に頼らざるを得ないであろう。しかしながら、今では、優れたソフトウェア、例えば SPICE 及びその発展形があり、回路のパラメータ等を入力すれば、たちまち解を得ることができるのである。

一方、回路の基本的な動作、現象をよく理解するためには、数値計算だけでは必ずしも十分でないことは、他の分野と同じであろう。特に回路については、回路素子が線形であるとしてよい場合が多いであろう（または素子の特性を線形化して扱ってもかなりのことがわかるのである）。また、回路の解の存在の問題についても、線形化した方程式で解の存在が言えれば、非線形の場合でも解が（少なくとも

一つは) 存在するであろうと (多くの場合) 期待してもよいであろう。

以上のような「弁解」に基づいて、本稿では、基本的に線形の回路素子からなる回路 (のみ) を取り扱うことにしよう。

[コメント]

一般的には、方程式は非線形になるとは言え、幾何学的なループは線形である、よって重ね合わせができる。つまり、どんなループを取ってきても、それは、ある独立なループの和として表される。よって、回路素子が非線形であろうと、これら独立なループに関する方程式が満たされる解であれば、その他のループの方程式は自動的に満たされるのである。したがって、問題は、(KCL 方程式に加えて) 解を決めるだけの十分な数の独立なループ、または独立な方程式があるかということになる。しかしながら、幸いなことに、(基本的には) KCL+KVL の方程式だけで十分な数の方程式が用意されるのである (これを示すのが、本稿の目的の一つである)。ここで、(基本的には) と、() で囲った意味は、例えば、非線形の場合、解がただ一つに決まらないことがあり、それを決めるには、追加の「情報」(ある場所の電圧、電流) が必要になることがあるのである。さらに、回路が線形であっても、特別な場合には、解が不定となる (一定値に決まらない) ことがあり、解を固定するためには、追加の情報が必要になる (しかし、この場合には、不定の解をもつことが、ある意味、「自然」ではあるが・・・)。

以下に示すように、回路が線形の場合には、特別な場合を除くと、KCL+KVL の方程式だけで (追加の方程式はなくても) 一意的な解が求まるのである。このことは、決して、先験的に (a priori に) 明らかなことではないであろう。

(h-3) 線形回路の KVL 方程式

線形回路を取り扱うには、直接、Time domain で、または frequency domain で考えることがよく行われる。さらに Laplace 変換(s-domain)もよく行われる。回路では、frequency domain で考えるのが、より一般的であり、取り扱いも容易であろう。しかし、初期値問題、発振や安定性を議論するには、Laplace 変換を使った方が、計算などが「機械的」にでき、悩まないであろう。しかしながら、本稿では、「場合によっては悩むことにして (?)」、主に、frequency domain で取り扱うことにしよう。

frequency domain では、回路素子にかかる電圧は、よく知られているように、インピーダンス、 Z を用いて、

$$V(\omega) = Z(\omega) I(\omega) \quad (52)$$

と書かれるので、KVL 方程式は、例えば、

$$0 = \sum V_i - V_s = \sum Z_i I_i - V_s \quad (53)$$

のようになる。ここで、和は、ループを形成する branch ごとの電圧、または ZI であり、 V_s は電圧源がループ上にあれば、その電圧である)。

(h-4) 線形回路の解法

以上のことから、KCL 及び KVL 方程式を行列の形に書くと、

$$\mathbf{A}\mathbf{i} = \mathbf{b} \quad (54)$$

のようになる。ここで、

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \text{KCL eqs.} \\ \text{KVL eqs.} \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix} \quad (56)$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} J_1 \\ \vdots \\ V_1 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (57)$$

である。今、行列、 $\mathbf{A}$ の中の KCL 方程式の内の一つを削除すると、KCL 方程式については、ベクトルが独立になる。さらに、この（一行削除した）行列を新たに $\mathbf{A}$ とすると、 $\mathbf{A}$ は式(42)、または式(43)から正方行列になる。もし、KVL 方程式のベクトルが独立であるとする（さらに、KVL 方程式が KCL 方程式のベクトルとも独立であるとする）、行列、 $\mathbf{A}$ の determinant（行列式）は nonzero であることから、解、つまり branch 電流が一意的に求まることがわかる。さらに言えば、キルヒホッフの法則だけで解が求まるのである。特に平面回路（planar circuit）の場合には、(f)項で述べたように、ちょうどピッタリ、必要な数だけの独立な KVL 方程式がある。もっとも、この「もし」は、常に成り立つわけでないのであるが・・・（これについては、以下を参照のこと）。

[コメント]

※ このコメントは、先に述べたことの繰り返しとなっているが、再度、コメントしておこう。

回路に外部から電流の供給がないとすると、KCL 方程式を「方程式」でなく、branch 電流が満たすべき条件式と見なすことができる。この条件を満たすような電流（たとえば、mesh current、ループ電流）を選んで、これらを独立変数として、回路を解析してもよいことになる。しかし、本稿では、すべての branch 電流を独立変数として取り扱うのである。つまり節点における（回路内部の）電流の総和がゼロということは、その節点への外部電流がゼロであると考えことにするのである（総和の値がゼロでない場合は、その分、外部からの電流供給（または、外部への電流供給）があるとするのである）。

[コメント]

式(55)の KVL 方程式は、独立した（幾何学的）ループについての方程式である（必ずしもベクトル自体が独立とは限らないが・・・）。当然、これ以外にもループを描くことは可能で、それに対応する KVL 方程式が多数ある。場合によっては、どれが独立かはわからないかもしれない。すると、一般には、KVL 方程式は、下図の左図のようになる。この中

で独立したループの組をとると、それ以外のループは、(幾何学的に) 独立したループの組の一次従属となる (なお、右辺のベクトル、 $\mathbf{b}$ の成分も含めて、一次従属であることに注意)。よって、下図の行列を変形すると図の右図のようになり、結果として、独立なループに関する方程式が残ることがわかる。

$$\begin{array}{c} \text{Coeff. of KVL eq.} \end{array} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c} \text{independent} \\ \text{KVL eq.} \\ \mathbf{0} \end{array} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}' \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

(h-5) 電流源、電圧源

本稿のように branch 電流を独立変数とする取り扱いでは、電源が外部電流源、内部電圧源である場合には、上記の KCL、KVL 方程式にうまく組み込まれているので、何ら変更を必要としない。一方、内部電流源、外部電圧源がある場合には、次のような変更が必要となるであろう。

図 14 (a) のような内部電流源がある場合には、これを図 14 (b)、または図 14 (c) のように外部電流源と見なせば、うまく取り扱うことができるようになる。

一方、図 15 (a) のように、外部電圧源がある場合には、これを図 15 (b) のように「内部電源化」すればよいことがわかる。つまり、電流源は、すべて外部電源化し、電圧源は、すべて内部電源化して取り扱えばよいのである。

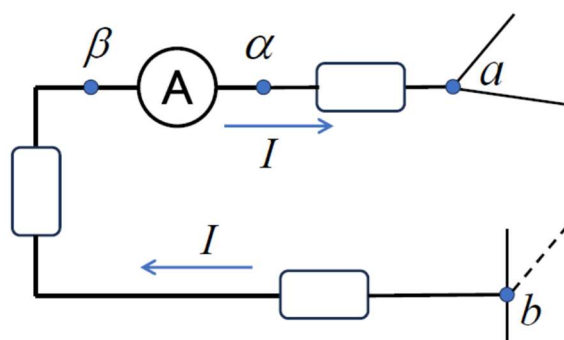


図 14 (a)

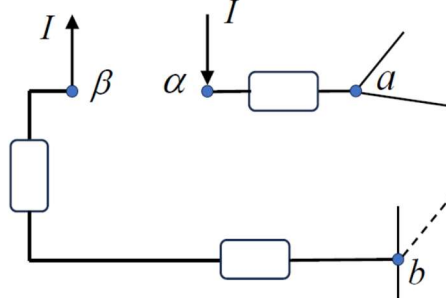


図 14 (b)

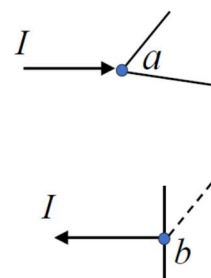


図 14 (c)

(h-6) 「もし」が成り立たない特

別な場合

よく知られているように、一般に、 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の線形方程式は、 $\det A \neq 0$ であれば、一意的に解を求め

ることができる。一方、 $\det A=0$ となるのは、特別の場合であり、行列、 A の係数がちょっとでもずれば、(一般的には) $\det A \neq 0$ となるであろう (例えば、行列の rank が行列の次数 (order) より 1 だけ少ない場合には、random に係数をずらせば、ほとんど間違いなく、 $\det A \neq 0$ となるであろう)。よって、「特別な場合」は確率的にはほとんど起こりえないと言ってもよいが、それでもこの「特別な場合」を検討しておくことは意味があるであろう。

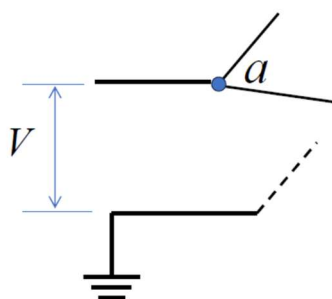


図 15 (a)

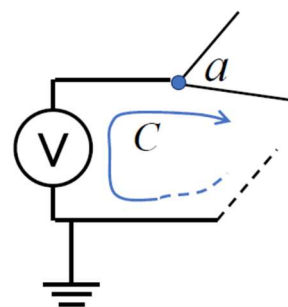


図 15 (b)

なお、上述の回路の方程式では、 $\det A=0$ という状況が起きる可能性があるのは、KVL 方程式から (のみ) である。(幾何学的な) ループとしては独立でも、その方程式が独立になるとは限らないのである。

[コメント]

なお、非常に限定された場合であると言ってもよいが、KCL 方程式と KVL 方程式とが独立にならない、(特別の場合というより)「特異な」場合と言ってもよい場合があるのである。また、KCL 方程式「単独」でも独立にならない場合もある。これらについては後述を参考にされたい。

特別な場合 1

図 16 (a) のように、抵抗ゼロの線を二つに分けた場合、明らかに branch、 a と branch、 b に流れる電流を一意的に決めることはできない (不定である)。例えば、図のループ、 C に流れる電流は、抵抗がないことから任意の値をとることができる。

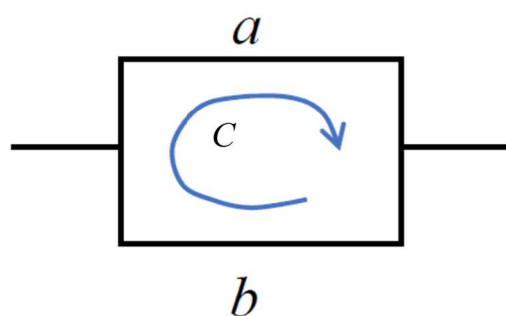


図 16 (a)

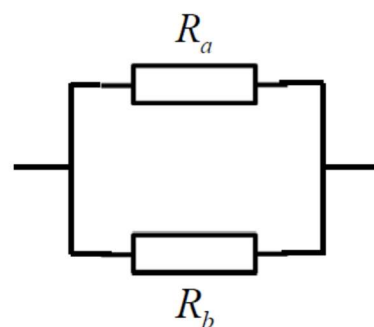


図 16 (b)

ことができ、どんな値をとっても回路の他の部分には影響はないのである。もし、図 16 (b) のように、二つの branch の抵抗がゼロでない (少なくともの一つはゼロでない) とすると、この二つの branch に関する KVL 方程式 (の係数) は図 17 (表) のようにすることができる。

...	a	b	...
ooo	R_a	0	***
ooo	0	R_b	***

図 17 (表)

ここで、二つの branch 以外の回路上の経路は同じとしよう。つまりooo、*** は上下の欄で同じものである。よって、図 17 (表) の二つの行ベクトルは、一般には独立となるが、もし、二つの branch の抵抗がゼロであるとする、図 17 (表) は、

...	a	b	...
ooo	0	0	***
ooo	0	0	***

となり、明らかに、二つの行ベクトルは、独立ではなくなり、二つの branch に流れる電流を一意的には決めることができないのである。

特別な場合 2

今度は図 18 のような場合を考えてみよう。図のループの抵抗がゼロであるとする、このループにどんな電流が流れていても、回路の他の部分には全く影響を与えない。よって、この場合にも、回路に一意的な解はないことがわかるが、このことを KVL 方程式 (の一部) で表すと、図 19 (表) のようになる。

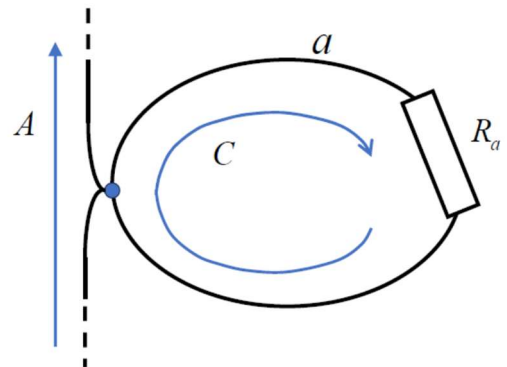


図 18

	...	a	...
A	ooo	0	***
$A+C$	ooo	R_a	***

 $\xrightarrow{R_a=0}$

	...	a	...
A	ooo	0	***
$A+C$	ooo	0	***

図 19 (表)

これから、ループの抵抗がゼロであると、二つの行ベクトルが独立ではなくなる (勿論、ゼロでなければ、必ず独立であるのであるが・・・)

いずれにしろ、これら特別な場合、つまり 1 と 2 のような回路は考えないのが普通であろう。よって、実際上は、大きな問題にはならない (普通は除外するのである)。しかし、次の例はそうでもないかもしれない。

特別な場合 1'+2'

これは、特別な場合 1 で branch、 a または b が (または両方とも) が図 20 (a) のように直列共振型になっている場合である。もう一つは、特別な場合 2 で、ループが直列共振型になっている場合である (図 20 (b))。そして、周波数、 ω が、

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

を満たしているとする、抵抗（インピーダンス）がゼロとなり、特別な場合の 1 と 2 になる。よって、

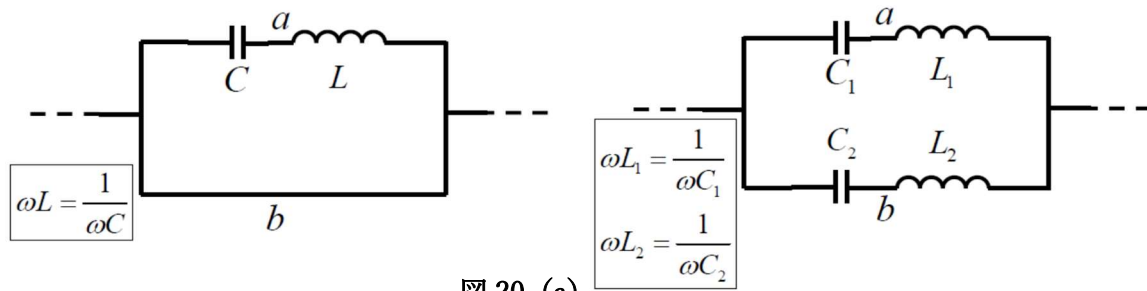


図 20 (a)

回路に一意的な解がないことになる。また、回路素子として負性抵抗を導入した図 21 のような場合に、ループの抵抗はゼロになり、同じ状況になる。

ただし、ある周波数で抵抗がゼロとなり、一意的な解がないという状況は定常解がないということ（「普通の」frequency domainでの解がないということ）を言っているのであって、必ずしも一般的な解がないということ言っているのではないことに注意しよう。この一般解は、Laplace 変換を用いれば、「機械的に」求めることができる。よって、この特別な場合 1'+2'は、何ら特別の場合ではないとも言えるのである（ただし、図 21 のようにループに負性抵抗がある場合は、ループの Laplace 変換がゼロとなるので、「特別の場合」に相当する）。

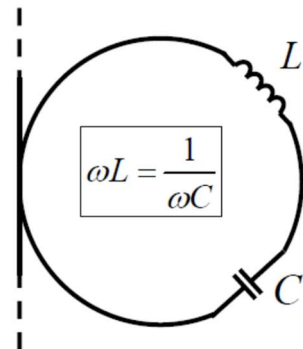


図 20 (b)

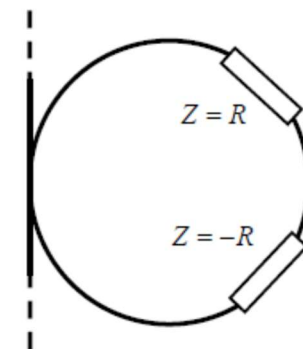


図 21

(h-7) 解の一意性について

以上のことからわかるように、特別な場合を取り上げて（ある意味、重箱の隅をつつくように、特別な場合を探して）、一意的な解があるかどうかを議論してもあまり実用的ではないと思われるが、ここに、さらに例を挙げておこう。

負性抵抗をもつ場合（特異な（？）場合）

図 22 の回路の場合、KVL 方程式（の一部）は、図 23（表）のようになる。

...	a	b	c	...
ooo	Z_1	Z_2	0	***
ooo	0	0	Z_3	***

図 23（表）

よって、 $Z_3 \neq 0$ であれば、二つの行は、 Z_1, Z_2 がなんであれ、独立である。しかし、 $Z_3 = 0$ の場合、

Z_1, Z_2 が共にゼロでなければ、独立である（ように見える。）それは、例えば、図 24（表）を見れば、明らかである（ように見える。）

...	a	b	c	...
ooo	R_1	R_2	0	***
ooo	0	0	0	***

図 24（表）

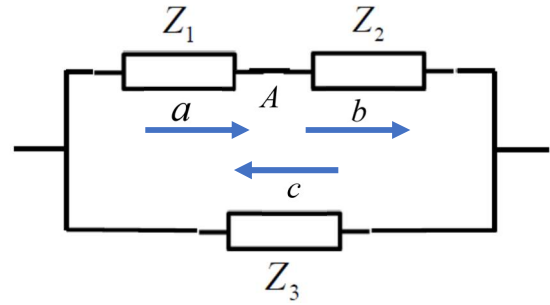


図 22

しかし、 $R_1 = R, R_2 = -R$ となるような負性抵抗をもつ場合、上の行列に、節点、 A の KCL 方程式を並記すると、

	...	a	b	c	...
	ooo	R	$-R$	0	***
	ooo	0	0	0	***
A	0	-1	1	0	0

という形になる。よって、第 3 行目を R 倍して、第一行に加えると、第 2 行と同じになるので、一見、独立に見えたベクトルは、この「特異な」場合には、独立にはならないことがわかる。実は、この場合には、等価的に図 16 (a) と全く同じものとなるのであるが・・・

（抵抗成分のない）resonance（共鳴）の場合

この場合も frequency domain で考えると、特別扱いしないといけないが、Laplace 変換で考えると（s-domain で考えると）、off-resonance の場合と全く同じように扱うことができる（(c) 項の「例題：（直列）LCR 回路」を参照のこと）。一般的に、（抵抗成分のない）resonance 要素をもつ回路方程式、 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の $\det A$ が、

$$\frac{1}{\det A} \sim \frac{1}{(s - j\omega)^n} + \dots \quad (58)$$

であるとする、 $(s - j\omega)$ の項がキャンセルする場合を除けば）解も同じような振る舞いをするので、振幅の絶対値が、 t^{n-1} に比例して増大することがわかる（解は存在するのである）。

----- [議論の本筋から少し外れたコメント]

もう一度、上述のループ回路の直列共振の場合を取り上げよう（それは、図 20 (b) のようなものであった）。共振（共鳴）状態の場合（ $\omega^2 = 1/LC$ ）、よく知られているように、ループのインピーダンスは、

$$Z_s = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = 0 \quad (59)$$

となる。一方、図 20 (c) のように、端子、 a, b をつけると、その間のインピーダンスは、並列共振のインピーダンス

となり、

$$Z_p = \frac{1}{1/j\omega L + j\omega C} = \infty \quad (60)$$

となる（見方によって、一つの回路で、直列共振にも並列共振にもなるのである。）さて、節点、 a から見て、ループ一

周の電圧は、当然、 $Z_s I = 0$ であるが、（節点、 a を基準にすると）節点、

b の電圧は（電流の向きを考慮すると）、

$$V = -j\omega L I = \frac{I}{j\omega C} \quad (61)$$

と与えられる。また、節点、 a 、 b 間にどんな電圧を加えたとしても、その

間のインピーダンスは、 ∞ であるので、図 20 (c) の電流、 i は、

$$\infty i = V \quad (62)$$

であるから、ゼロとなることがわかる。並列共振の時は、回路全体に流れる

電流はゼロであるが、回路の中の回路素子（インダクタンスやキャパシタンス）に流れる電流は、式(61)から、

$$I = \frac{V}{-j\omega L} = j\omega C V \quad (63)$$

となるのである。

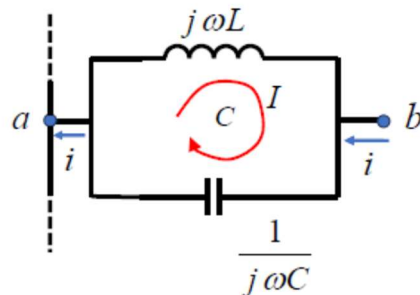


図 20 (c)

(h-8) （もう一度）KCL、KVL 方程式の独立性について

さて、以上に述べたことから、KCL+KVL 方程式をまとめて行列の形に書くと、

$$\begin{array}{c} \overbrace{\left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} KCL \text{ eqs.} \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} KVL \text{ eqs.} \end{array} \right] \end{array} \right]}^{E} \\ \left\{ \begin{array}{c} V-1 \\ F \end{array} \right\} \end{array} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{source} 's \\ V_{source} 's \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$n = E = V - 1 + F$$

となる。ここでは、 $V-1$ 個の独立な KCL 方程式を残している。また、行の数は、（平面回路の場合には）オイラー数から、 $V-1+F=E=n$ （branch の個数）となっており、列の数と同じになるのである（行列は正方行列）。より一般的な回路では、式(43)から、

$$V(\text{no. of vertices}) - 1 + L(\text{no. of independent loops}) = E(\text{no. of edges}) = n(\text{no. of branches})$$

であり、行列は同じく正方行列となる。式(64)の右辺は、電流源の電流、電圧源の電圧である。なお、この項も含め、以下、特に断らない限り、電源の出力は外部から与えたものとする（つまり、出力が

bunch 電流には依存しないとしよう。)

まず、先に述べたように、KCL 方程式の ($V-1$ 個の) 行ベクトルは互いに独立である。一方、KVL 方程式には F 個 (または L 個) の独立なループについての方程式を採用している。このループが独立という意味は、どのループも他のループの「和」で書けないということである (ここでは、この和を数学的に定義しても、あまり生産的ではなく、だれでも理解できる素朴な、直感的な和で十分である)。しかし、(これも先に述べたように) それが意味するところは、「幾何学的」に独立であるという意味である。つまり、方程式を作った際のループが独立であるということであって、必ずしも方程式が独立であることを保証していないのである。しかしながら、多くの場合、独立であろうと推測してもよいであろう (実際にもそうである)。そして、KCL 方程式の係数は、節点と branch のつながりを表す、1、-1 及び 0 という「純粋な」数から構成されていることを考えると、多くの場合、KCL 方程式と KVL 方程式の間も独立であろうと推測される。つまり、式(64)の左辺の行ベクトルは独立であると考えてよいことになり、一意的な解が求まることになる (と推測されるのである)。つまり、おおらかに考えると (特別な場合を除くと)、式(64)によって、回路の一意的な解が求まると言えるのである。

そうは言っても、特別な場合 (極論すれば、病的な (pathological な) 場合) も含め、問題点を検討しておくことは意味がないわけではないであろう。そして、問題の要点は、次のような 3 点にまとめることができるであろう。

(1) 第一は、どんな回路図でも、オイラー数 (変形したオイラー数) は常に 1 になるか？

=> これは別稿の「回路へのコメント (IV) : オイラー標数」の主要テーマであるが、この質問への回答は、Yes である。もし、回答が No であるとする、(回路素子のパラメータをどういじっても) キルヒホッフ方程式では解けない回路問題があることになり、深刻な事態 (?) に陥ることになるのであるが・・・

(2) 幾何学的に独立なループに関する KVL 方程式が独立であるためには (特別な場合に相当しないためには)、どのような条件があればよいか？

(3) さらに、KCL 方程式と KVL 方程式が独立であるためには、どのような条件があればよいか？

なお、(1)については、次項の最初で、「さわり」ではあるが説明している (さわりとは言え、肝であると言ってもよいであろう)。また、次項で、(2)についても、幾何学的に独立なループから作った、KVL 方程式は、ある十分条件を満たせば、独立であることを示す。同様に、(3)についても、もう一つの十分条件を満たせば、KCL 方程式と KVL 方程式の間でも独立であることを示す。

(h-9) 若干の頭の体操

最初に、(1)への回答の概略を述べる。まず回路図 (図形) の節点のみを考え、そこに branch を追加して、回路図 (図形) を構成することを行う。そして、新たな branch を追加するときに、これを接続する節点が、すでに別の branch によって連結されている場合には、それを使って、新たな独立なループを作っていくことにするのである。つまり、新たな独立なループには、新しい branch が追加されているのである。

新しい branch が追加されて、かつ新しいループが形成できるとすると、それは新しい独立なループ

であるということは、ほとんど明らかであろう。どの既存のループにも新しい branch は含まれていないので・・・一応、これを「理屈」で確認してみよう。今、あるループを考え、これが、それまでにある「古いループ」で書き表されたとすると（つまり一次従属であるとする）、このあるループのどの branch も（少なくとも一回は）古いループの branch がなぞっているはずである。つまり、このループには、新しい branch は追加されていないことがわかる。以上の議論の対偶をとると、新しい branch が追加されるのであれば、それは、（一次従属でない）新しい独立なループであるということになる。一方、一般に、論理の逆は、よく知られているように、必ずしも成り立つわけではない。つまり、この逆、新しい独立なループには、必ず新しい branch が追加されるということではないのである。しかし、「必ず新しい branch が追加される」というのは、（直感的には）ほとんど自明のことである（つまり、逆も真である）と思われるかもしれない。それにも拘わらず、これは、図 25 を見ると、直ちに、間違いであることがわかるのである。

すでに C_1, C_2, C_3, C_4 のループがあったとして、それらの一次結合では表されない、 C_0 のループを新たに考えよう。すると、 C_0 には追加すべき新しい branch はないのである。よって、逆は真ではないことがわかる。一方、「回路へのコメン

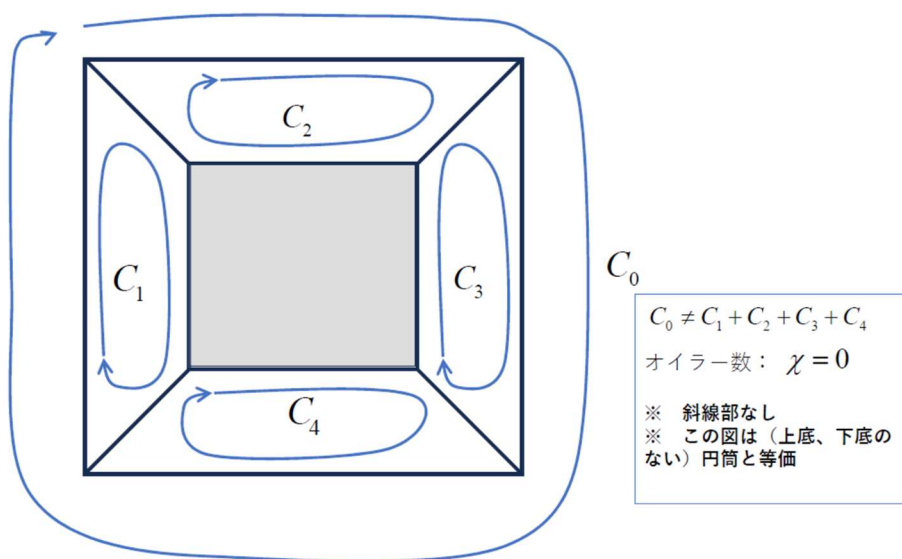


図 25

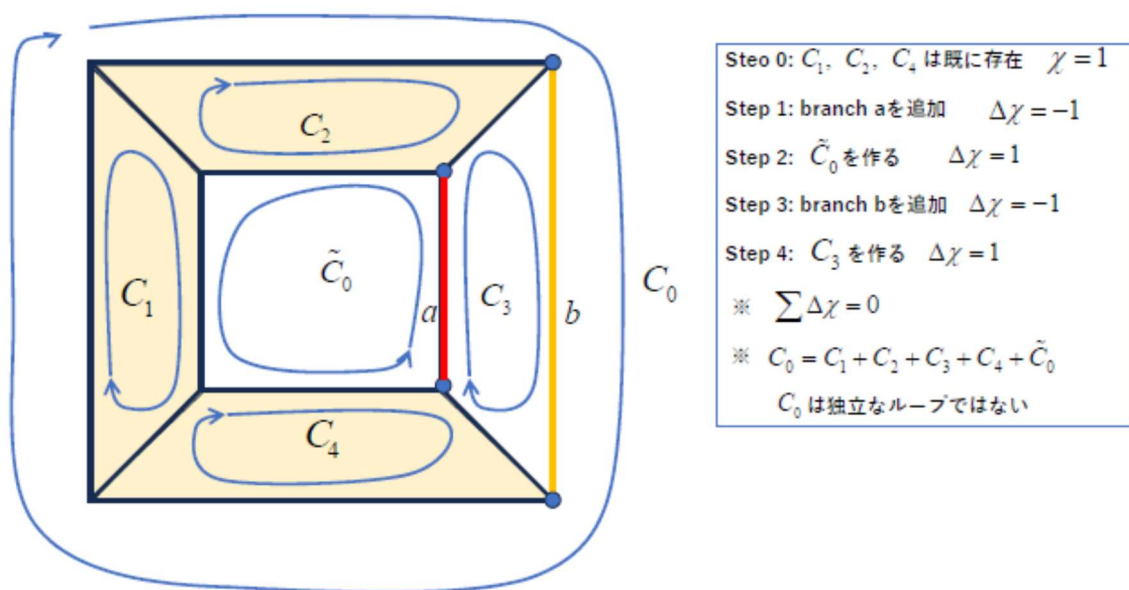


図 26

ト (IV) : オイラー標数」では、図 26 の右枠の中に示すようなやり方で新しい branch を追加していくのである（また、図中のオイラー数についても、この別稿、「回路へのコメント (IV)」を参照のこと）。つまり、この場合には、逆は真となるのである。このやり方では、オイラー数（変形したオイラー数）は、変化しないで、 $\chi=1$ のままである。

次に問題点(2)について、検討してみよう。今、ループを構成する branch に対応する場所で ± 1 とし（符号は、branch の向き（初めにとった branch 電流の向き））、それ以外では 0 とするような KCL 方程式の行ベクトルに似せた「似非」ベクトルを考えよう。すると、独立な新たなループの行ベクトル成分には、古い行ベクトルではゼロであった成分（新たな branch に対応する成分）がゼロでないということがわかる。これから、ループの（幾何学的）独立性は、このように作った行ベクトルの独立性与同等であることがわかる。

実際の KVL 方程式の行ベクトルの成分では、上の「似非」行ベクトルのゼロでない成分のところが、あるインピーダンスの値になる。もし、すべての行ベクトルについて、この対応する成分のインピーダンス (Z_s) がゼロないとすると、明らかに KVL 方程式の行ベクトルは独立になるはずである。よって、行ベクトルが独立であるためには、少なくとも

$$Z_s \neq 0 \quad (65)$$

であればよいことがわかる。これは、(h-6)項などからわかるように、かなり安全サイドの条件、つまり十分条件であり、式(65)でないと独立ではないということではない。なお、この s 成分は、新たなループを構成する時の行ベクトルの成分であるが、ループ上の別の branch を新たにループを構成する時の branch であると見直すこともできるので、この branch に式(65)を適用して、KVL 方程式の行ベクトルは独立であると見なすことができるであろう。しかし、もっと制約を付けるならば、すべてのループ上の branch のインピーダンスは、ゼロでないとすることである。この条件は厳しいように見えるが、通常は、インピーダンスがゼロの branch は省いて、その両端を直結して考えるので、大きな制約ではないであろう（また、実際上も、どのような branch も何らかの抵抗を持っている）。なお、抵抗（実抵抗）がゼロで、ある特定の周波数で、リアクタンス成分がゼロ

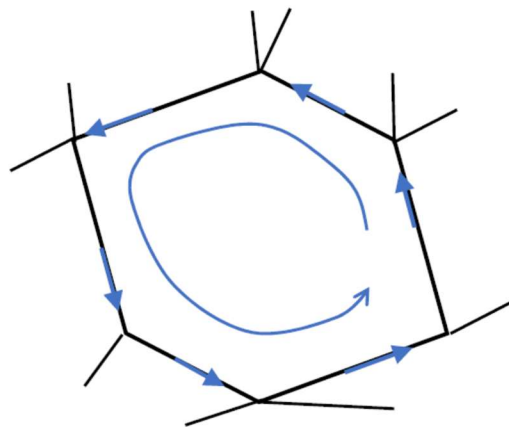


図 27

となる場合でも、つまり、その周波数でインピーダンスがゼロとなるような場合でも、そのまま残しておいても、問題はないのである（たとえば Laplace 変換で扱えば、そのインピーダンスは s に関してゼロ関数ではない。）以上で、KVL 方程式の行ベクトルが独立であるための十分条件（条件の導出がかなり粗雑かもしれないが、実際上は、合理的（reasonable）な条件であろう）を求めることができたが、まだ KCL、KVL 方程式のベクトルが互いに独立であるかどうかはわかっていない。

そこで、問題点(3)となるのであるが、先に述べたように、大抵の場合は、OKであろう（問題はないであろう）と推測されるのである。しかし、「(h-7) 解の一意性について」の項で述べたように、負性

抵抗があるある場合には、必ずしも独立になるわけではないのである。最初に、まず、先の KVL 方程式の「似非」ベクトル（幾何学的ベクトル）と KCL 方程式のベクトルとの独立性について調べてみよう。このために、あるループ（ C ）を構成する branch の向きがすべて揃っているとしよう（最初から branch 電流の向きを適当に取って、そうであったとしてもよいので、一般性は失われない）。さらに、branch 電流の符号付けを適当にやり直すと、このループは図 27 のようになっているとしてよいであろう。

すると、これに関係する KCL 及び「似非」KVL の方程式のベクトルは、図 28（表）のようにになっているとしてよいであろう。

	$\cdots$	I_1	I_2	I_3	$\cdots$	I_n	$\cdots$
v_1	$\cdots$	1	-1	0	0	0	$\cdots$
v_2	$\cdots$	0	1	-1	0	0	$\cdots$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
v_n	$\cdots$	-1	0	0	0	1	$\cdots$
C	0	1	1	1	$\cdots$	1	0

図 28（表）

これから、

$$v_1 + 2v_2 = (\cdots, 1, 1, -2, \cdots) \quad (66)$$

となり、同様にして、

$$\begin{aligned} v_1 + 2v_2 + 3v_3 &= (\cdots, 1, 1, 1, -3, \cdots) \\ v_1 + 2v_2 + \cdots + (n-1)v_{n-1} &= (\cdots, 1, 1, 1, \cdots, -(n-1), \cdots) \end{aligned} \quad (67)$$

となり、最後に、

$$v_1 + 2v_2 + \cdots + (n-1)v_{n-1} + nv_n = \left(\cdots, \overbrace{1-n}^A, \overbrace{1, 1, \cdots, 1}^B, \cdots \right) \quad (68)$$

これから、（ $n=0$ はループを構成するということと矛盾するので） $n \neq 0$ とすると、このベクトルは図 28（表）の C の行ベクトルに等しくならない。よって、この C の行ベクトルは、KCL 方程式のベクトルでは展開できないであろうことを示唆する。しかし、他の組み合わせによっては、 C の行ベクトルをうまく展開できるかもしれないという可能性もあるが、次のような議論により、これは棄却されるのである。図 28（表）の中の KCL 方程式で、そこに示した $I_1 \sim I_n$ の列だけを考えると、ループの回路の KCL 方程式となっており、またループの回路は明らかに連結であるので、独立なベクトルは、ちょうど、 $n-1$ 個あることになる。今、仮に、 $v_2 \sim v_n$ を独立なベクトルとして選んで、このベクトルで式 (68) の 1 が $n-1$ 個並んだ B 部の成分を展開すると、ベクトルの係数は一意的に決まる。よって、式 (68) の A の項も一意的に決まって、 $1-n$ となるはずである。つまり、他のベクトルによる組み合わせ

はないことがわかる（なお、 $v_1 \sim v_n$ は独立ではないので、式(68)の左辺の展開も一意的ではないので、この左辺の展開は一つの例である。）

なお、式(64)では、KCL 方程式の一つを既に削除しているが、もし、この削除の対象となった節点がループを構成する節点の一つになっているとすると、以上の議論はそのままでは使えない。しかし、削除した KCL 方程式、または削除した行ベクトルは、他の行ベクトルに一次従属であったので、他のベクトルによって、「復活」させたとして、同様に議論をすればよいので、特別扱いする必要はないであろう。

次に、上のような「似非」ベクトルでなく、「本来の」KVL 方程式の（物理的、回路的）ベクトルの場合について考えてみよう。この場合、**図 28（表）** に相当するものは、次の **図 29（表）** となる。

	$\cdots$	I_1	I_2	I_3	$\cdots$	I_n	$\cdots$
v_1	$\cdots$	1	-1	0	0	0	$\cdots$
v_2	$\cdots$	0	1	-1	0	0	$\cdots$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
v_n	$\cdots$	-1	0	0	0	1	$\cdots$
C	0	Z_1	Z_2	Z_3	$\cdots$	Z_n	0

図 29（表）

これから（「似非」ベクトルでの議論と全く同様に）、

$$\begin{aligned}
 Z_1 v_1 + (Z_1 + Z_2) v_2 &= (\cdots, Z_1, Z_2, -(Z_1 + Z_2), \cdots) \\
 Z_1 v_1 + (Z_1 + Z_2) v_2 + (Z_1 + Z_2 + Z_3) v_3 &= (\cdots, Z_1, Z_2, Z_3, -(Z_1 + Z_2 + Z_3), \cdots) \\
 Z_1 v_1 + (Z_1 + Z_2) v_2 + \cdots + (Z_1 + Z_2 + Z_3 + \cdots + Z_{n-1}) v_{n-1} \\
 &= (\cdots, Z_1, Z_2, Z_3, \cdots, -(Z_1 + Z_2 + Z_3 + \cdots + Z_{n-1}), \cdots)
 \end{aligned} \tag{69}$$

そして、最後に、

$$\begin{aligned}
 &Z_1 v_1 + (Z_1 + Z_2) v_2 + \cdots + (Z_1 + Z_2 + Z_3 + \cdots + Z_n) v_n \\
 &= \left(\cdots, Z_1 - \sum_{i=1}^n Z_i, Z_2, Z_3, \cdots, Z_n, \cdots \right)
 \end{aligned} \tag{70}$$

となる。よって、

$$\sum_{i=1}^n Z_i \neq 0 \tag{71}$$

であれば、このループの KVL 方程式は、 $v_1 \sim v_n$ に関する KCL 方程式から独立であることがわかる（少なくとも、ベクトルの $I_1 \sim I_n$ 成分の範囲で既に独立であるので・・・）。また、他の KCL 方程式のベクトルは、 $I_1 \sim I_n$ 成分を全く持たないことに注意すると、この KVL 方程式とは独立である（式(71)から、すべての Z_i がゼロということはないことに注意）。

以上の議論をまとめると、(1)については問題点はない。そして、(2)、(3)の問題点については、KVL 方程式が独立であるための十分条件(65)と KCL 方程式と KVL 方程式の間が独立であるための十分条件(71)が満たされれば、回路方程式、式(64)は解くことができる（一意的な解を求めることができる）ということがわかるのである。

[コメント]

図 22 の回路図の並列接続の部分を見なすと、条件(71)は、

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 \neq 0$$

となり、これから、明らかに、 Z_1, Z_2, Z_3 がすべてゼロになることはない。 $Z_3 \neq 0$ の場合には、図 22 で示した特別な場合ではないし、 $Z_3 = 0, Z_1 = R, Z_2 = -R$ ではない場合も特別な場合に当てはまらない。

しかし、条件をよりきつくして、各 branch のインピーダンスの実部、抵抗成分が正であるとするなら、条件(65)、(71)は自動的に満たされる。よって、式(64)の右辺がゼロ、つまり外部電源が off であるとする、その解、つまり branch 電流のベクトルは一意的にゼロとなる（ゼロ電流が解であり、これ以外の解はない）。このことは、次のことから了解されることである。回路の消費電力は、

$$P = \sum R_i |I_i|^2 \geq 0 \quad (R_i > 0) \quad (72)$$

と与えられるが、外部からのエネルギー供給がない場合（ $P=0$ の場合）、すべての branch 電流は、 $I_i=0$ となるのである（エネルギー保存から、回路内のすべての電流がゼロとなるのは明らかであるが・・・）。また、すべての抵抗が負性抵抗であるという（極端な）仮定をした場合でも、条件(65)、(71)は満たされるので、一意的な解が求まるのである。そして外部電源が off の場合には、ゼロ電流が解（定常解）となるのである。しかしながら、この場合、実際には、この解は不安定で、わずかのノイズ等で発散する可能性がある。この場合の非常に簡単な例を挙げよう。

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \text{noise} \quad (R < 0) \quad (73)$$

を考えると、明らかに、 $\text{noise}=0$ の場合、 $I=0$ は一つの解である。しかし、式(73)を Laplace 変換すると、

$$\begin{aligned} sL\tilde{I} + R\tilde{I} &= LI_0 + \widetilde{\text{noise}} \quad (R < 0) \\ \rightarrow \tilde{I} &= \frac{1}{s + R/L} (I_0 + \widetilde{\text{noise}}/L) \end{aligned} \quad (74)$$

となり、電流の初期値がゼロでない場合やノイズが存在する場合には、

$$I \propto e^{-R/Lt} \quad (75)$$

となるような解があり、時間とともに電流が暴走する（ $-R > 0$ ）ことがわかる。

一方、先に挙げた特別の場合、例えば、抵抗がゼロのループがある場合、抵抗と負性抵抗の和がゼロである branch がある場合には、条件(65)、(71)を満たさないで、解は一意的ではなくなる（場合によっては、解が無限大になる）。つまり、式(64)の左辺の行列の行ベクトルが独立でなくなる（またはこの行列の行列式（determinant）がゼロになるのである）。

[コメント]

行列式 (determinant) がゼロになって、解が一意的ではなくなっても、不定形の解は存在するのである (抵抗ゼロのループがある場合など・・・)。仮に、もし独立なベクトルが余分にあるとすると (branch 電流の数より行ベクトルの数の方が多いと)、解なし (不能) となる可能性があるが、これは、先に説明したように (変形したオイラー数が、 $\chi=1$ であることから) 起こり得ないのである。つまり、特別の場合でも起こり得る不定形を許せば (また場合によっては、無限大の bunch 電流値を許せば) 必ず解は存在するのである。

しかしながら、このような特別な場合は、実用上はほとんど現れない「変な例、特殊な例、病的な例」と言ってもよく、このような場合を除けば、式(64)から (唯一の) 解、branch 電流を求めることができ、これから回路上のすべての電圧等を求めることができる。そして、以下に述べるように、回路内にトランスや増幅器が含まれるような場合にも、上記の解析を適用することができるのである。

(h-10) トランスについて

トランスについて述べる前に、まず、図 30 (a) のような (あまりにも) 単純な回路を取り上げてみよ

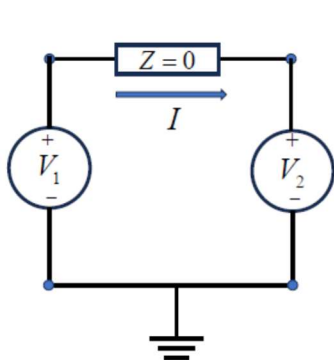


図 30 (a)

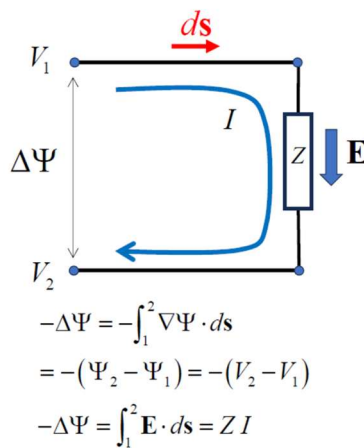


図 30 (b)

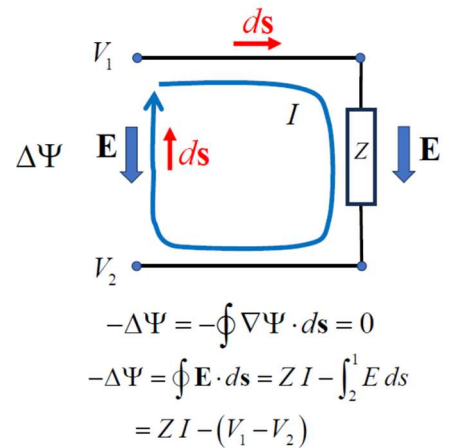


図 30 (c)

う。もし、 $V_1 \neq V_2$ であるとする

と、 $V_1 - V_2 = 0I$ となることから、明らかに、無限大の電流が流れようとしていることがわかる。よって、「形式的に」 $I = \infty$ であるとしてすることができる。一応、この KVL 方程式を書いてみると、

$$0I + V_2 - V_1 = 0 \quad (76)$$

となり、同じ結果が得られる。

この回路で言っていることは、抵抗のない導体の両端の電圧は等しいという「実につまらない」ことであると言ってもよいであろう。逆に言えば、このような導体の両端に異なる電圧を印加してはいけないということである (ショートして、発火するのである)。

[コメント] 電圧の符号について

KVL 方程式の元は、

$$-\Delta\psi = \int \mathbf{E}_L \cdot d\mathbf{s} + \frac{d}{dt} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

であり、この右辺は、電圧ドロップ (voltage drop) の量であると見ることができる。電場と道のり、 $d\mathbf{s}$ の積は、同じ方向を向いているときに正とするのである (図 30 (b) や図 30 (c) を参照のこと)。多くの場合、電圧の符号は容易にわかるのであるが、悩んだ場合には、元に戻って考えればよいであろう。

[コメント]

この「実につまらない」ことに、さらにコメントしよう。なぜなら、ここに回路の解の振る舞いが「凝縮」されているからである。

(1) $R \neq 0$ (一番、つまらない場合)

電流は確定値、 $I = V/R$ をもつ。 $V = 0$ なら、電流は流れない。

(2) $R = 0$, $V \neq 0$

これは、上で述べたように、危険な状態となる。形式的には、 $I = \infty$ となるが、実際にもこれに近い状態なる。

(3) $R = 0$, $V = 0$

$0I = 0$ の解は、 $I = \text{indefinite}$ (不定) である。この式の値は不定であるが、実際には、「任意の確定した」電流値をもつと解釈するのである。この典型的な例は、抵抗のない branch に電流が流れている最もありふれた場合である。

通常、このような branch には任意の電流を流すことができるが、電圧は発生しないとするのであった。

複雑な回路でも、以上のような三つの解の振る舞いに分類できるのである (後述を参考)。

「回路へのコメント (II) Faraday の法則 (続)」で述べた、トランスに関する方程式を以下に再掲しておく (一連の式を列挙しておく)。一般に、(抵抗や浮遊容量がない) トランスの式は、

$$\begin{aligned} V_1 &= L_1 \frac{dI_1}{dt} + M_2 \frac{dI_2}{dt} \\ V_2 &= M_3 \frac{dI_1}{dt} + L_4 \frac{dI_2}{dt} \end{aligned} \quad (77)$$

であるが、インダクタンスが密結合であり、相互インダクタンスに相反定理が成り立つとすると、

$$L_4 = L, \quad L_1 = n^2 L, \quad M_2 = M_3 = nL$$

である (図 31 を参照)。密結合でない場合には、

$$M_2 = M_3 = nL \rightarrow M_2 = M_3 = knL$$

とすればよいのであった。すると、式(77)は、

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_1 I_1 + Z_2 I_2 \\ V_2 &= Z_3 I_1 + Z_4 I_2 \end{aligned} \quad (78)$$

と書ける。ここで、

$$Z_0 = j\omega L$$

$$Z_1 = n^2 Z_0, \quad Z_4 = Z_0, \quad Z_2 = Z_3 = k n Z_0$$

である。式(78)から、

$$\begin{pmatrix} V_2 \\ I_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{kn} & \frac{(1-k^2)nZ_0}{-k} \\ \frac{1}{-knZ_0} & \frac{n}{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} \quad (79)$$

となるが、蜜結合の場合には、

$$\begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ \frac{1}{-nZ_0} & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} \quad (80)$$

と簡単になり、さらに、 $Z_0 \rightarrow \infty$ とすると、理想トランスの式、

$$\begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} \quad (81)$$

となる。式(80)、(81)からわかることは、蜜結合のトランス（多くのトランスは蜜結合と見なすことができる）では、必ず $V_2 = V_1 / n$ となっていなければならない

ということである。そのため、もしトランスの一次側と二次側とに任意の電圧をかけたとすると、一般にはこの関係は成り立たないので、「変なこと」が起こるのである。つまり、抵抗のない導体の両端に異なる電圧をかけたのと同じことが起こるのである。一次側と二次側に電圧源をつなぐと（直結すると）、間違いなくトランスが燃えるであろう。わずかの時間でも直結するような状況になると、燃えるのである。トランスが燃えるのは、大電流が流れるためである（所詮、トランスは燃えてしまうので、これ以上、議論をしても、あまり生産的ではないであろうが・・・）。

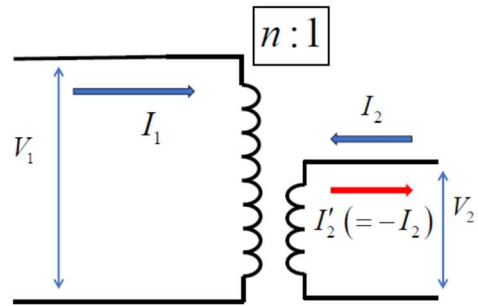


図 31

[コメント]（完全な）蜜結合トランスの場合

この場合、式(78)の右辺を行列の形の書くと、この行列の行列式は、ゼロであることがわかる。つまり、トランス両側の電圧に適当な値（ $V_2 = V_1 / n$ 以外）を与えると、電流は（ほぼ確実に）無限大になるのである。これからもトランスは燃えることがわかる。これは、この項の初めに述べた、抵抗のない branch では、 $V_2 = V_1$ 以外の電圧がかかると、確実に燃えるということと同じことである。実際には完全な蜜結合はあり得ないので、電流は無限大にはならないが、確

に燃えるぐらいの電流は流れるであろう。もっとも大電流がトランスに流れると、鉄心の磁場が飽和して、トランスは蜜結合状態ではなくなるであろうが・・・(さらに、燃えた場合には、確実に蜜結合にはならないであろうが・・・。)

以下は、さらに余分なコメントである。

荷電粒子を曲げるために加速器等で使われている電磁石は、回路的にはインダクタンスであり、電磁石の磁場を補正するために追加で電磁石に巻かれている補助コイルを含めて考えると、トランスである(主の磁場を発生する主コイルを一次側とすると、補助コイルを二次側とするトランスと見なすことができる)。よって、これらのコイルに電圧源を直結すると、非常に危険であることがわかる。幸いなことに、実際上は、コイルにつながれているのは電流源であるので、事なきを得ていると言えるかもしれない。

さて、本稿では、電流(branch 電流)を回路の独立変数としているので、トランスの式としては、よく使われる、理想トランスの式(81)ではなく、式(77)や式(78)を使うことになる。

まず、既存の一つの回路の中にトランスを追加した場合を考えてみよう(図 32(a))。この場合、KCL 方程式は、明らかに追加前後で変更はない。また図の回路の KVL 方程式は、図 32(b) (表) のようになる。ただし、通常、トランスは独立した回路の間の電圧変換に使用されるものであるので、トランスが本来の役割を果たすためには、トランスの一次側、二次側のコイルの両方が含まれてしまうようなループはあってはいけないであろう。よって、以下では、回路には、このようなループは存在しないと仮定しよう(本項の最後及び付記 1 を参照)。つまり、ループは、図 32(a)に示すようになっているとするのである。

$$\begin{array}{c|cccc} & \cdots & a & b & \cdots \\ \hline C_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ C_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} & \cdots & a & b & \cdots \\ \hline C'_1 & \cdots & Z_1 & Z_2 & \cdots \\ C'_2 & \cdots & Z_3 & Z_4 & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

図 32(b) (表)

ここで、変更前の branch、 a, b の(ループの)ベクトル成分はゼロとしている。もし、例えば branch、 a の成分が(branch の中に回路素子を含むために)ゼロでない場合には、節点を追加して、トランスを追加する箇所の branch のインピーダ

ンスをゼロとする(ベクトル成分をゼロとする)のである。なお、このことによって、ループ・ベクトルの独立性が失われることはないことは容易に確かめられるであろう。それは独立なベクトルの組を、より高次元の空間に入れても(今の場合、節点を追加することに相当する)、ベクトルの独立性は変わらないからである。さらに、図 32(b) (表) の場合、KVL 方程式のベクトルの独立性

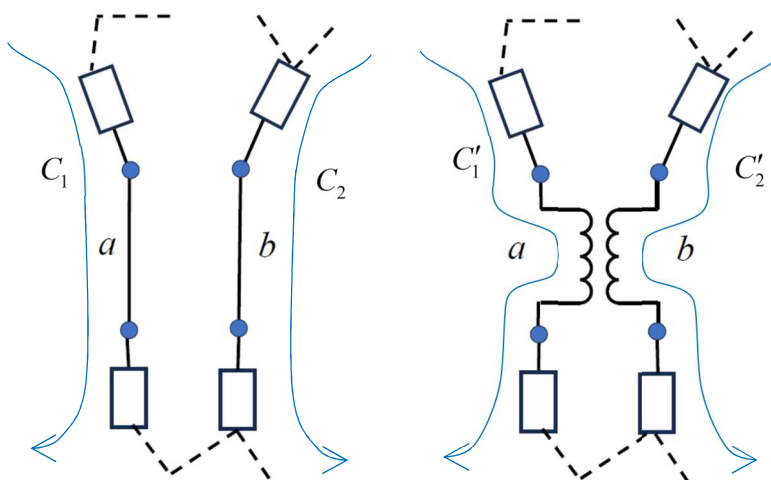


図 32(a)

は変わらないこともわかる。もしトランス追加によって、ベクトルの独立性が失われたとしてみよう。

すると、例えば、(branch、 a を含む) ループ、 C_1 に対応するベクトルは、他のベクトルの線形結合で書くことができるようになる。よって、当然、branch、 a に対応する成分以外の成分 (ベクトル) も他のベクトルの成分 (ベクトル) の線形結合で表されることになる。しかし、branch、 a 及び b に対応する成分以外のベクトル成分は、トランスの追加前後で変更はないので、変更前でも、この線形結合には変化はないことになる。さらに、変更前は、branch、 a 及び b に対応する成分は、明らかに、すべてのループについてゼロである (ゼロとした) ことから、変更前でもループ、 C_1 に対応するベクトル自体が他のベクトルの線形結合で表されることとなり、矛盾するのである。よって、KVL 方程式のベクトルの独立性がトランスの接続前後で変わらないことがわかる。以上のことから、一つの回路の中にトランスを追加しても、追加前と同様の手続きで、回路の解を求めることができるのである。

[コメント]

トランスを接続する前のループのインピーダンスがコンデンサ、 C のみであるとすると、これにトランスを接続すると、ループのインピーダンスは、 $\sum Z_i = 1/j\omega C + j\omega L = 0$ (for $\omega^2 = 1/LC$) となり、KCL、KVL 方程式の独立性を保証する条件(71)を満たさない。しかし、この場合でも、(純) 抵抗がわずかでもあれば、条件を満たす。さらに、Laplace 変換で考えれば (s 空間で考えれば)、関数としては、 $\sum Z_i = 1/sC + sL \neq 0$ であり、条件を満たすとしてよいのである。

今度は、最初に、独立な回路 (線で連結していない回路) が二つあり、これを一つのトランスで接続する場合を考えよう。この場合、それぞれの回路のオイラー数は 1 であるので、二つの回路を合わせるとオイラー数は 2 となる。トランス接続は、幾何学的な接続 (節点数の増減やその接続、branch の増減等) ではないので、オイラー数の増減には関係しない。また、トランスを付け加えても、KCL 方程式には変更はないし、先の場合と同様、KVL 方程式の独立性も変わらない。以上のことから、次のようにすればよいことがわかる。

- ・それぞれの回路から、一つの KCL 方程式を削除する。
- ・回路が独立であったことは忘れて、KVL 方程式を構成する。

(トランス接続しても、ループには変更はない。その KVL 方程式は変わっても・・・)

- ・これらの線形方程式の解として、branch 電流を求める。

ただし、電圧は、branch 電圧の和として求まるので、それぞれの回路のある点を基準としたものしか求まらない。よって、それぞれの回路の電圧は、一意的には決まらないことに注意。なお、もし最初に二つの回路が (完全に) 独立であるとする、つまり各々の回路に外部から供給される電流の和がゼロであるとする、二つの回路を一本の導線で接続してもこれには電流が流れないが、両端の電圧は同じにすることができる。こうすることで、ある一つの点 (節点) の電圧を基準して回路のすべての点の電圧を決定することができる。しかしながら、このように導線で二つの独立な回路を接続してしまうと、先

の場合（一つの回路の中にトランスを接続した場合）に帰してしまうことになるのであるが・・・（なお、導線を追加すること（branch の数のみを増やすこと）は、オイラー数を 1 だけ減らすことに相当しており、一本の導線で接続すると回路全体のオイラー数は 1 になるのである。）

以上の二つの場合からわかるように、回路内のトランスの数をいくつか増やす、またはいくつかの独立な回路をトランスで接続する（さらに、回路間の電圧差の不定性をなくすために導線でつなぐ）ことをしても、回路の解を求めることができるのである（解の一意性、少なくとも branch 電流の解の一意性は保証されている）。

最後に、本項の初めの仮定が成り立っていない場合について簡単に述べておこう。つまり、一つのループに一次側、二次側のコイルが含まれているような場合である。このような場合でも、トランスを導入する前にこのループと他のループが独立であるとする、当然、導入した後に変更される KVL 方程式のベクトルの成分を除いたベクトルは独立である。よって、上記と同様の議論により、成分を追加した後のベクトルも独立であることがわかる。つまり、この場合でも、ループ間の独立性は変わらないことがわかる。より一般に、一次側、または二次側のコイルを共有するループが複数、混在したとしても、同様の議論によって、独立性が保持されることがわかる。以上のことから、トランスを「適当に」追加しても、回路の解を求めることができるのであるが、一つのループに一次側、二次側のコイルが含まれているような場合には、トランス本来の機能が損なわれてしまう可能性が高いであろう。このような場合に、何が起るか付記 1 に簡単にコメントしてある。

(h-11) （回路素子としての）増幅器

通常、初等的な（線形）回路網解析では、エネルギー供給源である電源は、外部電源（電圧源、電流源）として扱っている（であろう）。例えば、増幅器のようなものは回路網解析の「回路素子」としては、位置づけられていないのではないだろうか（？）。しかし、以下のような線形増幅器であれば、上述と同様に扱えることがわかる。

Case 1: voltage(input) -> voltage(output)

Case 2: voltage(input) -> current(output)

Case 3: current(input) -> voltage(output)

Case 4: current(input) -> current(output)

（実際上は、以上のように明確に分類することはむづかしいであろうが・・・）

つまり、線形増幅器を、電圧、または電流である電源（電圧源、電流源）であるとし、その出力が入力に比例した可変電源として扱うのである。一方、このような増幅器が回路素子（能動素子、active element）として回路の中に含まれてくると、受動素子（passive element）のみからなる回路とは全く異なる振る舞いをする可能性がでてくる。それは共鳴による振動の増大というようなものとは異なる、回路系の自励発振、instability というような現象である。そして、これについては、簡単に次の項で述べることにするが、この項では、あたかも、このようなことは起きないとして、話を進めるのである。しかし、解の存在、一意性を議論するだけであれば、このような現象は起きないと勝手に決めて、かかってよいことが後でわかるであろう。

本稿では、独立変数として、branch 電流をとっている、Case 1 の増幅器（図 33 (a)）は、入力

側を図 33 (b) のように変更して考えるのである。Case 2 の増幅器の場合も入力については、Case 1 と

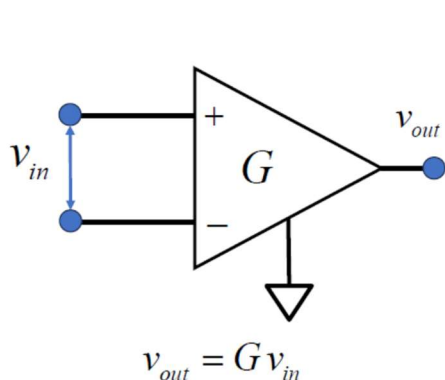


図 33 (a)

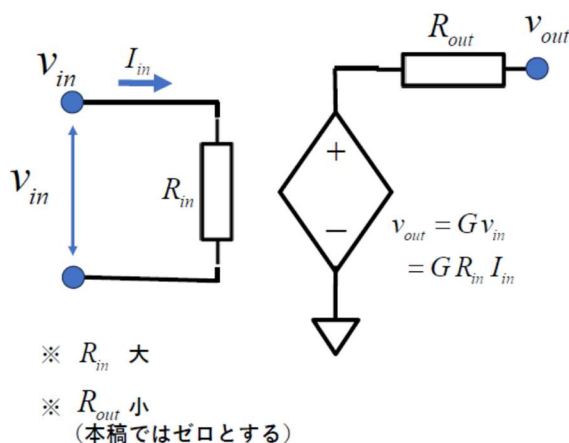


図 33 (b)

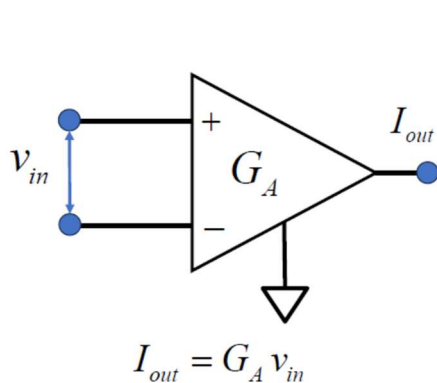


図 34 (a)

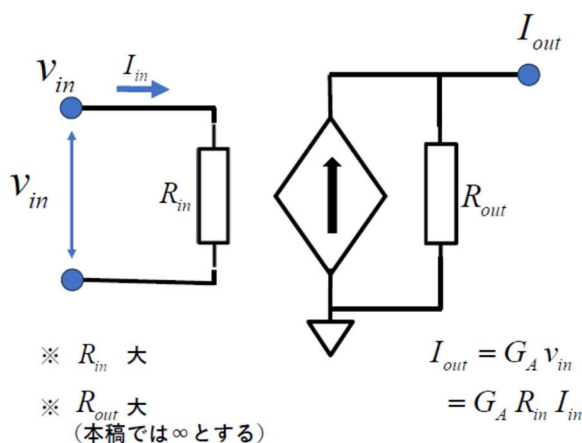


図 34 (b)

同様に変更する。出力側の電流は、これを、あたかも外部の電流源と見なして考えるのである (図 34(a)、(b))。Case 3 は特に変更しなくてよい。Case 4 は出力側のみ、Case 2 と同じように変更する。これらの変更により、増幅器としては、Case3、4 の二つのタイプを検討すればよいことになる。そして、

Case 3 の場合には、増幅器に関する KVL 方程式は、トランスの式、例えば、式(78)で、 $Z_2 = 0$ 、

$Z_4 = 0$ としたことに対応するものになる。よって、トランスの場合と同様に (特別な場合を除いて)、

多くの場合、KVL 方程式の独立性が成り立つことがわかる。また、Case 4 の場合は、出力電流は、外部電流と見なして式を立てるが、その外部電流は、入力電流に依存している、つまり、ある branch 電流に依存していることになる。よって、この Case 4 の場合は、増幅器を導入して、この増幅器を on にすると、対応する節点での KCL 方程式に変更があることになる。この KCL 方程式に対しても、特別な場合を除いて、多くの場合、KCL 方程式の独立性が成り立つことがわかる。増幅器がある場合の KCL、KVL 方程式の独立性については、(k) 項の「まとめ」および付記 2 も参照されたい。

以上のことから、Case 1～4 の場合のような増幅器を回路素子として含めても、受動素子のみからなる回路とほぼ同じように解析できることがわかる。

(h-12) Stability/instability (自励発振等) について

回路が受動素子 (passive element) だけでできているとすると、回路のもつエネルギーは外部から供給されたものだけである。さらに、回路が線形であるとすると、回路は外部電源等の周波数と同じ周波数で動作する。また、たとえ回路が外部の周波数に共鳴したとしても、外部から供給されたエネルギー分までしか、電流、電圧の振幅は増大しない。よって、外部のエネルギー供給を断てば、振幅の増大は止まり、多くの場合 (ほとんどの場合)、振幅は減衰してゼロになる。

一方、回路に能動素子が含まれているとすると、外部電源等を off してもしなくても、回路が勝手に暴走して、電流、電圧の振幅が限りなく増大するというようなことが起きる (実際上は、増大はどこかで止まるのであるが・・・)。また、当然のことであるが、能動素子を駆動しているエネルギー供給は止めないとしての話であるが・・・) さらには、一般に、増大する振動の周波数は一定ではなく、外部電源等の周波数とは関係しないのである。つまり、回路の安定性 (stability) が失われて、不安定 (unstable) になることが起きるのであるが、このような場合、ある周波数に着目して回路解析をしてもあまり意味がなく、stability/instability が起きる条件やその臨界値などを求めることが重要になってくる。これは制御理論 (control theory) の分野に属する話となり、まともに議論するのは、明らかに本稿の範囲を超える。

しかしながら、線形の場合には、Laplace 変換を用いれば、原理的には「機械的な」計算で、解析・検討を行うことができる。この Laplace 変換によって、回路の方程式は (外乱も含めて) 一般に、次のような形になるであろう。

$$A(s)\mathbf{x}(s) - B(s)\mathbf{x}_0 = \mathbf{f}(s) + \mathbf{n}(s) \quad (82)$$

ここで、本稿の場合、 $\mathbf{x}(s)$ は Laplace 変換した branch 電流、 $A(s)$ は、KCL、KVL 方程式の係数で、 $j\omega \rightarrow s$ としたものに对应する。また、 $\mathbf{x}_0$ は、branch 電流の初期値、 $\mathbf{f}(s)$ は、外部電源の電流または電圧である。さらに、式(82)では、 $\mathbf{n}(s)$ として、一応、外乱ノイズの影響も含めている。しかし、今、関心があるのは、これらの詳細ではなく、式(82)が解けるかということである。つまり、行列、 $A(s)$ の逆行列が存在するかということである。もし、これが存在すれば、式(82)から、

$$\mathbf{x}(s) = A(s)^{-1} (B(s)\mathbf{x}_0 + \mathbf{f}(s) + \mathbf{n}(s)) \quad (83)$$

となり、これを逆 Laplace 変換すれば、branch 電流 (の時間依存性) が求まることになるのである。そして、回路の安定性は、電流が時間とともに、増大するか、特に外部電源なくても増大するかということで決まるのである。このことは、式(83)の右辺の関数の極 (pole) が s -平面の右半平面 (正の実数の領域) にあるかどうか依存する (pole が右半平面にあれば、不安になる)。普通は、回路の安定性を議論する際には、外部電源等からの入力が増大するような場合 (これを Laplace 変換したものは、その極が右半平面に存在する) は除外するので、 $A(s)$ の逆行列の極がどうなっているかを調

べればよい。少し前までは、stability/instability を調べるために、ナイキスト線図 (Nyquist diagram、Nyquist plot) やボード線図 (Bode plot) 等が必須であったようであるが、今では、コンピュータで、不安定になる pole は、(特に、簡単な回路であれば) 極めて簡単に見つけられるであろう。なお、ナイキスト線図やボード線図を使う方法は、既に発振して「手が付けられない」回路を調べるのではなく、フィードバックを off して発振していない状態で、回路の周波数応答を調べることで (いわゆる open loop gain/phase 測定をすることで)、フィードバック on の状態が発振するのか、どうかを判定できるという大きなメリットがある。

ここで、少し戻って、行列、 $A(s)$ の逆行列が存在するかという問題を考えてみよう。もしこれが存在しないとすると、上記の話はすべてご破算になってしまうことになる。つまり、ご破算にならないためには、

$$\det A(s) \neq 0 \quad (84)$$

ということが必要である。 $A(s)$ の行列要素は、(多くの場合) s または $1/s$ の一次式であり、複雑な場合でも、 s の有理関数 (狭い意味での有理型関数、meromorphic function) である。また、 $s \rightarrow j\omega$ とすれば、frequency domain での KCL、KVL 方程式の係数である。

すると、先に示したように、(特別な場合を除くと) 行列、 $A(j\omega)$ の行ベクトルは独立であったことから、式(84)が成り立つことがわかる。

[初等的な (?) コメント] 関数、 $f(s)=0$ の意味

ある s または、いくつかの (孤立した) s の値で、 $f(s)=0$ であっても、関数としては、 $f(s)=0$ としないのが「常識」であろう。つまり、このようなことが起きても、関数としては、 $f(s) \neq 0$ であるので、普通は、あまり気にしないで、 $f(s)$ による割り算を「平気で」行っている。そして、すべての s について、 $f(s)=0$ になったときのみ、関数として、 $f(s)=0$ とするのである。そうでない場合は、 $f(s)=0$ となるいくつかの s を除いた領域で考えることにするのである。(あまり数学的には考えないで)「気軽に」ある多項式を別の多項式で割ってよいのである (関数が有理型関数や meromorphic function の場合にも、このように考えて問題はないのである)。

以上、この h 項の結果をまとめると、

(平面回路 (planar circuit) だけでなく) どんなにグチャグチャの回路でも、また空中配線の回路や (立派な) 3 次元の回路でも、キルヒホッフ法則 (KCL、KVL) だけで、多くのいろいろな回路の問題がほとんど場合、一意的に解けることがわかったことになる。これがキルヒホッフ法則のすごいところであると言ってもよいであろう (個人的意見であるが・・)。

ただし、特別な場合には、解は一意的ではなくなって、不定形という形をとることがある。さらには無限大の値をもつ解になることもあり、回路が燃えてしまうという状況もあり得る。付け加えて言えば、非線形回路の場合には、一意的な解があるという主張は、一応しないでおく方が無難であろう。

なお、Appendix A に、ナイキスト線図等に関する (古典的な?) 短い説明を付けてある。多分、この短い文章を読むだけで、(安定性に関する分野では重要な) Nyquist plot とは何かを理解することができるであろう。また、この Appendix A では、次に取り上げる簡単な positive feedback 等の問題も比較的

詳しく説明してある。

この本文では、図 35 の positive feedback を初等的に扱ってみよう。図のダイアグラムから、input x に対して、output y は、

$$A(x+y) = y \quad (85)$$

で与えられるので、

$$y = \frac{A}{1-A} x \quad (86)$$

となる。一方、1の大きさの入力は増幅器で増幅されて、出力は A となり、これが positive feedback され、入力に追加されるので、出力は、 $A(1+A)$ となる。そして、これが、また入力に feedback される・・・というような初等的な「手続き的な」計算を頭の中で行うと、

$$A(1+A+A^2+A^3+\dots) \quad (87)$$

となる。ここで、注意すべきは、この「手続き的な」計算には時間の概念が抜けており、ちょうど「アキレスと亀」のパラドックスと同じような問題が生じるであろうと懸念される。しかし、実は、さらに問題があるのである（「アキレスと亀」の場合にはない問題）。それは、式(86)、(87)から、

$$\frac{A}{1-A} = A(1+A+A^2+A^3+\dots) \quad (88)$$

となるが、これは本当かという問題である。式(88)の両辺を A で割ると、これは級数展開の基本中の基本である、

$$\frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+z^3+\dots \quad (89)$$

という式が、本当かという問題と同じになる。これは、よく知られているように、数学的には、 $|z| < 1$

であれば、両辺は一致するのであるが、 $|z| > 1$ であるとする、右辺のような展開は許されないのでは

あった。今、 $A=2$ とすると、式(88)の左辺は、 -2 となるが、図 36 を見れば、明らかなように、これは確かに正しいのである。一方、式(88)の右辺は、明らかに ∞ となり、式(88)は成り立たないのである

（なお、発散級数論では、式(88)は成り立ち、両辺とも -2 としている、または両辺を A で割って -1 としていると思われる？）。しかし、現実問題では（実世界では）、発散する（ ∞ になる）のが正解となるのである。このある意味、単純でかつ奇妙な（非現実的な）例題を Appendix A で取り上げている（しかし、もっと簡単で明解な議論ができるかもしれないが・・・それを筆者は知らない）。

(i) 簡単な回路の具体例

(i-1) トランス(その 1)

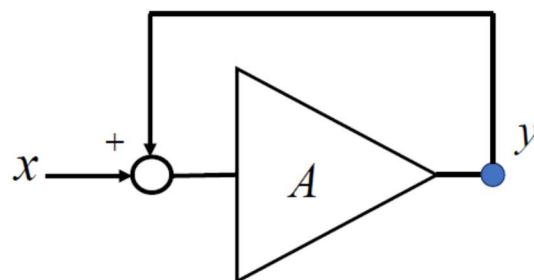


図 35

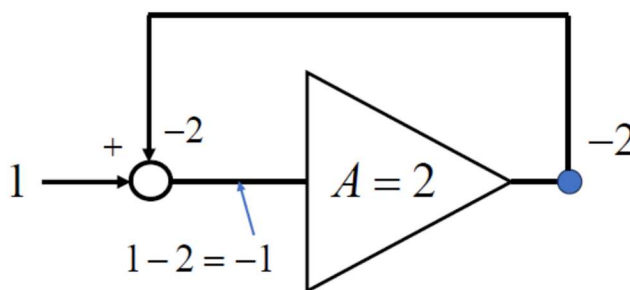
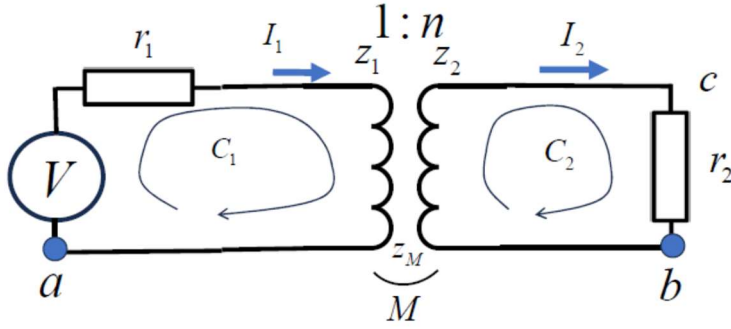


図 36

図 36(a)に示すような簡単なトランスの回路を取り上げてみよう。まず、相互インダクタンスによって誘起される電圧を図 36(b)のように取ることにしよう（このようにしても一般性は失われない）。節点、 a, b に関する KCL 方程式は、節点に出入する branch 電流は同じであることから、図 37（表）のようになることがわかる。同様に、KVL 方程式は、図 36(b)の「規則」に注意すると、図 37（表）になることがわかる（ただし、電圧は、方程式の右辺に移動しているものとする。）



$$\omega L = R_0$$

$$z_1 = jR_0, \quad z_2 = jn^2R_0, \quad z_M = jnR_0$$

図 36(a)

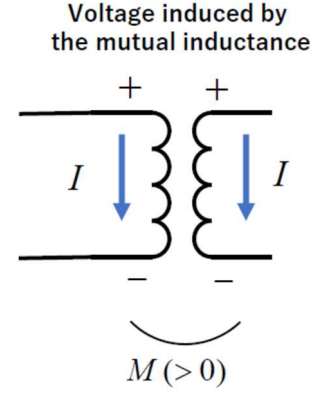


図 36(b)

	I_1	I_2	V
a	$1-1=0$	0	0
b	0	$1-1=0$	0
C_1	$r_1 + jR_0$	$-jnR_0$	V
C_2	$-jnR_0$	$r_2 + jn^2R_0$	0

図 37（表）

ここで、図 36(a)の回路は、二つの独立な回路をトランスで結合したものであるなので、解を求めるためには、KCL 方程式をそれぞれの回路から、一つ削除する必要があるが、この場合には、KCL 方程式は二つしかないので、全部、削除することになる。よって、図 37（表）の a -行、 b -行を削除して、回路方程式を $A\mathbf{i} = \mathbf{b}$ と表すと、

$$A = \begin{pmatrix} r_1 + jR_0 & -jnR_0 \\ -jnR_0 & r_2 + jn^2R_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix} \quad (90)$$

となる。以下では、さらに簡単化して、 r_1 がゼロの場合について考えよう。すると、式(90)は、第一行の n 倍を第二行に加えて、次のように変形され、

$$A = \begin{pmatrix} jR_0 & -jnR_0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} V \\ nV \end{pmatrix} \quad (91)$$

これから、直ちに、

$$I_2 = nV / r_2, \quad I_1 = nI_2 + V / jR_0 \quad (92)$$

と求まる。これは、notation が異なるが、式(80)と同じ結果である。また、これは次のように考えても求めることができる。一次側、二次側の電圧を、 V_1 , V_2 とすると、今の場合、密結合を考えているので、 $V_2 = nV_1 = nV$ となる。よって、 $I_2 = V_2 / r_2 = nV / r_2$ となる。理想トランスであるとする、トランスに流れる全電流（巻き数も考慮した 1 次側と二次側の電流の和）はゼロとなる。つまり $I_1 = nI_2$ となるはずである。しかし、実際には、理想トランスではないので、全電流がゼロであるとする、トランスの中に磁場が発生しないので、誘導電圧も発生しないことになる。そこで、 $V = jR_0 i_1 (= j\omega L_1 i_1)$ となるように、一次側の電流を i_1 分だけ増やすと、一次側の電圧が釣り合うようになる。以上のことから、

$$\begin{aligned} V_2 = nV_1 = nV &\rightarrow I_2 = nV / r_2 \\ \rightarrow I'_1 = nI_2 = n^2V / r_2, \quad i_1 &= V / jR_0 \\ \rightarrow I_1 = nI_2 - jV / R_0 \end{aligned} \quad (93)$$

これから、複素パワーは、

$$S_1 = V_1 I_1^* = V_1 (nI_2 - jV_1 / \omega L_1)^* = V_2 I_2^* + j|V_1|^2 / \omega L_1 \quad (94)$$

となる。または、

$$S_1 = S_2 + j|V_1|^2 / \omega L_1$$

と書ける。これは、「回路へのコメント (II) Faraday の法則 (続)」の式(160)、式 (162) と実質的には、同じものである（ただし、そこでは、 n の取り方が違っているが・・・）。

[コメント]

逆にトランスの 2 次側の抵抗、 r_2 がゼロ場合（ただし、 $r_1 \neq 0$ ）には、式(91)と同じことをすれば、

$$I_1 = V / r_1, \quad I_2 = I_1 / n$$

となり、シンプルな結果が得られる。これは、トランスには全く電圧がかかっておらず、一次側から見れば、単に抵抗、 r_1 があるだけに見えるということを表している。

(i-1) トランス (その 2)

次に、図 38 のように、トランスが電流源で駆動される場合を考えてみよう。

この場合の回路方程式（KCL 方程式、KVL 方程式）は、図 39（表）のようになることがわかる。前項と同じように、KCL 方程式を二つ削除することになるが、ここでは、 b -行、 d -行を削除して、 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ とすると、

	I_1	I_2	I_3	I_4	I
a	1	1	0	0	I
b	-1	-1	0	0	$-I$
c	0	0	-1	1	0
d	0	0	1	-1	0
C_1	jR_0	$-r_1$	$-jnR_0$	0	0
C_2	$-jnR_0$	0	jn^2R_0	r_2	0

図 39（表）

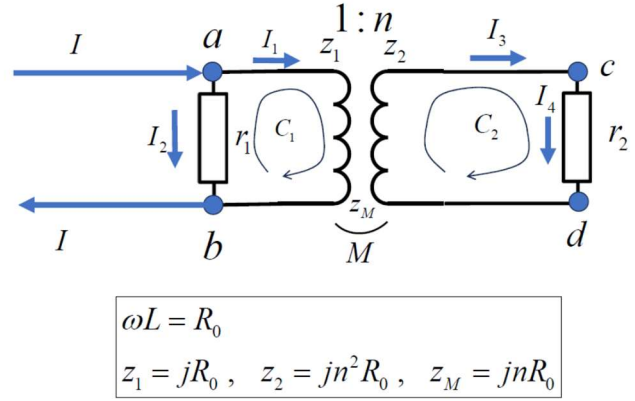


図 38

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ jR_0 & -r_1 & -jnR_0 & 0 \\ -jnR_0 & 0 & jn^2R_0 & r_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (95)$$

となる。ここで、最初から、簡単にしようと、 $r_1 = \infty$ とすると、悩むことになるかもしれないので、まずは、 $r_1 = \text{finite}$ として、解くことにしよう。式(95)の 3 行目の n 倍を 4 行目に加えることをすると、

$$I_1 + I_2 = I, \quad I_3 = I_4 \\ jR_0 I_1 - r_1 I_2 - jnR_0 I_3 = 0, \quad -nr_1 I_2 + r_2 I_4 = 0$$

となる。一次側の電圧を V とすると、トランスは密結合であるので、二次側の電圧は、 nV となる。よって、

$$I_2 = \frac{r_2}{nr_1} I_3 = \frac{nV}{nr_1} = \frac{V}{r_1} \quad (96) \\ I_1 = nI_3 + \frac{r_1}{jR_0} I_2 = nI_3 + \frac{V}{jR_0}$$

ここで、簡単のために、 $r_1 = \infty$ とすると、 $I_2 = 0$ 、 $I_1 = I$ となるので、

$$I = nI_3 + \frac{V}{jR_0} \quad (97)$$

となり、式(92)と同じ結果が得られる。

(i-1) トランス (その3)

前述の2例では、二つの独立な回路をトランス結合した場合であったが、**図 40** に示すのは、一つの回路の中の branch 間でトランス結合した場合である。**図 41 (表)** に KCL、KVL 方程式を示す。この場合には、一つの KCL 方程式を削除すればよかった。そこで、 b -行を削除して、 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ とすると、

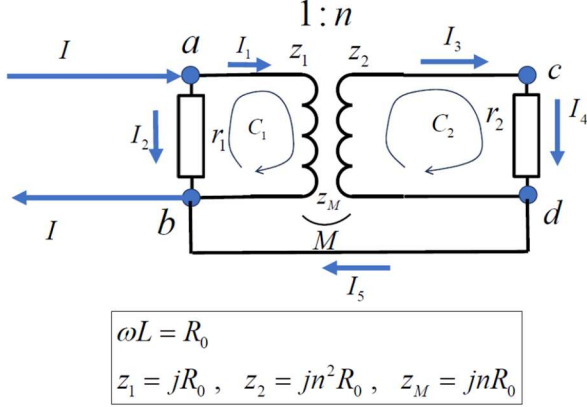


図 40

	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I
a	1	1	0	0	0	I
b	-1	-1	0	0	-1	$-I$
c	0	0	-1	1	0	0
d	0	0	1	-1	1	0
C_1	jR_0	$-r_1$	$-jnR_0$	0	0	0
C_2	$-jnR_0$	0	$jn^2 R_0$	r_2	0	0

図 41(表)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ jR_0 & -r_1 & -jnR_0 & 0 & 0 \\ -jnR_0 & 0 & jn^2 R_0 & r_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (98)$$

となるが、行列、 A の第二行と第三行の和を新たな第三行としよう。これから直ちに、 $I_5 = 0$ となるこ

とがわかる（このようになることは、**図 13** から明らかであるが・・・）また、 I_5 以外の電流、

$I_1 \sim I_4$ に関する方程式は、式(95)と同じになることがわかる。

(i-1) トランス (その4)

トランスの2次側の負荷に LC 共振器が付いた場合を考えよう (**図 42**)。

すると、その KCL、KVL 方程式は、**図 43 (表)** のようになることがわかる。

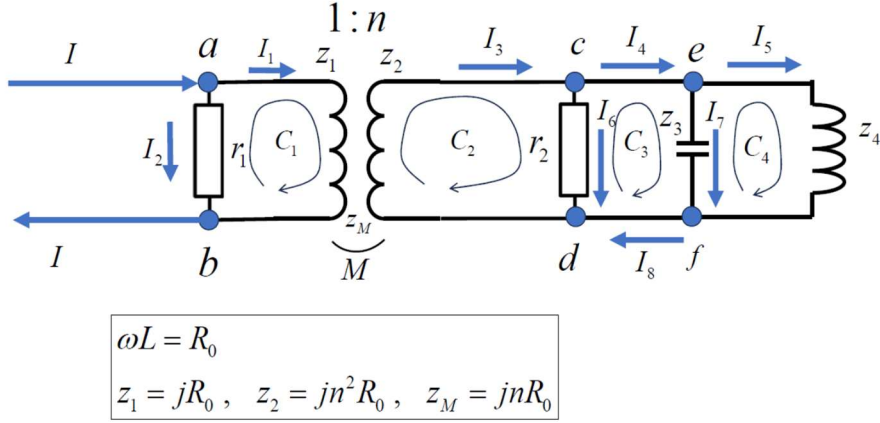


図 42

	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I
a	1	1	0	0	0	0	0	0	I
b	-1	-1	0	0	0	0	0	0	$-I$
c	0	0	-1	1	0	1	0	0	0
d	0	0	1	0	0	-1	0	-1	0
e	0	0	0	-1	1	0	1	0	0
f	0	0	0	0	-1	0	-1	1	0
C_1	jR_0	$-r_1$	$-jnR_0$	0	0	0	0	0	0
C_2	$-jnR_0$	0	$jn^2 R_0$	0	0	r_2	0	0	0
C_3	0	0	0	0	0	$-r_2$	$-jR_C$	0	0
C_4	0	0	0	0	jR_L	0	jR_C	0	0

図 43 (表)

ここで、 $z_3 = -jR_C$ 、 $R_C = 1/\omega C$ 、 $z_4 = jR_L$ 、 $R_L = \omega L$ であり、 $\omega_0^2 = 1/LC$ とおくと、

$R_L / R_C = \omega^2 / \omega_0^2$ となる。

そして、 b -行、 d -行を削除して、 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ とすると、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ jR_0 & -r_1 & -jnR_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -jnR_0 & 0 & jn^2 R_0 & 0 & 0 & r_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_2 & -jR_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & jR_L & 0 & jR_C & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (99)$$

さて、(2 次側にあるような) 並列 LCR 回路の impedance、 Z は、よく知られているように、

$$1/Z = 1/R + j\omega C + 1/j\omega L$$

と与えられ (ここで、 $r_2 = R$ である)、

$$Z = \frac{j\omega}{C(\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega/R)} \quad (100)$$

と書ける。さらに、

$$Z = \frac{jR_L R_C}{R_C - R_L + jR_L R_C / R} \quad (101)$$

とも書ける。一方、式(80)から、

$$I'_2 = -I_2 = nI_1 - \frac{V_1}{nZ_0}$$

であるが、ここで、 $I'_2 (= -I_2)$ を新たに、(図 42 に符合するように) I_3 とし、 $n \rightarrow 1/n$ とすると、

$$I_3 = \frac{I_1}{n} - \frac{nV_1}{Z_0} = \frac{I_1}{n} - \frac{V_2}{Z_0}$$

と書ける (蜜結合を仮定しているので、 $V_2 = nV_1$ である)。よって、二次側の負荷を Z とすると、

$V_2 = Z I_3$ であるから、

$$\left(1 + \frac{Z}{Z_0}\right) I_3 = \frac{I_1}{n} \quad (102)$$

なお、 Z_0 は、トランスの 2 次側の自己インダクタンスによる impedance ($= jn^2 R_0$) である。次に、式

(99) の $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を解いて、式(101)、式(102)が確かに成り立っていることを示そう。 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を手計算で解くことも可能であるが、ここでは、Mathematica で計算することにしよう。以下、図 42 の notation の記号は、記号の上に $\sim$ を付け、「通常の」記号にはこれを付けしないとすると、例えば、

$$Z = V_2 / I_2 = nV_1 / I_2 = n r_1 \tilde{I}_2 / \tilde{I}_3$$

となるが、これを計算すると、

$$Z = \frac{j r_2 R_C R_L}{r_2 (R_C - R_L) + j R_C R_L}$$

となり、式(101)と一致することがわかる。また、式(102)から、

$$1 + \frac{Z}{Z_0} = \frac{I_1}{nI_2} = \frac{\tilde{I}_1}{n\tilde{I}_3}$$

となるが、最後の式を計算すると、左辺に一致することが確かめられる。

$$1 + Z / Z_0 = 1 + \frac{R R_C R_L}{n^2 r_0 (R(R_C - R_L) + j R_C R_L)} \quad (103)$$

(i-2) ブリッジ回路(その 1)

このブリッジ回路は、「回路へのコメント(I)」で取り上げた例であり、それは図 44 に示すようなものであった。すると、この KCL、KVL 方程式は、図 45 (表) のようになる。

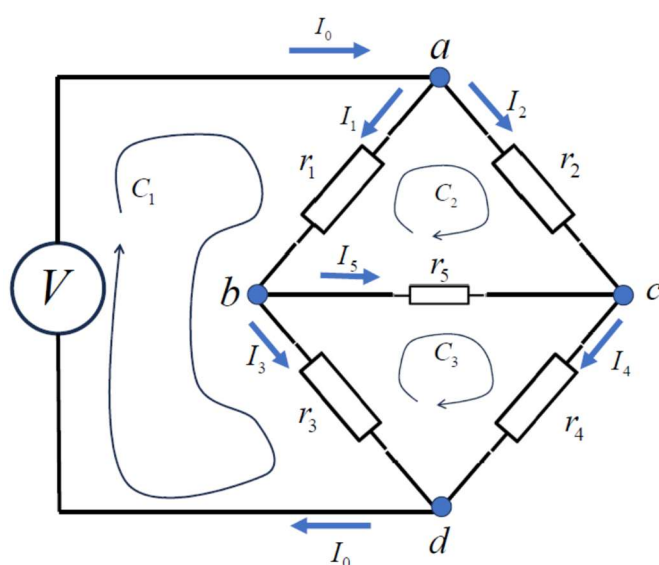


図 44

	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	V
a	-1	1	1	0	0	0	0
b	0	-1	0	1	0	1	0
c	0	0	-1	0	1	-1	0
d	1	0	0	-1	-1	0	0
C_1	0	r_1	0	r_3	0	0	V
C_2	0	$-r_1$	r_2	0	0	$-r_5$	0
C_3	0	0	0	$-r_3$	r_4	r_5	0

図 45 (表)

d -行を削除して、

$$A \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

とすると、

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & r_1 & 0 & r_3 & 0 & 0 \\ 0 & -r_1 & r_2 & 0 & 0 & -r_5 \\ 0 & 0 & 0 & -r_3 & r_4 & r_5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (104)$$

となる。この方程式を Mathematica を使って解くと、

$$I_5 = \frac{r_2 r_3 - r_1 r_4}{r_1 r_2 r_3 r_4 (1/r_1 + 1/r_2 + 1/r_3 + 1/r_4) + r_5 (r_1 + r_3)(r_2 + r_4)} V \quad (105)$$

と求まる。この結果は、「回路へのコメント(I)」にある式(22)と式(25)と同じものである。ただし、ここでは、抵抗の番号が時計回りに、1,2,3,4 となっている（よって、そこでの結果に合わせるには、上の式で、 $3 \leftrightarrow 4$ とすればよい）。

(i-2) ブリッジ回路(その 2)

このブリッジ回路も上の例と同様に、「回路へのコメント(I)」でも取り上げたもので、電源を電圧源から電流源に変えたものである。

	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I
x	1	0	0	0	0	0	0	I
a	-1	1	1	0	0	0	0	0
b	0	-1	0	1	0	1	0	0
c	0	0	-1	0	1	-1	0	0
d	0	0	0	-1	-1	0	1	0
y	0	0	0	0	0	0	-1	$-I$
C_2	0	$-r_1$	r_2	0	0	$-r_5$	0	0
C_3	0	0	0	$-r_3$	r_4	r_5	0	0

図 47 (表)

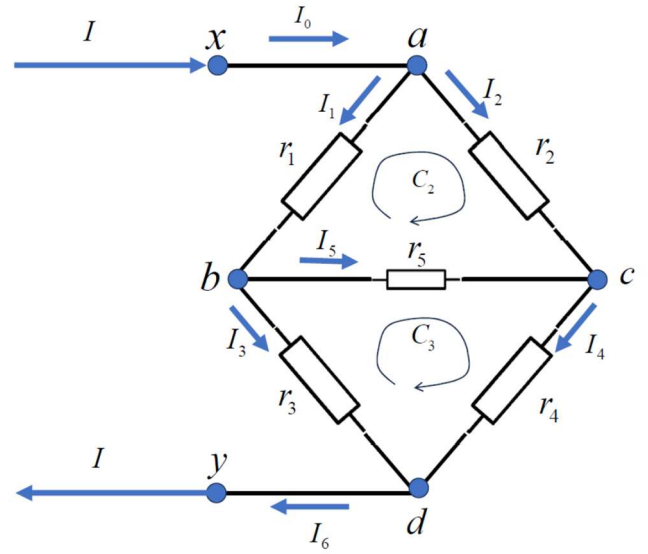


図 46

y -行を削除して、 $B\mathbf{x}=\mathbf{c}$ とすると、

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -r_1 & r_2 & 0 & 0 & -r_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r_3 & r_4 & r_5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (106)$$

この方程式を先の例と同様に、Mathematica を使って解くと、

$$I_5 = \frac{r_2 r_3 - r_1 r_4}{(r_1 + r_2)(r_3 + r_4) + r_5 (r_1 + r_2 + r_3 + r_4)} I \quad (107)$$

となる。この結果は、「回路へのコメント(I)」にある式(34)と同じものである。

(i-3) オペアンプ (その1)

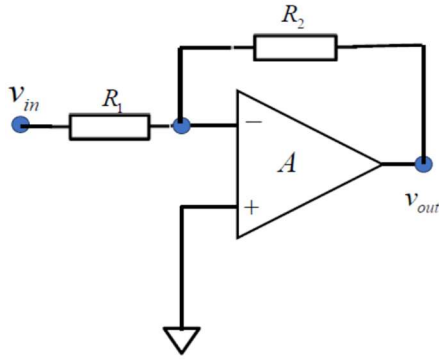


図 48

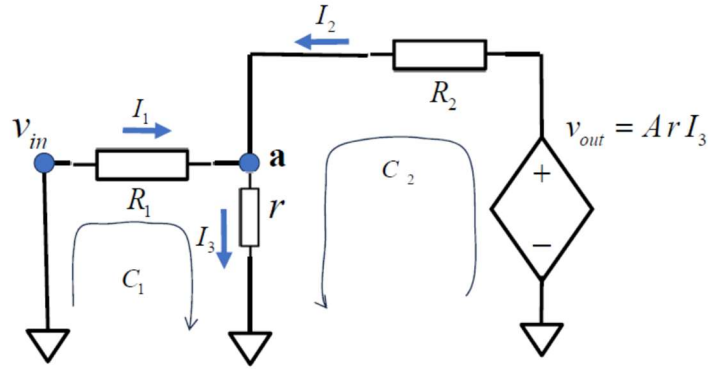


図 49

オペアンプの初歩については、**Appendix A** の [付記 1] オペアンプの動作の初歩も参照されたい。ここでは、オペアンプの例として、反転増幅の例を図 48 に示す。また、その等価回路は、図 49 のようになるであろう。この図では、できるだけ節点の数を減らして描いてある。また、接地点での KCL 方程式を省略 (削除) したとすると、KCL+KVL 方程式は、

	I_1	I_2	I_3	V
a	-1	-1	1	0
C_1	R_1	0	r	v_{in}
C_2	0	R_2	r	$Ar I_3$

となる。 $I_3 = I_1 + I_2$ であることから、次の方程式が容易に得られる。

$$\begin{pmatrix} R_1 + r & r \\ r(1-A) & R_2 + r(1-A) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{in} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (108)$$

よって、 $Det = R_1 R_2 + R_1 r(1-A) + r R_2$ とおくと、

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{(R_2 + r(1-A))v_{in}}{D} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{(1-A)v_{in}}{R_1(1-A) + R_2} \xrightarrow{A \rightarrow \infty} \frac{v_{in}}{R_1} \\ I_2 &= -\frac{r(1-A)}{D}v_{in} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -\frac{(1-A)v_{in}}{R_1(1-A) + R_2} \xrightarrow{A \rightarrow \infty} -\frac{v_{in}}{R_1} \\ I_3 &= \frac{R_2}{D}v_{in} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \\ v_{out} &= \frac{ArR_2}{D}v_{in} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{AR_2}{R_1(1-A) + R_2}v_{in} \xrightarrow{A \rightarrow \infty} -\frac{R_2}{R_1}v_{in} \end{aligned} \quad (109)$$

最後の結果から、よく知られた反転増幅器の増幅率、 $-R_2 / R_1$ が導かれる。

さて、この増幅器の出力に図 50 のように、負荷をつけたとしよう。すると、負荷の付近に、KVL 方程式が一つ追加される。

$$-Ar I_3 + Z I_4 = 0 \quad (110)$$

一方、それ以外の KCL 及び KVL 方程式には変更はない。つまり、式(108)や式(109)には変更がない。そして式(110)は、単に、

$$v_{out} = Z I_4 \quad (111)$$

となり、定電圧源に負荷、 Z を接続したのと同じになる。負荷に依らず、同じ電圧がかかることになる。そして、 r 、 A が有限の場合でも負荷には依らないのである。実際には、図 51 の赤色の $\mathbf{i}$ の箇所の output impedance はゼロではなく、増幅率も出力パワーに依存するなど、細かいことを言えば、すべて

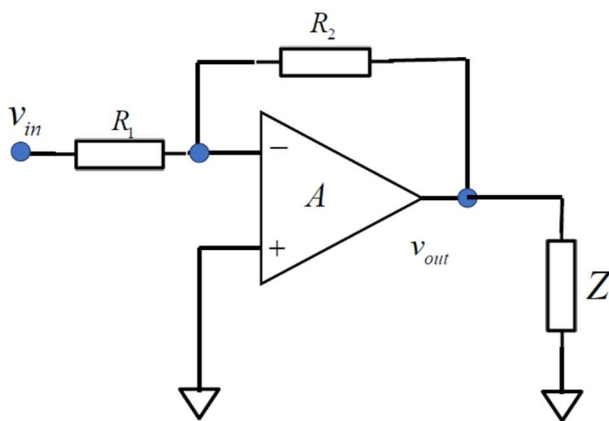


図 50

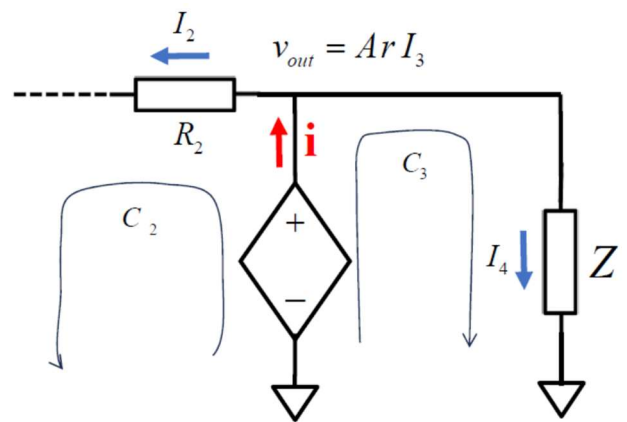


図 51

負荷に依存するのであるが……。上の結果からわかるように、オペアンプを使うと、入力回路と出力回路をほぼ分離して考えてよいことがわかる。

(i-3) オペアンプ (その 2)

次に非反転増幅の場合 (図 52) を取り上げよう。今回もできるだけ節点を「節約」すると、図 53 のようになる。これから KCL、KVL 方程式は、図 54 (表) のようになる。

	I_1	I_2	I_3	V
a	-1	-1	1	0
C_1	r	0	R_1	V_{in}
C_2	0	R_2	R_1	$r A I_1$

図 54 (表)

なお、ここでも接地点の KCL 方程式は省いている。これから、式(108)に相当するものとして、

$$\begin{pmatrix} R_1 + r & R_1 \\ R_1 - Ar & R_1 + R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{in} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (112)$$

よって、 $D = r(R_1 + R_2) + R_1 R_2 + R_1 Ar$ とすると、

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{R_1 + R_2}{D} v_{in} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \\ v_{out} &= Ar I_1 = \frac{Ar(R_1 + R_2)}{D} v_{in} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{A(R_1 + R_2)}{(1 + A)R_1 + R_2} v_{in} \xrightarrow{A \rightarrow \infty} \frac{R_1 + R_2}{R_1} v_{in} \quad (113) \\ I_2 &= \frac{Ar - R_1}{D} v_{in} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{A}{(1 + A)R_1 + R_2} v_{in} \xrightarrow{A \rightarrow \infty} \frac{v_{in}}{R_1} \end{aligned}$$

となるが、この場合の増幅率の式、 $(R_1 + R_2)/R_1$ もよく知られているものである。

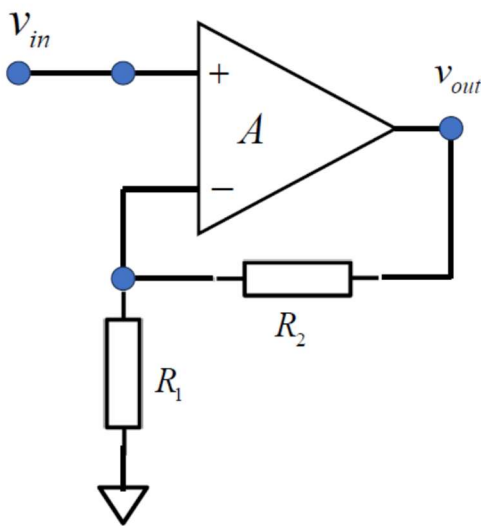


図 52

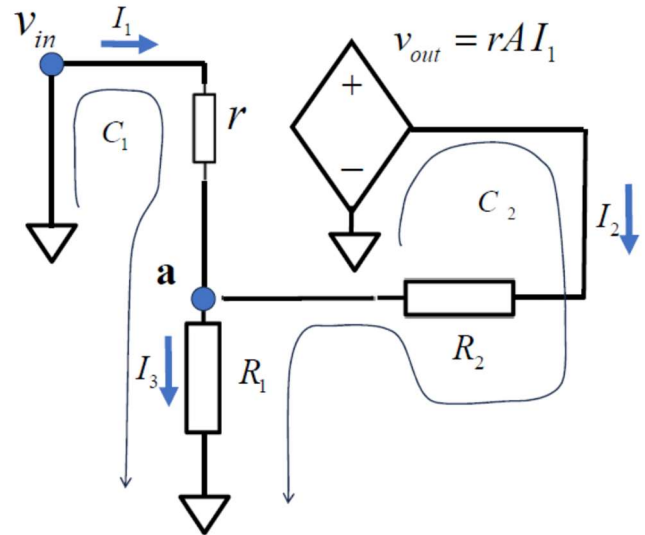


図 53

(j) 非平面回路 (no-planar circuit) の例

ここでは、一見、非平面的に見えるものも含め、いくつかの非平面回路の例を取り上げてみよう。

(j-1) テトラ型

図 55 の(a)にあるようなテトラ型の回路を考えてみよう。そして、各辺には図 55 の(b)のようにインピーダンスがつながっており、頂点、1, 2, 3 に電流が供給されているとしよう。この回路は、一見、非平面的に見えるが、(a)の矢印のように上から押しつぶせば、平面回路にすることができる。

今、図 56 の(a)のように、branch 電流をとり、(b)のようなループを考えると、KCL+KVL 方程式は、図 57 (表) のようになることがわかる。

外部への電流が保存することから、図 56 の(a)のようにになっているが、これを式で表せば、式(114)と

なる。

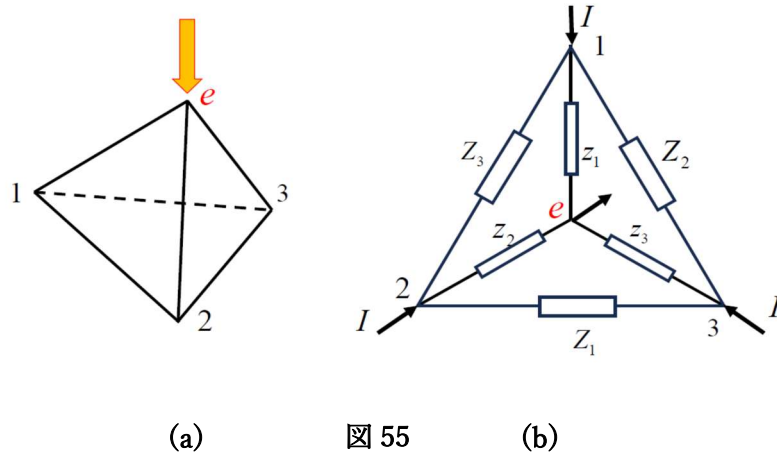


図 55

	I_a	I_b	I_c	i_1	i_2	i_3	I
1	0	-1	1	1	0	0	I
2	1	0	-1	0	1	0	I
3	-1	1	0	0	0	1	I
e	0	0	0	-1	-1	-1	$-3I$
C_1	Z_1	0	0	0	$-z_2$	z_3	0
C_2	0	Z_2	0	z_1	0	$-z_3$	0
C_3	0	0	Z_3	$-z_1$	z_2	0	0

図 57 (表)

$$i_1 + i_2 + i_3 = 3I \quad (114)$$

なお、この式は、図 57 (表) の 1, 2, 3 行の和、または、 e 行を表している。

以下、簡単のために、

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_2 = Z_3 = Z \\ z_1 &= z_2 = z_3 = z \end{aligned} \quad (115)$$

とすることにしよう。すると、テトラの底面の KVL 方程式は、

$$Z I_a + Z I_b + Z I_c = 0 \quad (116)$$

となることがわかる。すると、対称性から（または直接、図 57 (表) の方程式を解いて）

$$\begin{aligned} I_a &= I_b = I_c = 0 \\ i_1 &= i_2 = i_3 = I \end{aligned} \quad (117)$$

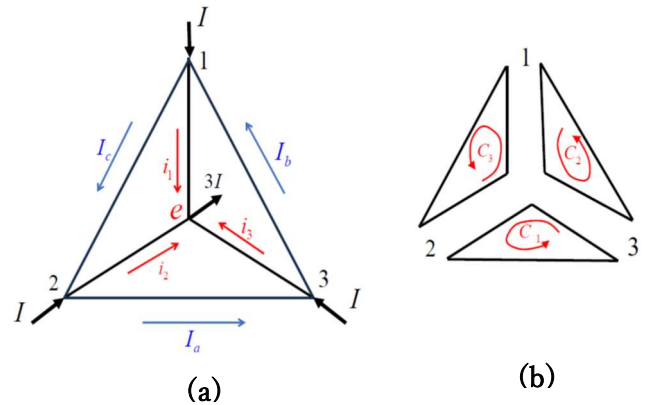


図 56

ということがわかる。

ここで、図 57 (表) には、テトラの底面の KVL 方程式は直接、現われておらず、表の C_1, C_2, C_3 の和となっていることに注意しよう。押しつぶして平面回路（オイラー数： $\chi=1$ ）になったものは、ちょうど、式(42)、

$$V(\text{no. of KCL eq.}) - 1 + F(\text{no. of KVL eq.}) = E(\text{no. of branch currents})$$

が成り立っているが、立体のテトラのままだと、一つ余分な KVL 方程式が出てくる。そして、この場合（オイラー数： $\chi=2$ ）には、式(43)、

$$V(\text{no. of vertices}) - E(\text{no. of edges}) + L(\text{no. of independent loops}) = 1$$

を適用する必要があるのである。

(j-2) 五角形（ペンタゴン）+五芒星（ペンタグラム）型

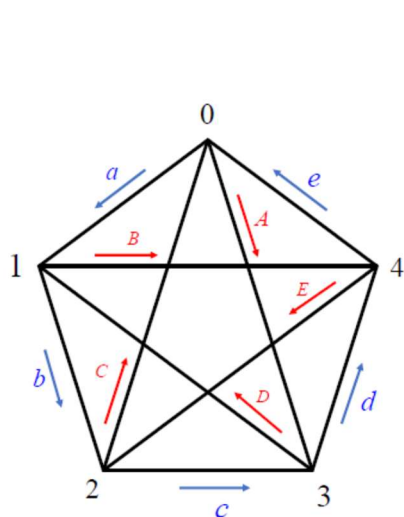


図 58

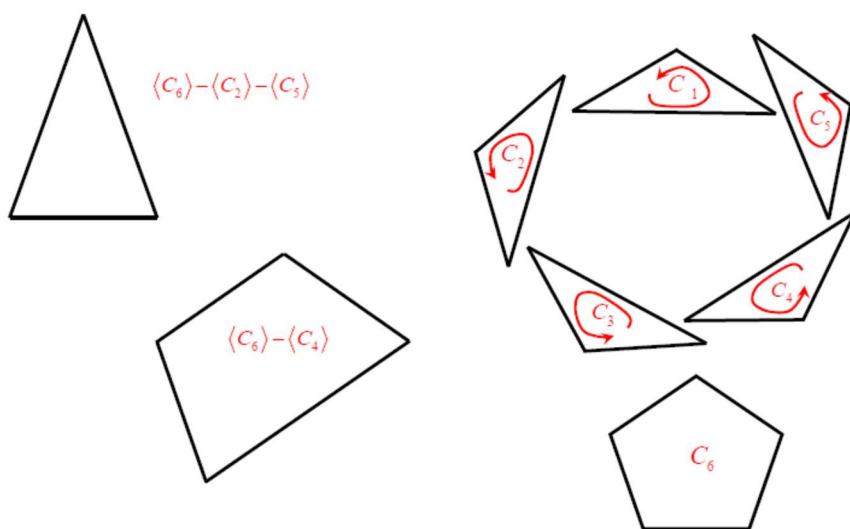


図 59

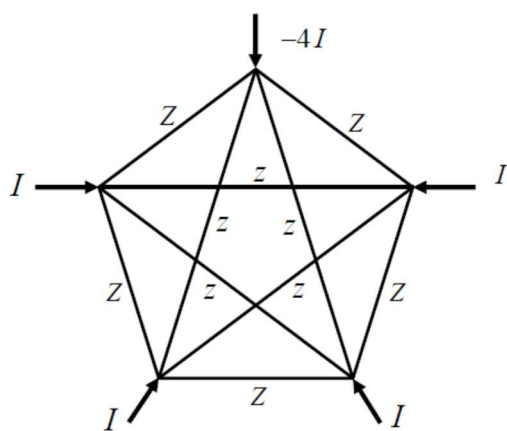


図 60

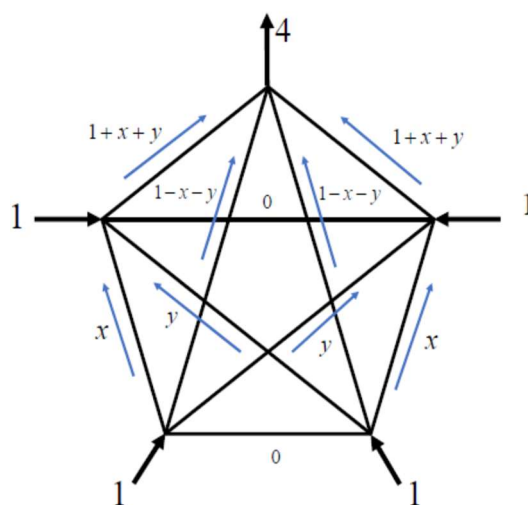


図 62

次に図 58 のような少し複雑な回路を取り上げてみよう。それは、ペンタゴンとペンタグラムを組み合わせたものである（図形の外周がペンタゴンである）。若干の試行錯誤によって、独立なループとして、図 59 の $C_1 \sim C_6$ をとることができ、その以外のループは、例えば、図 59 の左側にあるように、こ

れら独立なループの和で表すことができることがわかる。よって、もし、各 branch のインピーダンスが、図 60 のように対称性良く配置され、外部電流が図のように供給されているとすると、KCL+（独立な）KVL 方程式は、図 61（表）のようになる。これから、回路に流れる電流が求められることになるが、今の場合、回路の対称性から、電流は図 62 のようになっているはずである。ここで、表記の見やすさのために（ Z と z とを見間違えないように）、

$$R = Z, \quad r = z \quad (118)$$

とおくことにし、図 62 で直接、KVL 方程式を作ると、

$$Rx = ry \quad (119)$$

$$R(1+x+y) + Rx = (1-x-y)r \quad (120)$$

となることがわかる。これから、容易に、

$$x = \frac{r(r-R)}{r^2 + 3Rr + R^2} \quad (121)$$

$$y = \frac{R(r-R)}{r^2 + 3Rr + R^2} \quad (122)$$

$$1+x+y = \frac{2r^2 + 3Rr}{r^2 + 3Rr + R^2}, \quad 1-x-y = \frac{2R^2 + 3Rr}{r^2 + 3Rr + R^2} \quad (123)$$

が得られる。

ここで、さらに、 $r = R$ とおくと、

$$x = 0, \quad y = 0, \quad 1+x+y = 1, \quad 1-x-y = 1 \quad (124)$$

となる。これを図示すると、図 63 のように、非常、シンプルな回路となることがわかる。

	I_a	I_b	I_c	I_d	I_e	I_A	I_B	I_C	I_D	I_E	I
0	1	0	0	0	-1	1	0	-1	0	0	$-4I$
1	-1	1	0	0	0	0	1	0	-1	0	I
2	0	-1	1	0	0	0	0	1	0	-1	I
3	0	0	-1	1	0	-1	0	0	1	0	I
4	0	0	0	-1	1	0	-1	0	0	1	I
C_1	Z	0	0	0	Z	0	z	0	0	0	0
C_2	Z	Z	0	0	0	0	0	z	0	0	0
C_3	0	Z	Z	0	0	0	0	0	z	0	0
C_4	0	0	Z	Z	0	0	0	0	0	z	0
C_5	0	0	0	Z	Z	z	0	0	0	0	0
C_6	Z	Z	Z	Z	Z	0	0	0	0	0	0

図 61（表）

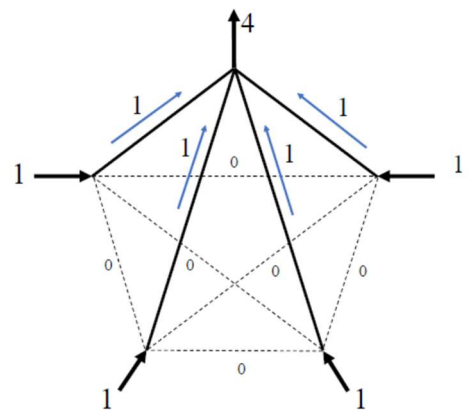


図 63

(j-3) 図形に関する追加のコメント

よく知られていることではあるが、すこし追加のコメントをしておこう。

図 64 の左側の図形は、平面上で交差しており、一見、平面に展開できないように見えるが、右のように、一つの対角線を伸ばしてやれば、平面上に展開できることがわかる。

同様のことを行えば、ペntagラムも

図 65(a) に示すように、平面に展開できるのである。それも単純な多角形に展開できる。

また、ペンタゴン+ペtagラムの図形でも、図 66 に示すように、一本、線がないだけでも、平面上に展開できるのである。しかし、残念ながら、図 67(a) に示す、(完全な) ペンタゴン+ペtagラムについては、どう頑張っても、平面上に展開することはできないのである (どうしても、図 67 (c) のようになってしまう)。

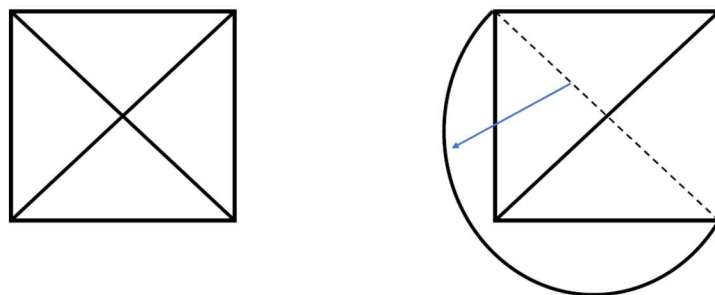


図 64

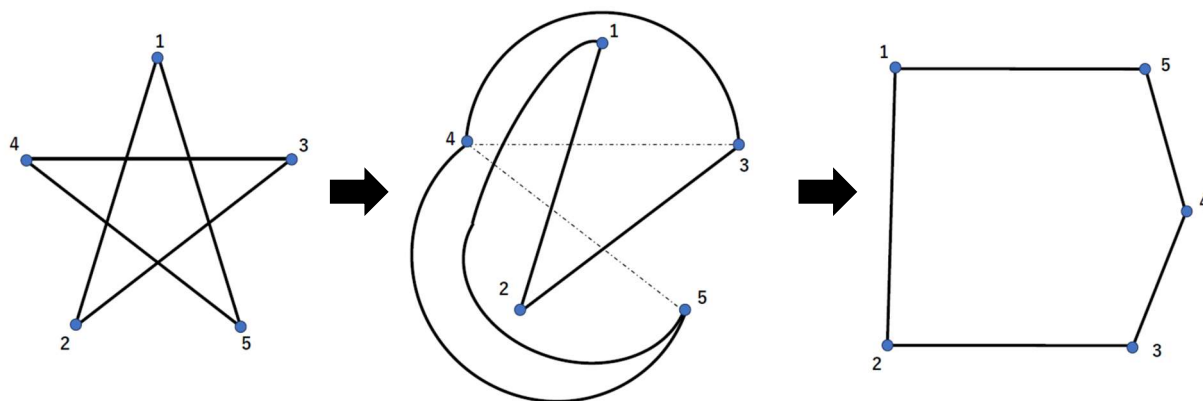


図 65(a)

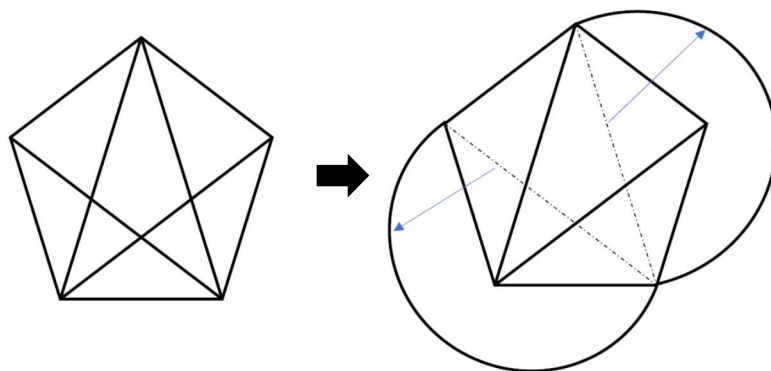


図 66

[コメント]

回路問題が一意的に解けるかどうかということと、回路が平面に展開できるかどうかということは（ほとんど）関係はないと言ってもよいので、本稿ではこれ以上、触れないことにしよう。むしろ、本稿では、素人の空中配線、グチャグチャ回路でも一意的な解があることを示すのを目的の一つとしているので・・・。

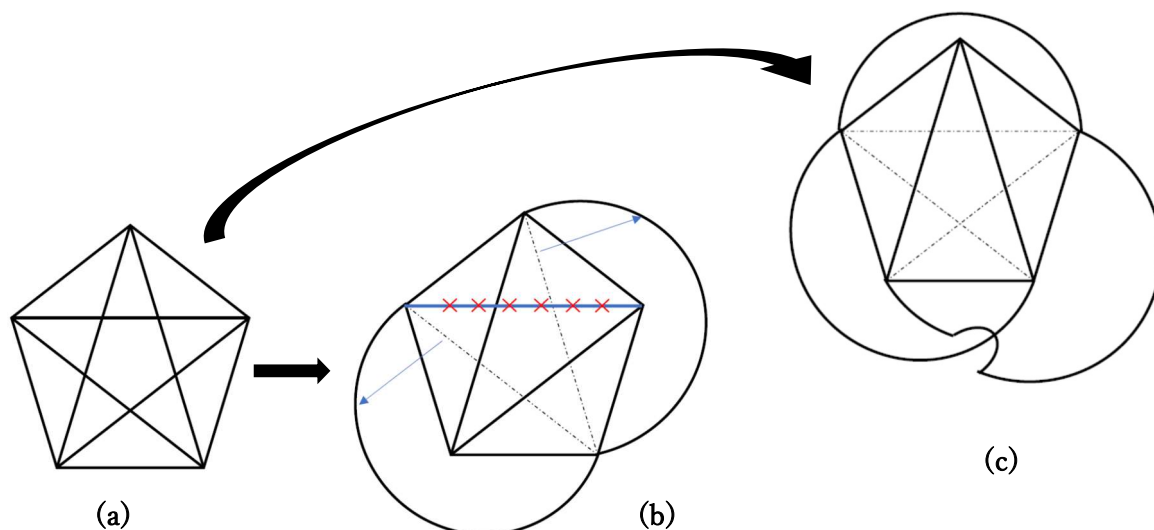


図 67

(j-4) 多面体等

回路が多面体の表面に展開している場合を取り上げてみよう。（穴の開いていない）多面体のオイラー数は、よく知られているように、

$$\chi = V - E + F = 2 \quad (125)$$

であるが、実は、立体（閉立体）を構成する面（表面）が球のように滑らかな曲面である場合でもオイラー数は定義でき、その値は $\chi = 2$ である。そして、その曲面に回路が配置されていても、本稿の議論はそのまま適用できるのであるが、ここでは、曲面は局所的には平面であり、曲面から構成される立体は、多くの小さい平面からなる多面体と見なすことにしよう（「回路へのコメント(IV)：オイラー標数」も参照）。もし、図 68 のように、（一つの面をなす）三角形の穴を開けたとすると（三角形の面を削除したとすると）、

$$\Delta F = -1 \rightarrow \chi = 1$$

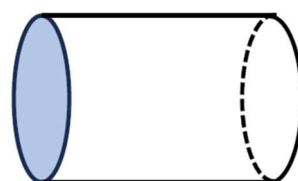
となる。実際、穴を大きく引き伸ばして、全体を平たくすると、回路は平面回路（plane circuit）と等価になる。また、これを「回路的に解釈する」と、削除した三角形（ある面）に対応する KVL 方程式を省くことに相当している（もっとも、本来、回路はすき間だらけ、つまり穴がいっぱい空いているのであるが、削除していない KVL 方程式に対応する面では、穴が空いていないと考えるのである）。

次に円筒の表面上に回路が展開している場合を取り上げよう。円筒（やドーナツ面など）のオイラー数は、 $\chi=0$ であるが、図 69 のように、円筒に底面をつけたとすると、オイラー数は、

$$\chi=0, \Delta F=1 \rightarrow \chi=1$$

となり、平面回路と同じになる。実際、空いている面（上面）を大きく広げると、平面図形と等価になることがわかる。なお、追加した底面は仮想的で、ここには回路の要素はないのであるが、この底面（円盤）に関する KVL 方程式が一つ追加されるのである。

図 68



最後に、もう一度、ペンタゴン+ペンタグラムを取り上げよう。

図 69

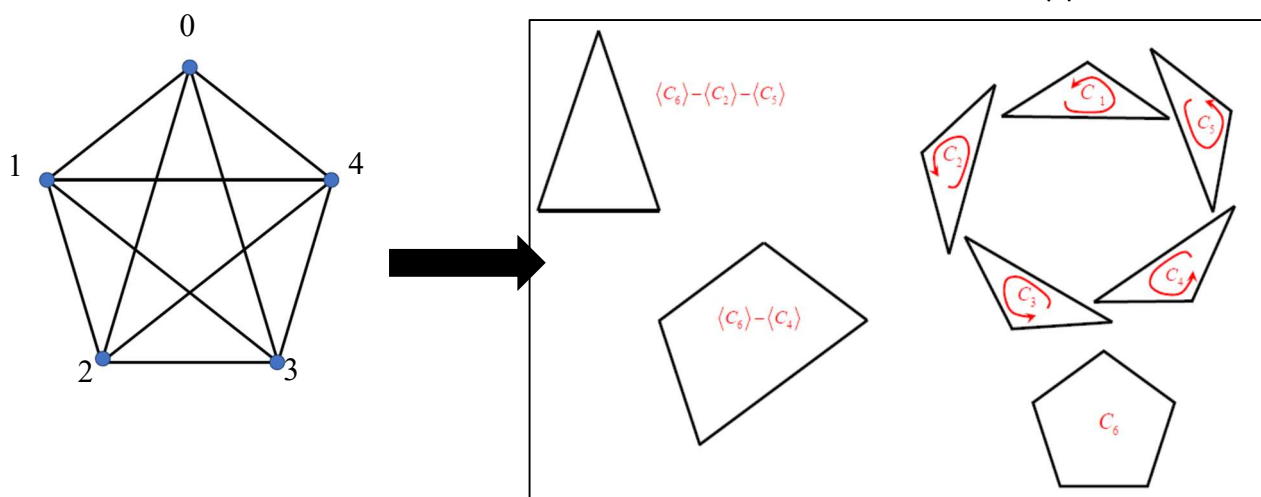


図 59 (再掲)

この場合、そのオイラー数をどう決めるのか、特に面の数、 F をどう決めるのか、むづかしいことになり、オイラー数をきちんと定義できないであろう（少なくとも筆者には・・・）。

しかし、式(43)の「変形した」オイラー数は求めることができる。それを見るには、まずペンタゴンの部分は平面回路であると思って、ペンタグラムを構成する branch は、空中配線（立体的配線）と思うのである。すると、まず、 C_6 が一つのループとなる。次に、頂点、1~4 の空中配線を経由して頂点、0

を回るループ（ C_1 ）を一つとる。これは明らかに、 C_6 とは独立なループになる。次に、頂点、1~4 を通り、ペンタゴンの内を通るループ（例えば、1~4~3~2~1 のループ）をとってみると、これは、 C_1 と C_6 で表されることがわかる（新たな独立なループではない）。同様にして、独立なループ、 C_2 を

とる。すると、頂点、2~0を通る他のループは、 C_2 とこれまでにとった独立なループ、 C_1 と C_6 で表

されることがわかる。以上のようにして、独立なループ、 $C_1 \sim C_6$ が得られることになるのである。

今の場合、式(43)は、 $V=5$, $E=10$, $L=6$ であるので、

$$V - E + L = 1 \quad (126)$$

となる。よって、ペンタゴン+ペンタグラムのような配置の回路でも、解を求めることができることがわかる。なお、今、述べたことは、「回路へのコメント (IV)：オイラー標数」で説明する内容のエッセンス（肝）である。

(k) まとめ（結語）

本稿は、些か、まとまりのない記述となっている感もあるので、ここに、「まとめ」として、いくつかの結論を記しておこう。

- （特別な場合を除いて）普通の回路では、キルヒホッフの2法則（KCL、KVL）だけで一意的に解が決定できる。
- そして、解の存在とその一意性を保証するのは、回路の基本定理または（変形した）オイラー数である。
- このようなことが言えるのは、「通常の」回路解析では、「基本的には」回路を構成する要素の空間的配置（距離的な位置関係）は考慮に入れていないからである。言い換えれば、回路要素の距離関係は考慮しないということから、トポロジ的考察が重要な役割することになるのである。

----- [コメント]

この「基本的考え」に従えば、素人の空中配線、グチャグチャ配線でも解は求まり、きちんと回路は動作するはずであると期待されるのである。しかし、現実の回路では、これで話は終わらず、必ず「マックスウェルの悪魔」がいたずらをしてくるのである。

- キルヒホッフの2法則（KCL、KVL）+オイラー数について、以下に若干、補足しておこう。
 - ・回路に非線形素子が含まれていても、KVL 方程式の導出に用いるループは重ね合わせができる。よって、ある独立なループの組があり、他のループはそれらの和で表される。そして、（変形した）オイラー数を使うと、独立なループの数、 L は、

$$E = (V - 1) + L \quad (127)$$

を満たす。ここで、 E は branch（または branch 電流）の数、 V は節点の数、 $V-1$ は独立な KCL 方程

式の数である。つまり、独立な KCL 方程式と独立な（ループに関する）KVL 方程式があれば、branch 電流を決めるのに必要な数の方程式が得られるのである。

[コメント]

勿論、得られた KCL、KVL 方程式で必ず branch 電流が決定できるわけではないが、少なくともこれだけの数は必要となる。逆に、もしこれ以上に独立な方程式があると、一般には、解は不能 (impossible) となる可能性がある。なお、方程式が非線形になっていると、一般には解は一意的ではなくなるであろう。

○ 特に平面回路 (planar circuit) の場合には、 $L = F$ (平面図形の面の数) となる。ここで、 F は、オイラー数を求める際の面の数のことであるが、平面図形上の (任意の) 独立なループの数であると考えてもよいのである。

○ すべての回路素子が線形の場合には、線形代数方程式の問題に帰着する (線形代数の復習問題であると言ってもよい)。独立な KCL 方程式 ($V-1$ 個) と適当に選んだ KVL 方程式 (少なくとも独立な、

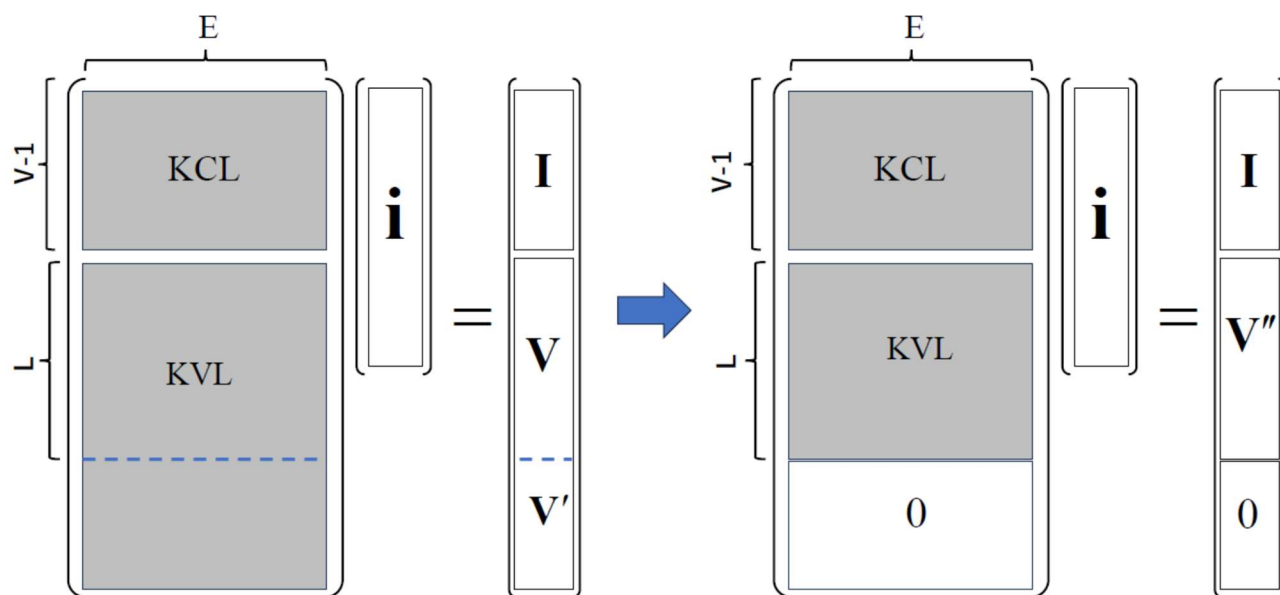


図 69

L 個の方程式、または、planar circuit の場合、 F 個の方程式を含むものとする) を並べると、図 69 の左図のようになる。そこで、独立な KVL 方程式を上の方に移動しつつ、それらに従属する方程式の行を消去していくと、図 69 の右図のようになる。ここで、消去された行に対応する右辺のベクトルの成分もゼロになることに注意 (消去の対象になる方程式自体が独立な方程式の和で表されているので・・・)。

よって、問題は、図 70 の左図の行列問題を解くことになるが、これはよく知られているように、もし、行ベクトルが互いに独立であるとする (A の場合)、例えば、Gauss の消去法によって、図 70 のように変形することができる (白の箇所は、すべてゼロで、対角成分は、すべて no zero である)。そして、実際の解を求めるのは、後退代入をすればよいのであった。

もし、すべての行ベクトルが独立でないとすると (B の場合)、列も適当に入れ替えると (ベクトル、

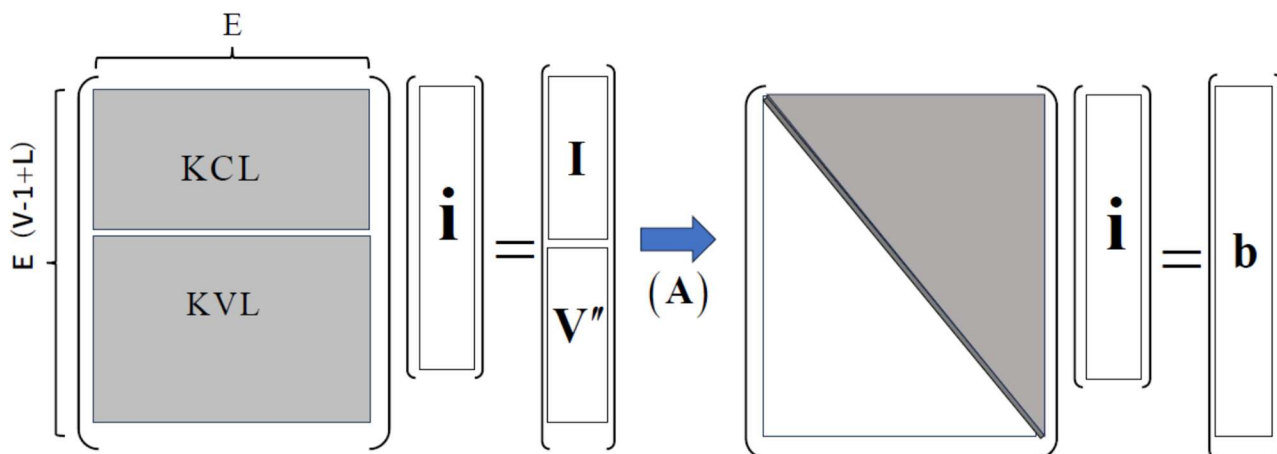


図 70

$\mathbf{i}$ の並びも入れ替えると)、図 71(a) のようにすることができる。この図で、 $\mathbf{b}' \neq 0$ であるとする、いわゆる「解なし」の状況になる。簡単な例は、図 71(b) の右の方に挙げたもの（ケース、(B-1)）で、抵抗がゼロだと、どんなに電流を流しても、発生する電圧はゼロとなり、 $V \neq 0$ にはならない。ただし、無限大の電流値を許せば、解はあるとしてもよいのである。しかし、実際には危険な状況になるのである。一方、 $\mathbf{b}' = 0$ の例としては、図 71(b) の右下に挙げた例が当てはまるであろう（ケース、(B-2)）。

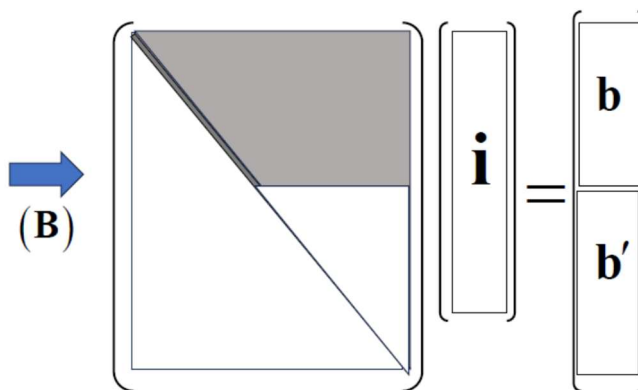


図 71(a)

(B-1) $\mathbf{b}' \neq 0 \rightarrow \text{impossible}$ $0[\Omega] \times I = V[\neq 0]$

(B-2) $\mathbf{b}' = 0 \rightarrow \text{indeterminate}$ $I = \text{definite} + \text{indefinite}$

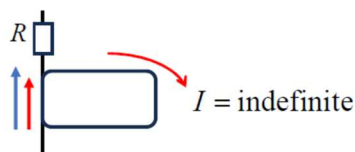


図 71(b)

三つ目の場合（C の場合）として、図 72(a) のような場合が考えられるであろう。この場合には、不定な電流（適当な値を取ることができる電流）とは切り離されて、確定した値をとる電流が存在する場合である。具体的な例として、図 72(b) に挙げた例がそれに相当するであろう。

なお、ここに、「(h-10)トランスについて」の初めの方のコメントの一部を（ほぼ）再掲しておく。

(1) $R \neq 0$ （一番、つまらない場合）

電流は確定値、 $I = V / R$ をもつ。 $V = 0$ なら、電流は流れない。

(2) $R = 0$, $V \neq 0$

これは、上で述べたように、「解なし」と言ってもよいが、形式的には、 $I = \infty$ が解となる。実際にもこれに近い状態になり、危険な状態となる。

(3) $R = 0$, $V = 0$

$0I = 0$ の解は、 $I = \text{indefinite}$ (不定) である。この式の値は不定であるが、実際には、任意の「確定した」電流値をもつのである。この典型的な例は、抵抗のない branch に電流が流れているような、最もありふれた場合である。

この(2)が B-1 に、(3)が B-2 に対応していることがわかるであろう。

なお、特別な場合には、必ずしも独立した KVL 方程式を L 個、取れるわけではないが、KCL 方程式も、増幅器を含むような「特殊な」場合には、必ずしも独立した $V-1$ 個の KCL 方程式が取れるわけではないのである (付記 2 にその例を挙げてある。)

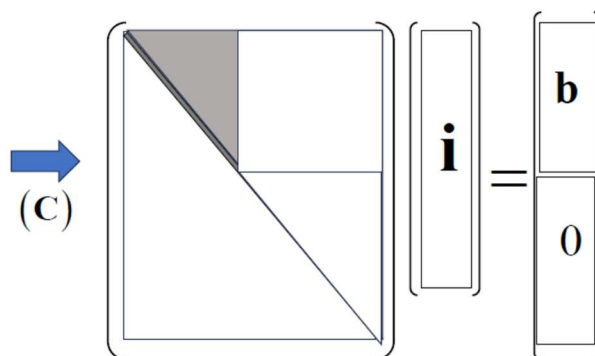


図 72(a)

○ 若干、繰り返しになるが・・・回路が共鳴している場合や自励発振している場合でも、解が「きちんと」求まるためには、回路に関する方程式が「きちんと」解ける必要がある。

Some of components of $\mathbf{i}$ are definite, the remainings of $\mathbf{i}$ are indeterminate.

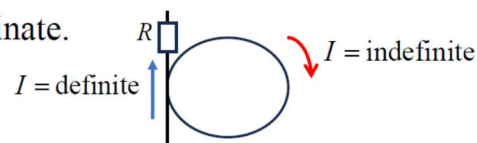


図 72(b)

今、話を簡単にするために、 s 領域で考えることにしよう。すると、キルヒホッフの二法則を回路に適用すると s の有理式を係数とする行列の式が導かれる。そして、一般に、(特別な場合を除いて) この行列の式だけ、つまりキルヒホッフの法則だけで解が求まるのである (付記 3 も参照のこと)。

○ 一方、仮に独立な方程式が branch 電流より多いとすると、(一般には) 解けず、矛盾した解が得られる。つまり、キルヒホッフの法則は矛盾した法則となってしまうのである。このことを行列で見ると、図 73 のようになる。図 73 の右図の灰色の部分だけで、一旦は branch 電流 (値は有限値) が求まるが、 $\mathbf{b}' \neq 0$ であるとする、図の青線以下の式を満足させることができないのである (この状況は、図 71 のケース、(B-1) とは異なる。図 71 では、解として、無限大も含めれば、辻褃の合う解があるのであるが・・・)。しかし、このような状況に陥ることはないということを保証しているのが次の式である (式(43)の再掲)。

$$V(\text{no. of vertices}) - E(\text{no. of edges}) + L(\text{no. of independent loops}) = 1$$

これによって、キルヒホッフの法則は無矛盾の法則となるのである。

再度、強調すれば、線形の回路では、キルヒホッフの法則だけで、無矛盾の解を得ることができるのである。多くの場合は一意的な解が得られる。そうでない特別な場合でも不定解、または回路が焼損す

るような解が得られるが、それでも矛盾するような解はないのである。

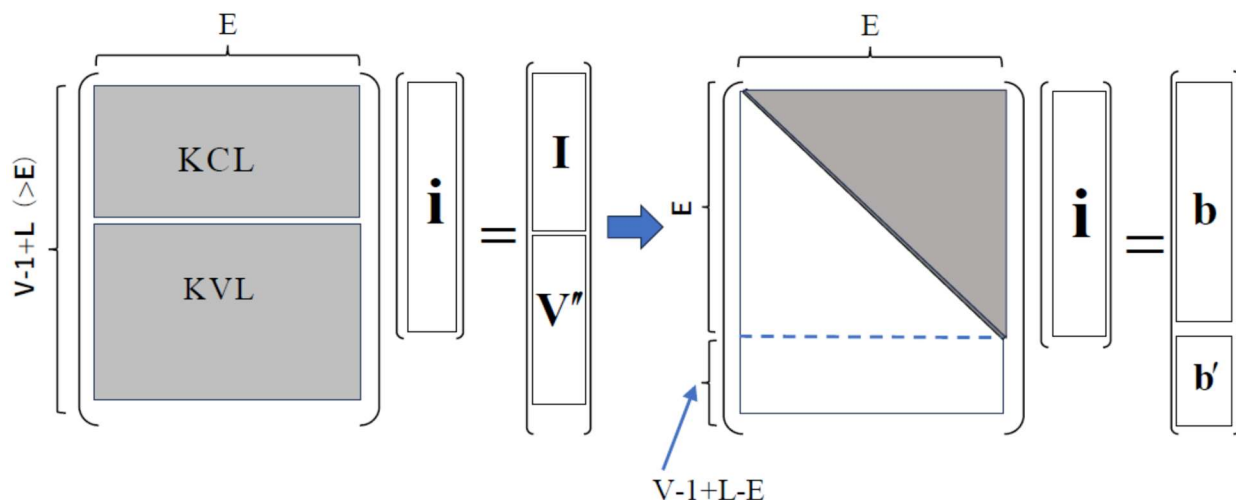


図 73

最後に、本稿では、回路解析へのグラフ理論の応用については、(本稿の初めの紹介以外) 一切、触れていないことについて、「釈明」しておこう。それは、

- ・筆者は、それに触れるだけの知識がないためである。
- ・そして、グラフ理論を駆使しなくても、基本的、初等的な(変形した)オイラー数だけで、本稿の目的を十分、達していると思われるためである。

[付記 1] トランスの一次側、二次側が一つのループの中にある場合

本文中でも述べたように、通常、トランスは独立した回路の間の電圧変換に使用されるものであり、トランスの一次側、二次側のコイルが一つのループ状の線路(branch)に含まれるような場合は想定されていないであろうし、トランスの「正しい使い方」ではないであろうが、このような場合には、何が起ころうか。これについて、ここで、少し検討してみよう。

このような場合のもっとも簡単な例は、図 74 に示すような、一次側に流れる電流がそのまま二次側に流れるというものであろう(一次側から二次側にいく電流が途中で枝分かれしないとするのである)。一方、理想的なトランスでは、一次側と二次側の電流には(符号は無視して考えると)、

$$n_1 I_1 = n_2 I_2$$

という関係にあるはずである。この関係は、トランス内部の全体の起磁力がゼロであるということを言っているのであるが、現実のトランスでも比較的よい近似で成り立っているものである。話を単純化して(誤解を恐れずに言えば)、

トランス内部：起磁力 (ほぼ) ゼロ → $\mathbf{H} \approx 0$

インダクタンス内部：起磁力 (当然) 有限 → $\mathbf{H} \neq 0$

という特徴がある。よって、一般に、トランスでは、 $n_1 \neq n_2$ であるので、図 74 のようなトランスの接続では、起磁力はゼロとならず、むしろ、インダクタンスとして機能していることがわかる。この場合、一次側と二次側の巻き線の比を $1:n$ とすると、それぞれの電圧は、

$$V_1 = j\omega L_0(1 \pm n)I$$

$$V_2 = j\omega L_0(\pm n + n^2)I$$

図 74

のような形に書ける。これから一次側と二次側の電圧の和は、

$$V = V_1 + V_2 = j\omega L_0(1 \pm 2n + n^2)I = j\omega L_0(n \pm 1)^2 I$$

となり、インダクタンス、 L が、 $L = (n \pm 1)^2 L_0$ となるが、ここでは蜜結合を前提にしているので、巻き方によって、実効的な巻き数が $n+1$ 、または $n-1$ となるという、もっともらしい結果が得られることがわかる。なお、トランスが理想的なトランスに近いとすると、自己インダクタンスによるインピーダンス、 $j\omega L$ が無限大であると近似できるほど大きいことになるので、図 74 の回路は、無限大のインピーダンスを挿入したことに相当し、ループ、 C は、途中で切断されてしまっているとして見なししてもよいことになるのである。

[付記 2] 増幅器を含む場合の（細かい）注

電流増幅器の場合

本稿では、電流源はすべて外部電源として扱っている。よって、KVL 方程式は、ループについての方程式であるので、電流源を接続しても変更はない。一方、電流源が加わったとして KCL 方程式を立てると、その係数行列には変更はないが、方程式の右辺の項が（電源の）入力に依存してくる。このことを係数行列に反映させると（項を左辺に移項すると）、出力電流に関係する節点での KCL 方程式の係数が入力（電流）に依存することになる。簡単な具体例として、図 75 の左側の回路を取り上げてみよう（なお、図の灰色の素子はあってもなくてもよい）。その等価回路は、図 75 の右図のようになり、その KCL 方程式は、図 76（表）のようになることがわかる。

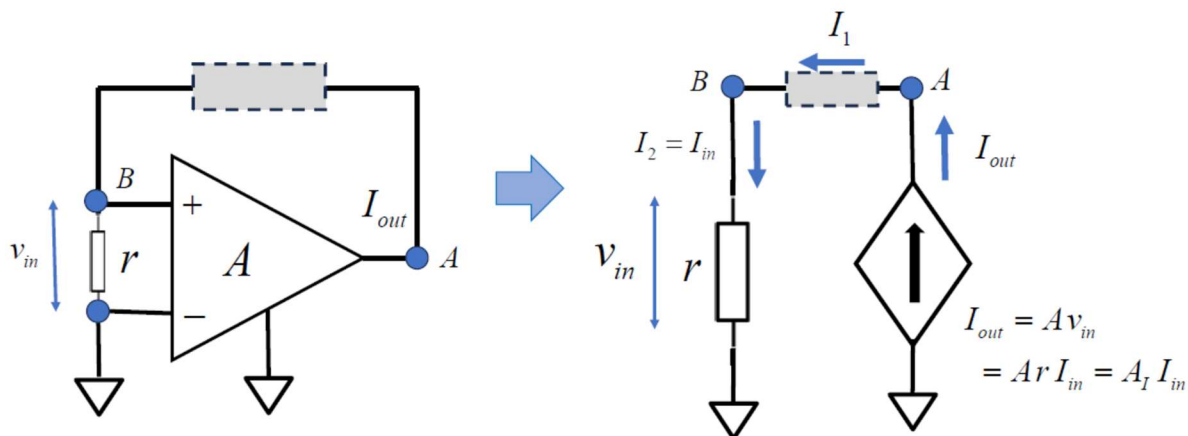


図 75

	I_1	I_2	I_{ext}			I_1	I_2	I_{ext}
A	1	0	$A_I I_2$	$\rightarrow$	A	1	$-A_I$	0
B	-1	1	0		B	-1	1	0

図 76 (表)

これから、図 76 (表) の (2 行 2 列の) 行列の行列式、 Det は、

$$Det = 1 - A_I$$

となり、 $A_I = 1$ の場合は、電流値 ($I = I_1 = I_2$) として任意の「確定」値 (図 75 の場合には $I = v_{in} / r$)

をとることができ、 $A_I \neq 1$ の場合は、(外部からの入力がないとすると) $I_1 = I_2 = 0$ が解となる。なお、

これは、図 75 の初等的な考察からも明らかであろう。しかしながら、現実には、 $A_I \geq 1$ の場合には、(外乱、内乱 (?) のために) 発振するのである (Appendix A も参照)。このことは、図 75 から容易にわかるであろう。

電圧増幅器の場合

この場合には、増幅器を on しても KCL 方程式は変わらない。一方、KVL 方程式は、出力を電圧源として扱えば、方程式を立てた段階では、係数行列には変化しないが、電流増幅器の場合と同様に、出力が入力に依存していることを係数行列に反映させると、KVL 方程式の係数が入力 (電流) に依存することになる。今、一つの簡単な具体例として、図 77 の回路を取り上げてみよう。すると、この場合、明らかに、電流は、 $I_1 = I_2 = I_3 = I$ となり、これを使うと、KVL 方程式は、図 78 (表) のようになることがわかる。

	I	V			I	V
C	R	$A R I$	$\rightarrow$	C	$R(1 - A)$	0

図 78 (表)

よって、 $A=1$ の場合には、任意の電圧をとることが可能で、 $A \neq 1$ で、外部からの入力がない場合、電圧がゼロとなることがわかる。しかしながら、 $A \geq 1$ の場合には、実際には、外乱等のために発振するのである。

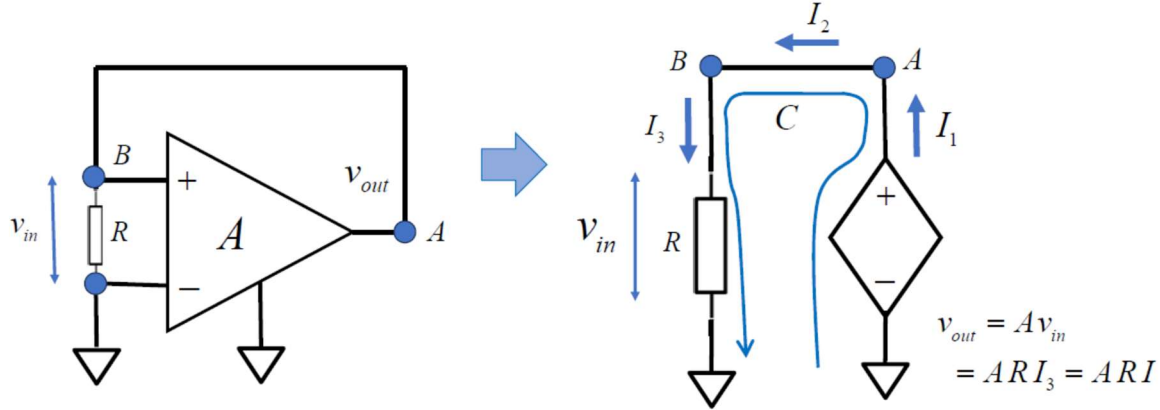


図 77

【付記 3】線形方程式の解への一つのコメント

この付記は、線形方程式の解のイメージを述べたものであり、具体的な解法の解説ではない。今、微分方程式の演算子を、 $\mathbf{I}(t)$ とし、微分方程式を回路の方程式に似せて、

$$\mathbf{I}(t)\mathbf{i}(t) = \mathbf{v}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (128)$$

としよう。ここで、 $\mathbf{n}(t)$ は、外乱（ノイズ）を表すとしよう。すると、式(128)を Laplace 変換すると、

$$\tilde{\mathbf{L}}(s)\tilde{\mathbf{I}}(s) = \tilde{\mathbf{V}}(s) + \tilde{\mathbf{N}}(s) + \tilde{\mathbf{J}}_0(s) \quad (129)$$

多くの場合、特に回路の場合には、左辺は Laplace 変換したものの積になるとしてよいであろう。ここで、 $\tilde{\mathbf{J}}_0(s)$ は、 $\mathbf{i}(t)$ の初期値に関する Laplace 変換である。また、 $\tilde{\mathbf{L}}(s)$ はマトリックスで、他はベクトルである。もし、

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{V}(j\omega)e^{j\omega t} \quad (130)$$

であったとすると、

$$\tilde{\mathbf{V}}(s) = \frac{\mathbf{V}(j\omega)}{s - j\omega} \quad (131)$$

となり、式(129)から、

$$\tilde{\mathbf{I}}(s) = \frac{\tilde{\mathbf{L}}(s)^{-1}\mathbf{V}(j\omega)}{s - j\omega} + \tilde{\mathbf{L}}(s)^{-1}\tilde{\mathbf{N}}(s) + \tilde{\mathbf{L}}(s)^{-1}\tilde{\mathbf{J}}_0(s) \quad (132)$$

ここで、式(132)の右辺の第二、三項には、 $s = j\omega$ を極とするような項が含まれていないとすると、これを逆 Laplace 変換した時に、 $e^{j\omega t}$ の時間変化をするのは、第一項からのみである。すると、極、

$s = j\omega$ の留数は、

$$\tilde{\mathbf{L}}(j\omega)^{-1} \mathbf{V}(j\omega) \quad (133)$$

となり、これを $\mathbf{I}(j\omega)$ とすると（注： $\tilde{\mathbf{I}}(s) = \mathbf{I}(j\omega) / (s - j\omega)$ を逆 Laplace 変換すると、 $\mathbf{i}(t) = \mathbf{I}(j\omega) e^{j\omega t}$ となる）、

$$\mathbf{Z}(j\omega) \mathbf{I}(j\omega) = \mathbf{V}(j\omega) \quad (134)$$

となる（ただし、 $\mathbf{Z}(j\omega) = \tilde{\mathbf{L}}(j\omega)$ としている）。式(134)が通常、周波数変換した（つまり、周波数領域で見た）回路方程式と呼ばれるものである。なお、 $\tilde{\mathbf{L}}(s)^{-1}$ 自体が $s = j\omega$ を極とする場合、つまり共鳴の場合となる（この場合には、式(134)はそのままでは使えないのであった）。

[コメント]

回路の場合には、キルヒホッフの二法則のおかげで、基本的には、解が求まる、つまり、 $\tilde{\mathbf{L}}(j\omega)^{-1}$ の存在が保証されるのである。このことは、発振回路（または発振してしまった回路）の場合でも同様で、一般に（極を除いて） $j\omega$ での解が保証されているのである（もっとも、実測する場合には、フィードバックを offしないと、きちんとデータが取得できないが・・・）。

一方、一般に、 $\tilde{\mathbf{L}}(s)^{-1}$ は、他の点で極をいくつか有する。例えば、そのうちに一つを、 s_i とし、それに対する $\tilde{\mathbf{L}}(s)^{-1}$ の留数を、 $\mathbf{S}(s_i)$ とすると、これに対応する、 $\mathbf{I}(s_i)$ は、

$$\mathbf{I}(s_i) = \frac{\mathbf{S}(s_i) \mathbf{V}(j\omega)}{s_i - j\omega} + \mathbf{S}(s_i) \tilde{\mathbf{N}}(s_i) + \mathbf{S}(s_i) \tilde{\mathbf{J}}_0(s_i) \quad (135)$$

となり、

$$\mathbf{i}(t) = \mathbf{I}(s_i) e^{s_i t} \quad (136)$$

と求まる（極が多重極の場合は、これに t の冪がかかる）。ここで、 $s_i = -\alpha + j\beta$ ($\alpha > 0$) であるとする、例えば、回路が受動素子のみから場合などでは、 $\mathbf{i}(t)$ は、指数関数的に減衰する。一方、 $s_i = \gamma + j\beta$ ($\gamma > 0$) であるとする、 $\mathbf{i}(t)$ は指数関数的に増大するのであるが、この場合、「外力」、 $\mathbf{V}(j\omega)$ がゼロ、さらに初期値が全くゼロ（ $\tilde{\mathbf{J}}(s)$ がゼロ）であっても、何らかのノイズ、外乱があれば、必ず増大するのである。つまり発振するのである。そして、発振するかどうかは、 $\tilde{\mathbf{L}}(s)^{-1}$ の極（一変数の場合には、 $\tilde{\mathbf{L}}(s)$ のゼロ点と等価）の実部の正負によって決まるのである。