

Appendix A: Nyquist plot の簡単な説明及び positive feedback の一例

- Nyquist plot の簡単な説明
- positive feedback の一例
- [付記 1] オペアンプの動作の初歩
- [付記 2] 「鋸波」のフーリエ展開
- [付記 3] もう一度、しつこく、 $A/(1-A)$ について (さらに、 $A/(1+A)$ についても・・・)

(I) Nyquist plot の簡単な説明

これらの線図 (plot) を使うと、(普通の) 周波数解析や周波数応答の測定で (Laplace 変換を使わないでも)、回路系が安定または不安定であるかを容易に判断できる。また、Nyquist plot は複素関数の応用としてもおもしろいであろう。しかし、これは、もしかしたら、時代遅れの代物 (少なくとも制御分野では古典論の範囲) になっているかもしれないが、ここに、簡単な説明を付記しておこう (なお、この方面の専門書の方が、よりわかりやすいかもしれないが・・・)。

まず、若干、複素関数を復習しよう。次のような複素関数があったとしてみよう (図 A.1(a))。

$$w = f(z) = az^n$$

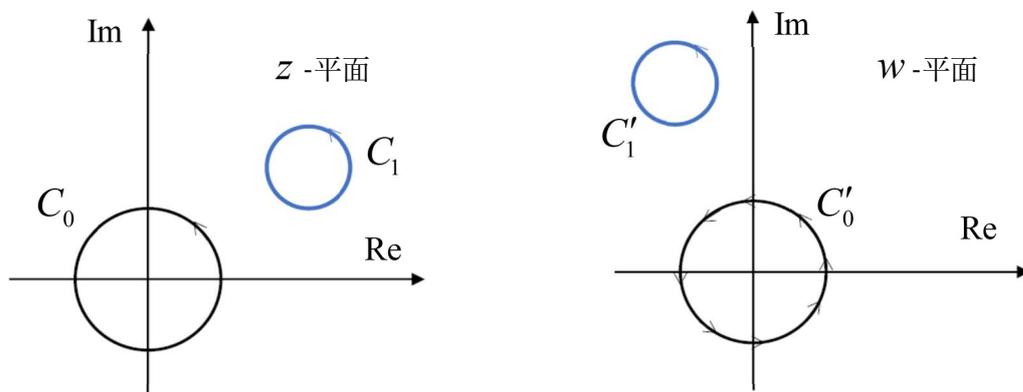


図 A.1(a)

この場合、 C_0 のように、 z 平面の原点の周りを一周すると、 w 平面では対応する点が、 C'_0 のように原点の周りを n 周する。一方、 C_1 のように、原点以外の点の周りを一周しても、 w 平面で対応する点は (C'_1 のように) 原点の周りを一周もしない (ゼロ周である)。一方、次の複素関数の場合は、 z 平面の原点の周りを一周すると、 w 平面では対応する点が逆回りに n 周する。

$$w = f(z) = az^{-n}$$

これを複素関数の argument で言うと、最初のケースでは、argument が $2\pi n$ 増加したことに相当するが、二番目のケースでは、argument が $-2\pi n$ だけ減少したことになる。

 [(若干、余分な) コメント]

図 A.1(a)はイメージ図であって、このようなスケールの図を実際に描くのはなかなかむづかしいかもしれない。例えば、簡単な、 $w=z^4$ のような場合でも「しっくりする」図を描くのは少し試行錯誤が必要であろう。この場合の例を図 A.1(b)、(c)に示す。図 A.1(b)で「blue」の線は、実際は、 w 平面の原点の周りを 4 回、回っているのであるが、その様子は、図 A.1(c)のようにするとわかる。

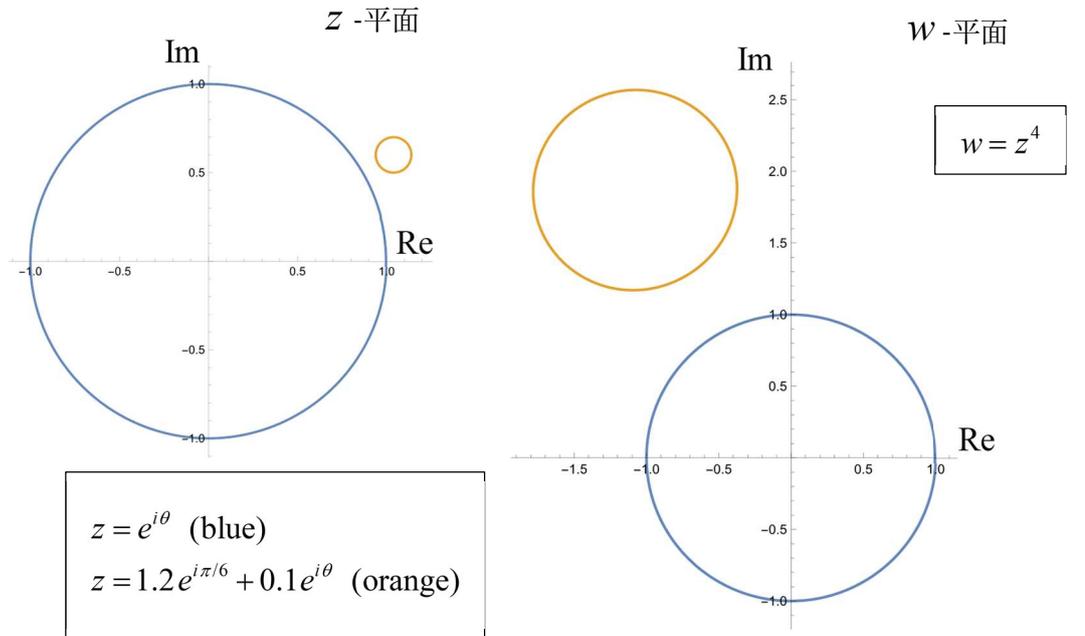


図 A.1(b)

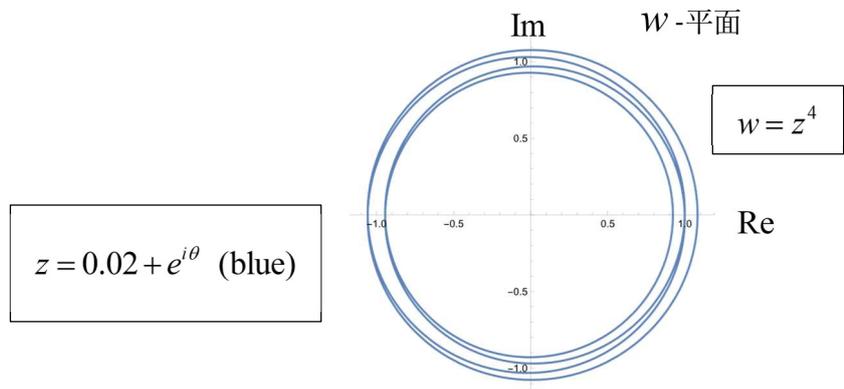


図 A.1(c)

 今、 w 平面での複素数を、

$$w = f(z) = R \exp(i\Phi) \tag{A-1}$$

と表すと、回転数、 N は、

$$N = \frac{\Delta\Phi}{2\pi} = \frac{\Delta \log w}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d \log w}{dz} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad (\text{A-2})$$

と書ける。ここで、対応する点が元に戻ると、 R の値は元に戻るので、 $\Delta \log w = \Delta[\log R + i\Phi] = i\Delta\Phi$ であることを使っている。このとき、 z 平面での周回の様子は、例えば、**図 A.2**のようにになっているであろう。ここで、 a_i 等及び b_i 等は**図 A.2**の領域内 (C の内側)にあるゼロ点及び極である。この場合、複素関数、 $f(z)$ は、

$$f(z) = \frac{(z-a_1)^{n_1} \cdots}{(z-b_1)^{m_1} \cdots} \times g(z)$$

と表され、 $g(z)$ は、領域内では、ゼロ点も極もない関数である。これから、

$$N = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \left[\frac{n_1}{z-a_1} + \cdots - \frac{m_1}{z-b_1} + \frac{g'(z)}{g(z)} \right] \quad (\text{A-3})$$

$$= (n_1 + n_2 \cdots) - (m_1 + m_2 \cdots) = Z - P$$

という「有名な」偏角の原理 (Cauchy's argument principle) が得られる。ただし、 Z 、 P は、重複も数えたゼロ点の数と極の数である。また、 g'/g は、領域内で正則であるので、周回積分には寄与しない。

以上で、複素関数論の (一つの) 復習を終え、次に回路の stability/instability の話に移るのであるが、これを議論するには、具体的な回路素子からなる回路を扱うよりは、control theory の分野で扱うようなシステム図 (block diagram) で議論した方がわかりやすいであろう。**図 A.3**のようなフィードバック回路 (diagram) を考えてみよう。ここで、 x を入力信号 (input)、 y を出力信号 (output) とし、フィードバックは、負帰還 (negative feedback) の「形」であるとしよう。なお、すべての変数は、Laplace 変換された後のものであるとする。

すると、増幅器に入力されるのは、 $x - Hy$ となるので、

$$G(x - Hy) = y \quad (\text{A-4})$$

という式が得られる。これから、

$$(1 + GH)y = Gx \quad (\text{A-5})$$

または、

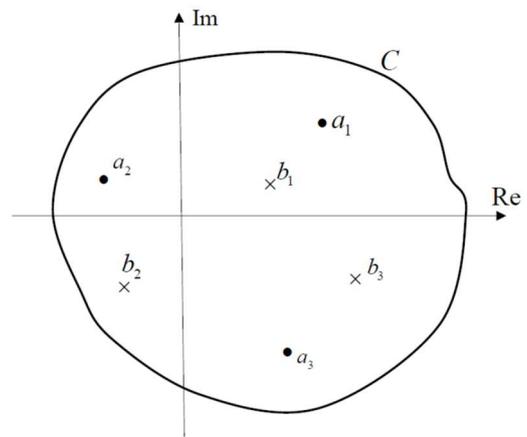


図 A.2

$$y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} x(s)$$

(A-6)

という式が得られる（関数には、その引数、 s を付けてある）。よって、これを逆変換すれば、解が得られるのであるが、式(A-6)の右辺の関数の極が s 平面の右半平面にあると不安定になるのである。これは、入力、 $x(s)$ に増大するような信号を入れなくとも、

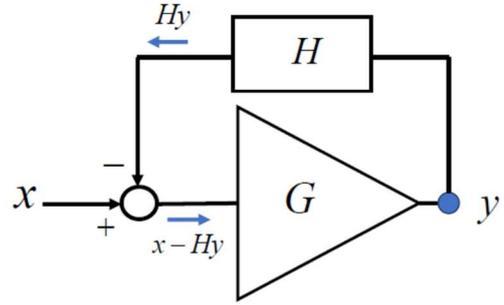


図 A.3

$$\frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (A-7)$$

の極が右半平面にあると不安定になる。なお、多くの場合、増幅器のゲイン関数、 $G(s)$ は（虚軸上は除いて）右半平面に極を持たないであろう。ここでは簡単のために、そのように仮定すると、式(A-7)からくる右半平面の極は、式(A-7)の分母が右半平面で、

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad (A-8)$$

となる点、つまり右半平面のゼロ点に対応していることがわかる。ここで、さらに、右半平面には、（虚軸上は除いて）

$H(s)$ の極はないと仮定する

（この仮定がなくても同様の議論はできるのであるが、それについては専門書を参照のこと）と、式(A-3)から、右半平面内のゼロ点の数は、 s が右半平面（全域）を周回する時に式(A-8)の左辺の関数が原点

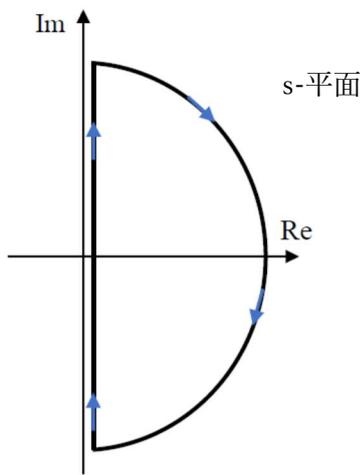


図 A.4

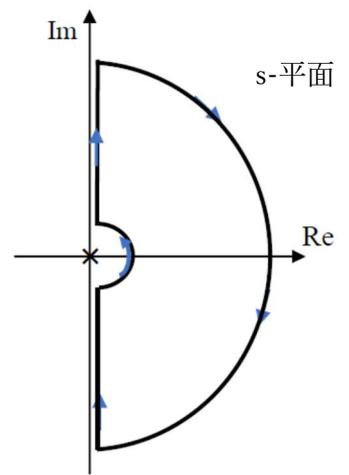


図 A.5

を回る回転数（または、 $G(s)H(s)$ が -1 を回る回転数）になることがわかる。ただし、通常、複素関数論では、反時計回りを正の回転とするが、control theoryでは、時計回りを正の回転としている（ようである）。よって、Nyquist plotでは、図A.4のように、 s が s 平面の右半平面をたどった時に、 $G(s)H(s)$ が -1 の周りを時計回りに回った場合を正の回転とするのである。つまり、 $G(s)H(s)$ が -1 を1回でも

回れば、式(A-8)のゼロ点が右半平面に存在するので、システムは不安定になることがわかる。要するにゼロ点を求めなくても、 $G(s)H(s)$ の-1の周りの挙動をみれば、安定か不安定かがわかるのである。なお、上の（虚軸上は除いて）という注は、積分の作用（演算子、 $1/s$ ）が $G(s)$ 、または $H(s)$ に含まれることが往々にしてあるためである。しかし、例えば、原点に極がある場合でも、**図 A.5**のような s の経路をとれば、式(A-3)で、 $P=0$ となり、上の議論がそのまま適用である（もっとも、右半平面上の極を避けないで、式(A-3)そのままを適してよいのであるが・・・）。なお、今では、計算機を使えば、 $G(s)H(s)$

のゼロ点を求めるのはそれほど大したことはないであろう。よって、特に、 $G(s)H(s)$ の解析的な表式が与えられている場合には、Nyquist plot を使わなくてもよいかもしれない（？）。

次に、あまりにも初等的であるかもしれないが、それでも重要である複素関数の性質を一つあげておこう。現実の世界では、システムを Laplace 変換した式（またはそれに四則演算を施した式）は、一般に、

$$F(z) = \frac{a + bz + cz^2 + \dots}{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \dots}$$

のような有理関数で表されるであろう（ただし、 $z = s$ としている）。ここで、重要なのは、（現実の世界では）係数、 $a, b, \dots, \alpha, \beta, \dots$ はすべて実数であるということである。すると、

$$\overline{F(z)} = \overline{\left(\frac{a + bz + cz^2 + \dots}{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \dots} \right)} = \frac{a + b\bar{z} + c\bar{z}^2 + \dots}{\alpha + \beta\bar{z} + \gamma\bar{z}^2 + \dots} = F(\bar{z})$$

となる。よって、現実のシステムでは、

$$F(\bar{z}) = \overline{F(z)} \tag{A-9}$$

という性質があることがわかる。つまり、

$$F(-i\omega) = \overline{F(i\omega)} \tag{A-10}$$

となり、 $-i\omega$ での関数の値は、 $i\omega$ での値の複素共役

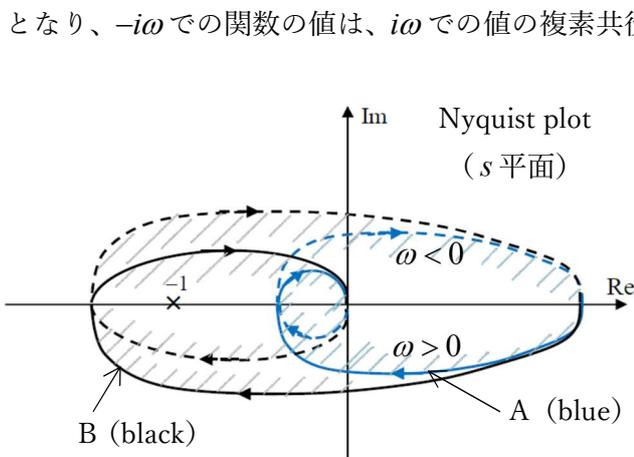


図 A.6

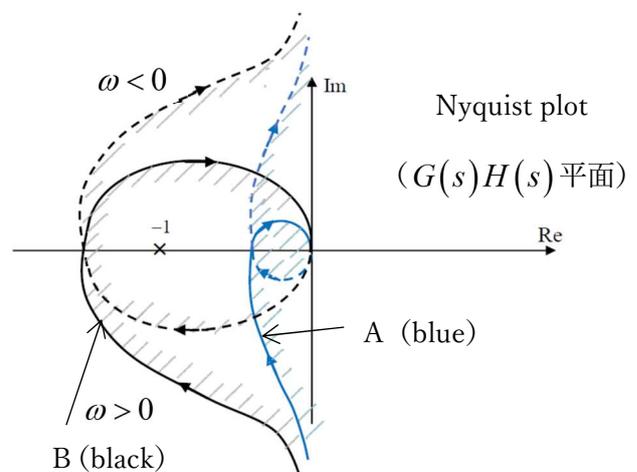


図 A.7

となることになる（つまり、グラフを実軸で折り返せばよい）。また、 $\omega \rightarrow \infty$ となると、一般的に、システムは応答しなくなる、つまり、 $G(s)H(s) \rightarrow 0$ となるであろうことを使うと、Nyquist plot で実際に計算する必要がある s または周波数の範囲は、

$$0 \leq s < i\infty, \quad 0 \leq \omega < \infty$$

だけでよいことがわかる。もし原点に極がある場合には、

$$i\varepsilon \leq s < i\infty, \quad \varepsilon \leq \omega < \infty \quad (\varepsilon \sim 0)$$

とすればよい。このようにすると、代表的な Nyquist plot は図 A.6 のようになる。太字の実線が上記の周波数のプロットの範囲である。また、図 A.7 は、積分演算 ($1/s$) が含まれている場合である。また、よく知られているように、関数が正則な場合、関数による写像は、($f'(z) \neq 0$ の点では) 等角写像になるのであるが、さらに、「方向性」も保持されるのである（例えば s 平面で動く点の進行方向から見て右側の領域は、写像された領域でも進行方向から見て右側である）。つまり、 s 平面の右半平面は、図の斜線部に写像されることになる。よって、両図とも、A の場合には、plot の軌跡は、 -1 の点を回らない、または、 s 平面の右半平面を写像した領域は -1 を含まないので、システムは安定であることがわかる。一方、B の場合には、plot の軌跡は、 -1 の点を回る（右半平面を写像した領域は -1 を含む）ことがわかる。つまり、式(A-8)のゼロ点で、 $\text{Re } s > 0$ となるものがあることがわかり、システムは不安定になるのである。

Nyquist plot の軌跡の振幅（絶対値のデシベル）と位相を周波数に対して plot したものは Bode plot と呼ばれるが、例えば、次のように適当に選んだ、

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(1+s+0.512s^2)} \quad (\text{A-11})$$

の場合、その Nyquist plot は図 A.8(a)、図 A.8 (b) となり、Bode plot は、図 A.9(a)、図 A.9(b) のようになる。Nyquist plot と比較すると、Bode plot で位相（位相遅れ）が 180° の時、対応する周波数での振幅

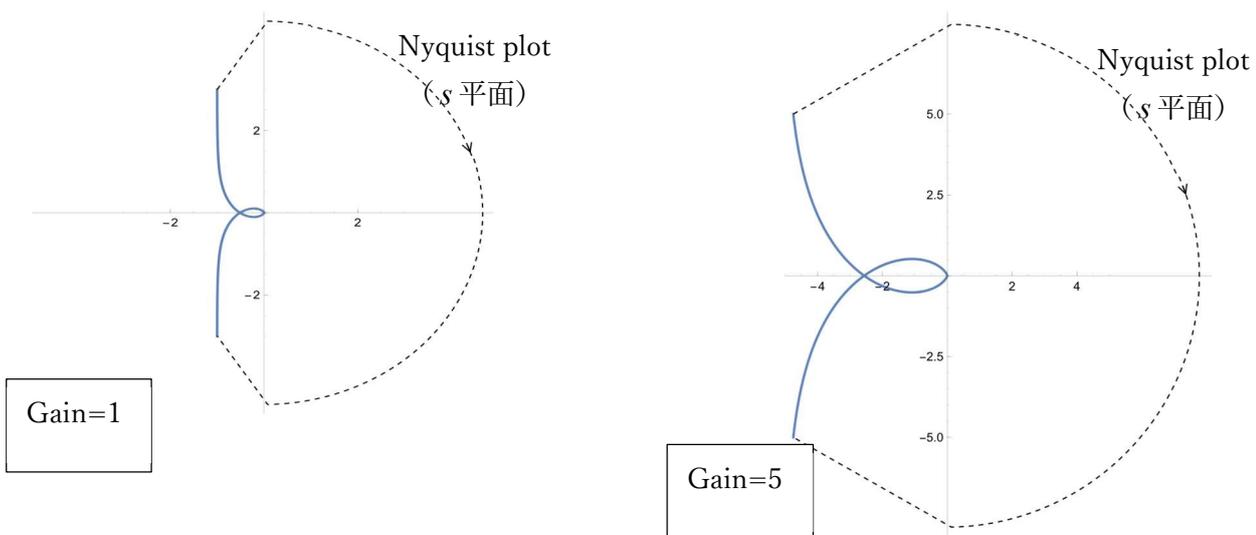


図 A.8(a) NyquistPlot の例 (Mathematica)

図 A.8(b) NyquistPlot (Mathematica)

が（十分、減衰せずに）1 を超えていると、システムが不安定になることがわかる。なお、図 A.3 のシス

テム図からわかるように、 $G(s)H(s)$ は、input 信号への output のフィードバックの量であり、これは、フィードバックを off した時のシステムの「出力」と解釈できるので、open loop gain と呼ばれるもので

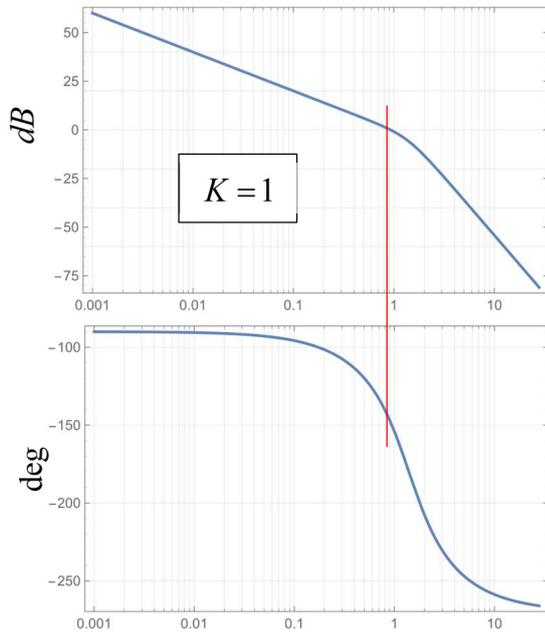


図 A.9(a) Bode plot の例
BodePlot (Mathematica)

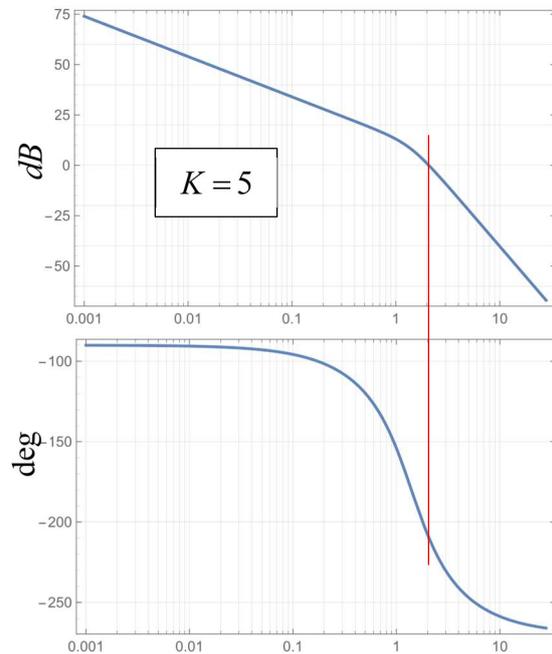


図 A.9(b) Bode plot の例
BodePlot (Mathematica)

あるが、この周波数依存性は比較的容易に測定できることから、Bode plot は簡便である。ついでに、根軌跡法 (Root Locus Method) について、非常に簡単に触れておこう。これは、式(A-8)の方程式の根 (root) を s -平面に表示し、そのパラメータ依存性を見ようというものであり、式(A-11)のように、パラメータ (この場合、 K) が一個で、

$G(s)H(s)$ が有理関数の場合には、特に簡単になる。

この Root locus Method は、明示的でわかりやすい方法であるが、詳細は適当な教科書を参照されたい。今の場合、図 A.9(c)から、およそ K が 2 を超えると、ある根が s -平面の右半平面に入ってくるので、系が不安定になることがわかる。今の場合、安定/不安定の境目である K の値、 K_c

は、以下のようにして簡単に求めることができる。式(A-11)から、

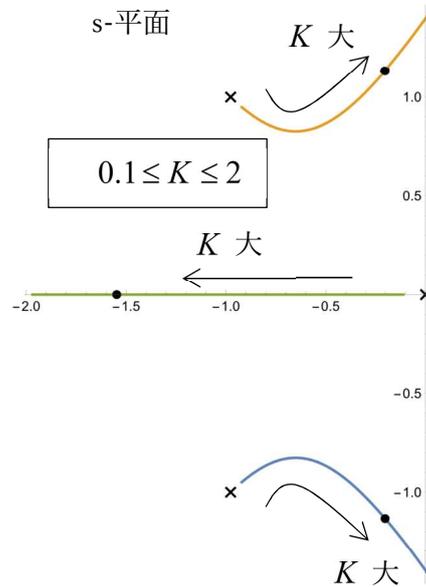


図 A.9(c) RootLocusPlot (Mathematica)

$$1 + \frac{K_c}{s(1+s+0.512s^2)} = 0 \rightarrow s(1+s+0.512s^2) + K_c = 0 \quad (\text{A-12})$$

となるが、根は、虚軸上にあることから、 $s = iy$ とおくと、

$$iy(1+iy-0.512y^2) + K_c = 0 \quad (\text{A-13})$$

これから、 $iy(1-0.512y^2) = 0$ 、 $-y^2 + K_c = 0$ となるが、 $y = 0$ は、式(A-12)の第一の方程式を満たさないので、捨てることにすると、

$$K_c = 1/0.512 = 1.953 \approx 2 \quad (\text{A-14})$$

となることがわかる。

なお、Nyquist plot で図 A.10(a) のようになる場合には、当然、システムは安定 (conditionally stable、

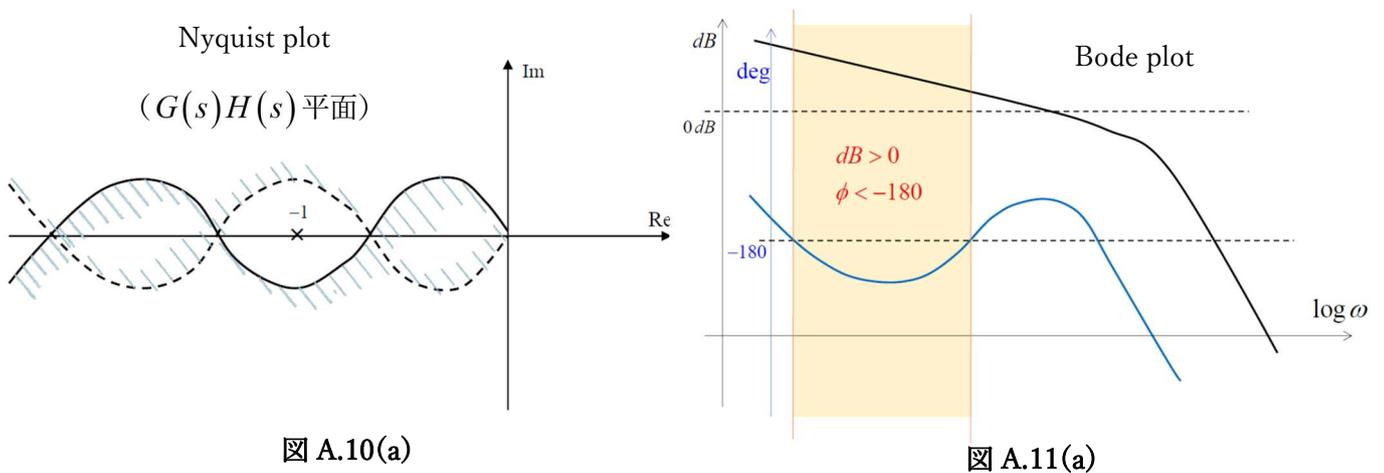


図 A.10(a)

図 A.11(a)

ゲインの大小によっては、不安定) であるが、その Bode plot の「簡易な判定基準」では、図 A.11(a) のようになり、不安定と見なされるかもしれないのである (安全サイドの判定基準ではあるが・・・)。

以下に、あまり、適切な例であるかどうかはわからないが、次の文献、

O. I. Elgerd; "Control Systems Theory", McGraw-Hill Inc., 1967, p.173, Exercises 6-6.

にある例題の係数を少し変更した、

$$G(s)H(s) = \frac{K(1+s)^2}{s^2(1+2s)(1+0.4s+0.1s^2)} \quad (\text{A-15})$$

を取り上げてみよう。すると、 $K = 2$ の場合、Nyquist plot は、図 A.10(b) のようになり、Bode plot は、図 A.11(b) のようになる。さらに、根軌跡 (root locus) を、図 A.11(c) に示す。図 A.11(c) から、 K のある範囲 (0~3 の範囲) で安定であるように見えるので、その部分を拡大すると、図 A.11(d)、(e) のようになる。この範囲を求めるには、式(A-12)、(A-13) と同様の計算をすればよい。式(A-13) に対応する式は、

$$-y^2(1+2iy)(1+0.4iy-0.1y^2) + K_c(1+2iy-y^2) = 0 \quad (\text{A-16})$$

となり、実数部と虚数部をわけると、

$$K_c(1-y^2) = y^2(1-0.9y^2), \quad K_c = y^2(1.2-0.1y^2) \quad (\text{A-17})$$

となる。これから ($y=0$ を除外して)、

$$y^4 - 4y^2 + 2 = 0 \rightarrow y^2 = 2 \pm \sqrt{2} \quad (\text{A-18})$$

と求まるので、 K_c は、

$$K_c = \begin{cases} (2+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}/10) = 2.9393 \\ (2-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}/10) = 0.6686 \end{cases} \quad (\text{A-19})$$

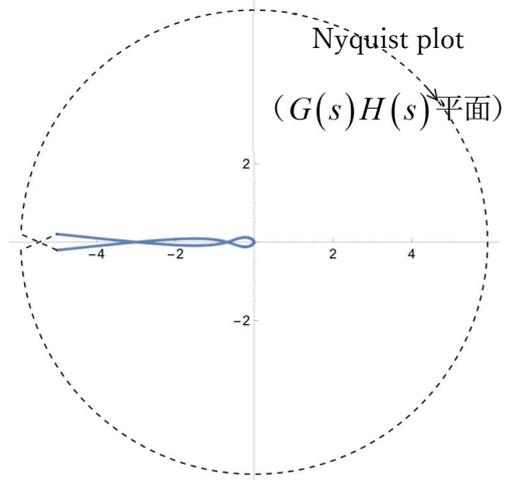


図 A.10(b)

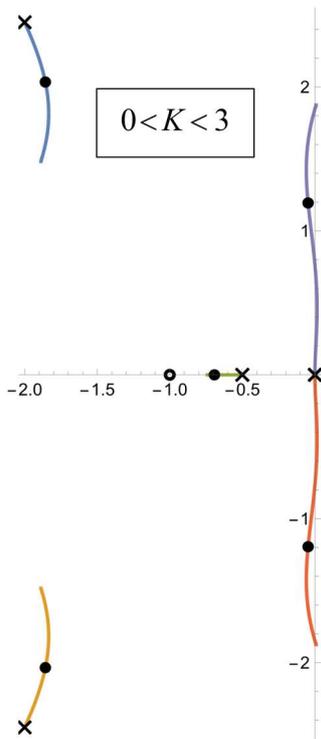


図 A.11(c)

と求まる。これから、 K が $0.6686 < K < 2.9393$ の範囲の場合に安定であることがわかるのである。

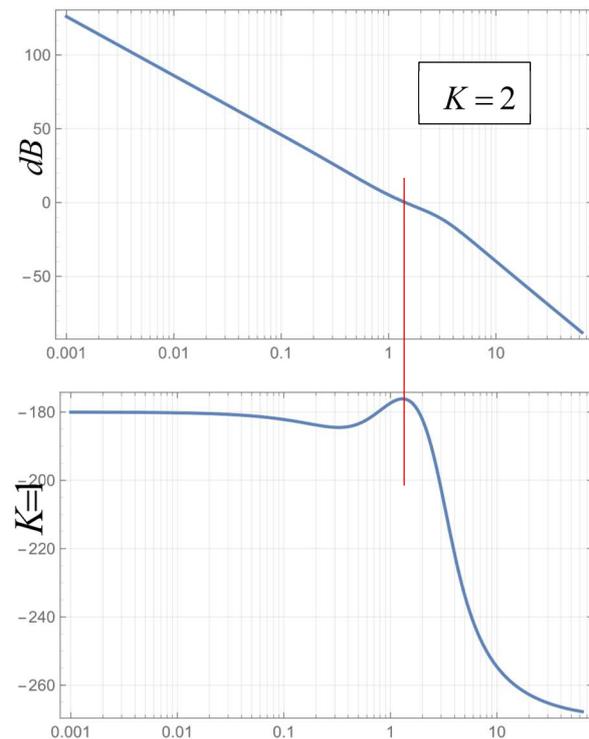


図 A.11(b)

(II) positive feedback の一例

これは、本文で取り上げた例題である (図を図 A.12 に再掲) が、デジタル制御の簡単な一例ともなっている。図から直接、応答を求めると、

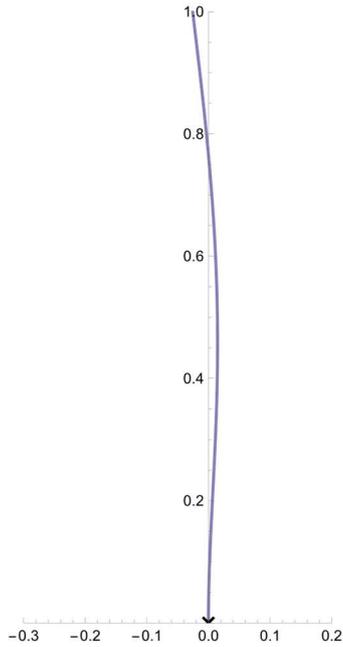


図 A.11(d)

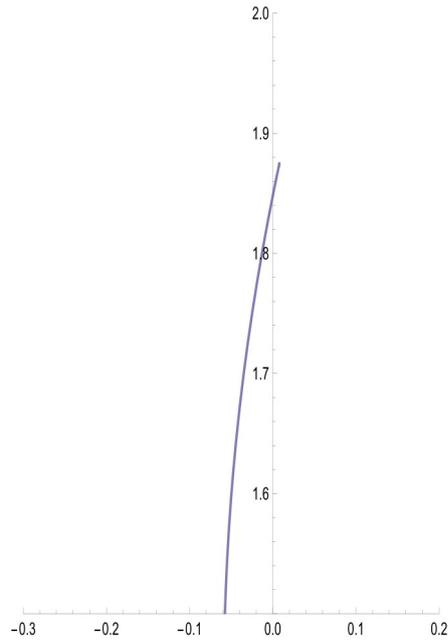


図 A.11(e)

$$y = \frac{A}{1-A}x \quad (\text{A-20})$$

となり、「手続き的な」計算では、

$$y = A(1 + A + A^2 \dots)x \quad (\text{A-21})$$

と与えられるのであった。

[コメント]

上で言う、「手続き的な」計算とは、まず1を入力し、その結果、 A が入力にもどってくるので、次に $1+A$ が増幅器への入力となり・・・という段階的な手続きによる計算であり、仮想的な計算とも言えるものである。

そして、増幅率、 A が、 $A > 1$ の場合に、式(A-20)と式(A-21)が矛盾しているように見えるという問題が生じるのである。

現実の世界では、入力を ON すると、瞬間的に出力が無限大になるというようなことは起きないであろう。そして、出力が無限大に向かうには、ある時間経過が必要であろう。つまり、現実の世界では、必ず遅延があるはずである。そこで、図 A.13 のように、増幅器には遅延がないが、feedback には一定の時間遅れ、 τ があるとしてみよう。この遅れによって、1の強さの入力を ON しても、時間、 t が $0 < t < \tau$ の間は、feedback の出力はゼロのままであるので、増幅器の入力は1のままとなり、よって増幅器の出力も A のままとなる。時間、 t が $\tau < t < 2\tau$ となると、feedback の値は、 A となり、増幅器には $1+A$ が入力されて、出力は、 $A(1+A)$ となる。しかし、この値が入力側に feedback されるのは、時間がさらに τ

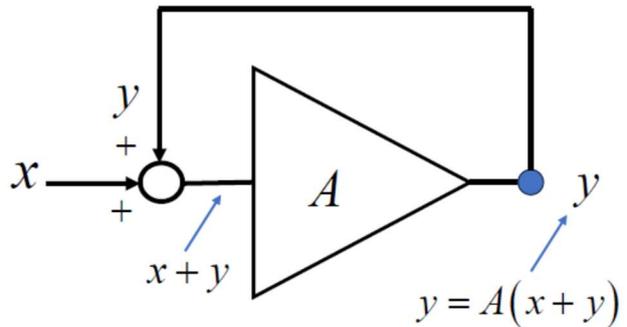


図 A.12

だけ経過した後であるので、出力は、 $A(1+A)$ のまま変わらない。これが変わるのは、時間、 t が $2\tau < t < 3\tau$ になった時である。これを続けていくと、**図 A.14** に示すように、

$$A(1+A+A^2+\dots) = A \frac{A^n - 1}{A - 1} \quad ((n-1)\tau < t < n\tau) \quad (\text{A-22})$$

となり、明らかに、 $A > 1$ の場合、特に A が大きい場合、式(A-22)の値は急激に大きくなる。この場合、式(A-22)は、

$$\frac{A}{A-1} A^n \approx \frac{A}{A-1} A^{t/\tau} = \frac{A}{A-1} \exp\left(\frac{t}{\tau} \log A\right) \quad (t \approx n\tau) \quad (\text{A-23})$$

となり、指数関数的に増大することがわかる (time constant: $\tau / \log A$)。なお、 τ が小さい場合、同じ時間間隔でも、 n は大きくなり、増大が急となる。

一方、 $A < 1$ の場合には、式(A-22)は、

$$\frac{A}{1-A} \quad (n \rightarrow \infty \text{ or } t \rightarrow \infty) \quad (\text{A-24})$$

という当然の結果になるのであるが、(**図 A.12** から得られる) この同じ式を $A > 1$ の場合に適用してはいけないのである。この辺の事情をもう少し調べてみよう。**図 A.14** のグラフまたは式(A-22)は、

$$\begin{aligned} & A(U(t) + AU(t-\tau) + A^2U(t-2\tau) + \dots) \\ & = A \sum_{n=0}^{\infty} A^n U(t-n\tau) \end{aligned} \quad (\text{A-25})$$

と書ける。ここで、 $f(t)$ ($f(t) = 0$ for $t < 0$) の Laplace 変換を $F(s)$ とすると、この $f(t-\tau)$ の Laplace 変換は、よく知られているように、

$F(s)e^{-s\tau}$ である。これを使うと、

[コメント]

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t-\tau) dt = e^{-s\tau} \int_0^{\infty} e^{-s(t-\tau)} f(t-\tau) dt = e^{-s\tau} \int_{-\tau}^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = e^{-s\tau} \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

式(A-25)の Laplace 変換は、

$$A \sum_{n=0}^{\infty} A^n e^{-ns\tau} / s = \frac{A}{s(1 - Ae^{-s\tau})} \quad (\text{A-26})$$

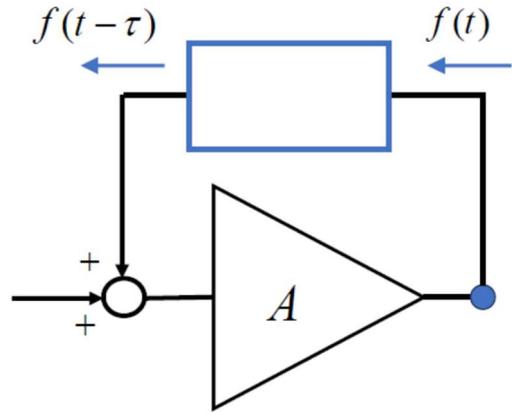


図 A.13

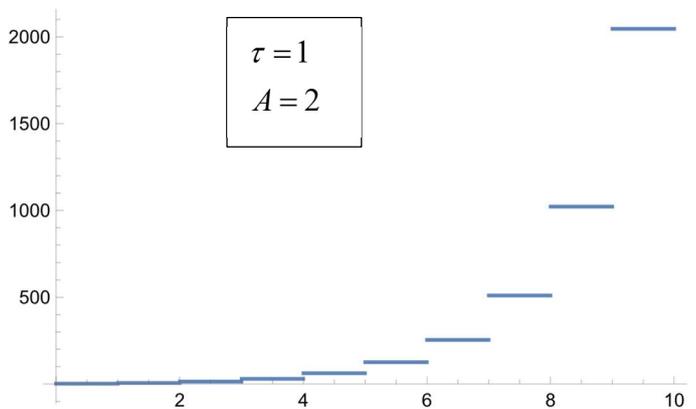


図 A.14

となる。ここで、($A > 1$ の場合には) $Ae^{-\text{Re}(s)\tau} < 1$ となるように、 s を s 平面で十分、右側にとらなければいけない。よって、例えば、 $A > 1$ の場合、 $s \approx 0$ として、式(A-26)の右辺の $1/s$ (これは、1、より正しくは、 $U(t)$ の Laplace 変換である) の係数を、

$$\frac{A}{1-A} \tag{A-27}$$

としてはいけないのである。一方では、逆 Laplace 変換で、留数定理を使うためには、 s 平面の左側まで関数を解析接続して、解析関数にする必要がある。その場合には、この解析関数の原点付近の値は、 $1/s$ に、式(A-27)をかけた、

$$\sim \frac{1}{s} \cdot \frac{A}{1-A}$$

となるのである。そもそも、今の場合は、式(A-25)が解であり、これは式(A-26)の左辺 (和を求める前の式) を逆 Laplace 変換したものになっているはずである。よって、わざわざ、式(A-26)の右辺の逆 Laplace 変換をしなくてもよいのであるが・・・。

さて、図 A.13 の block diagram を Laplace 変換した後の s 空間で見ると、式(A-20)と同じようにして、

$$Y(s) = \frac{A}{1-Ae^{-s\tau}} X(s) \tag{A-28}$$

となるが、ここで、 $X(s) = 1/s$ とすると、式(A-26)の右辺が直接、求まることがわかる。つまり、式(A-20)は、Laplace 変換した後の関数の関係式であり、式(A-28)で、遅延時間、 τ が極端に短い場合に相当すると解釈するのである。

[コメント]

自然現象の振る舞いは、一般に微分 (積分) 方程式で表されるが、それを線形の範囲に限るとすると (線形化して考えることにすると)、微分 (積分) 方程式は線形方程式となる。よって、これを Fourier 変換または Laplace 変換すると、線形代数方程式となるので、変換後の関数に関する四則演算 (代数演算) が可能となる (これが Fourier 変換や Laplace 変換の大きなメリットである)。逆に変換前は、四則演算 (特に積や商の演算) は自由には行えない。

よって、式(A-20)は、本来、複雑であったかもしれない微分 (積分) 方程式の Laplace 変換後の四則演算の結果を (極端に) 単純化したものであると考えるのが妥当であろう。

[余分なコメント]

上記のように、(因果律に従う) 自然現象を単純化した結果 (Laplace 変換後の結果) が式(A-20)であると考え、「発散級数」の「奇妙な」和の問題に首を突っ込まなくてもよいのである。

$$1 + A + A^2 + A^3 + \dots \rightleftharpoons \frac{1}{1-A} \quad \text{even for } A > 1$$

発散級数論では発散級数の和を求めるのは、 \rightarrow の方向である (と思う) が、回路 (feedback) の場合には、 \leftarrow の方向にもなると言ってもよいかもしれない (?)

このように解釈して、式(A-28)または式(A-26)の右辺で、 s は、 s 平面で十分、右側にあるようにとると、式(A-26)の左辺のような展開が可能となり、各項に、式(A-25)の各項の Laplace 変換が対応するのである。

以上で一応、話は終わったとしてもよいが、式(A-26)の右辺を直接、逆 Laplace 変換して式(A-25)になるかどうかを確認しておくのも悪くないであろう。しかし、まず、その前に、簡単な例について考えてみよう。

図 A.15 に、この例のダイアグラムを示す。また、これを実現するような簡単な回路を図 A.16 (付記 1 も参照のこと) に示しておこう (なお、これが最も簡単な回路かどうかは別の話であるが・・・)。
すると、式(A-28)の $Ae^{-s\tau}$ に相当するものが、

$$Ae^{-s\tau} \rightarrow \frac{A}{1+j\omega CR} = \frac{A}{1+j\omega\tilde{\tau}} \rightarrow \frac{A}{1+s\tilde{\tau}} \quad (\text{A-29})$$

となる。ここで、 $\tilde{\tau} = CR$ である。

余分なことながら、これは、式(A-28)で、

$$Ae^{-s\tau} = \frac{A}{e^{s\tau}} \sim \frac{A}{1+s\tau+\dots} \rightarrow \frac{A}{1+s\tau}$$

としたものになっている。

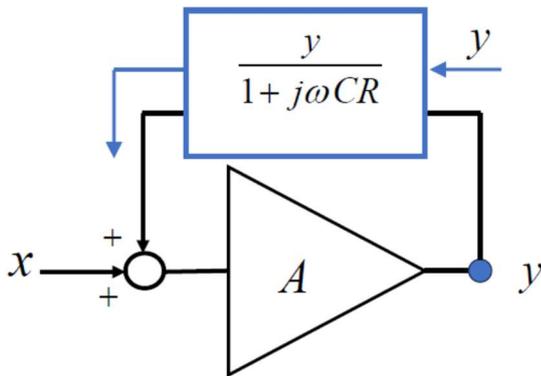


図 A.15

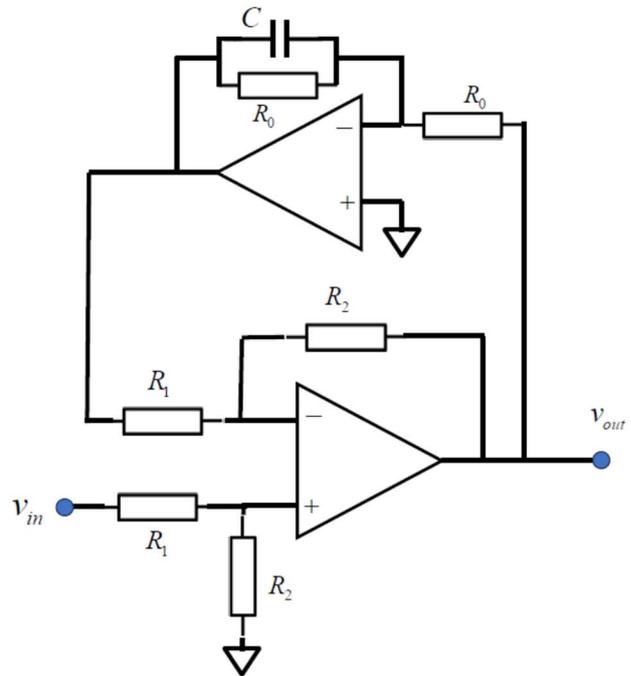


図 A.16

これから、step 入力に対する出力(indicial response) は、

$$\frac{A}{1 - \frac{A}{1+s\tilde{\tau}}} \cdot \frac{1}{s} \quad (\text{A-30})$$

を逆 Laplace 変換すればよいことがわかる。一般的な逆 Laplace 変換は、よく知られているように、ブロムウィッチ (Bromwich) 積分で与えられる。

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds \quad (\text{A-31})$$

ただし、 c は、被積分関数の極が、 $\text{Re } s > c$ の領域にはないように十分、大きくとる。

[コメント] Laplace 変換と Fourier 変換との関係

これは周知のことと思われるが、参考のために以下に簡単に記しておく。

$f(t) = 0$ ($t < 0$) を仮定すると、

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ \rightarrow F(c+i\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(c+i\omega)t} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} (e^{-ct} f(t)) dt = \tilde{F}(\omega) \end{aligned} \quad (\text{A-32})$$

ここで、 $e^{-ct} f(t)$ の Fourier 変換を $\tilde{F}(\omega)$ としている。

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ct+i\omega t} F(c+i\omega) d\omega \\ &= \frac{e^{ct}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} F(c+i\omega) d\omega = \frac{e^{ct}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \tilde{F}(\omega) d\omega = e^{ct} e^{-ct} f(t) \end{aligned} \quad (\text{A-33})$$

なお、 $c=0$ の場合は、もっとすっきりしている。

よって、今の場合、逆変換の被積分関数は、

$$\exp(st) \frac{A}{1 - \frac{A}{1+s\tilde{\tau}}} \cdot \frac{1}{s} \quad (\text{A-34})$$

となるが、この関数の極は、 0 と $1 - \frac{A}{1+\tilde{s}_p\tilde{\tau}} = 0$ となるような、 \tilde{s}_p で、

$$\tilde{s}_p = \frac{A-1}{\tilde{\tau}} \quad (\text{A-35})$$

と与えられる。極、 0 の留数は、 $A/(1-A)$ で、極、 \tilde{s}_p での留数は、 $e^{\tilde{s}_p t} A^2 / (A-1)$ であることから、出力は、

$$\frac{A}{1-A} - \frac{A^2}{1-A} \exp\left(\frac{A-1}{\tilde{\tau}} t\right) \quad (\text{A-36})$$

となる。これから、 $A > 1$ の場合には、発散することがわかる。また、 $t \approx 0$ の場合は、出力は、 A となるが、これはフィードバックの遅延（回路のコンデンサの遅延効果）のために、フィードバックがまだ効いていないためである。また、 $A \approx 1$ の場合、式(A-36)は、

$$\frac{A}{1-A} \left(1 - A \left(1 + \frac{A-1}{\tilde{\tau}} t\right)\right) = A \left(1 + \frac{A}{\tilde{\tau}} t\right) \approx 1 + \frac{t}{\tilde{\tau}} \quad (\text{A-37})$$

となり、exponential growth ではなく、時間に比例して増大することがわかる。このことは、直接、逆変換してもわかる。式(A-34)で、 $A=1$ とすると、

$$\exp(st) \frac{1+s\tilde{\tau}}{s\tilde{\tau}} \cdot \frac{1}{s} \quad (\text{A-38})$$

となるが、極は0だけで、その留数は、式(A-38)の exp を展開して、

$$(1+st)\left(\frac{1}{\tilde{\tau}s^2} + \frac{1}{s}\right) \quad (\text{A-39})$$

となることから、 $1+t/\tilde{\tau}$ であることがわかる。これは、式(A-37)の最後の式と同じである。

以上から、

$A \geq 1$ の場合、不安定

$A < 1$ の場合、安定

ということがわかる。

最後に、若干、マニアック的であるが、式(A-26)を逆 Laplace 変換すると、式(A-25)になることを確かめておこう。

式(A-26)の逆 Laplace 変換は、

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{Ae^{st}}{s(1-Ae^{-s\tau})} ds$$

(A-40)

となるが、この関数の極は、 $s=0$ と、

$1-Ae^{-s\tau}=0$ となる s である。後者の s を s_p とすると、

$$s_p = \frac{\log A}{\tau} + \frac{2\pi i p}{\tau} \quad (\text{A-41})$$

となる (図 A.17 を参照)。これから、留数は、 $A \neq 1$ の場合、 $s=0$ については、

$$\frac{A}{1-A}$$

となり、 $s=s_p$ については、

$$A \frac{e^{s_p t}}{s_p A \tau e^{-s_p \tau}} = A \frac{e^{s_p t}}{s_p \tau} = \frac{A}{2\pi i} \cdot \frac{e^{\frac{\log A}{\tau} t} e^{\frac{2\pi i t}{\tau} p}}{p - \frac{i}{2\pi} \log A}$$

となる。以上から、(A-40)は、

$$\frac{A}{1-A} + \frac{Ae^{\frac{\log A}{\tau} t}}{2\pi i} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2\pi i t}{\tau} p}}{p - \frac{i}{2\pi} \log A} \quad (\text{A-42})$$

と与えられることがわかる。なお、この式は、複素共役をとってみるとわかるように、(見かけとは異なり) その値は実数である (当然、そうあるべきではあるが・・・)。明らかに、 $A < 1$ なら、十分に時間が

たつと、上式で初項だけが残ることがわかるのである。また、 $A=1$ の場合、 $s=0$ と $s=s_0$ が合流して、

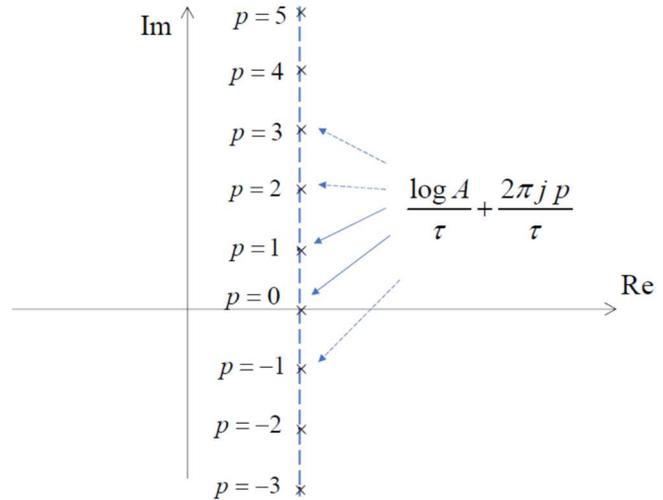


図 A.17

2位の極となり、その留数は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \frac{e^{st}}{s(1-e^{-s\tau})} &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1+st+\dots}{s\left(s\tau - \frac{s^2\tau^2}{2} + \dots\right)} = \frac{1}{2\pi i \tau s^2} = \frac{1+st+\dots}{1 - \frac{s\tau}{2} + \dots} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{s^2\tau} + \frac{t}{s\tau} + \frac{1}{2s} + \dots \right) \end{aligned}$$

という展開から、

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{t}{\tau} \right) \quad (\text{A-43})$$

となることがわかる。これから、式(A-42)は、この場合、

$$\frac{1}{2} + \frac{t}{\tau} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{p=-\infty, p \neq 0}^{\infty} \frac{e^{\frac{2\pi i t}{\tau} p}}{p} = \frac{1}{2} + \frac{t}{\tau} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{2\pi n t}{\tau}\right)}{n} \quad (\text{A-44})$$

ここで、

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} \quad (0 < \theta < 2\pi) \quad (\text{A-45})$$

という関係を思い出しておこう（この関係はよく知られていると思うが、一応、付記2にその導出を記してある。また、図A.18も参照のこと）。なお、両辺が周期関数であることを明示するには、

$$\frac{\pi}{2} - \frac{(\theta - 2\pi m)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} \quad (2\pi m < \theta < 2\pi(m+1))$$

とすればよい。これを使うと、式(A-44)は、

$$\frac{1}{2} + \frac{t}{\tau} + \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{\tau} \right) = 1 \quad (0 < t < \tau)$$

となる。式(A-45)の左辺は、図A.18に示すように周期 2π をもつ周期関数の一部を書いたものである。このため、 $\tau < t < 2\tau$ では、式(A-44)は、

$$\frac{1}{2} + \frac{t}{\tau} + \left(\frac{1}{2} - \frac{t-\tau}{\tau} \right) = 2 \quad (\tau < t < 2\tau)$$

となる。以下同様である。つまり、式(A-44)は、次の階段関数を表していることがわかる。

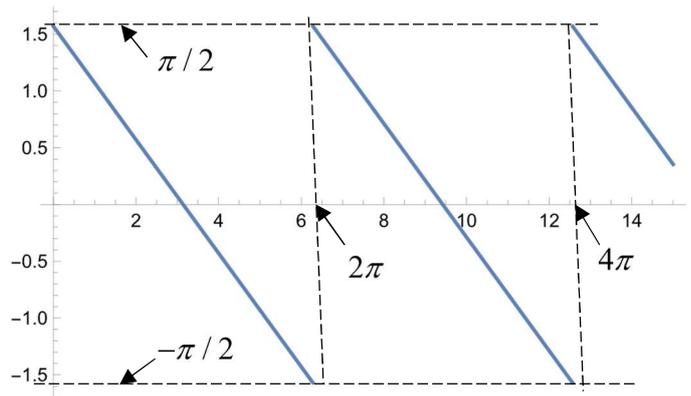


図 A.18

$$U(t) + U(t-\tau) + U(t-2\tau) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} U(t-n\tau)$$

これは、式(A-25)で $A=1$ としたものと同じである。また、式(A-44)は、この階段関数を線形近似したものが、増大関数、 $1/2 + t/\tau$ であり、これを補正する関数（鋸波）が、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$ であることを言っている

のである。

次に、戻って、 $A \neq 1$ の場合であるが、式(A-42)からわかるように、 $A = 1$ より関数が複雑になると思われるが、 $A = 1$ と同様に、この関数は、滑らかな関数と周期的な関数との和として表されると予想されるのである。まず、

$$f(a, \theta) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ip\theta}}{p - ia} \quad (\text{A-46})$$

に着目しよう。すると、この形は、(Riemann の) ゼータ関数に関連する関数に近いことがわかるので、簡単に、それらと比較してみよう。アメリカ合衆国国立標準技術研究所 (NIST) の NIST Digital Library of Mathematical Functions を主に参照すると、 $f(0,0)$ は値をもたないが、 $p \geq 1$ の部分を見ると、リーマン・ゼータ関数 (Riemann zeta function)、

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

の $\zeta(1)$ ($=\infty$) と同じになる。また、 $f(0,\theta)$ の $p \geq 1$ の部分は、多重対数関数 (Polylogarithm)、

$$Li_s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}$$

を使うと、 $Li_1(e^{i\theta})$ と同じになる。これは、周期ゼータ関数 (Periodic Zeta Function)、

$$F(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n x}}{n^s} \quad (\text{A-47})$$

で、 $F(\theta/2\pi, 1)$ と同じになる。さらに、 $f(a,\theta)$ の $p \geq 1$ の部分は、 $\theta = 0$ とすると、フルヴィッツ・ゼータ関数 (Hurwitz Zeta Function or Generalized Zeta Function)、

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}$$

で、 $\zeta(1, -ia)$ と形が同じになる (ただし、これは値を持たないが・・・)。そして、最後に、 $f(a,\theta)$ の $p \geq 0$ の部分は、レルヒ超越関数 (Lerch transcendent)、

$$\Phi(z, s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+a)^s}$$

で、 $\Phi(e^{i\theta}, 1, -ia)$ に対応することがわかる。この最後の関数を使うと、(細かい計算を省略して)、式(A-42) は、

$$\begin{aligned} & \frac{A}{1-A} + \frac{Ae^{\frac{\log A}{\tau}}}{2\pi i} \left[\sum_{p=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{2\pi i}{\tau} p}}{p - \frac{i}{2\pi} \log A} - \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2\pi i}{\tau} p}}{p + \frac{i}{2\pi} \log A} + \frac{1}{\frac{i}{2\pi} \log A} \right) + \frac{1}{\frac{i}{2\pi} \log A} \right] \quad (\text{A-48}) \\ & = \frac{A}{1-A} - \frac{Ae^{\frac{\log A}{\tau}}}{\log A} + \frac{Ae^{\frac{\log A}{\tau}}}{\pi} \operatorname{Im} \left[\Phi \left(e^{\frac{2\pi i}{\tau}}, 1, -i \frac{\log A}{2\pi} \right) \right] \end{aligned}$$

のように閉じた形になることがわかる。とは言え、普通は、式(A-25)の方がわかりやすいであろう。つまり、式(A-48)は、この比較的シンプルな階段関数をわざわざ（あまり見かけないかもしれない）特殊関数で表したものとなっている。なお、Mathematicaでは、このレルヒ超越関数は、フルヴィッツ(Hurwitz)レルヒ(Lerch)の超越関数と呼ばれているようで、式(A-46)の和は、

$$e^{-i\theta}(-\operatorname{HurwitzLerchPhi}[e^{-i\theta}, 1, 1 + ia] + e^{i\theta} \operatorname{HurwitzLerchPhi}[e^{i\theta}, 1, -ia])$$

と与えられる（これを变形すると、式(A-48)を導くことができる）。

式(A-48)のままだと、数値計算には便利であるが、あまり見通しがよくないと思われるので、(A-42)を実数型に書き換えると（細かい計算を省略して）、

$$\frac{A}{1-A} + \frac{Ae^{\frac{\log A}{\tau}}}{\log A} + Ae^{\frac{\log A}{\tau}} \left[\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin\left(n \frac{2\pi t}{\tau}\right) + \frac{\log A}{2\pi} \cos\left(n \frac{2\pi t}{\tau}\right)}{n^2 + \left(\frac{\log A}{2\pi}\right)^2} \right] \quad (\text{A-49})$$

となる。ここで、 $A \approx 1$ の場合を考えると、上式は、

$$\begin{aligned} & \approx \frac{A}{1-A} + \frac{A}{\log A} \left[1 + \frac{\log A}{\tau} t \right] + A \left[\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n \frac{2\pi t}{\tau}\right)}{n} \right] \quad (\text{A-50}) \\ & \approx \left(\frac{1}{1-A} + \frac{1}{\log A} \right) + \frac{t}{\tau} + \left[\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n \frac{2\pi t}{\tau}\right)}{n} \right] \end{aligned}$$

となるが、さらに、 $\log(1-x) = -(x + \frac{x^2}{2} + \dots)$ であることを使うと、

$$\frac{1}{\log A} = \frac{1}{\log(1-(1-A))} = -\frac{1}{(1-A) \left(1 + \frac{1-A}{2}\right)} = -\frac{1}{(1-A) \left(1 - \frac{1-A}{2}\right)}$$

であるので、最初の項は、

$$\frac{1}{1-A} + \frac{1}{\log A} \approx \frac{1}{2}$$

となることがわかる。よって、式(A-50)は $A \rightarrow 1$ で、式(A-44)に一致することがわかる。一般の A に対して、式(A-48)または式(A-49)は、「増大する」階段関数を周波数分解したものであることを示してもよ

いが、むしろ、式(A-48)や式(A-49)が確かに「増大する」階段関数であることを、数値的またはグラフを使って示す方がおもしろいであろう。なお、式(A-49)の \square の中が式(A-44)での「鋸波」に相当するもので、これを加えることで、スムーズな増大関数を階段型の関数に変えているのである。以下、**図 A.19**～**図 A.22** にいくつかの例を示す。ここで、数値計算には式(A-48)を用いている（式(A-49)を用いると時間がかかる）。

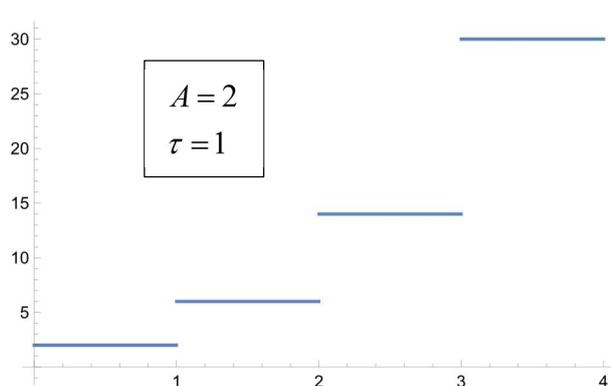


図 A.19

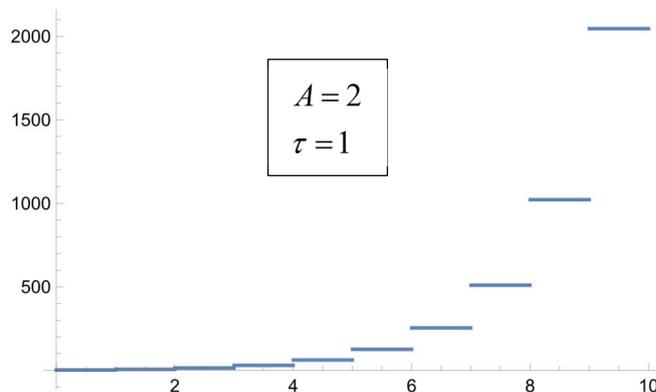


図 A.20

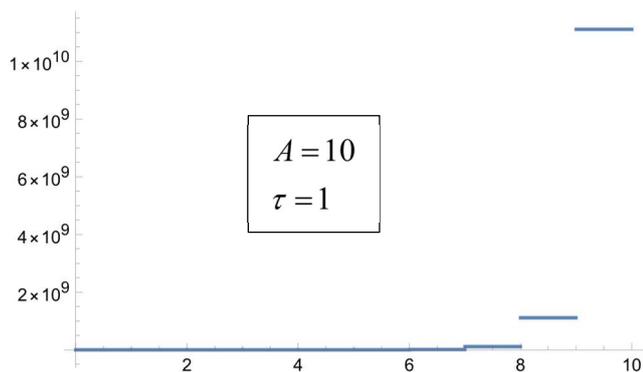


図 A.21

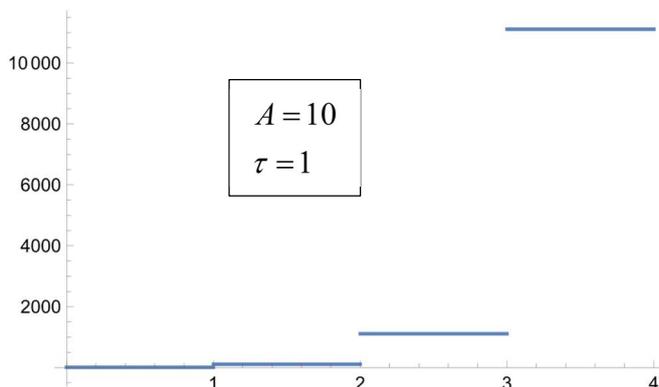


図 A.22

[付記 1] オペアンプの動作の初歩

以下のことは、回路の専門家にとっては、全くの初歩であろうが、これを理解しておくことは、非専門家にとっても有用であろう。理想的なオペアンプの性質、

- ・ゲインは無限大（実際は、Gain > 10⁵⁻⁶）
- ・入力インピーダンスは、無限大
- ・出力インピーダンスは、ゼロ

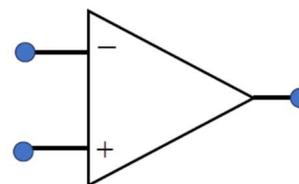


図 A.23

を使うと次のことが言える。

- ・正常な動作範囲では、入力電圧の差は、ゼロである（そうでないとする、ゲインが無限大であるので、出力が動作範囲を超えてしまうので）。

=> 入力部の virtual short (imaginary short) の概念（実際には、抵抗無限大 (open 状態)）

しかし、実際に入力間でショートしているわけではないので、入力電圧の差がゼロになると考えた方がよいかも・・・

- ・出力電圧は、 $V_{out} = G \Delta V_{in} = \infty \times 0$ であるので、オペアンプ単体では、出力電圧は、不定である（現実には、 $G \neq 0$ であるが、第一近似としては、 $G = \infty$ として考えてよいであろう）。よって、出力電圧は、外部条件によって「規定」されることになる。

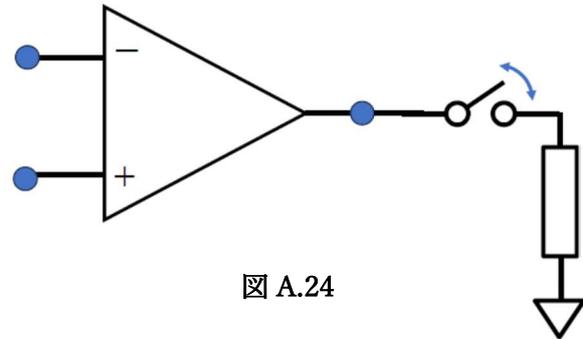


図 A.24

- ・出力インピーダンスはゼロであるので、出力電流の大きさによって、出力電圧は左右されない。例えば、図 A.24 に示すように、出力をとっても、とらなくても出力電圧には影響はない。

=> (一般には使われていないかもしれないが・・・) 出力部の virtual open という概念

が役立つかもしれない。要するに、出力側の負荷等はない (open 状態である) として考えてよい (勿論、出力電圧を決めているフィードバックの負荷等は省略できない)。

以上のように考えると、図 A.25 の場合、ゲインは、簡単に、

$$G = -\frac{R_2}{R_1} \tag{A-51}$$

となることがわかる (反転増幅器)。なお、出力側に回った電流は増幅器に抵抗なく吸い込まれる (また

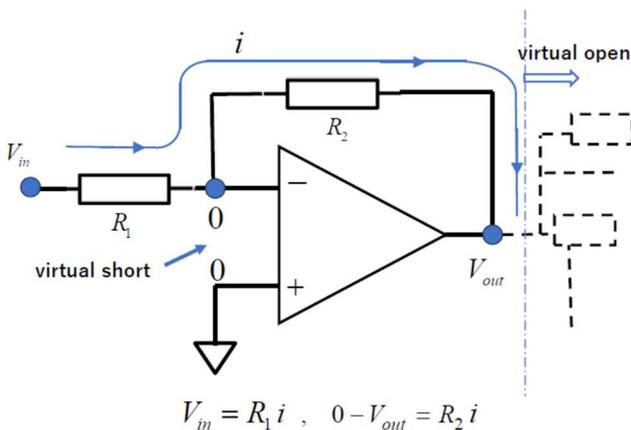


図 A.25

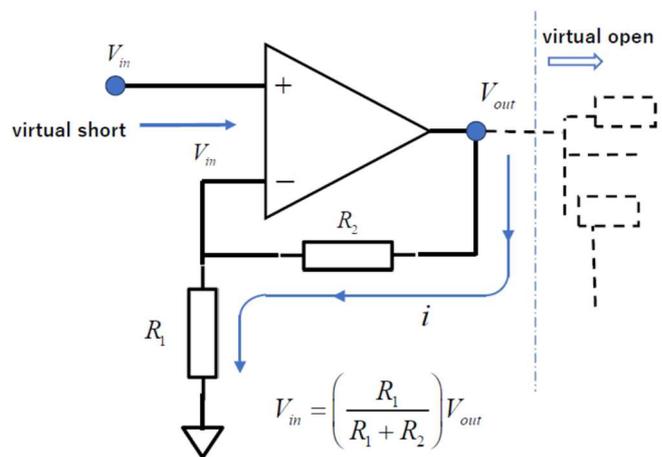


図 A.26

吸い出される) のである (電流は保存されないといけないので)。また、図 A.26 の場合も、ゲインは、

$$G = 1 + \frac{R_2}{R_1} \tag{A-52}$$

となる (非反転増幅器)。さらに、少し複雑な図 A.27 の場合でも、

$$V_{out} = \frac{R_2}{R_1} \Delta V_{in} \quad (\Delta V_{in} = V_{in}^+ - V_{in}^-) \quad (A-53)$$

となることがわかる (差動増幅器)。

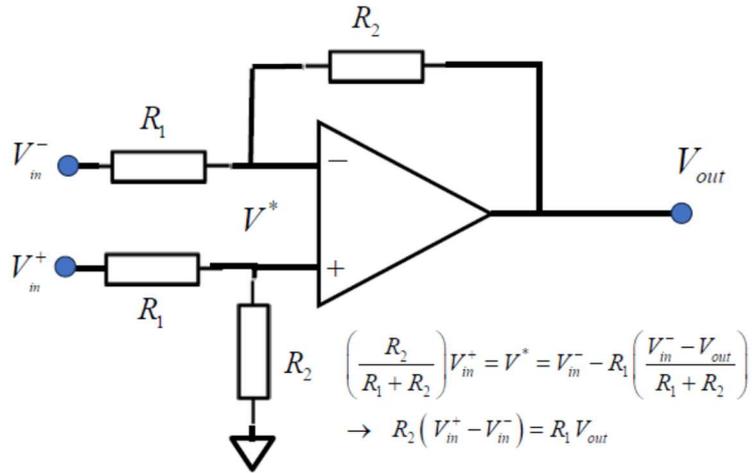


図 A.27

[付記 2] 「鋸波」 のフーリエ展開

図 A.18 のフーリエ展開は、

$$\frac{\pi - \theta}{2} - \frac{\theta}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} \quad (0 < \theta < 2\pi) \quad (A-54)$$

と与えられるが、左辺のフーリエ展開が右辺になるということは、簡単な計算で確かめられる。また、右辺の収束は、ここでは述べないが、例えば Abel の部分和の定理によって保証される。さて、右辺は、明らかに、 $\theta = 2\pi k$ の時、ゼロである ($\theta = \pi k$ でもゼロである)。一方、左辺は (図 A.18 の $\theta = 0$ または $\theta = 2\pi$ で)、 $-\pi/2$ から $\pi/2$ までジャンプしているが、その平均値はゼロとなる (フーリエ級数の定理: 級数の値は、ジャンプしているところでは、元の関数の平均値となる)。なお、 $\theta = \pi$ ではジャンプしていない。

ここでは、初等的、イメージ的な観点から、もう少し、このフーリエ展開について考えてみよう。右辺は、 $\theta = 0$ ではゼロであるが、 $\theta \rightarrow 0+$ で $\pi/2$ になるはずである。 $\theta \approx 0$ であるとする、 $\sin n\theta \sim n\theta$ という近似が成り立つので、

$$\sum \frac{\sin n\theta}{n} \approx \sum \theta \quad (A-55)$$

しかし、 n が大きくなってもこの近似のままだと、たとえ、 $\theta \approx 0$ であっても、 $\sum \theta \rightarrow \infty$ となってしまうであろう。しかしながら、 $n\theta \approx \pi$ 程度 ($n\theta \sim O(1)$) より大きくなると、 \sin の符号は変わる。さらに、符号が変わるまでに積もった、 $\sum \theta$ の値は、せいぜい、 $n\theta \sim 1$ 程度であって、そんなに大きくはならない。よって、式(A-54)の右辺の和は、大きさが 1 程度の交代級数と考えることができる。一方では、この右辺の和を積分の形に変形すると、容易にその値を求めることができるのである。 $\Delta n = 1$ として、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} \Delta n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n\theta} \Delta(n\theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (\text{A-56})$$

となり、 $\theta \rightarrow 0+$ で $\pi/2$ となることがわかる。それでは、同じように式(A-54)の値がゼロとなる、 $\theta = \pi$ の場合はどうであろうか (ジャンプしないのであろうか)。この場合には、例えば、 $\theta = \pi \mp \varepsilon$ とすると、近似的に、式(A-55)は、

$$\sum \frac{\sin n\theta}{n} \approx \pm \varepsilon \mp \varepsilon \pm \varepsilon \dots \quad (\text{A-57})$$

となり、最初から和がほとんどゼロになるのである。よって、ジャンプしないことがわかるのである。

 [蛇足：若干、しつこいコメント]

式(A-57)で n が大きくなると、所詮、後ろの方の項は寄与しないであろうと予測されるが、 $n\varepsilon \sim 1$ 程度になると、 $\sin n(\pi \pm \varepsilon) \sim \pm n\varepsilon$ の近似は使えなくなる。しかし、この場合でも、

$$\begin{aligned} & \dots + \frac{\sin(2N(\pi \mp \varepsilon))}{2N} + \frac{\sin((2N+1)(\pi \mp \varepsilon))}{2N+1} + \dots \\ & = \dots \mp \frac{\sin(2N\varepsilon)}{2N} \pm \frac{\sin((2N+1)\varepsilon)}{2N+1} + \dots \end{aligned} \quad (\text{A-58})$$

となる。ここで、 N が非常に大きいとすると、

$$\frac{\sin((2N+1)\varepsilon)}{2N} \approx \frac{\sin(2N\varepsilon)}{2N} + \frac{\cos(2N\varepsilon)}{2N} \varepsilon + \dots$$

となるが、

$$\frac{\cos(2N\varepsilon)}{2N} \varepsilon = \frac{\cos(2N\varepsilon)}{2N\varepsilon} \varepsilon^2$$

であるので、 N について和は、およそ、

$$\sum_{N=N_c}^{\infty} \frac{\cos(2N\varepsilon)}{2N} \varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{2\varepsilon} \int_c^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx$$

となる。ここで、 $N_c \varepsilon = c \geq 1$ 程度であるので、この右辺の積分は、 $O(1)$ である。よって、式(A-58)において、 $n\varepsilon \sim 1$ 程度以上の n に関する和は、 ε 程度であることがわかる。

 次に式(A-54)の別の求め方をしてみよう (複素関数論ではよく取り上げられている例ではあるが...)。
 まず、

$$-\log(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad (|z| < 1) \quad (\text{A-59})$$

であることに注意しよう。これは、

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}$$

を0からzまで積分すれば簡単に求まるのであった。なお、うるさいことを言えば、 $\log 1 = 0 + 2\pi i 0$ としている。

式(A-59)は、 $|z| < 1$ の制約があるが、 $z = e^{i\theta}$ でも $\theta \neq 0$ ($\theta \neq 2\pi n$)であれば、この展開は有効である(その証明は、例の Abel の部分和の定理をつかえばよい)。よって、

$$-\log(1 - e^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} \quad (\text{A-60})$$

ここで、 $\theta \neq 0$ ($\theta \neq 2\pi n$)としているので、 $0 < \theta < 2\pi$ という制限をおくことにしよう。これと、先の $\log 1 = 0$ とおいたことから、例えば、

$$\log e^{i\theta} = i\theta, \quad \log(-i) = \log e^{-\frac{\pi i}{2}} = -\frac{\pi i}{2}$$

となる。これを使うと、式(A-60)の左辺は、

$$-\log(1 - e^{i\theta}) = -\log(e^{i\theta/2} (-2i \sin \theta / 2)) = -\frac{i\theta}{2} - \log(-i) - \log(2 \sin \theta / 2)$$

となるので、式(A-60)の虚数部と比較すると、式(A-54)が導かれるのである。なお、実数部からは、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n} = \log\left(\frac{1}{2 \sin \theta / 2}\right) = \log\left(\frac{\csc \theta / 2}{2}\right) \quad (\text{A-61})$$

なる公式も導くことができる。

[付記3] もう一度、しつこく、 $A/(1-A)$ について(さらに、 $A/(1+A)$ についても・・・)

この付記は、若干、本文の繰り返しであるが・・・
常識では、または「普通の」級数論では、

$$\frac{A}{1-A} = A + A^2 + A^3 + \dots \quad (|A| < 1) \quad (\text{A-62})$$

であり、 $|A| \geq 1$ では、

$$\frac{A}{1-A} \neq A + A^2 + A^3 + \dots$$

である。一方、本文で述べた Laplace 変換では、分母で、 $A \rightarrow Ae^{-s\tau}$ とするのであった。 s 平面の十分、右側で考えれば、

$$F(s) = \frac{A}{1 - Ae^{-s\tau}} = A(1 + Ae^{-s\tau} + A^2 e^{-2s\tau} + A^3 e^{-3s\tau} + \dots) \quad (\text{A-63})$$

となり、 A の大きさに制限はなくなる。そして、(複素積分に便利のように)これを解析接続すれば、その解析接続された関数は、式(A-63)の第二式で与えられ、

$$F(s) = \frac{A}{1 - Ae^{-s\tau}} \quad (\text{A-64})$$

となるのである (A の大きさに制限はない)。

なお、ここで、 $\tau \rightarrow 0$ や $s=0$ とすると、式(A-64)は、

$$\frac{A}{1-A}$$

となるが、ここで、 s 空間と実時間 (t 空間)をチャンポンにして考えると、頭が混乱し、悩むことになるのである。

さて、話を戻して、逆 Laplace 変換して、実時間に戻るためには、 s 空間の特定の点での $F(s)$ の値ではなく、「ある意味」すべての点での値が必要となるのである。さて、式(A-63)の展開を式(A-40)に代入すると、

$$\frac{A}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{A^n e^{s(t-n\tau)}}{s} ds \quad (\text{A-65})$$

という項が出てくる。ここで、 $t > n\tau$ であれば、左半平面上に半円の境界積分を追加しても、また、 $t < n\tau$ であれば、右半平面上に境界積分を追加しても、境界が無限大に行けば、その境界積分は、ゼロになるという (よく行われる) 処方を施すことで、

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{s(t-n\tau)}}{s} ds = \begin{cases} 1 & (t > n\tau) \\ 1/2 & (t = n\tau) \\ 0 & (t < n\tau) \end{cases} \quad (\text{A-66})$$

となることがわかる。ただし、 $t = n\tau$ の場合は、 $c > 0$ であることに注意して、境界積分の追加なしで、そのまま積分すればよい ($\lim_{Y \rightarrow \infty} (\log(c+iY) - \log(c-iY)) = \pi i$) が、実際上は、この場合の値が議論に影響を与えることはない (0 としてもよいし、 1 としてもよい)。また、細かい点であるが、 $t > n\tau$ の場合の境界積分において、 $\text{Re } s = x \geq 0$ の領域では、

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left| \int_c^0 \frac{e^{s(t-n\tau)}}{s} dx \right| < \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^c \frac{e^{x(t-n\tau)}}{y} dx$$

のような積分が出てくるが、 $x(t-n\tau) < xt$ であることから、上の積分は、

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^c \frac{e^{x(t-n\tau)}}{y} dx < \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y} \left(\frac{e^{ct} - 1}{t} \right) = 0 \quad (t: \text{finite})$$

となり、積分には寄与しないのである。以上から、 $n\tau < t < (n+1)\tau$ の時、式(A-63)の逆 Laplace 変換は、

$$A(1 + A + A^2 + \dots + A^n) = \frac{A(A^{n+1} - 1)}{A - 1} \quad (\text{A-67})$$

となるが、すこし格好良く書くと、式(A-25)になる。これを再掲しておく、

$$A(U(t) + AU(t-\tau) + A^2U(t-2\tau) + \dots) = A \sum_{n=0}^{\infty} A^n U(t-n\tau)$$

である。

一方、「普通の」級数論では、 $|A| > 1$ の場合、

$$\frac{A}{1-A} = -\frac{1}{1-1/A} = -\left(1 + \frac{1}{A} + \frac{1}{A^2} + \frac{1}{A^3} + \dots\right) \quad (|A| > 1) \quad (\text{A-68})$$

となるが、これは、全く正しい式である。そこで、さらに、分母で、 $A \rightarrow Ae^{-s\tau}$ とすると、

$$\frac{A}{1-Ae^{-s\tau}} = -\frac{e^{s\tau}}{1-1/(Ae^{-s\tau})} = -e^{s\tau} \left(1 + \frac{e^{s\tau}}{A} + \frac{e^{2s\tau}}{A^2} + \frac{e^{3s\tau}}{A^3} + \dots\right) \quad (|A|e^{-\text{Re}(s)\tau} > 1) \quad (\text{A-69})$$

となるが、これも全く正しいであろう。しかし、一般に、 $\text{Re}(s) \rightarrow \infty$ となった時に、Laplace 変換はゼロに近づくはずであるが、式(A-69)の各項はそうはなっていない。そういうことにお構いなしに、式(A-69)の右辺の逆 Laplace 変換を「機械的に」遂行すると、式(A-68)に近いもの導かれるように見える（期待される）のである。しかしながら、 $n \rightarrow \infty$ となる時に、上述の「細かい点」で指摘した積分が、今の場合、

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_c^0 \frac{e^{s(t+n\tau)}}{s} dx \right| < \lim_{y \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c \frac{e^{x(t+n\tau)}}{y} dx = ? (\neq 0?)$$

となり、逆 Laplace 変換を「機械的に」遂行するのが破綻するのである（つまり、式(A-68)、(A-69)のような展開は、逆 Laplace 変換を行う場合には、使ってはいけないことがわかる。）

さて、以上のことを、Nyquist plot で考えてみよう。まず、positive feedback の場合、式(A-6)は、

$$y(s) = \frac{G(s)}{1 - G(s)H(s)} x(s) \quad (\text{A-70})$$

となるので、 $G(s)H(s)$ が -1 ではなく、 $+1$ の周り

を回るかどうか安定／不安定の判定条件になる。

今の場合、 $G(s)H(s) = Ae^{-s\tau}$ であるので、

$\omega > 0$ の場合、Nyquist plot は図 A.28 のように、原点の周りを半径、 A でグルグル回ることになる。ここで、 ω が $\Delta\omega = 2\pi/\tau$ 増加するごとに、一周するのである（なお、図 A.17 も参照のこと）。

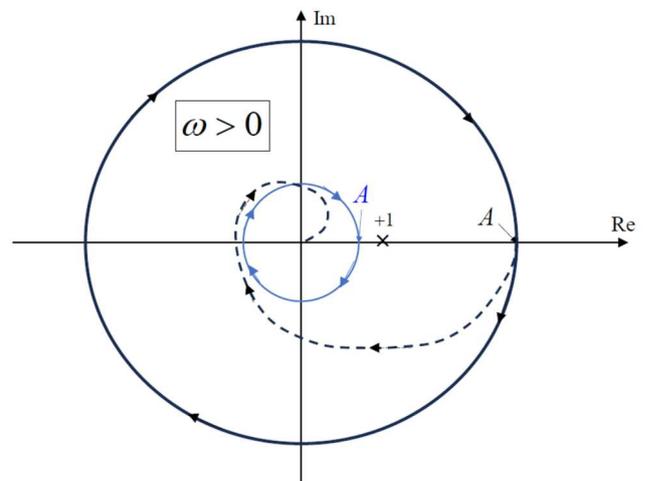


図 A.28

図 A.28 から、直ちに、 $A > 1$ であれば、不安定であり、 $A < 1$ であれば、(positive feedback でも) 安定であることがわかる。さらに、 $A > 1$ で、時間遅れ、 τ が小さく、かつ A に周波数依存性があり、周波数とともに、急激に振幅が減少するような場合であっても (図 A.28 の点線の場合)、不安定であることがわかる ($\omega < 0$ の場合も考えると、明らかに、+1 の周りを回っていることがわかる。) つまり、増幅器の性能が悪くても (周波数特性が悪くても)、DC での特性がよい (つまり増幅率が高い) と不安定になるのである。

 [コメント] positive feedback (増幅率: $A > 1$) の場合の不安定性について

増幅器の増幅率が 1 より大きい positive feedback の場合、図 A.28 からわかるように、回路の周波数応答がどのようなであっても、不安定になるであろうと推測されるのであるが、本当にいつでも不安定になるかどうかは直ちにわからないであろう。何か回路に細工をすることで (周波数応答を変更するなど)、安定にすることができるかもしれない。

しかし、次のように考えることで、このようなことは起きないことがわかる。まず、 s 平面の $\text{Re}(s) > 0$ の領域で、関数、 GH は正則 (holomorphic) であるので (あるとしているので)、当然、この関数は連続であり、かつ実軸上で、実関数である。また、この関数は、 $s = 0$ で $A (> 1)$ であり、 $s = \infty$ で、0 である。よって、(回路に細工をしたとしても)

$0 < s < \infty$ のどこかで必ず値、1 を取るはずである。以上から、 $\text{Re}(s) > 0$ の領域内の少なくともある 1 点では、

$G(s)H(s) - 1 = 0$ となり、回路が不安定になることがわかるのである。

※ 大袈裟に言うと、ここでは、中間値 (intermediate value) の定理を使っていることになるが、普通、中間値の定理は、有界の閉区間について述べられている。しかし、定理の「本質」は、連結性 (connected) であり、連続写像は、連結性を保つことから、区間の条件に「有界」、「閉」は不要となる。また、一次元の連結集合は、何らかの区間である。よって、上の場合でもこの中間値の定理が適用でき、任意の 2 点での関数値の間にある任意の (中間) 値をとるような区間内の点があるはずである。

最後に、比較のために、negative feedback で時間遅れがある場合を考えてみよう。この場合には、Nyquist plot は、図 A.29 のようになることがわかる。この場合でも、増幅器の性能がよいと、 $A > 1$ で発振 (不安定) となり、 $A < 1$ では安定であることがわかる。しかし、今度の場合には、増幅器の周波数特性が「普通」であると、図 A.29 の黒の点線のような可能性があり、この場合には、安定であることがわかる。しかしながら、遅延が大きいと、Nyquist plot は周波数とともに振幅が減少するより速く、 s 平面をグルグル回り、黒の実線に近づくようになり、不安定となる (赤の点線のようになると不安定になる。)

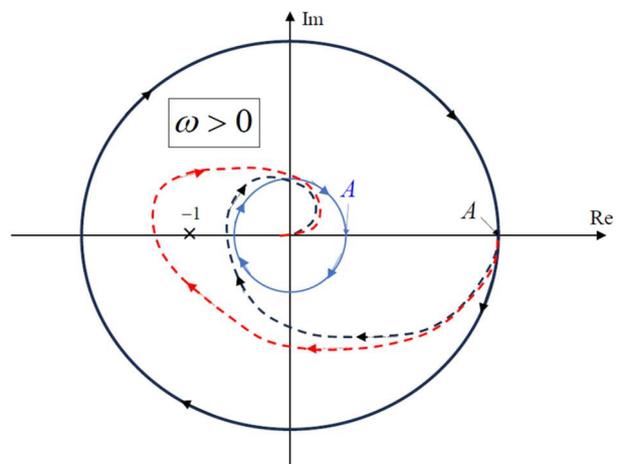


図 A.29

この negative feedback の場合に、positive feedback の対応する式がどうなるか、以下に羅列的に示しておこう。

式(A-25) \Rightarrow

$$\begin{aligned} & A\left(U(t) - AU(t-\tau) + (-A)^2 U(t-2\tau) + \dots\right) \\ &= A \sum_{n=0}^{\infty} (-A)^n U(t-n\tau) \end{aligned} \quad (\text{A-71})$$

式(A-26) \Rightarrow

$$A \sum_{n=0}^{\infty} (-A)^n e^{-ns\tau} / s = \frac{A}{s(1 + Ae^{-s\tau})} \quad (\text{A-72})$$

式(A-41) \Rightarrow

$$s_p = \frac{\log A}{\tau} + \frac{\pi i(2p+1)}{\tau} \quad (\text{A-73})$$

式(A-42) \Rightarrow

$$\frac{A}{1+A} - \frac{Ae^{\frac{\log A}{\tau}t}}{2\pi i} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{\pi i t}{\tau}(2p+1)}}{\left(p + \frac{1}{2}\right) - \frac{i}{2\pi} \log A} \quad (\text{A-74})$$

式(A-48) \Rightarrow

$$\frac{A}{1+A} - \frac{Ae^{\frac{\log A}{\tau}t}}{\pi} \operatorname{Im} \left[e^{\frac{\pi i t}{\tau}} \Phi \left(e^{\frac{2\pi i t}{\tau}}, 1, \frac{1}{2} - i \frac{\log A}{2\pi} \right) \right] \quad (\text{A-75})$$

式(A-67) \Rightarrow

$$A\left(1 - A + (-A)^2 + \dots + (-A)^n\right) = \frac{A\left(1 - (-A)^{n+1}\right)}{1+A} \quad (n\tau < t < (n+1)\tau) \quad (\text{A-76})$$

(これは、式(A-71)とほとんど同じではあるが・・・)

なお、具体的な数値例を挙げると、**図 A.30**、**図 A.31** のようになる（ここでは、式のチェックも兼ねて、式(A-75)を使っている）。

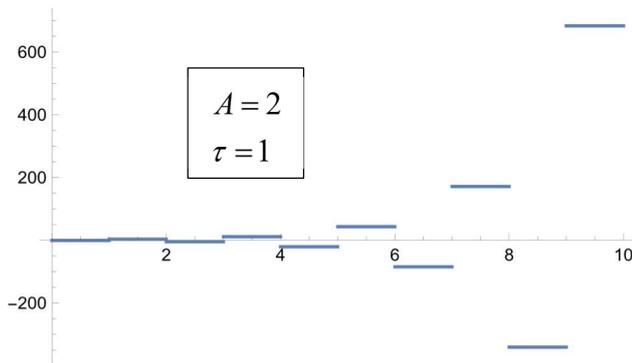


図 A.30

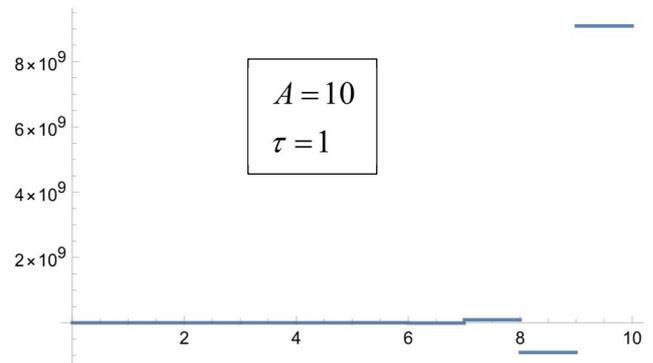


図 A.31

なお、この negative feedback が安定な場合には、 s 平面上のすべての極は左半平面にあり、式(A-73)に相当するものは、実部が負になっているはずである。例外は、入力、 $U(t)$ の Laplace 変換である、 $1/s$ からくる原点の極のみである。この留数は、例えば、式(A-72)から、

$$\frac{A}{1+A} \tag{A-77}$$

であろうことがわかる。また、これは、平衡状態になっていると仮定すれば、(**図 A.3** で、 $H(s)=1$ といった) block diagram から容易に導かれるものであり、(よく使われる) negative feedback の増幅率である (式(A-7)と本質的には同じものである)。

 [コメント] 繰り返しになるが、初歩に戻って・・・

初めから、平衡状態になっているとわかっているのであれば、入力、 $x(t)$ は、ステップ関数、 $U(t)$ ではなく、 $x(t)=1$, $y(t)=y_0=\text{const.}$ ($-\infty < t < \infty$) とすればよいので、(式(A-7)等から) 普通に使われている増幅率、

$$\text{negative feedback: } A(1-y_0)=y_0 \rightarrow y_0 = \frac{A}{1+A}$$

$$\text{positive feedback: } A(1+y_0)=y_0 \rightarrow y_0 = \frac{A}{1-A}$$

が得られるのである (あくまでも平衡状態があるとして・・・)
