回路へのコメント(II)

(II) Faraday の法則(続)

これは、「はじめに(回路)」で述べたように、本ホームページに掲載してある「ベクトル解析」の補遺の中の積分量の時間変化(Faraday の電磁誘導の法則)に追記したものである。

また、この(II)の内容は、以下の通りである。

- (a) (続) への導入部
- (b) 専制独裁国家のおとぎ話
- (c) わら縄のコイル
- (d) 導線のコイル
- (e) 導体内の電荷
- (f) 変動磁場中の導体に抵抗がある場合のファラデーの法則
- (g) 導体が動く場合のファラデーの法則
- (h) 抵抗がゼロになった場合、ファラデーの法則は成り立つか?
- (i) インダクタンス(自己&相互インダクタンス)
- (j) より一般的な場合のファラデーの法則
- (k) トランスの初等的説明
- (1) Maxwell 方程式による Faraday の法則の導出
- (m) キルヒホッフの法則のための基本式

以上に多くの項目を挙げたが、後で(III 以降で)必要となるのは、最後の方の項目、(l)と(m)ぐらいであろう。

- ※ 若干、異なる視点からではあるが、同じような内容が繰り返されている箇所がある。そこで、全体の文書を少し整理しよう思ったが、筆者の体力の関係で止めることした。
- ※ また、本文中で、対数の表記に log と ln が混在して使われているが、これらは同じものである。つまり対数の底は、ともに e である。(これは書いている時の筆者の気分のせいであり、ご了承いただきたい)

(a) (続) への導入部

「ベクトル解析」の補遺で説明したように、Faraday の電磁誘導の法則は、一般に、

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{1}$$

で与えられるが、これが成り立つためには、マックスウェル方程式の二つの式、

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \tag{3}$$

及び、「Lorentz 電場」(※)、

$$\mathbf{E}_{r} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{4}$$

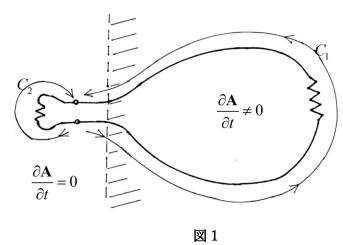
に加えて、導体の存在が必要(不可欠)であることを説明した。

Conductor is indispensable to Faraday's law of induction!

(※)本稿では、あくまでも非相対論立場に立っており、ローレンツ電場は電場の単なる相対論的変換(Lorentz 変換)であるという見方はしていない。本稿では、光速度が有限であることによる電磁波などの伝搬等は取り扱わないので、相対論の必要性はほとんどないであろう。

この最後の導体の存在という条件を考慮しないと間違った結論に導かれることになる(または、途中の議論をごまかして、式(1)を導くことになる)。

ここら辺の状況は、もしかしたら、次の項のおとぎ話が参考になるかもしれない(勿論、童話作家の足元にも及ばない拙い話ではあるが・・)。しかし、その話の前に、Faradayの法則だけではく、回路のKirchhoffの法則でも重要である以下のことについてコメントしておこう。



Maxwell 方程式は全空間で成り立っていると仮定すると、式(3)から、

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{5}$$

と書ける(これは常識と思われるかもしれないが、きちんとした議論は、例えば、「ベクトル解析」を参照されたい。なお、そこでは、ポアンカレの補題に関しては、任意の星形領域(可縮空間)について証明しているが、任意の領域で成り立つということは全領域で成り立つということと同等であることをコメントしておこう)。これから、式(2)は、

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \tag{6}$$

となるが、これも全空間で成り立つとすると、

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \Psi \tag{7}$$

と書ける(例えば、「ベクトル解析」を参照のこと。)ここで、 Ψ とは何であろうか?(その物理的意味は何であろうか? 明らかであると言われるかもしれないが・・・)まず、当然のことながら、

$$\oint \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s} = -\oint \operatorname{grad} \Psi \cdot d\mathbf{s} = -\oint d\Psi = 0$$
 (8)

であるので、図1のような場合、

$$-\Delta \Psi = \int_{C_1} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$
 (9)

となる。よって、磁場がない(\mathbf{A} がない)領域では、 $\Delta \Psi$ は電圧(差)であることがわかる。つまり、(当然であると、言われるかもしれないが) $\mathbf{\Psi}$ は電圧、V であることがわかる。例えば、電磁誘導の影響が大であっても、磁場の影響がほとんどない領域で例えばデジボル等で電圧を計測すれば、その計測値はきちんと「物理的に」意味がある電圧なのである。一方では、それは磁場が存在するような

経路、 C_1 上の電場の積分、

$$\int_{C_{\epsilon}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \tag{10}$$

とは等しくないのである(余分なコメント:もっとも、電磁誘導が大きな場合には、回路素子は本来の働きができなくなり、素子と電場 ${f E}$ との関係も複雑になるであろうが・・)。

※ 以下では、スカラー・ポテンシャル、 Ψ と電圧、 V の両方を「適当に」混在させて使用しているが、混乱することはないであろう。

なお、教科書等では、式(8)のような線積分を導くのに、式(6)を面積分して示す場合が多い(Stokes の定理)。この面積積分と線積分(ループ積分)については、後で(III の Kirchhoff の法則の説明の箇所で)もう一度、取り上げて議論するつもりである。また、式(8)は、Kirchhoff の電圧法則(KVL)、そのものではないが、それとほぼ近い内容を言っているのであるが、これについても後で議論することにする。なお、ベクトル・ポテンシャルの次元であるが、これは、例えば、

$$[\mathbf{E}] = \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] \rightarrow [\mathbf{A}] = \frac{V \cdot \sec}{m}$$

であること、または、

$$[\mathbf{B}] = [\operatorname{rot} \mathbf{A}] \rightarrow [\mathbf{A}] = T \cdot m = \frac{V \cdot \sec}{m^2} \cdot m = \frac{V \cdot \sec}{m}$$

であることなどを思い出せば、わかるのである。

[コメント]

ここで、ついでに、少し単位についてリフレッシュをしておくのも悪くないかもしれない(優れた 記憶力がない場合には、時々、リフレッシュが必要であろう)。 ローレンツ力から、

$$[\mathbf{E}] = [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \rightarrow V / m = m / \sec \cdot T \rightarrow T = V \cdot \sec / m^2 = Wb / m^2$$

ここでは、 $Wb=Weber=V\cdot \sec$ 、または $Tesla=Wb/m^2$ を記憶している必要があるが、これは忘れてしまっても次のように確かめることができる。例えば、磁束(単位はウェーバ:Wb)、 Φ は、

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \rightarrow [\Phi] = \text{Wb} = [\mathbf{B}][d\mathbf{S}] = T \cdot m^2$$

であることから。また、Faradayの法則から、

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} \rightarrow [V] = \frac{[\Phi]}{[t]} \rightarrow V = Wb / \sec \rightarrow Wb = V \cdot \sec$$

また、

$$[\Phi] = [\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}] \rightarrow Wb = T \cdot m^2 = [\mathbf{A}]m \rightarrow [\mathbf{A}] = Wb / m = T \cdot m$$

となり、先の結果と同じになる。

(b) 専制独裁国家のおとぎ話(受刑者の更生治療)

専制独裁国家の特徴とはどのようなものか、(素人的に)考えてみると、

- ・巨大な官僚組織(+監視機構)
- ・強力な軍隊

が挙げられるであろう。また、独裁体制の権威付けのために、

- ・(偉大な) 聖職者
- ・(著名な) 学者、知識人

などからなる体制も整えておくことが望ましいであろう。さらに、大きな施設として、刑務所が必要であろう。この刑務所に収容されている受刑者は、大別すると、

- ・反抗的な知識人、文化人+活動家
- ・反抗的な市民、密告でまたは誤って捕まった庶民(普通の市民)
- ・どんな時代にもいる犯罪者(窃盗、強盗、殺人等を犯した者)

のような感じになるであろうが、とにかく大きな収容能力が必要であろう。

さて、ある時、独裁者が、この独裁者の下で権勢をほしいままにしている最高科学顧問(かつ独裁者の主治医)に、次のような諮問をした。

「最近、受刑者がどんどん増えて、施設の拡充・維持に必要な予算が増えて困っている。なんとかならないか?」

「昔、ある(独裁)国家で、犯罪者を更生するために、電気メスで脳に手術を施すことが行われています。これにより、犯罪者がおとなしくなった(凡庸になった)という報告があります。」

「そうか。では早速、設備を整えて、受刑者全員に対して実施したまえ。予算には糸目はつけない。」「はい、仰せの通り、早速、取りかかります。ただし、電気メスで脳をいじるのは、少々、野蛮に思われますので、MRI のように体にやさしい磁場を利用してみたいと存じます。実際には、電磁誘導の原理を使って変動磁場から誘導電場を誘起させて、脳細胞を刺激するというようなスマートな治療をすることにしたいと存じます。」

「うむ、専門的なことは任せるので、やりたまえ。大先生がおっしゃることなので、間違いないだろう。」

その後、すぐに、最高科学顧問を中心に、科学者、医者、技術者、官僚からなる一大組織が立ち上が り、設備の建設が行われ、大した時間もかけずに、設備が完成した。このことを独裁者は大いに気に 入り、すぐに治療を開始するように厳命したのである。そのため、予備試験もなく、すぐに大々的な 本番が開始される運びとなった。

- ・強靭な犯罪者等は、逃亡を防ぐために、鉄の鎖でぐるぐる巻きにして、そして、何が行われているかを隠すために、鎖と連結した鉄面をかぶせられた。
- ・一方、ひ弱な知識人等(一般市民の受刑者も含む)は、わら縄で巻かれて、白い布をかぶせられた。

これらの患者(非治療者)は、ベルト・コンベアーのようなものの上に座らされ、次々と、治療台に送られるような仕組みになっていた。犯罪者等の受刑者用とひ弱な知識人等の受刑者用の2台の治療台には、それぞれカーテンが降ろされ、当然のことながら、外から見えないようなっていたのであるが、中を覗くと、なにやら人間がすっぽり入るような空間があり、その周りに太い銅パイプが何重にも巻いてあり、鉄枠のようなものも見て取れるのであった。どうやら、これは銅パイプにACの大電流を流して、強力な磁場を発生するものであったようである。

独裁者の臨席の下、ぶっつけ本番の治療が開始された。予備試験も全く行われていないので、治療装置のパラメータの設定値もいい加減で、最高科学顧問の思いつきの数値が権威あるものとして設定された。まずは、数十名の強靭な犯罪者等と同じく数十名のひ弱な知識人等について実施された。治療後、監視人が鉄面と白い布を取り外してみると、強靭な犯罪者等の方は全員が死んで、悲惨な状況を呈していた。一方、ひ弱な知識人等は、全員がぼんやりと目を開けて空を眺めているのであった。よく見ると、強靭な犯罪者等は重度の火傷で、明らかに感電死しているのが確認できたのである。すると、独裁者は、不機嫌に、

「どうなっているのだ!|

「はい、どうも想定外の初期不良のようですので、確認のため、二つの治療装置を入れ替えて、実施してみます。今度は、多分、ひ弱な知識人等が感電死するはずです。」

その結果は、今度も強靭な犯罪者等が全員、感電死したのであった。独裁者、曰く、

「ひ弱な知識人等は、全員、死んでも全くかまわない。生かしているのは、単に、世間の目を気にしているだけだ。しかし、強靭な犯罪者等は、国家にとって必須であり、隣国と争いになった時に、懲罰部隊(犯罪者等からなる肉弾突撃隊+逃亡、退却する者を背後から狙撃する督戦隊)にとってなくてはならないリソースである。貴様は、この重要なリソースに大きな損害を出したのだ!」と言って、さっさとその場を立ち去った。

その後、最高科学顧問の身に何が起こったか(はたまた、感電死したのか)は知る由もないが、歴 史が教えるように、この専制独裁国家は、数十年とは続かなかったようである。

[End of おとぎ話]

以上は、仮想の話であるので、装置の設計やそれが実際に実現可能かどうかなどの検証はしていない。あくまでもおとぎ話であるとご理解いただきたい。

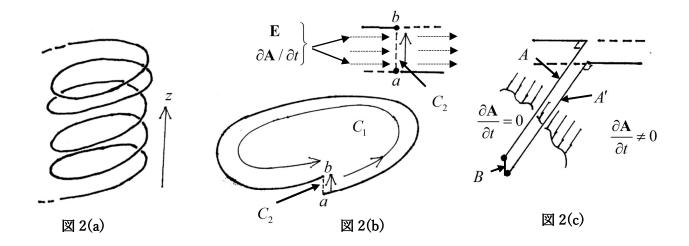
(c) わら縄のコイル

まず、わら縄のコイルが発生する電圧について考えてみよう。わら縄のコイルを「理想化」すると、これは単に仮想的な線を真空中に描いたものと見なすこともできるであろう(図 2(a))。そこで、図 2(b)のように、コイルの一部を取り出して、

$$-\Delta \Psi (a \to b) = \int_{a}^{b} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s}$$

$$= \int_{C_{1}} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_{2}} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s}$$
(11)

を計算してみよう。ここで、Ψ はスカラー関数であり、道筋にはよらないことを使っている。また、



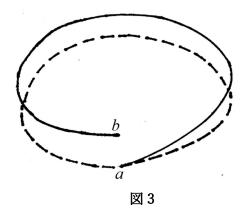
点、a、b は、距離、dz だけ離れている接近した点としよう。すると、 $\mathbf{Z}(\mathbf{b})$ の点線部分(C_2)の積分の被積分の内積は、ベクトルと線素、 $d\mathbf{s}$ が(ほぼ)直交していると考えられるので、無視してよいであろう(下記のコメントも参照)。または、 $\mathbf{Z}(\mathbf{c})$ のように考えてもよい。図のように、場に影響を与えないような「仮想的な」線を場の外側に引き出したとしてみよう。すると、 $\mathbf{E}+\partial\mathbf{A}/\partial t$ は、図の \mathbf{B} 部では、場がないのでゼロとなり、図の \mathbf{A} , \mathbf{A}' 部については、 $(\mathbf{E}+\partial\mathbf{A}/\partial t)\cdot d\mathbf{s}=0$ としてよいこと

から、スカラー関数、 Ψ の増分、 $\Delta\Psi(C_2)$ はゼロとなる(実際には、dzに関して高次のゼロ、

 $\Delta\Psi \sim o(dz)$ になると考えられる)。よって、式(11)から、

 $\Delta \Psi(C_{\scriptscriptstyle 1})$ = 0 となる。これは次のような相当、まわりくどい

議論(グチャグチャした議論)によってもわかる。今、 C_1 を図3の点線のようにa点で水平面に射影したとしよう。そして、この付近では、場はz方向にほぼ一様であるとしよう。すると、電場、Eとベクトル・ポテンシャル、A(実



際に必要なのは、 $\partial \mathbf{A}/\partial t$)の射影による誤差、 $\Delta \mathbf{E}$, $\Delta \mathbf{A}$ は、少なくとも、 $\Delta \mathbf{E}$, $\Delta \mathbf{A} \propto o(dz)$ となるであろう。また、積分路、 C_1 の長さの誤差、 $\Delta \ell \sim dz^2/2\ell$ 程度であろう(これは、

 $\ell+\Delta\ell\sim\sqrt{\ell^2+dz^2}$ 程度であろうことから)。さらに、内積の誤差(角度の誤差)は、 $\theta^2/2\sim (dz/\ell)^2/2$ 程度であろう。以上から、 C_1 とその射影との差は、o(dz) 程度であることがわかる。射影部の積分は周回積分となるので、 C_1 部の積分は、o(dz) 程度の誤差で、次のように評価できる。

$$-\Delta\Psi(C_1) = \oint \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) \cdot d\mathbf{s} = \int \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) \cdot d\mathbf{S}$$
 (12)

明らかに、最後の式の被積分関数は、

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \nabla \times \mathbf{A}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$
 (13)

であり、マックスウェル方程式そのものである。よって、

$$-\Delta\Psi(C_1) = 0 \tag{14}$$

なる。なお、より正確には $(\Delta \Psi \propto o(dz)$ であることから)、

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0 \tag{15}$$

となる。つまり、これは、 $\Psi = \Psi(x,y)$ (より正しくは、 $\Psi = \Psi(x,y,t)$) ということを言っている。

よって、もし、わら縄のコイルの底面で、このスカラー・ポテンシャルが定数 (x,y)に依存しないという意味)であるとすると、コイル全体にわたって定数(空間座標にはよらないという意味)、つまり電圧は一定ということになるのである。もし、スカラー・ポテンシャルが底面で、定数ではない(x,y)に依存した)場合でも、このポテンシャルは磁場なしの電圧で実現できるであろう(ついでに言えば、さらにtに依存しても同様である)。つまり、この場合には、外部から、磁場によるもの以外の(余分な)電圧がかかっていると見なすことができる(重ね合わせの原理)。よって、余分な電圧がない場合には、このスカラー・ポテンシャルは一定としてよいはずであり、磁場(磁場変動)によって新たな電圧は生じていないのである(下記のコメントも参照)。

以上のことから、仮想的な線からなるコイル、またはわら縄のコイルは、電圧を発生しないことがわかる(我々の経験によれば、これは、「常識」であろう。もし、わら縄コイル、または仮想的なコイルで電圧が発生できるとすると、何か、いろいろとおもしろいことができそうではあるが・・・例えば、わらのような絶縁体をグルグル巻けば、電圧が発生できる、極端な場合、仮想的な線を空間に描くと(または頭の中に思い浮かべるだけで)、電圧が発生できるなど・・・)。一方、電場、 \mathbf{E} の線積分は、

$$\int_{a}^{b} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{a}^{b} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$
 (16)

となり、ゼロにはならない。これがベータトロン加速の原理であるが、ここでは、これ以上、述べない (ベータトロン加速を記述している適当な電磁気学または加速器の教科書を参照のこと。)

[コメント]

さらに、次の追加のコメントをしておこう。まず、スカラー・ポテンシャルによる電場を \mathbf{E}' とすると、 $\mathbf{E}' = -\mathrm{grad}\Psi$ であるので、 $\mathrm{rot}\mathbf{E}' = 0$ である。よって、 $\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$ の電場、 \mathbf{E} に \mathbf{E}' を加えても、 $\mathrm{rot}(\mathbf{E} + \mathbf{E}') = -\partial \mathbf{B}/\partial t$ となることに注意。つぎにもう少し具体的な検討をしてみよう。磁場は、 わら縄のコイルの付近では、 z 軸方向(\mathbf{k} 方向)を向いており、また空間的にも z 軸方向に一様であると仮定しよう。また、その他の場、 \mathbf{A} 、 \mathbf{E} もこの付近では、 \mathbf{z} 軸方向に一様であるとしよう。すると、

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}$$
, $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

であることから、直感的に(または経験的に)、

$$\mathbf{A} \perp \mathbf{k}$$
 , $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$

であろうと推測されるのである。本文中での議論は、これに基づいているものであるが、これは本当だろうか? $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}$ を成分で表すと、

$$\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\mathbf{k} = B_3 \mathbf{k}$$

となるが、今、z方向に一様であるとしたので、 $\partial/\partial z = 0$ である。よって、

$$\frac{\partial A_3}{\partial x} = \frac{\partial A_3}{\partial y} = 0$$

となる。これから、 A_3 は、空間的には定数で、 $A_3=f(t)$ となり、磁場、 B_3 とは関係しない関数となる。今、考えている磁場以外に外部から余分なものが与えれないとすると、磁場がない世界では、 A_3 の効果はゼロであるので、f(t)=0 としてよいことがわかる。全く同様にして、 $\cot \mathbf{E}=-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ から、 $E_3=g(t)$ となるが、変動磁場によって誘起される電場は、その磁場がなければ、誘起電場はゼロであるとすると、g(t)=0 となることがわかる。以上から、 $\mathbf{A}\perp\mathbf{k}$, $\mathbf{E}\perp\mathbf{k}$ としてよいことがわかるのである。実は、このような「設定」では、

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial z} = E_3 + \frac{\partial A_3}{\partial t} = g(t) + \dot{f}(t) = 0 + 0 = 0$$

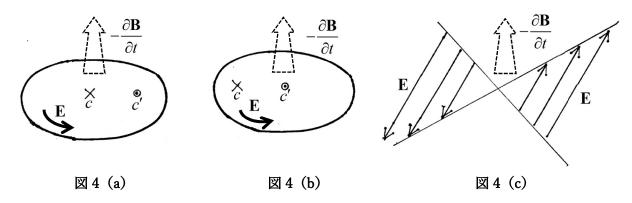
としたことに相当するのである。つまり、 $\Delta \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial z} \Delta z = 0$ としたことになっているのである。一方、一般的な設定では、 $-\partial \Psi/\partial z \neq 0$ としてもおかしくはないのである。しかし、この場合には、外部から磁場、 \mathbf{B} だけでなく、この磁場に直接、関係しない電圧がかかっている状況を考えていることに相当する。もしこの電圧が高電圧であるとすると、上のおとぎ話で、わら縄で縛られた知識人等も感電死や焼死することになり、ストリーが崩れてしまうので、このような状況は想定しないのである。

「追加のコメント (わき道かも・・)]

本文および上記のコメントからは若干、外れるが・・・・

(1) 磁場、 \mathbf{B} を与えても、 $\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ だけからは、電場、 \mathbf{E} は決定できない。

このことは、ほとんど、上のコメントの最初に述べたことの繰り返しであるが・・・。これは、磁場、 \mathbf{B} がわかっていても、 $\mathrm{rot}\mathbf{A} = \mathbf{B}$ だけから、ベクトル・ポテンシャル、 \mathbf{A} が決まらないのと同じである。逆に、 $\mathrm{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0}$ を満たす電場を適当に加えても、磁場、 \mathbf{B} の値は変わらないのである。例えば、点電荷を加えても、磁場は変わらないし、電圧によって発生する電場を加えても磁場は変わらない(ただし、うるさいことを言えば、 $\partial \mathbf{D}/\partial t$ によって磁場、 \mathbf{H} が発生するのであるが、今は考えない、または無視するすることにするのである。)



このため、今、磁場(の時間変動)が空間的に一様であるとすると、**図 4** にある電場の模様のどれも、同じ磁場、 $-\partial \mathbf{B}/\partial t$ を与えることができる。ある円を描いて、その円周上で、円周方向に一定の電場がかかるようにしたいとすると、その円は、**図 4** の(a)なのか、(b)なのか悩むことになるだろう(**図 4** の(c)のような場合も考えると、さらに、悩むことになるかも・・・。)そして、磁場が完全に一様であると仮定すると、この悩みは解決できないであろう。これを解決する方法は、磁場(の時間変動)が空間的に一様であることはないと「宣言」する、または境界条件を課すことであろう。しかしながら、実際上は、空間的に一様であるような状況を作ることは不可能であるから、このような宣言はしてもしなくてもよいかもしれないが・・・。

多くの場合、我々が想定する磁場は、電流(や磁石)によって作り出されるものであるから、その磁場は、局所的には、ほぼ一様であっても、大局的には、(ほぼ)軸対称であったりして、「中心」に相当するものがあるのである。よって、この中心に円の中心を重ねて、考えれば、悩まなくてもよいのである。

(2) 磁場変動が時間に比例する場合

この場合には、 $-\partial \mathbf{B}/\partial t = \mathbf{C} = \mathrm{const.}$ となるので、 $\mathrm{rot}\mathbf{E} = \mathbf{C}$ となり、電場は時間に依らない、つまり DC 的(人によっては、感覚的に不思議な感じがするかも・・)になるのであるが、静電場と異なり、 $\mathrm{rot}\mathbf{E} \neq \mathbf{0}$ である。例えば、加速器の一種であるシンクロトロンでは、多くの場合、加速は時間に比例するので、電磁石の磁場も時間に(ほぼ)比例する。よって、磁場を作る電磁石の電流も時間に比例して増えることになる。電磁石は、回路的にはインダクタンスであるので、電磁石電源の出力電圧は、回路の抵抗分を無視して考えると、加速している間、

$$V = L \frac{dI}{dt} = \text{const.}$$

となり、一定値になる(今は抵抗による電圧分は無視していることに注意)。また、減速している時は、 逆に負の一定の電圧が出力端にかかることになる。よって、シンクロトロンの電磁石の電流パターン が三角波的であるとすると、電圧は、矩形波的になるのである(三角波の微分形になる)。

このことは、サイン波的な波形に慣れ親しんでいる方には、ある種の驚きかもしれない。

(d) 導線のコイル

まず、コイル部に抵抗がない場合を考えよう(「ベクトル解析」の補遺の Faraday の電磁誘導の法則でも説明)。項目(c)では、相当、グチャグチャと説明したので、ここでは、できるだけ簡潔な説明としよう。今の場合、コイル内では、 $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ であり、 \mathbf{Z} **2(b)**の \mathbf{C} , では、 $\partial \mathbf{A}/\partial t \perp d\mathbf{s}$ としてよいので、

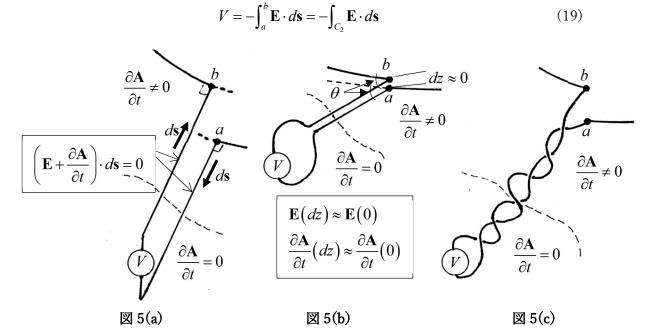
$$\int_{C_{1}} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_{1}} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} = \int \nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\int_{C_{2}} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_{2}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$
(17)

となる。また、(繰返しになるが)、

$$0 = \oint = \int_{C_1} - \int_{C_2} \rightarrow \int_{C_1} = \int_{C_2}$$
 (18)

であり、今、**図5**のいずれかの図にあるように線を引き出して、電圧を測るとすると、いずれの場合も 線の影響は無視できるので、



となる。これから、「通常の」Faraday の法則、

$$V = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d\Phi}{dt}$$
 (20)

が導かれる。なお、ここでは、導体は抵抗がないとしたので、導体内では、 $\mathbf{E}=\mathbf{0}$ としたのであるが、この導体の存在によって、 $\partial \mathbf{A}/\partial t$ も当然、影響を受けるはずなので、式(17)、の導出はおかしいと思

われるであろう。しかし、**A**への影響は電流で作られると考えることができるので、コイルに流れる電流が大きくないとすれば、つまりこの電流による**A**への寄与は少ない。よって、上の導出は正当化されるであろう(以下のコメントも参照のこと。なお、電流による寄与が必ずしも小さくないと見なせる場合については後述する。さらに、導体内の渦電流による**A**への影響については、**(m)**項の「さらなる余分なコメント」を参照のこと)。

また、項目(c)の中のコメントでも述べたように、電場をうまく変更するのであれば(rotE=0の範囲で)、磁場には電場変更の影響はないのである。E に適当な $grad\phi$ を加えれば(実効的には電圧を加えれば)、少なくとも、コイルのある点での電場をゼロにすることができるのである。よって、いろいろと頭を絞って工夫すれば、コイル内部のすべての点で電場を、(ほぼ)磁場に影響を与えることなく、キャンセルできるであろう。しかし、実際上は、頭を絞る必要は全くないのである。どうすればよいかと言えば、コイルを抵抗のない導体とすれば、導体内では電場が勝手にゼロになるのである。そうなるように、電圧が自然に発生するのである(教訓?:いたずらに頭を絞ることはせずに、自然に委ねるのが自然でかつベストである)。

なお、「ベクトル解析」の補遺の Faraday の電磁誘導の法則の説明では、上とは若干、異なる仕方で説明している。そこでは、ベクトル・ポテンシャル、 $\mathbf A$ ではなく、磁場、 $\mathbf B$ を使って説明している。

[コメント(復習)]

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$
 , $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ (準静的かつ $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ の時) $\Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{j}$

Coulomb ゲージ、 $\operatorname{div} \mathbf{A} = \mathbf{0}$ [復習 a を参照] を採用すると、 $\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$ となる。よって、導体があっても電流が流れない、または流れていても、それが大きくない場合には、その \mathbf{A} への影響は無視してもよいことがわかる。そして、静電場のポアソン方程式、 $\Delta \Psi = -\rho/\varepsilon_0$ との類推から、このCoulomb ゲージでのベクトル・ポテンシャルは、

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}}{r} dV$$

という形に求まるのであった($r=|\mathbf{r}-\mathbf{r'}|$)。ここで、また単位の復習をすると、 \mathbf{A} の次元は、

$$[\mathbf{A}] = [\mu_0][j \, dS \, d\ell \, / \, r] = [\mu_0][I] = H \, / \, m \cdot A = \Omega \cdot \sec/m \cdot A = V \cdot \sec/m = T \cdot m$$

となり、以前に得られたものと同じになる。ここでは、 $\left[\mu_0\right]=H/m$, $H=\Omega\cdot\sec$ を覚えている必要がある(または導く必要があるが、導出は簡単である)。上から、 $H\cdot A=T\cdot m^2$ であるが、これは、 $H\cdot A=\left[LI\right]=\left[\Phi\right]=\left[BS\right]=T\cdot m^2$ からも得られる。

[復習 a] 前提として、全空間で Maxwell 方程式が成り立っているとするのである「超簡単!ベクトル解析」を参照のこと)。この前提のもとでは、一般に、ベクトル、 **A** は、

$\mathbf{A} = \operatorname{grad} \phi + \operatorname{rot} \mathbf{\Pi}$

と分解される **[復習 b** を参照]。ここで、 ϕ は、 $\operatorname{div} \mathbf{A} = \Delta \phi$ という方程式を満たす。一方、どんな ϕ を持ってきても、 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ には影響しないので、 $\mathbf{A} - \operatorname{grad} \phi \to \mathbf{A}$ とすれば、

$$\mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{\Pi}$$

となる(とすることができる)。これから、 $\operatorname{div} \mathbf{A} = \mathbf{0}$ となる(とすることができる)。

[復習 b] ほとんど同じ議論の繰り返しになってしまうが、 $\operatorname{div} \mathbf{A} = \Delta \phi$ を満たす ϕ を使って、 $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \operatorname{grad} \phi$ を作ると、 $\operatorname{div} \mathbf{C} = \mathbf{0}$ となるので、 $\mathbf{C} = \operatorname{rot} \mathbf{\Pi}$ と書けるのである(と書いてもよい)。よって、 $\mathbf{A} = \operatorname{grad} \phi + \operatorname{rot} \mathbf{\Pi}$ と分解できる。

(e) 導体内の電荷

次の項で、コイルに抵抗がある場合のファラデーの法則を考えるのであるが、その前に、若干、わき道に逸れて、導体内の電荷について確認しておくのは悪くないであろう。(上のコメントにある)準静的なアンペールの法則、 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ (または、 $\operatorname{div} \mathbf{A} = \mathbf{0} \ \ge \Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$)を使って、

$$\operatorname{div} \mathbf{i} = 0 \tag{21}$$

という電流保存則が導かれる。この電流保存則は、正確に言えば、「物理法則」でない(時間変動がある場合には必ずしも成り立っていないので・・)。これに対応する「物理法則」は、電荷保存則であり、よく知られているように、

$$\operatorname{div}\mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{22}$$

である。しかし、式(21)の電流保存則は、キルヒホッフの第一法則(電流法則)、KCL(Kirchhoff's current law)の微分形である。これについては、キルヒホッフ方程式を取り扱う際に、再度、議論するが、物理法則の電荷保存則を「電流保存則」のような形に書き表すには、

$$\mathbf{J} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{23}$$

と定義すればよい。これにより、

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0 \tag{24}$$

と書き表すことができる。ここで、小文字の式(23)の**j**は、自由電荷による電流である。実は、式(24)をキルヒホッフの第一法則に相当するものであると解釈すると、(若干、大袈裟であるが)このキルヒホッフの第一法則が「物理法則になる」と言ってもよいかもしれない。

さて、よく知られているように、導体中には、自由電荷は存在しない、たとえ存在したとしても、 すぐに消滅してしまうというのが、物理の「常識」である。以下に、これをもう一度、復習しておこ

う。使う式は、式(22)とオームの法則、 $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$ 及びガウスの法則、 $\mathrm{div}\mathbf{E}=\rho/\varepsilon_0$ だけである(導体の比誘電率は 1 としている)。これらから、

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{25}$$

となり、

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t\right) \tag{26}$$

と求まる。よって、特徴的な時間スケールは、(notation が混乱していてよくないが・・)

$$\tau = \varepsilon_0 \rho \qquad \left(\rho = 1/\sigma\right) \tag{27}$$

で与えれる(ここで、式(27)の ρ は電気抵抗率 [Ω ·m] である)。この時間スケールは、よく知られているように、物質によって非常に大きく異なる。いくつかの例をあげると、表 1 のようになる。銅や鉄の場合、時間スケールは極端に短い。多分、こんな短い時間スケールでは、そもそもオームの法則が成り立つかどうか、そもそも物質がこんなに素早く応答するかどうか、かなりあやしいであろう。また、PET やテフロンの場合、時間スケールは、それぞれ、280 年、約 3 万年~300 万年となるが、多分、これを直接、確かめた人はいないであろう。また、電荷の減衰を電流で測定するとすると、電荷がディスクリートな素電荷でできていることが目立つようになるかもしれない。

表 1	雷	気抵抗率	上	電荷消滅	の時間:	スケー	ル
1	• •	~ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \	_		*ノロリ ロリ /	••/	, •

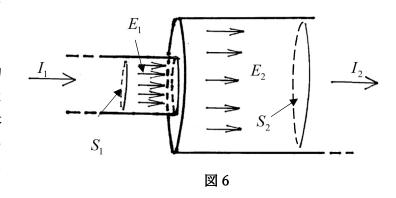
材質	電気抵抗率 [Ω·m]	時間スケール [sec]
銅	1.69×10^{-8}	1.50×10^{-19}
鉄	1.00×10^{-7}	8.85×10 ⁻¹⁹
炭素	1.64×10^{-5}	1.45×10^{-16}
純水	2.50×10^{5}	2.21×10 ⁻⁶
(乾燥)木材	$10^{10} \sim 10^{13}$	0.89~88.5
ガラス	$10^{10} \sim 10^{14}$	0.89~885
PET	10^{21}	8.85×10^{9}
PTFE (teflon)	$10^{23} \sim 10^{25}$	$8.85 \times 10^{11} \sim 8.85 \times 10^{13}$

- **※** 真空中の誘電率、 $\varepsilon_0 \left(=1/\mu_0 c^2\right) = 8.85 \times 10^{-12} \,\mathrm{F/m}$ とした。
- ※ 誘電体の場合、実際の時間スケールは異なるであろう。よって、上表は、あくまでも目安である。 [引用文献]
- 1) https://ja.wikipedia.org/wiki/%E9%9B%BB%E6%B0%97%E6%8A%B5%E6%8A%97%E7%8E% 87%E3%81%AE%E6%AF%94%E8%BC%83
- 2) https://en.wikipedia.org/wiki/Electrical_resistivity_and_conductivity

以上、「物理的常識」を復習したことになるのであるが、上記の結果は、ほぼ電荷は導体中には存在しないと思ってもよいということを言っているだけであって、当然、電流は存在してもよいし、電場も存在してもよいのである(もっとも電流が存在しない静的な場合には、電場もゼロとなるのであるが・・・)。この初等的な事実、導体中に(マクロな)電荷はなくても電流は流れるということは、ややもすると忘れがちな重要な事実かもしれない(もしかすると、荷電粒子の加速を専門とする加速器屋は忘れる傾向にあるかも・・)。つまり、電気的な「中性体」でも電流は流れるのである。このことが可能なのは、電気にはプラスとマイナスの2種類があるからであり、例えば、プラスとマイナスが

ない質量の場合にはそうはいかないであ ろう。

実は、この「電荷は導体中には(ほぼ)存在しない」ということは、一般的には正しくないのである。導体表面では電荷が存在するのと同様に、異種の導体の境界面であれば、電荷は存在し得るのである。それは、式(21)から直ちにわかる。境界面(図6のような段差はないとする)では、電流保存則から、



$$\sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2 \tag{28}$$

である(ここで、E は、境界面に垂直な電場成分であり、添え字 1,2 は異種の導体を示す)。よって、 ${
m div}{f E}$ = $ho/arepsilon_0$ を使うと、

$$E_2 - E_1 = \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) E_2 = \frac{\sigma_s}{\varepsilon} \rightarrow \left(\frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_1}\right) j = \frac{\sigma_s}{\varepsilon}$$
 (29)

となる(ここでも、notation が混乱しているが、 σ_{s} は境界面の表面電荷密度である)。例えば、

 $\sigma_1 \rightarrow \infty$ とすると、

$$E_1 = 0 , \quad E_2 = \frac{\sigma_s}{\varepsilon} \tag{30}$$

となる。

以下では、導体が一様(伝導率が一定)な場合には、たちまち、導体内の電荷は追い出されてしまい、この一様な導体内には、電荷は存在しないということを前提にしよう。よって、導体であれば、その中には電荷はないという仮定をおくことにしよう。ただし、異種の導体の境界面は除くのである。さて、一様な導体でも、断面積を変化させれば、電流を流すことで、変化した個所に電荷を貯めることができそうな気がするかもしれないが、実は、このようなことは上で述べたことにより、一様な導体では棄却されるのである。これは簡単なモデルでも直接、確かめることができる。図6から、

$$I_1 = I_2 \rightarrow j_1 S_1 = j_2 S_2 \rightarrow \rho E_1 S_1 = \rho E_2 S_2$$

となり、 $E_1 \neq E_2$ となるので、電荷を貯められそうな気になるが、 $\operatorname{div}(\varepsilon_0 \mathbf{E}) = \rho$ から、

$$Q = E_2 S_2 - E_1 S_1 = 0$$

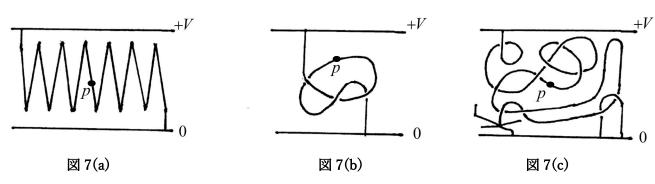
となり、断面積が変化した場所でも電荷はゼロとなるのである(当然の結果であろうが・・)。

もう一点、(指摘するまでもなく、明らかではあるが・・・) 導体の特徴を挙げておこう。太さが同じの長い導体の両端に電圧をかけ、電流をながすという非常に単純な場合を考えてみよう。仮に両端の間に導体がないと仮定すると、電場は空間に広がり、一様ではないであろう。しかし、導体がある

と、導体に沿って、単位長さあたりの電圧差は一定、つまり電場の強さも一定で、導体全体で一様な 電場が分布していることになる。つまり、導体があると、その中の電場は広がらず、導体中にトラップされているように見えるのである。

さらに、この長い導体(導線)を適当に曲げても、(極端な場合、グチャグチャに)丸めても、導体内の電場はほとんど導線の方向に沿っている(沿うように方向を変える)ということである。それは、導線が曲がろうが、丸められようが、流れる電流は一定であり、オームの法則に従って、電流(密度)ベクトルは、 $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ となるからである。つまり、電場は、導線の方向に向きを変えるのである。導線の断面積が変化しなければ、電場の強さは変わらない。導線の断面積が変わっても、(その変化が急峻でなければ)電場の方向は概略、導線の方向であると考えてよいであろう。電気を利用するのが非常に便利であり、世の中で広く使われているのは、この極めて単純な事実のおかげであると言ってもよいかもしれない。

[わき道 (Digression)]



これは、おとぎの国にある大学での話である。**図7**のような問題(各点の電圧は?流れる電流は?)を物理学科の若干、頭の固い(オームの法則を小ばかにしている)学生と電気学科の不勉強な(オームの法則しか知らない)学生に提示したとしてみよう。すると、あくまでも想像ではあるが、学生の答えは、次のようなものであるであるだろう。

・物理学科の学生の回答

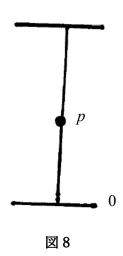
- (c)の問題はいたずらに複雑である。よって、これは、物理の問題ではないので、考えない。
- (b) の問題は、導線が捻じれてているだけでなく、結び(knot)が存在する。もしかしたら、 高度な数学を必要とするかもしれないので、少し数学を勉強してから、問題を解くことにし よう。
- (a) の問題は、導線の構造が周期的であることを使えば、解けるのでないか。しかし、問題が 簡単なので、計算機に問題を入力した方がよいかもしれない(解析的手法では、労多く、精 度も悪いであろう。)

・電気学科の学生の回答

三つの問題とも、オームの法則を使えば、簡単で、結局、図8を考えるのと同じである。よって、図7、8のp点での電圧は、非常に簡単な計算で求めることができる。

明らかに、普通は(おとぎの国ではなくても)、電気学科の学生の回答で OK である。この学生は、オームの法則があれば(多分、その拡張である、

V=ZIだけあれば)、大抵は OK で、あまり勉強しないでも大学生活は OK と思っているのかもしれない。一方、物理学科の学生の回答は、回答にもなっていない。しかし、伝導率が下がって、極端な場合、ゼロに近くづいた場合にも、電気学科の学生の回答が適用できるかというと、全く \times であろう(電圧分布は、「導体」がないとした場合と同じになり、空間で一様になる)。では、伝導率が高くも低くもない中間の場合にどうなるかという問題は、多分、結構難し

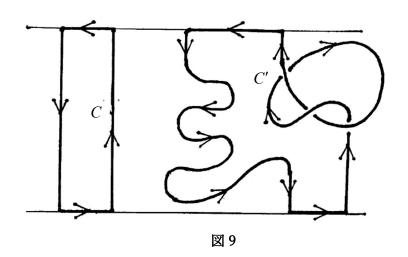


い物理の問題(?)かもしれない(そしてこの種の問題は、多分、「頭の固くない」物理学科の学生の方が電気学科の学生より得意であろう)。

さて、我々は、以下では、不勉強な学生に倣って、導線の空間配置は問わないで、導線に沿って物理量がどうなるかを考えることにしようというわけである(極論すれば、回路では、空間の「物理」配置については「ほとんど」問わないのである)。なお、 \mathbf{Z} 9の経路、 \mathbf{C} 0 に沿った積分は、当然のことであるが、

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \oint_C E \, ds = 0 \quad , \quad \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \oint_C E \, ds = 0 \tag{31}$$

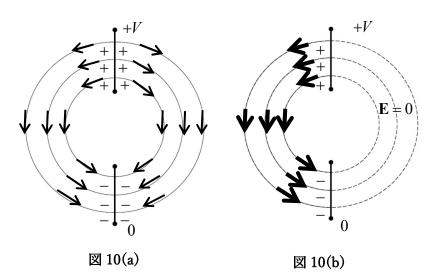
であることを再度、注意しておこう(これは、 $\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\Phi$ であることから)。



(f) 変動磁場中の導体に抵抗がある場合のファラデーの法則

(f-1) この導体 (コイル部) の抵抗がゼロの場合

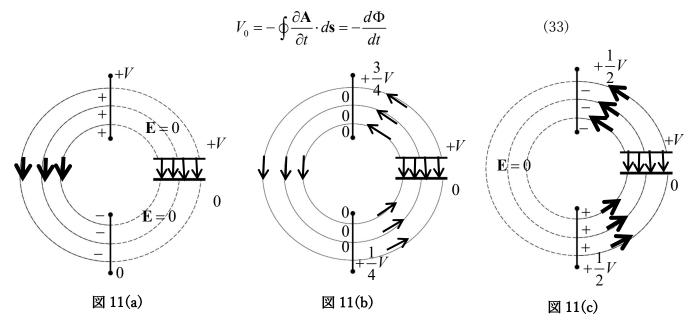
これについては、ベクトル解析の補遺の「Faradayの電磁誘導の法則」で説明しているが、再度、これをポンチ絵的(むしろ、マンガチックに?)に電荷を使って説明を試みてみよう(コンデンサに電荷の話ならわかるが、インダクタンスに電荷とは何事かと叱られそうであるが・・・)。以下では、話を単純にするために、導体の断面積は同じで、かつコイル部の長さ

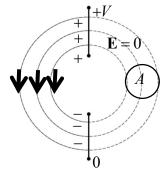


と導体部の長さも同じであると仮定しよう。まず、図 10 のような定常的な状況を考えてみよう。図の(b)のポンチ絵は、コンデンサを引き延ばしたようなマンガである(ただし、導体の断面内では電場は一定として、真空中の静電場のように広がらないとしている)。すると、直感的に、対称的な(a) は実現可能であるが、(b) は怪しいことがわかる。実際、一周の電場の積分がキャンセルするのは、(a) であり、(b) はゼロにはならない。よって、(b) は実現不可能である。次に、図 11 のポンチ絵を見てみよう。ここで、電場がゼロの領域は、完全導体または伝導率が非常に大きい導体としている。図 11 の(a)、(b)、(c) とも一周の電場積分はゼロあり、(マンガ的には)実現可能な図である。ここでは、電源は、コンデンサで模擬してある。(b) は導体の伝導率が一様であるので、当然、(上下の)点線部の表面電荷はゼロであるが、おもしろいのは、(c) の「高圧側(電源の正側)」に負の表面電荷があるという点である。なお、電源を電圧源から電流源に変更してみても、状況は同じである(参考のために図 11 の(a) に電源を電流源としたものを示す)。さて、図 11 の電源を OFF して、その代わりに、右半分に磁場変動、 $\partial B/\partial t$ を加えてみよう。すると、図 11 の(d)、(e)、(f) となり、(a)、(b)、(c)にほとんど似た振る舞いを示す。しかし、どれも一周の電場積分はゼロにはならない。今の場合、一周積分でゼロになるものは、式(8) などからわかるように、

$$-\oint \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) \cdot d\mathbf{s} = 0 \tag{32}$$

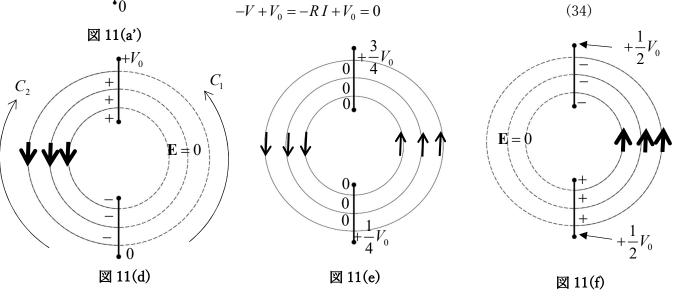
である。そこで、電圧が、





で与えられると考えると(それによって、図11の(a)、(b)、(c)のように電源による電場が発生しているものと想定すると)、一周の「電場」積分がゼロになる。

図 11 の(d) が、この項(f-1)の表題の場合であり、図の左側の部分の電圧を、Vとすると(この電圧は、抵抗に電流が流れることによって生じるとすると)、式(32)は、



となり、

$$I = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} \tag{35}$$

という Faraday の法則が得られることになる。しかし、ここでも、以前と同じような疑問が生じるであろう。それは、導体がない時に、

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{36}$$

によって与えられる電場、**E** は、導体があることによって、ゼロになるとしていることである。さらに、磁場は、(取りあえず) 導体によって変化しないとしているのである。こんな乱暴なことが許されるのであろうか。以下、同じような議論の繰り返しになってしまうが、この点は重要なことであると思われるので、繰り返し説明することにしよう。

適当に取ったループについて、Maxwell 方程式が要請しているのは、式(8)や式(32)である。そして、今の場合(図 11 の(d))では、

$$-\oint \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) \cdot d\mathbf{s} = + \int_{C_2} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{s} - \int_{C_1} \left(\mathbf{E}_2 + \frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial t}\right) \cdot d\mathbf{s} = 0$$
 (37)

となり、 $\mathbf{E}_2 = \mathbf{0}$ である。ここで、 \mathbf{E} や \mathbf{A} は、物理的にきちんと与えられたもので、 \mathbf{E} は、オームの法

則で決められているとしている。よって、ループに沿った積分も物理的に意味がある。つまり、導体の導入によって、以前の場(今の場合、電場のみ)は大きく変化するであろうが、そのループ上の積分に用いる \mathbf{E} や \mathbf{A} について、式(37)は成り立つとしてよいであろう。逆に言えば、ループ上の \mathbf{E} や \mathbf{A}

が別途、物理的にきちんと求まるのであれば、Maxwell 方程式を用いて空間の中の場をきちんと解く必要はないであろう。これは、先に挙げた(複雑な配置の)導線に電圧を加えた場合と同じである(このときは、空間の電場を解く必要はなかった。さらに、近くに他の導線を加えたり、それを変更したりしても、付け加えた導線内部や周辺の電場は大きく変化するかもしれないが、対象としている導線内の電場にはほとんど影響がないであろう)。

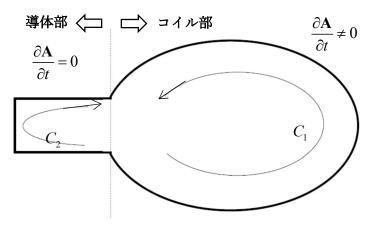


図 12

(f-2)コイル部に抵抗がある場合 (図 12) (コイル部に抵抗がない場合も含む)

この場合には、コイル部中にある程度、電場がないと電流が流せない(オームの法則、 $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$)。よって、上記の $(\mathbf{f}-\mathbf{1})$ のように誘起された電場を完全にキャンセルしないで、「少し」残さないといけないのである。しかし、以下では(我々のあまり鋭くない(?))物理的直感に頼らず、数式で話を進めることにしよう。式(9)から(図 12 も参照)、

$$-\int_{C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{C_1} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s}$$
 (38)

である。左辺は、導体部に関する積分であり、明らかに、

$$V_2 = -\int_{C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \tag{39}$$

である。右辺の第一項は、「少し」残っている電場による電圧であり、

$$v_1 = \int_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \tag{40}$$

とおく(これは、単位は電圧であるが、コイル部にかかる電圧ではない。コイル部の電圧は、式(38) の右辺全体である。)

なお、式(39)の \mathbf{E} と $d\mathbf{s}$ は逆向きであるが、先に注意したように、導体内では、電場は、導線の方向に揃っていると考えてよいので、

$$V_2 = \int_{C_2} E \, ds \tag{41}$$

となる。一方、式(40)の場合は、 \mathbf{E} と $d\mathbf{s}$ は同じ向きに揃っているので、値は正であり、

$$v_1 = \int_{C_1} E \, ds \tag{42}$$

である。

また、式(38)の右辺の第二項の積分は、丁寧に書くと、

$$\int_{C_1} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} + \int_{-C_2} 0 \cdot d\mathbf{s} = \oint \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

$$= \frac{d}{dt} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \frac{d}{dt} \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$
(43)

となり、これから、コイル部の誘導起電力が、

$$V_0 = -\int_{C_1} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d\Phi}{dt}$$
 (44)

となる。なお、今は、コイルは「機械的に」動かないとしているので、時間に関する微分は、上式のようになる。以上から、

$$V_2 = V_0 - v_1 \tag{45}$$

となるが、電流保存から、

$$V_2 = R_2 I$$
 , $v_1 = R_1 I$ (46)

となる。よって、

$$I = \frac{-d\Phi / dt}{R_1 + R_2} \tag{47}$$

となる。

[初等的なコメント] $V = \int E ds = RI$

ここで、この明らかな初等的関係を確認しておこう。ただし、導体断面上では、物理量は一定であるとする。 $\mathbf{E} = \rho \mathbf{i}$ から、

$$\int E ds = \int \rho(x) j(x) dx = \int \frac{\rho(x) dx}{S(x)} j(x) S(x)$$

ここで、抵抗は、 $r(x)d\ell = \frac{\rho(x)d\ell}{S(x)}$ であることから、単位長さ当たりの抵抗は、 $r(x) = \frac{\rho(x)}{S(x)}$ と与え

られる。また、j(x)S(x)=I (= const.) であることから、

$$V = \int E \, ds = \int r(x) dx \ I = RI$$

となるのである。

(g) 導体が動く場合のファラデーの法則

後で、Maxwell 方程式から、このような場合にもファラデーの法則が成り立つことを示す(**(1)**項を 参照)が、ここでは、ファラデーの法則が成り立つと仮定しよう。一般に、

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\operatorname{div} \mathbf{A}) \mathbf{v} + \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{v}) \right) \cdot d\mathbf{S}$$
 (48)

である(忘れた場合には、「ベクトル解析」の補遺でも述べたように、ポンチ絵が便利である。なお、式(48)の \mathbf{A} は一般的なベクトルであり、ベクトル・ポテンシャルではないことに注意)。よって、磁場の場合には、 $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ を使うと、

$$-\frac{d\Phi}{dt} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \Phi(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}$$
 (49)

となる。式(49)の第二項は、磁場によるローレンツ電場である。今、磁場は時間的にも空間的にも一定として、よく教科書にあるような**図 13** のような場合を考えると、起電力は、

$$V_0 = v B \ell \tag{50}$$

となり、周知のものが得られる。よって、式(47)から、

$$I = \frac{vB\ell}{R} \tag{51}$$

ここで、R は、回路全体の抵抗である。なお、参考のために、式(50)の右辺の単位が電圧であることを思い出しておこう。

$$[B] = T = Wb / m^2 = V \cdot \sec/m^2 \ \text{であるので}, \ [vB\ell] = \frac{m}{\sec} \cdot \frac{V \cdot \sec}{m^2} \cdot m = V \ \text{である。または、ローレンツ}$$

力から、
$$[\mathbf{E}] = [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$$
であるので、 $[vB\ell] = [E\ell] = \frac{V}{m} \cdot m = V$ となる。

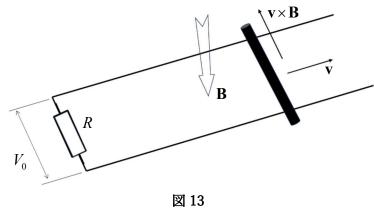
次に、この回路系のエネルギー保存について考えてみよう。まず、抵抗で消費する電力は、

$$P_e = V_0 I = \frac{V_0^2}{R} = \frac{(v B \ell)^2}{R}$$
 (52)

である。一方、動いてる棒(の微小部分)に働く力は、(高校または大学初年度?の物理を思い出すと)、

$$F_m = |\mathbf{I} ds \times \mathbf{B}| = I B ds$$

と与えれるのであった。これは、回路に流れる電流を作る、電荷とその速度を、q, \mathbf{v} とした時のローレンツ力、 $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ と同じものであるはずである。(記憶力がよい人はさておき)これを確認しておこう。それは、(長さ、ds 当たりの電荷をqとすると)、



$q \mathbf{v} = \rho \Delta S \Delta s \mathbf{v} = \rho \mathbf{v} \Delta S \Delta s = \mathbf{j} \Delta S \Delta s = \mathbf{I} \Delta s$

であることからわかる。この力に抗して、棒を引っ張るのであるから、回路系に与える力学的な(単位時間当たりの)エネルギー、つまり回路系に与えるパワーは、

$$P_{m} = \int F_{m} v \, ds = I \, B \, v \, \ell = I \, V_{0} \tag{53}$$

となり、式(52)と同じになる。摩擦熱などを無視すると、力学的なパワーと電気的な消費パワーが釣り合っているという当然の結果が得られたことになる。

「コメント]

ここで、基本的な力学の関係式、

$$dE = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \rightarrow dE / dt = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

または、

$$dE = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{p} \rightarrow dE / dt = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{p} / dt = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

を思い出しておくとよいかもしれない。

余分なコメントを追加すれば、ここでは、棒の質量はゼロであることを想定しているが、棒が等速運動しているとすれば、質量はあっても成り立つことに注意。

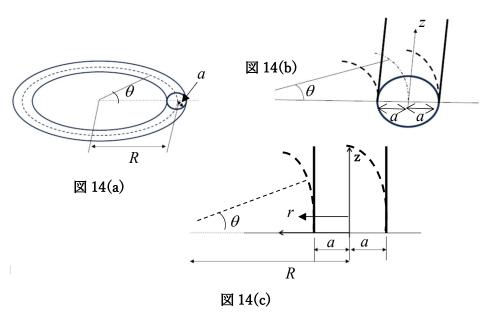
(h) 抵抗がゼロになった場合、ファラデーの法則は成り立つか?

まず手始めに、(f) 項の場合について、考えてみよう。この場合、式(47)からわかるように、抵抗がゼロになると、電流は無限大になることがわかる。この場合、起電力は変わらないので、ちょうど定電圧源をショートしたのと同じになり、抵抗がゼロになっても、発生する電力は無限大になる(電線をループ状にすると、たちまち発熱して燃える可能性がある?)。もしこんなことが起こるとすると、ちょっと考えるだけで、世の中、大変なことになると想像される。では、こんなことが起きないようにするには、どうすればよいか、どうなっていればよいかというと、起電力がゼロになればよいのである。つまり磁場の面積分がゼロになればよいのである。これは、誘起された電流の磁場で、元の磁場がキャンセルされるようなことが起こればよいことがわかる。これは、抵抗の低いループ導体(電線)を設置して磁場をシールドしようというのと同じである。しかし、実際にやってみると、そんな

にうまくは磁場をシールドできないのである。もしも非常に大きなループで、そのループ内(またはループの後ろ)の磁場がキャンセルできるとすると、やはり世の中、大変なことになると思われる。 実際は、抵抗がゼロでも、キャンセルされるのは、磁場の面積分(または平均値)であり、ループの中心付近はキャンセルされないで磁場が残り、ループの導線付近は、むしろ、かなりの強さの逆磁場が発生するのである。

(g)項の場合も同様で、抵抗がゼロになると、式の上では、電流は無限大、発生する電力も無限になる。 逆に、棒に働く力が無限大になって、棒を全く動かせなくなると言ってもよいかもしれない。もしこ んなことが起こるとすると、やはり、世の中、たいへんなことになりそうであることは想像に難くな い。

いずれにしろ、基礎方程式(Maxwell 方程式、オームの法則等)はわかっており、問題の設定も比較 的簡単であるので、物理的観点からすると、ただ解けばよいということになるであろう。多分、解析 的に解くのはむつかしいかもしれないが、今の時代、信頼性の高いソフトウェア(私自身はどれが適



と体力が不可欠である。つまり、結論を言えば、若者しかこれを行うことができないであろうことが わかる。ということで、集中力に欠け、体力もない者、特に高齢者はあきらめるしかないということ になるのだが・・・。

そうは言え、問題はある意味、単純な導線に関するものであるので、これを物理の問題としてとらえないで、回路の観点で考えてみると、これは非常に簡単な回路問題であろうと思われてくる。そして、回路として扱うことで、定性的(かなり定量的にも)理解できそうに思えてくる。

以下のこの項では、(f)項で抵抗がゼロになった場合にどうなるかを検討し、次の項、(i)項でインダクタンスの簡単な紹介をし、(j)項で、抵抗が有限という一般的な場合について述べる。

一様な磁場の場合には、ベクトル・ポテンシャルの式は、

$$\nabla \times \mathbf{A} = -\mathbf{B}_0 = -B_0 \mathbf{k} \tag{54}$$

となる(図14を参照)。この(一つの)解は、よく知られているように、例えば、

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} (B_0 y, -B_0 x, 0) \tag{55}$$

となるが、極座標で表すと、

$$A_{\theta} = \frac{-B_0 r}{2}$$
 , $A_r = A_z = 0$ (56)

となる。確認のために、磁場を求めると、

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = -B_0 \; , \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \; A_\theta \right) = -B_0$$

なお、ここで、 $A_{\theta}(r=0) = \text{const.} \neq 0$ であると、「変な」ことになる(原点で磁場の値が発散する。

具体的には、 $B_z \propto 1/r \to \infty \ (r \to 0)$ となる)ので、 $A_{\theta}(r=0)=0$ であることが必要である。そして、この後、すぐにわかるように、この条件が大きな役割を果たすのである。

図 14(a)のような環状のループを考え、ループの中心からループの切断面(円形とする)中心まで距離を、Rとし、円形の切断面の半径を、aとしよう。さらに、 $R\gg a$ と仮定しよう。すると、切断面内では、

$$A_{\theta} \approx \frac{-B_0 R}{2} = \text{const.} \tag{57}$$

と近似してよいであろう。

次に、この外部磁場によって、ループ内に誘起される電流の見積もるために、以下のような非常に荒い評価を行う(後でわかるように、それほど悪くない評価であるが・・)。今、ループ上のある場所でループ断面の中心を原点として、初めの円筒座標の θ 方向を、新たに直交座標のz方向としよう。そして、その方向にループ形状の導体でなく、直線的な導体があると大胆な仮定をするのである(図 14(b)を参照)。すると、この座標系では、「似非」ループの断面内のベクトル・ポテンシャルは、式(57)から、

$$A_z \approx \frac{-B_0 R}{2} \tag{58}$$

と近似できる。「似非」ループに誘起される電流、 j_z が作るベクトル・ポテンシャル(のz成分)は、

$$\nabla^2 a_z = -\mu_0 j_z \tag{59}$$

で与えられる。これは、静電ポテンシャルの方程式と同じ形をしている。

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{60}$$

電荷密度の分布が軸対称であるとすると、外部の電場は、ガウスの定理から、

$$E_r 2\pi r = \frac{Q}{\varepsilon_0} \rightarrow E_r = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r}$$
 (61)

と求まり、静電ポテンシャルは、

$$\varphi = \frac{-Q}{2\pi\varepsilon_0} \left(\ln r + C \right) \tag{62}$$

と与えられる。よって、同様に電流密度の分布が軸対称であるとすると、導体断面の外側のベクトル・ポテンシャルは、

$$a_z = \frac{-\mu_0 I}{2\pi} \left(\ln r + C \right) \tag{63}$$

となることがわかる。ところで、実際には、導体はループを形成しているので、ループの平面内でのベクトル・ポテンシャル、 a_{σ} が式(63)の a_{z} にほぼ等しいと(大胆に)近似できるであろう。すると、コイルの導体の断面の中心から見て、ループの中心までの距離は、Rであり、この中心では、先の注意(式(56)の後に述べた条件)により、 $a_{\sigma}=0$ である必要があるので、

$$a_{\varphi} \approx a_{z} = -\frac{\mu_{0}I}{2\pi} \ln(r/R) \tag{64}$$

となる。ここで、*r* は断面中心から測った距離である(**図 14(c)**を参照)。今、誘起された電流は導体表面のみを流れると仮定すると、導体内のベクトル・ポテンシャルは、一定値となる(これは電荷ポテンシャルで、電荷が表面のみに存在すると仮定した場合に、そのポテンシャルは導体内で一定になるのと同じである。)

「コメント]

誘起された電流が導体表面のみを流れるという近似は、例えば、外部磁場の周波数が比較的高い場合であり、周波数が低い場合には、電流は導体断面に一様に流れる。後者については、後でインダクタンスのところで触れるが、その影響は比較的小さい。

今の仮定では、式(64)で、r=aとすることで、導体内のベクトル・ポテンシャルは、

$$a_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(R/a\right) \tag{65}$$

となる。ループに誘起される電圧は(繰返しになるが、再度、書くと)、

$$-V = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

であることから、ループ上のベクトル・ポテンシャルがゼロであるなら、誘起される電圧はゼロとなり、抵抗がゼロの場合に相当することがわかる。以上から、抵抗がゼロの場合には、式(58)と式(65)から、ループ上(ループの導体内)に次で与えられる電流が流れることになる。

$$I = \frac{\pi B_0 R}{\mu_0 \ln (R/a)} \tag{66}$$

なお、この式は、流れる電流が磁場と同位相であることを示している $(B_0 = B_0(t))$ 。一方、抵抗がつながっており、誘起電流によるベクトル・ポテンシャル(または磁場)への寄与が無視できる場合には、抵抗に流れる電流は、式(47)等からわかるように、磁場の時間微分に比例する。よって、もし磁

場が周期的であるなら、電流の位相は90度ずれていることになる。この一見、矛盾するようなことは、あくまでも「極端な」近似的によるものであり、実際には、後で説明するように、この両者が混在するのである。

さて、ほとんど抵抗がゼロのループであれば、ループに誘起される起電力はゼロとなるが、ここで 仮定したように外部磁場が一様だとしても、誘起される電流が作る磁場は一様ではないのである。よって、抵抗ゼロのループを設置したからと言って、磁場はキャンセルできないのである。抵抗ゼロのループを設置すれば、その後ろには、磁場は侵入しない、そして、ループの半径がどんなに大きくても、抵抗がゼロでありさえすれば、磁場は侵入しないのではと考えるのは錯覚であろう(しかし、この錯覚は世の中に結構、はびこっているかも・・)。

式(64)は、ループの中心に座標原点を移動し、そこに円筒座標を適用すれば、

$$a_{\varphi} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{R - r}{R}\right) \tag{67}$$

と書ける(r=0)がループの中心)。よって、これによる (ループ平面内の z 方向の) 磁場は、

$$B_{z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r a_{\varphi} \right) = \frac{\mu_{0} I}{2\pi} \left[\frac{1}{R - r} - \frac{1}{r} \ln \left(\frac{R - r}{R} \right) \right]$$

$$= \frac{B_{0} R}{2 \ln \left(R / a \right)} \left[\frac{1}{R - r} - \frac{1}{r} \ln \left(\frac{R - r}{R} \right) \right]$$
(68)

と与えられる。図 15 にR/a=5, 10, 100 とした場合の $(B_z-B_0)/B_0$ を示す。図に示すように、磁場

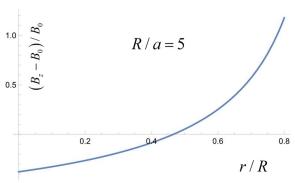
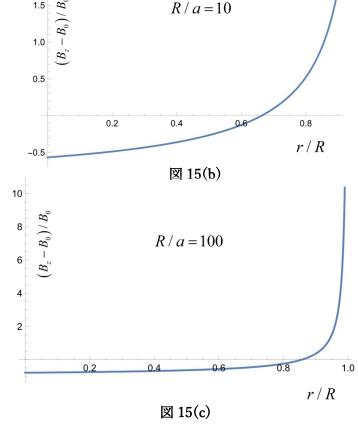


図 15(a)

はゼロにはならず、原点付近では磁場は外部 磁場と同じ方向を向いており、ループの近傍 では、磁場は外部磁場と逆方向でかつ磁場の 強さも外部磁場より大きい。上の磁場の表式 は荒い評価ではあるが、定性的な様子は見て 取れるであろう。なお、次のインダクタンス の項で、ループの導体の断面積が無限小であ る場合の磁場の様子を参考のために挙げてあ る。次に、計算のチェックのために、ループ 平面内の誘起電流による磁場と外部磁場の面



積積分の差(相対誤差)を求めてみよう。ループ内(r < R - a)の面積分の差は、次の式で与えられる。

$$f(R/a) = \int (B_z - B_0) dS / \pi B R^2$$

$$= \int_0^{1-a/R} \left[\frac{1}{\ln(R/a)} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{x} \ln(1-x) \right) - 2 \right] x dx$$
(69)

具体的数値を代入すると、

$$f(5) = 0.16$$
, $f(10) = 0.09$, $f(100) = 0.0099$

かなり大胆な近似で求めた割には、誤算は少ないと言える(特に、 $R/a \gg 1$ の場合)。

実は、この積分は、 $B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ra_{\varphi})$ であることを使うと、

$$f(R/a) = \frac{2\pi(R-a) a_{\varphi}(R-a) - \pi B_{0}(R-a)^{2}}{\pi B_{0}R^{2}}$$

$$= (1-a/R) - (1-a/R)^{2} = a/R(1-a/R)$$
(70)

となるはずであり、上の数値計算の結果と一致する。なお、式(70)の二番目の式の分子で、次のような、もっともらしい「ごまかし」をすると、

分子 =>
$$2\pi R a_{\varphi}(R-a)-\pi B_0 R^2$$

とすると、これは、式(66)、(67)からゼロとなり、誤差もゼロとなる。

いずれにしろ、以上のことからわかることは、回路に悪影響を与える外乱磁場をアース線のループでキャンセルしようとするのは、少し無理があるということになる。キャンセルするために、アース線を、回路を構成する配線の周りにぐるぐる巻くというのがベストかもしれないが、(広めの)アース線を回路の線と並走させるだけでも、思った以上に効果があるであろう(全体の磁場そのものはキャンセルできなくても、回路の線上のベクトル・ポテンシャルをかなりの程度、キャンセルできるであろうから・・)

(i) インダクタンス(自己インダクタンス、相互インダクタンス)

この項の内容は、磁束、インダクタンス、ベクトル・ポテンシャルなどの関係式に関する復習のようなものである。また、説明も順序立っておらず、メモランダムに近いかもしれない。また、インダクタンスの公式も文献からの引用にとどめている(導出もしていない)。

(i-1) 自己インダクタス (self-inductance)

電圧とインダクタンス、電流の次の関係は周知であろう。

$$V = -L\dot{I} \tag{71}$$

通常は、マイナス記号が付かない表式もよく使われるが、実際には、付けても付けなくても、意味をきちんと把握していれば、どちらでもよい(ここでは、電流の「方向」に電位が下がるとしている)。すると、Faradayの法則との関係から、

$$V = -L\dot{I} = -\dot{\Phi} = -\frac{d}{dt}\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \rightarrow \Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = LI$$
 (72)

とすることができる(なお、ここでは、積分定数は?とか、他の電流との相互作用は?とか、面倒なことは問わないのである。所詮、意味のあるのは時間微分したものであるので、積分定数は、ゼロとしても問題はない。)一方、磁束、 Φ は、

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$
 (73)

と変形することができるので、

$$LI = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \tag{74}$$

と書けることがわかる。また、通常の回路の場合、インダクタンスを作るコイルは、いわゆる lumped element であるので、コイルの外では、ベクトル・ポテンシャルは小さくなる(減衰する)と期待できる。これは、

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}}{r} dV \tag{75}$$

ということからわかる。電流分布が局所的であるとすると、少なくとも、 $\mathbf{A} \sim 1/r$ であることがわかるが、電流、 \mathbf{j} がコイル上では、グルグル回っていることを考えると、 $\mathbf{A} \sim 1/r^2$ のようになると見積もるのがより適切であろう。そして、この \mathbf{A} はコイルの周りを周回する方向に一番大きな成分をもつであろう。すると、コイルの引き出し線は、どの方向に引き出して、 \mathbf{A} とかなり直交する方向になるので、lumped element の場合には、式(74)の積分は、実質、個々のコイルごとの積分に分離できることになる。つまり、

$$LI = \left(\sum_{i} L_{i}\right)I\tag{76}$$

としてよいことになる。一方、磁場のエネルギーは、

$$W_{m} = \frac{1}{2} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \, dV = \frac{1}{2} \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} \, dV = \frac{I}{2} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$
 (77)

と与えれる(多分、第一式は記憶されていると思うが、第二式も記憶に値するであろう。なお、下記 のコメントを参照のこと。)インダクタンスに貯えられる(回路的な)エネルギーは、

$$W_{L} = \int V \, dI = \frac{1}{2} L \, I^{2} \tag{78}$$

であるので、 $W_m = W_L$ と等置すると、式(74)と同じ式、

$$LI = \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

が得られる。

[コメント]

$$\frac{1}{2} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \, dV = \frac{1}{2} \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{H} \, dV = \frac{1}{2} \int \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \, dV = \frac{1}{2} \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} \, dV$$

となる。2番目の式から3番目の式の変形(部分積分)をより詳しく書くと、

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{H} - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$$

$$\rightarrow \oint (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{H} \, dV - \int \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \, dV$$

であり、以下に示すように、 $\oint (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = 0$ であるので、 $\int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{H} \, dV = \int \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \, dV$ となるのである。

ここで、 $\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}}{r} dV \rightarrow$ 電流分布が局所的なら、「通常は」 $\mathbf{A} \sim \frac{1}{r^2}$ 、「最悪でも」 $\mathbf{A} \sim \frac{1}{r}$ である。

よって、 $\mu_0 \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$ から、「通常は」 $\mathbf{H} \sim \frac{1}{r^3}$ 、「最悪でも」 $\mathbf{H} \sim \frac{1}{r^2}$ となる。

これから、

「通常は」
$$\oint (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} \sim \frac{1}{r^5} r^2 \rightarrow 0 \ (r \rightarrow \infty)$$

「最悪でも」
$$\oint (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} \sim \frac{1}{r^3} r^2 \rightarrow 0 \ (r \rightarrow \infty)$$

であることがわかる。

(i-2) 相互インダクタス (mutual inductance)

二つの回路系(電流の系)がある場合、回路1が回路2に発生するベクトル・ポテンシャルは、

$$\mathbf{A}_{2} = \frac{\mu_{0}}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_{1}}{r} dV = \frac{\mu_{0} I_{1}}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{s}_{1}}{r}$$

$$\tag{79}$$

のような形で与えられる。ここで、 $r = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ である。すると、

$$\int \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{s}_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2}{r}$$
(80)

となるが、回路 1 が回路 2 に作る磁束を、 Φ_{21} とおくと、

$$\Phi_{21} = M_{21} I_1 = \int \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{s}_2 \tag{81}$$

となる。よって、相互インダクタンスは、

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2}{r} \tag{82}$$

と与えられる (Neumann formula)。この形から、明らかに、

$$M_{21} = M_{12} \tag{83}$$

であり、相反関係(相反定理)が成り立っている。空間の一様、対称性を考えると、こうなっていないといけないことがわかるのであるが、一方、鉄があったり、なかったり、場所によって透磁率が異

なる場合の相反定理についての説明は、ちょっと調べた感じではないように思われる。そこで、 Appendix A で、この説明を試みてみた(ただし、透磁率は、テンソルでなく、スカラーの場合であるが・・)。

(i-3) 円形及び矩形のコイルのインダクタンス

いろいろな形状のコイルのインダクタンス (inductance) の公式については、たとえば、

https://en.wikipedia.org/wiki/Inductance

が適当であろう。また、そこにある参考文献、

F.W. Grover, "Inductance Calculations", Dover Publications Inc., 1946

E. B. Rosa, "THE SELF AND MUTUAL INDUCTANCES OF LINEAR CONDUCTORS"

https://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/bulletin/04/nbsbulletinv4n2p301_A2b.pdf

には、膨大な式、表があり、圧倒されるものがある。かつて、これらインダクタンスの表式を求めるため、Maxwell、Kirchhoff、Heaviside、Lorenz(ローレンツ変換の Lorentz ではない)、Kelvin、そして Nagaoka(長岡半太郎)等々、そうそうたる研究者が取り組んでおり、ある種の「執念」のようなものが感じられる。想像するに、これは、Faraday の法則やインダクタンスの重要性、特に実用面での重要性を認識していたことが大きいのではないだろうか。なお、古い文献は、インダクタンスの単位が、 μ H であったり、長さも cm であったりするので、まずは最初に挙げた文献(Wikipedia)や最近の本等を参照するのが無難であろう。

一方、上記の引用文献や多くの電磁気学の教科書には、コイルの自己及び相互インダクタンスの表式 の導出の方法が(明らかであることが前提であるためか)書かれていなようである(多分、引用文献 の中の引用文献に書かれているのであろうが・・・私は見ていない)。(私の非常に狭い知識の範囲で は)このことが書かれている、「唯一の(?)」教科書は、

高橋秀俊、『電磁気学』、物理学選書3、裳華房、第12版、1969

である。わずか数ページで、インダクタンスの公式の導出方法が述べられている(これを真似すれば、上記の膨大な表式を導出することもできそうである)。それも丁寧に式の変形まで書かれており、おまけに計算はすべて初等的である。この中の一つの結果(Maxwell の公式)は、楕円積分で表されているが、導出過程はすべて初等的である。ただし、本の中では、二つの「公式」が使われている。この「公式」の導出も簡単ではあるが、これについては、参考までに、Appendix C に載せておいた。本項では、後で参考とする二つの場合について、文献から引用しておくことにしよう。

円形のコイル

円形のコイルの自己インダクタンスは $(R \gg a)$ の場合)

$$L = \mu_0 R \left(\log \frac{8R}{a} - 2 + \frac{Y}{4} \right) \tag{84}$$

と与えられる。ここで、Yは、

Y=0: コイル表面のみ電流が流れる場合

Y=1: コイル断面に一様に電流が流れる場合

であり、それに応じて、

$$L = \begin{cases} \mu_0 R \left(\log \frac{R}{a} + 3\log 2 - 2 \right) = \mu_0 R \left(\log \frac{R}{a} + 0.08 \right) & \text{(for } Y = 0) \\ \mu_0 R \left(\log \frac{R}{a} + 3\log 2 - \frac{7}{4} \right) = \mu_0 R \left(\log \frac{R}{a} + 0.33 \right) & \text{(for } Y = 1) \end{cases}$$
(85)

となる。例えば、R/a=5程度でも、Y=0 の場合では最後の式の0.08 を省略したとしも、その誤差は、5%程度である。一方、先に非常に荒い見積もりをした場合の式(65)を使うと、

$$LI = \oint a_z R \, d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(R/a\right) 2\pi R = \mu_0 I \, R \ln\left(R/a\right) \tag{86}$$

となるので、インダクタンスの「荒い見積もり」として、

$$L = \mu_0 R \ln \left(R / a \right) \tag{87}$$

が得られるが、式(85)と比べると、それほど荒い見積もりではないことがわかる。なお、この場合には、電流は導体コイルの表面のみに流れると仮定していた。そこで、電流が導体コイルに一様に流れている場合を計算してみよう。その場合のベクトル・ポテンシャルの計算は、電荷密度が一様な場合の電場ポテンシャルと全く同じで、

$$A_{z} = \begin{cases} \frac{\mu_{0}}{4\pi} \left(1 - \frac{r^{2}}{a^{2}} \right) I + \frac{\mu_{0}}{2\pi} I \log \frac{R}{a} & (r \leq a) \\ \frac{\mu_{0}}{2\pi} I \log \frac{R}{r} & (r \geq a) \end{cases}$$

$$\tag{88}$$

と求まる(導出は容易であるので、省略)。これを使うと、

$$LI^2 = \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} dV \tag{89}$$

であるので、

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{j} = A_z j_0 = A_z \frac{I}{\pi a^2} \tag{90}$$

$$dV = 2\pi R \, dS = 2\pi R \cdot 2\pi r \, dr \tag{91}$$

となり、

$$LI^{2} = 2\pi R \cdot \frac{I}{\pi a^{2}} \left(\frac{\mu_{0}}{2\pi} I \left(\log \frac{R}{a} + \frac{1}{2} \right) \pi a^{2} - \frac{\mu_{0}}{4\pi} I \frac{2\pi a^{4}}{4a^{2}} \right)$$

$$= I^{2} \mu_{0} R \left(\log \frac{R}{a} + \frac{1}{4} \right)$$
(92)

と求まる。これから、

$$L = \mu_0 R \left(\log \frac{R}{a} + \frac{1}{4} \right) \tag{93}$$

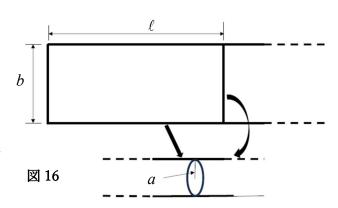
となるが、式(85)と比べるために、まとめて書くと、

$$L = \begin{cases} \mu_0 R \left(\log \frac{R}{a} + 0 \right) = \mu_0 R \left(\log \frac{R}{a} + 0 \right) & \text{(for } Y = 0) \\ \mu_0 R \left(\log \frac{R}{a} + \frac{1}{4} \right) = \mu_0 R \left(\log \frac{R}{a} + 0.25 \right) & \text{(for } Y = 1) \end{cases}$$
(94)

となる。式(85)の導出は、若干、複雑であるが、ここで述べた荒い見積もりでもかなりよい近似であることがわかる。

長方形のコイル

上記に挙げた文献から引用すると、長方形のコイルのインダクタンス、Lは、



$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left[\ell \ln \left(\frac{2\ell}{a} \right) + b \ln \left(\frac{2b}{a} \right) + 2\sqrt{\ell^2 + b^2} - \ell \sinh^{-1} \left(\frac{\ell}{b} \right) - b \sinh^{-1} \left(\frac{b}{\ell} \right) - \left(2 - \frac{1}{4} Y \right) (\ell + b) \right]$$

$$(95)$$

と与えられる(図 16 を参照)。ただし、 $\ell\gg a$ 、 $b\gg a$ である。この式は、若干、複雑なので、さらに、Y=0 、 $\ell\gg b$ と仮定しよう(Y=0 :電流は導体表面のみに流れると仮定)。そして、次のよく知られた近似式、

$$\sinh^{-1} x \approx \ln 2x \text{ for } x \gg 1$$
, $\sinh^{-1} x \approx x \rightarrow \text{ for } x \sim 0$

を適用すると(例えば、Appendix Cを参照)、Lは、次のように近似される。

$$L \rightarrow \frac{\mu_0}{\pi} \left[\ell \ln \left(\frac{2\ell}{a} \right) + b \ln \left(\frac{2b}{a} \right) + 2\ell - \ell \ln \left(\frac{2\ell}{b} \right) - 2\ell \right]$$

$$\rightarrow \frac{\mu_0}{\pi} \left[\ell \ln \frac{b}{a} + b \ln \left(\frac{2b}{a} \right) \right] \rightarrow \frac{\mu_0}{\pi} \ell \ln \frac{b}{a}$$
(96)

Y=1(電流が導体コイル断面に一様に流れると仮定)の場合には、容易にわかるように、この最後の式で、 $\ln(b/a) \to \ln(b/a) + 0.25$ と補正すればよい。

ループ電流による磁場の公式

次の文献には、円形のループ電流による磁場等に関する厳密解が与えられている (ただし、ループ・コイルの太さは無限小である)。

文献) J. C. Simpson, J. E. Lane, C. D. Immer, R. C. Youngquist, "Simple Analytic Expressions for the Magnetic Field of a Circular Current Loop", NASA/TM-2013-217919

計算及び導出は若干、面倒であると思われるので、Appendix E にその導出を載せてある。ここでは、 結果だけを書く(なお、notation が文献とは少し異なる)。

ベクトル・ポテンシャル(明らかに、ゼロと異なるのは、 ϕ 方向成分のみ)は、

$$A_{\varphi} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{4 \, IR}{\sqrt{R^2 + r^2 + z^2 + 2r \, R}} \left(\frac{\left(2 - k^2\right) K(k) - 2 \, E(k)}{k^2} \right) \tag{97}$$

ここで、K(k)及びE(k)は、第一種及び第二種の完全楕円積分で、

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi , \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$
 (98)

である。また、軸方向(z方向)及び動径方向(r方向)の磁場は、

$$B_{r} = \frac{\mu_{0}I}{2\pi} \cdot \frac{z}{r} \cdot \frac{\left(R^{2} + r^{2} + z^{2}\right)E(k) + \left(R^{2} + z^{2} + r^{2} - 2Rr\right)K(k)}{\left(R^{2} + z^{2} + r^{2} - 2Rr\right)\sqrt{R^{2} + z^{2} + r^{2} + 2Rr}}$$

$$B_{z} = \frac{\mu_{0}I}{2\pi} \frac{\left(R^{2} - r^{2} - z^{2}\right)E(k) + \left(R^{2} + r^{2} + z^{2} - 2Rr\right)K(k)}{\left(R^{2} + r^{2} + z^{2} - 2rR\right)\sqrt{R^{2} + r^{2} + z^{2} + 2rR}}$$
(99)

で与えられる。

ループの平面内では、この B_z 成分は(Appendix E も参照)、

$$B_z(z=0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{E(k)}{R-r} + \frac{K(k)}{R+r} \right)$$
 (100)

で、 $k^2 = 4rR/(R^2 + r^2 + 2rR) = 4rR/(R+r)^2$ となる。なお、 $0 \le k^2 \le 1$ である。

ここで、(コイルの太さが無限小である)この厳密解と荒い見積もりとの比較をしてみよう。

$$x = r / R$$

とすると、荒い見積もりのベクトル・ポテンシャルと磁場は、式(67)と式(68)から、

$$a_{\varphi} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln(1-x)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{1}{x} \ln(1-x) \right]$$
(101)

一方、ベクトル・ポテンシャルの厳密解、式(97)は、

$$k^{2} = \frac{4Rr}{(R+r)^{2}} = \frac{4x}{(1+x)^{2}}, \ 2-k^{2} = \frac{2(R^{2}+r^{2})}{(R+r)^{2}} = \frac{2(1+x^{2})}{(1+x)^{2}}$$

を使うと、

$$A_{\varphi} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{1}{r(R+r)} \Big(\Big(R^2 + r^2 \Big) K(k) - (R+r)^2 E(k) \Big)$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{1}{x(1+x)} \Big(\Big(1 + x^2 \Big) K(k) - (1+x)^2 E(k) \Big)$$
(102)

また、式(100)から、

$$B_z(z=0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \left(\frac{E(k)}{1-x} + \frac{K(k)}{1+x} \right) \tag{103}$$

となる。式(101)は、そもそも $r \sim R$ 、つまり $x \sim 1$ のときに現実の値に近いであろうことから、式(102)、式(103)の $x \sim 1$ での漸近形を求めてみよう。

$$k'^2 = 1 - k^2 = \frac{(1-x)^2}{(1+x)^2} \rightarrow k' = \frac{1-x}{1+x} \sim \frac{1-x}{2}$$

$$E(k) \rightarrow E(1) = 1$$
, $K(k) \sim \log\left(\frac{4}{k'}\right) = \log\frac{8}{1-x}$

であることを使うと、

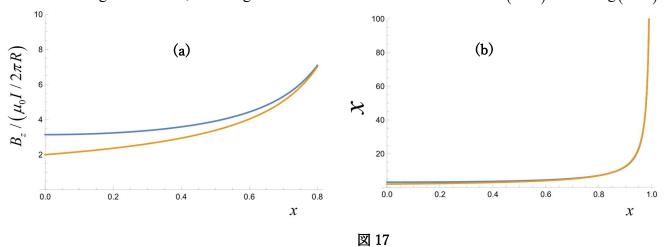
$$A_{\varphi} \to \frac{\mu_{0}}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \left(2K(k) - 4E(k) \right) \to \frac{\mu_{0}}{2\pi} \left(\log \frac{8}{1 - x} - 2 \right)$$

$$= \frac{\mu_{0}}{2\pi} \left(-\log(1 - x) + 3\log 2 - 2 \right)$$
(104)

$$B_{z}(z=0) \to \frac{\mu_{0}I}{2\pi R} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \log \frac{8}{1-x} \right)$$

$$\to \frac{\mu_{0}I}{2\pi R} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2} \log(1-x) + \frac{3}{2} \log 2 \right)$$
(105)

となる。 $3\log 2 - 2 = 0.08$, $3/2 \cdot \log 2 = 1.04$ であること及び $x \sim 1$ では、1/(1-x) の方が $\log(1-x)$



より支配的であることを考えると、荒い見積もりと厳密解(コイルの太さ:無限小)とはよく一致していることがわかる。実際、これらを図示すると、**図 17** のようになる。二つグラフはスケールが異なるだけで同じものである。青の線は、

$$B_z / \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\right) = \frac{E(k)}{1-x} + \frac{K(k)}{1+x}$$

であり、オレンジの線は、

$$B_z / \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\right) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x} \ln\left(1-x\right)$$

である。なお、(a)のグラフのオレンジの線は、コイルの太さがa/R=0.2である場合を想定したもので、(b)のグラフは、コイルの太さがa/R=0.01を想定したものになっている。

(j) より一般的な場合のファラデーの法則

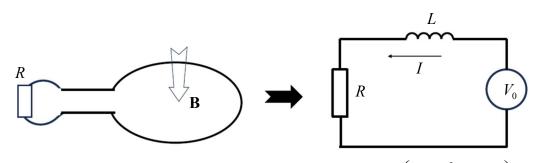
「一般的」と称してはいるが、以下に述べるように、ここでは、二つの「特別な」場合について考

察するのである。これらは、教科書等でファラデーの法則を説明するためによく取り上げられている例であり、それを若干、「深堀しよう」というものである。

(j-1) 固定したコイルに誘起電流が流れる場合

この場合(図18)、ベクトル・ポテンシャルの積分は、

$$\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = L I + \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \tag{106}$$



 $\left(V_0 = \frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}\right)$

のである。また、ここでは、コイルは固定しているものとしよう。すると、

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = L \, \dot{I} + \dot{B} \, S \tag{107}$$

となり、ファラデーの法則から、

$$RI + \frac{d}{dt} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = L\dot{I} + \dot{B}S + RI = 0$$
 (108)

という微分方程式が得られる。そこで、外部磁場が、

$$B(t) = -B_0 \sin \omega t \tag{109}$$

と与えられていると仮定すると、

$$\dot{B}(t) = -\omega B_0 \cos \omega t \tag{110}$$

となり、これから、式(108)は、

$$\dot{I} + \alpha I = \beta \cos \omega t \tag{111}$$

と書ける。ただし、ここで、

$$\alpha = R/L$$
 , $\beta = \omega B_0 S/L$ (112)

である。式(111)を Laplace 変換すると、

$$s\tilde{I} - I_0 + \alpha \tilde{I} = \frac{\beta s}{s^2 + \omega^2}$$
 (113)

となり、これから(部分分数展開をすると)、

$$\tilde{I} = \left(I_0 - \frac{\beta \alpha}{\alpha^2 + \omega^2}\right) \cdot \frac{1}{s + \alpha} + \frac{\beta}{\alpha^2 + \omega^2} \cdot \frac{\alpha s + \omega^2}{s^2 + \omega^2}$$
(114)

となる。よって、逆 Laplace 変換で、

$$I(t) = \left(I_0 - \frac{\beta \alpha}{\alpha^2 + \omega^2}\right) e^{-\alpha t} + \frac{\alpha \beta}{\alpha^2 + \omega^2} \cos \omega t + \frac{\beta \omega}{\alpha^2 + \omega^2} \sin \omega t$$
 (115)

と解が求まる。定常状態になったとすると、

$$I(t) \rightarrow \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \omega^2} \cos \omega t + \frac{\beta\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \sin \omega t$$
 (116)

となる。今、 $\alpha>\omega$ 、とすると、 $R>\omega L$ の場合となるが、この場合、自己インダクタンスより抵抗の影響が顕著となり、

$$I(t) \rightarrow \frac{\beta}{\alpha} \cos \omega t = \frac{\omega B_0 S}{R} \cos \omega t$$
 (117)

と近似できる。これは書き換えると、

$$I(t) = -\frac{1}{R}\frac{d}{dt}(-SB_0\sin\omega t) = -\frac{1}{R}\frac{d}{dt}\int B(t)dS$$
 (118)

となり、「普通の」Faraday の法則が得られる。一方、抵抗が非常に小さい場合、つまり $R \to 0$, $\alpha \to 0$ とすると、

$$I(t) \rightarrow \frac{\beta}{\omega} \sin \omega t = \frac{B_0 S}{L} \sin \omega t$$
 (119)

となる。つまり、R=0となっても、コイルに流れる電流は有限であり、「普通の」Faraday の法則には従わないのである(普通の法則を適用した場合、電流は無限大になるはずであるが・・・)。また、流れる電流は磁場と同位相である(より正確には、磁場を打ち消すような逆位相となる。)さらに、

 $S=\pi R^2$ 、 L の近似式、 $L=\mu_0R\log\left(R/a\right)$ を使うと、式(119)の振幅は、

$$\frac{B_0 S}{L} = \frac{\pi B_0 R}{\mu_0 \log(R/a)} \tag{120}$$

となり、式(66)と一致するのである。つまり、ループ内の磁場をキャンセルするように流れる電流 (の振幅)を与えるものになる。

(i-2) 一様磁場中で矩形のコイルの一辺が等速運動する場合

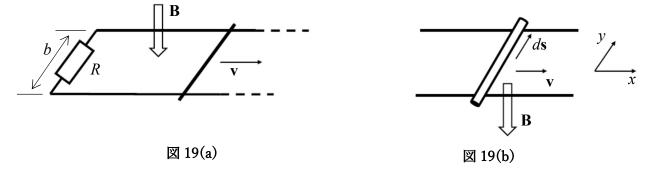


図 19(a)のような状況を考えよう。ここで、外部磁場は時間的、空間的に一定とする。この場合、式 (106)の時間微分は、

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \frac{d}{dt} (LI) + \frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$
 (121)

となる。右辺の第一項は、

$$\frac{d}{dt}(LI) = \dot{L}I + L\dot{I} \tag{122}$$

であるが、ここで、Lについて、式(96)の最後の近似式を使うことにすると、

$$\ell = vt$$

であるので、

$$L = \left(\frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{b}{a}\right) vt \tag{123}$$

となる。よって、

$$\dot{L} = \left(\frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{b}{a}\right) v$$

である。式(121)の第二項は、図 19(b)から、

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int \mathbf{B} \cdot d\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{B} \cdot \int (\mathbf{v} \times d\mathbf{s}) = -B v b$$
 (124)

となる。同じことをベクトル・ポテンシャルで使って表してみよう。今、 $\mathbf{A} = (0, -Bx, 0)$ とすること

にすると、 $B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} = -B$ となる(勿論、 \mathbf{A} として、異なる式を使ってもよいが、これが一番、簡単であろう)。

$$\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int A_y \, dy = -B \, x \, b \tag{125}$$

よって、

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = -B \, v \, b$$

となり、式(124)と同じものが得られる。以上に Faraday の法則を適用すると、

$$RI - Bvb + \frac{d}{dt}(LI) = 0 (126)$$

または、

$$L\dot{I} + (\dot{L} + R)I = Bvb \tag{127}$$

となるが、これを書き換えると、次の微分方程式が得られる。

$$t\dot{I} + (1+\alpha)I = \beta \tag{128}$$

ここで、

$$\alpha = \frac{R}{\frac{\mu_0}{\pi} v \ln \frac{b}{a}}, \quad \beta = \frac{Bb}{\frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{b}{a}}$$
(129)

としている。

さて、次の一階微分方程式、

$$y' + A(x)y = B(x) \tag{130}$$

の一般解は、よく知られているように(多分、記憶しているべき式かもしれないが・・忘れた場合に は、例えば定数変化法で・・・)、

$$y = e^{-\int_{0}^{x} A(y)dy} \left[\int_{0}^{x} e^{\int_{0}^{y} A(z)dz} B(y) dy + C \right]$$
 (131)

と与えられる。よって、

$$xy' + (1+\alpha)y = \beta \tag{132}$$

の解は(初等的な計算を省略すると)、

$$y = \frac{\beta}{1 + \alpha} + \frac{C}{x^{1 + \alpha}}$$

となる(なお、この場合には Laplace 変換を使っても計算は簡単にはならない。)ここで、Cは適当な定数である(例えば、初期条件を満たすような定数)。もっとも、この方程式の解は、斉次方程式の一般解+特殊解で求めることにすれば、ほとんど暗算で求まるのである。

以上のことから、式(128)の解は、

$$I = \frac{\beta}{1+\alpha} + \frac{C}{t^{1+\alpha}} \tag{133}$$

となり、もし抵抗、Rがゼロであるとすると(つまり、 α がゼロとなると)、

$$I = \beta + \frac{C}{t} \tag{134}$$

となる。これから、電流は時間とともに減少し、ある一定値に近づくことがわかる。つまり、抵抗が ゼロでも非常に大きな電流や無限大の電流が流れることはないのである。さて、上の式では、時間が

ゼロの場合が心配になるかもしれない。しかし、上では、極端な近似で、 L_s の初期値がゼロという非

現実的な値をとっているためであり、より現実的な値、

$$L_{s} = \frac{\mu_{0}}{\pi} \left[vt \ln \frac{b}{a} + b \ln \left(\frac{2b}{a} \right) \right] \tag{135}$$

を使えば、微分方程式は、

$$(t+\gamma)\dot{I} + (1+\alpha)I = \beta \tag{136}$$

となる。ここで、

$$\gamma = \frac{b \ln\left(\frac{2b}{a}\right)}{v \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \sim \frac{b}{v} \quad (b \gg a)$$
(137)

である。この微分方程式の解は、容易に、

$$I = \frac{\beta}{1+\alpha} + \frac{C}{\left(t+\gamma\right)^{1+\alpha}} \tag{138}$$

と求まり、抵抗ゼロの場合 (α がゼロの場合)には、

$$I = \beta + \frac{C}{t + \gamma} \tag{139}$$

となり、時間、t=0でも電流は、有限であることがわかる。さて、時間が十分に経過して、定常状態になったとすると、電流は、

$$I_f = \frac{\beta}{1+\alpha} \tag{140}$$

となる。今、抵抗が大きい、または、速度が遅い場合には、 $\alpha \gg 1$ となるので、

$$I_f \approx \frac{\beta}{\alpha} = \frac{Bbv}{R} \tag{141}$$

となり、電流はローレンツ力による起電力を抵抗で割った値になるという「普通の」結果が得られる。 一方、抵抗が小さい(極端な場合は抵抗ゼロ)、または速度が大きい場合には(極端な場合は速度、無限大とする。なお、我々は非相対論の世界にいるだけでなく、準静的を仮定している)、 $\alpha \ll 1$ または、 $\alpha \approx 0$ となるので、

$$I_f \approx \beta = \frac{Bb}{\frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{b}{a}}$$
 (142)

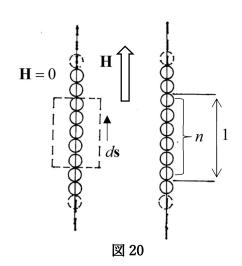
となり、電流は、速度にも抵抗にも依存しないことになる。特に、抵抗がゼロでも電流は無限大にはならないし、速度を非常に速くしても電流値は変わらないことがわかる。このことは次のように考えても簡単に解を求めることができる。十分、時間が経過した後では、電流は一定になるとしよう。よって、インダクタンスのよる(通常の)起磁力、 $L\dot{I}$ は、ゼロになる(より正確には、 $L\propto t$ であるが、 $\dot{I}\propto 1/t^{2+\alpha}$ であるので、 $L\dot{I}\rightarrow 0$ となる)。よって、 $\dot{L}I$ とローレンツ力による起磁力が釣り合うことになるが、 $\dot{L}\propto v$,Lorentz force $\propto v$ であることから、電流、I は速度に依存しないことがわかる(係数をきちんと比べれば、式(142)の結果が得られる。)

[コメント]

ローレンツ力だけを考えた場合、抵抗がゼロだと、電流は無限大になるのでは?、また、速度がどんどん増せば、電流もどんどん増えるのでは?、という素朴な疑問に答えるのはむつかしいが、上のように、自己インダクタンスも考慮に入れると、この疑問に答えることができるのである。

(k) トランスの初等的説明

ここまでの話には、鉄が抜けている。鉄のないインダクタンスなんて・・と言われるかもしれない。しかし、鉄を含め



ると、話は複雑にあり、話題も豊富で多岐にわたるであろう。そもそも、本稿は鉄入りのインダクタンスが主題ではないので、詳細は割愛することにするが、トランスは、回路の話(Kirchhoff の方程式など)では欠くことができないと思われるので、この項では、トランスについて初等的な説明をすることにする。しかし、その前に、鉄芯入りの(細長い)ソレノイドのインダクタンスの簡単な公式を思い出しておくことは無駄ではないであろう。

図 20 と、アンペールの法則、rot H = jから、

$$H = nI \tag{143}$$

となる。ここで、n は単位長さの巻き数であるので、両辺の単位は合っていることに注意 ([H]=A/mである)。よって、

$$B = \mu H = \mu n I \quad \left(\mu = \mu_r \,\mu_0\right) \tag{144}$$

よって、コイルの one turn に誘起される電圧は、

$$V(\text{one turn}) = \dot{B}S = \mu n S \dot{I} \tag{145}$$

以上から、コイル全体に誘起される電圧は、

$$V = N\dot{B}S = \mu NnS\dot{I} = \frac{\mu N^2 S}{\ell}\dot{I}$$

$$L = \mu NnS = \frac{\mu N^2 S}{\ell}$$
(146)

となるのであるが、ここでは、ソレノイドの外部への磁場の漏れ、特にソレノイドの両端での磁場の 「ひずみ」は考慮していない。(この公式は、標準的な教科書で学ぶ事柄であるが、記憶していること が望ましいであろう。)

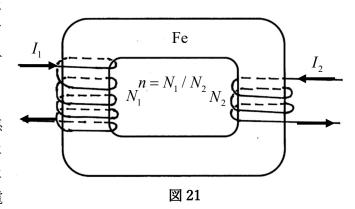
また、我々は、多分、高校ぐらい(?)までに、トランス(transformer)について、次のようなことを学んでいるであろう。

鉄心に巻いた一次側コイルの巻き数が二次側の巻き数のn倍 $(n=N_1/N_2)$ であるとすると、

- \bigcirc 一次側の電圧 (V_1) /二次側の電圧 $(V_2) = n$ => $V_1 = nV_2$
- \bigcirc 一次側の電流 (I_1) /二次側の電流 $(I_2)=1/n=>$ $I_1=I_2/n$ または、 $I_2=nI_1$

という「法則」である。そして電気を専門に しないのであれば、大抵は、これだけ知って いれば十分であろう。しかし、少し考えてみ ると、このトランスの「法則」はずいぶんと 不思議なことを言っているのである。

・この法則は、電圧と電流とは全く無関係で、相互に独立である。例えば、一次側に どんなに電流を流しても、二次側の電圧に は影響がないのである(一次側コイルに電



流が流れれば、鉄心の磁場も変化するはずで、磁場が変化すれば、二次側のコイルに電圧が誘起されるはずであるが・・?)。

- ・二次側の電流がゼロであるとすると(つまり二次側をオープンにすると)、一次側の電流もゼロになる。二次側をオープンにするということは、二次側のコイルが事実上、ないのと同じである。であるなら、鉄心にコイルを巻いて、それに電圧をかけてもコイルに電流が流れないことになるが、それは正しいのか?
- ・もう少し「高級な(?)」疑問として、一つの巻き線の自己インダクタンス、巻き線間の間の相互インダクタンスを用いた方程式と上の不思議な「法則」との関係は?

などなど・・・

ると、

しかし、前半の二つの疑問は、トランスを理想化した理想トランスで考えれば、「法則」に「反抗」するような質問は却下され、法則が成り立つのである。そして、(特殊な種類を除けば)普通のトランスは、この「法則」従うとしてよいようである。三つ目の質問については、教科書的であるが、これも以下に解説することにしよう。

ただし、トランスは内部抵抗、寄生容量などがないものとして、モデル化して考えることにしよう。 すると、トランスのモデルは、**図21** に示すようなものとなり、その微分方程式は、

$$V_{1} = L_{1} \frac{dI_{1}}{dt} + M_{2} \frac{dI_{2}}{dt}$$

$$V_{2} = M_{3} \frac{dI_{1}}{dt} + L_{4} \frac{dI_{2}}{dt}$$
(147)

と書ける(コメント:以下では、相互インダクタンス、M は正であると仮定しているが、これは本質的なことでない)。今、二次側のコイルを1 ブロックと数えることにし、そのインダクタンス、 L_4 をL としよう。そして、二次側のコイルによって誘起される磁場は、他に漏れることなく、すべて一次側のコイルを横切るものとすると、一次側の巻き数は二次側の巻き数のn 倍としているので、誘起される電圧もnとなる。これから、 $M_2=nL$ となることがわかる。一方、一次側のコイルブロックの数は、n であるので、それによって誘起される磁場は、二次側のコイルによって誘起される磁場に比べて、n 倍となるが、この磁場を感じる二次側のコイルは1 ブロックである。よって、 $M_3=nL$ となる。また、一次側では、n 倍の磁場がn 個のコイルブロックを横切るので、 $L_1=n^2L$ となる。これをまとめ

$$L_4 = L$$
 , $L_1 = n^2 L$, $M_2 = M_3 = nL$ (148)

となるが、磁場に漏れがある場合には、結合係数、 $k \ (\leq 1)$ を使って、

$$M_2 = M_3 = nL \rightarrow M_2 = M_3 = knL$$
 (149)

となる。ここで、係数、k は、式(82)からもわかるように(または、Appendix A から)、「通常」の場合、 $M_2=M_3$ としてよいことから、共通の係数となるのである(相反定理)。以上から、式(147)は、

次のような線形関係に書き直すことができる。

$$V_1 = Z_1 I_1 + Z_2 I_2$$

$$V_2 = Z_3 I_1 + Z_4 I_2$$
(150)

ただし、一定の周波数、 ω を仮定して、

$$Z_0 = j\omega L$$

$$Z_1 = n^2 Z_0 , Z_4 = Z_0 , Z_2 = Z_3 = k n Z_0$$
 (151)

とおいている。

これから、

$$0V_2 + Z_2 I_2 = V_1 - Z_1 I_1$$

$$V_2 - Z_4 I_2 = Z_3 I_1$$
(152)

となり、

$$\begin{pmatrix} V_{2} \\ -I_{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Z_{4}}{Z_{2}} & \frac{Z_{1}Z_{4} - Z_{2}Z_{3}}{-Z_{2}} \\ \frac{1}{-Z_{2}} & \frac{Z_{1}}{Z_{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{1} \\ I_{1} \end{pmatrix}$$
(153)

と求まる。これを書き直すと、

$$\begin{pmatrix} V_2 \\ I_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k n} & \frac{(1-k^2)n Z_0}{-k} \\ \frac{1}{-k n Z_0} & \frac{n}{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix}$$
 (154)

と書ける。これは、transfer matrix の表式であり、今の場合、AD-BC=1で、かつA,Dは実数で、B,Cは純虚数である。

密結合の場合 (k=1)、

$$\begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ \frac{1}{-nZ_0} & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix}$$
(155)

さらに、 $Z_0 o\infty$ と近似できる場合、

$$\begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix}$$
 (156)

となり、理想トランスの場合の式となる。

一方、複素パワー (complex power) を書くと、

$$\mathbf{S}_{2} = V_{2} I_{2}^{\prime *} = (AV_{1} + BI_{1}) (C^{*} V_{1}^{*} + D^{*} I_{1}^{*})$$
(157)

となる。よって、

$$\mathbf{S}_{2} = ADV_{1}I_{1}^{*} - BCV_{1}^{*}I_{1} - AC|V_{1}|^{2} + BD|I_{1}|^{2}$$
(158)

$$P_{2} = \text{Re}(V_{2}I_{2}^{**}) = \text{Re}S_{2} = AD \text{Re}(V_{1}I_{1}^{*}) - BC \text{Re}(V_{1}^{*}I_{1})$$
(159)

これから、

$$\operatorname{Re}(V_{2}I_{2}^{\prime*}) = \left(\frac{1}{k^{2}} - \frac{(1-k^{2})}{k^{2}}\right) \operatorname{Re}(V_{1}I_{1}^{*}) = \operatorname{Re}(V_{1}I_{1}^{*})$$
(160)

つまり、 $P_2 = P_1$ となるが、今は無損失のトランスを前提としているので、これは当然の結果であろう。 一方、無効電力は、若干、複雑で、

$$Q_{2} = \left(\frac{1}{k^{2}} + \frac{\left(1 - k^{2}\right)}{k^{2}}\right) Q_{1} - \frac{1}{k^{2} n^{2} \omega L} |V_{1}|^{2} - \frac{\left(1 - k^{2}\right)}{k^{2}} n^{2} \omega L |I_{1}|^{2}$$

$$= \left(\frac{2}{k^{2}} - 1\right) Q_{1} - \frac{1}{k^{2} n^{2} \omega L} \left(\left|V_{1}\right|^{2} + \left(1 - k^{2}\right) n^{4} \left(\omega L\right)^{2} |I_{1}|^{2}\right)$$
(161)

しかし、密結合の場合には、

$$Q_{2} = Q_{1} - \frac{1}{n^{2}\omega L} |V_{1}|^{2} = Q_{1} - \frac{1}{\omega L_{1}} |V_{1}|^{2}$$
(162)

と簡単になる。さらに、理想トランスの場合($L_1 \to \infty$)には、当然のことながら、

$$Q_2 = Q_1 \tag{163}$$

以上では、一般のトランスについて扱ったが、最初から蜜結合を仮定すると、式(151)を使って、式 (150)は、

$$V_{1} = nZ_{0}(nI_{1} + I_{2})$$

$$V_{2} = Z_{0}(nI_{1} + I_{2})$$
(164)

となり、簡単に、

$$V_1 = nV_2 \tag{165}$$

と求まる。さらに、インダクタンスが非常に大きい場合には、式(164)から、

$$nI_1 + I_2 = 0 (166)$$

である必要があることから、

$$I_2' = -I_2 = nI_1 \tag{167}$$

となり、理想トランスの場合が得られるのである。付け加えて言えば、蜜結合であれば(でありさえすれば)、理想トランスの電圧の関係式が得られ、さらにインダクタンスが非常に大きい場合には、理

想トランスの電流の関係式が得られるのである。

以上のことを言葉で説明すると、以下のようになる。まず、蜜結合というのは、励起された磁場が他に漏れない、つまり一次、2次コイルが作る断面から外に磁場が漏れないということである。よって、一次コイルの磁束と2次コイルの磁束は等しい。

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \to \quad \Phi_1 = \int \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 = \int \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 = \Phi_2$$

また、磁場は、電流が一次コイルのものか 2次コイルのものかに関係なく、トランスに「巻きついている」全電流に比例すると見なせる。よって、 $\mathbf{B} \propto T_{total} \propto nI_1 + I_2$ となる。つまり、磁束、 $\mathbf{\Phi} \propto nI_1 + I_2$ となる。これと、一次コイルの巻き数が二次コイルの巻き数のnであることから、式(165)の関係が導かれることになる。どのコイルに電流が流れているかと関係なく、全電流で、電圧が決まるのである。しかし、これから理想トランスにいくためには、この全電流がゼロ(ほぼゼロ)であるとすることが必要であるのである。とにかく、全電流をゼロと考えると、式(166)、(167)が導かれることになるが、この電流ゼロとすることが本当によいのであろうか?

通常のインダクタンスの場合の電圧と電流の関係は、 $V=j\omega LI$ であるが、確かに、L(または ω)がどんどん大きくなると、(電圧が一定であるという仮定の下で)電流がゼロになっていくのである。つまり伝導率が高い導体でも、例えば、鉄(または透磁率が高い材質)のリングにぐるぐる巻くと絶縁体のように振舞うということである。これは、多分、多くの人の感覚には反していることであるが、「この方面」のプロにとっては、日常的に実感していることのようである。しかし、現実は、完全に絶縁体にはならなくて、電流は非常に少ないながらも流れているのである。もし全電流がゼロであるとすると、トランスの中の磁場はゼロとなり、電圧も発生しないという変なことになるのである。よって、理想トランスは、あくまでも理想トランスであると考えておくのがよいであろう(ある場合には(多くの場合には?)、非常によいモデルであることは間違いないであろう。)

なお、後にキルヒホッフ方程式の解の一意性を議論する際には、理想トランスを仮定しないで(理想トランスの「法則」を用いないで)、元の式である式(150)を使うことにする(こうすると議論をより統一的にすることができると思われるので・・)。もっとも、この「法則」を用いた場合に、すっきりとした議論はどうすればよいか、実は、筆者にはわかっていないのであるが・・・。

[コメント (クイズ?)] 巻き数と電圧及びインダクタンスの関係について

コイルの巻き数(ループ数)を N とすると、下表のようになることは周知であろう。

	ループ・コイル	細長いソレノイド	トランス
磁場	外部磁場	自己磁場	自己磁場
自己インダクタンス		∞ Nn	$\propto N^2$
電圧	$\propto N$	∝ Nn	$\propto N^2$

※ ここでは、トランスについては、一次コイルのみを考えている。

- ・ループ・コイルの場合、一個のコイルに誘起される電圧は、N 個のコイルの場合には、それがN 倍されるという当然の結果である。
- ・二つのソレノイドを直列にすれば、誘起される電圧は2倍になるのも明らかである。つまり、ソレノイドの場合には、個数をN倍にすれば、電圧もN倍になる。このとき、合計の巻き数は、当然、

N倍となる。

・一方、トランスの場合には、巻き数をN倍すれば、誘起される電圧は N^2 倍になる。

ソレノイドもトランスも原理は同じにも拘わらず、この違いは何であろうか? (ソレノイドの電圧は、個数の2乗には比例しないのである。)

それへの回答は、公式の中にある「長さ」を考えに入れることである。

$$L(\text{solenoid}) \propto Nn \propto N^2 / \ell$$
, $L(\text{trans.}) \propto N^2 / C$

つまり、ソレノイドを直列につないだ場合は、実効的に、N は 2 倍になるが、n は変わらない。よって、電圧は 2 倍なる。トランスの場合は、巻き数が増えても、path length、C は変わらないので、巻き数の二乗に比例して電圧が増えるのである。一個のソレノイドで、長さを変えないで、巻き数を 2 倍にした場合には、電圧は、4 倍になるのである。

(1) Maxwell 方程式による Faraday の法則の導出

もう一度、ファラデーの法則を書いておくと、

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$
 (168)

である(notation は省略)。一方、マックスウェル方程式のスカラー・ポテンシャルの周回積分は、ゼロであったので、

$$-\Delta \Psi = 0 = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \oint \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$
 (169)

次に、電場、 ${\bf E}$ を電荷が感じる「真の電場」、ローレンツ電場、 ${\bf E}_L$ に変えるために、式(169)を変形すると、

$$-\Delta \Psi = 0 = \oint (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} + \oint \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{B} \times \mathbf{v} \right) \cdot d\mathbf{s}$$

$$= \oint \mathbf{E}_{L} \cdot d\mathbf{s} + \oint \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{v} \right) \cdot d\mathbf{s}$$
(170)

となる。ここで、一般に、あるベクトルの線積分の時間変化は、

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \oint \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{v} \right) \cdot d\mathbf{s}$$
 (171)

であったことを思い出すと (例えば、「ベクトル解析」を参照)、

$$-\Delta \Psi = 0 = \oint \mathbf{E}_L \cdot d\mathbf{s} + \frac{d}{dt} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$
 (172)

と変形できる。同じことであるが、磁場、Bで表すと、

$$\oint \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{B} \times \mathbf{v} \right) \cdot d\mathbf{s} = \int \left(\frac{\partial \left(\nabla \times \mathbf{A} \right)}{\partial t} + \nabla \times \left(\mathbf{B} \times \mathbf{v} \right) \right) \cdot d\mathbf{S}$$

$$= \int \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \left(\operatorname{div} \mathbf{B} \right) \mathbf{v} + \nabla \times \left(\mathbf{B} \times \mathbf{v} \right) \right) \cdot d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$
(173)

である。ただし、 $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ を三番目の式に使っている。よって、これから、

$$\oint \mathbf{E}_L \cdot d\mathbf{s} + \frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$
 (174)

となるのである。

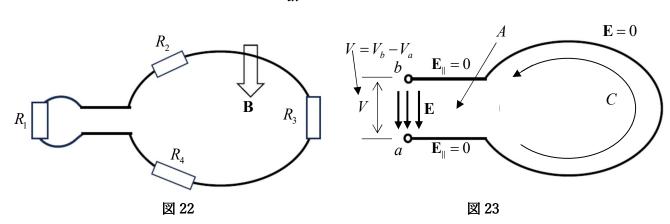
以下、(若干、繰り返しになるが)式(172)を使った説明をしておこう。まず、オームの法則が成り立つとすると、

$$\oint \mathbf{E}_{L} \cdot d\mathbf{s} = \oint \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \cdot d\mathbf{s} = \oint \rho \frac{\mathbf{I}}{S(s)} \cdot d\mathbf{s}$$

$$= \sum \rho \frac{\Delta s}{S(s)} I = \sum R I$$
(175)

に注意すると、 \mathbf{Z} のように、コイルの両端に抵抗(R_{I})を付けた場合で、かつコイル自体にも抵抗がある場合、

$$R_{total}I = -\frac{d}{dt} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \tag{176}$$



となる。ここで、 R_{total} は、回路全体の抵抗(付加した抵抗とコイルの抵抗の和)である。次に、**図 23** のように、コイルの外部で磁場がない場所で、導線(静止していると仮定)を切って、その両端で電圧を測定したとしてみよう。すると、導体内では、電場はゼロであり、図の A 部でも導体内はゼロであるが、その導体表面には、表面の垂直方向に電場が発生している。よって、電圧、V は、図で、

$$V = \int_{a}^{b} \operatorname{grad} V \cdot d\mathbf{s} = -\int_{b}^{a} \operatorname{grad} V \cdot d\mathbf{s} = \int_{b}^{a} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

となることから、 $V = \oint_C \mathbf{E}_L \cdot d\mathbf{s}$ と書けることがわかる。これから、通常、Faraday の法則として記述 されている、

$$V = -\frac{d}{dt} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi}{dt}$$
 (177)

が得られる。ここで、Aが外場によるものであるとすると、

$$V = -\frac{d}{dt} \oint \mathbf{A}_{ext} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_{ext}}{dt}$$

$$= -\int \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A}_{ext} \cdot d\mathbf{S} - \oint ((\nabla \times \mathbf{A}_{ext}) \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{s}$$

$$= -\int \frac{\partial \mathbf{B}_{ext}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_{ext}) \cdot d\mathbf{s}$$
(178)

となる。最後の項は、動く部分が直線で、速度が一定で(直線全体が同じ速度で)、かつ、磁場もそこでは一定である場合には、

$$\phi(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l} \rightarrow vBl$$

最後の式は、動く直線の長さをlとし、直線方向、速度、磁場の方向が互いに垂直である場合の式である (これは、項目($\mathbf{j-2}$)での式と同じである)。次に、 \mathbf{A} が自己場のみによるものとすると、

$$V = -\frac{d}{dt} \oint \mathbf{A}_{self} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d(LI)}{dt}$$
 (179)

ここで、L は自己インダクタンスである。ここで、さらに電圧、V が抵抗によるものとして、かつ外部の磁場が回路に働くとすると、一般的な Faraday の法則が、

$$\frac{d(LI)}{dt} + RI = V_{ext}$$

$$V_{ext} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}$$
(180)

と書けることもわかる。さらに、今までの議論からわかるように、コイルに抵抗がある場合には、この抵抗を上のRに含めればよいこともわかる。

(m) キルヒホッフの法則のための基本式

すでに説明したことであるが、上述の記述は些か込み入っているように見えるかもしれないので、後のために、つまりキルヒホッフの法則に関する説明に必要な二つの基本式を以下に簡潔にまとめておく。

最初の式は、電荷保存則を見かけ上、電流保存則のような形に書いたものである(式(23)、(24)の再掲)。

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \tag{181}$$

ここで、

$$\mathbf{J} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{182}$$

である(再度、これは電流保存則でないことに注意。)

「コメント]

 $div \mathbf{B} = 0$ であることから、 $\mathbf{B} = rot \mathbf{A}$ と書けるのと同じように、式(181)から、

$$\mathbf{J} = \operatorname{rot} \mathbf{G} \tag{183}$$

と書けるはずであるが、この世(現実の世界)では、このGが、実は磁場、Hとなっているのである。

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

なお、この式については、「回路へのコメント(III)」でも、再度、簡単に触れる予定である。

多分、電荷保存則は、物理学の基本法則の中でも最上位の一つに挙げられるものであろう。そしてこれから、キルヒホッフの第一法則(KCL)が導かれるのである。また、ある場所(ある点)には電荷の「溜め」がないとすると、そこでは、式(181)は、電流保存の式、

$$\nabla \cdot \mathbf{i} = 0 \tag{184}$$

となり、電流が保存されるのである。しかも、時間変動がある場合でも、これは成り立つのである。また、このシンプルな式には、電場や磁場は(直接には)含まれていないし、Maxwell 方程式も直接には関与していない。よって、これらの式は、電場や磁場を「人為的」に変えても、はたまた Maxwell 方程式が修正されたとしても、「我関せず」、単に電荷が保存(または電流が保存)すると言っているのである。また、図 7([わき道(Digression)の中の図])の箇所で、電気学科の学生は電場とかいう概念は頭になく(または、それをわきにおいて)、電流保存(+オームの法則)だけから次の関係式を使って、解答するであろう。

$$I = V / R$$

(勿論、電場を積分した電圧は経路(回路の線)によらず、変わらないということを前提として・・) さて、キルヒホッフの法則の説明に必要なもう一つの式は、(k)項で説明した、

$$\oint \mathbf{E}_{L} \cdot d\mathbf{s} + \frac{d}{dt} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 0 \tag{185}$$

である。これから、キルヒホッフの第二法則(KVL)が導かれるのである。ここで、 \mathbf{E}_L の下付きの添え字、Lはローレンツ電場であることを強調してつけているが、実際に電荷が感じる「真の」電場であるので、Lを落として書いてもよいであろう。

[コメント]

磁場があると、 \mathbf{E}_L は「本来の」方向から外れ、Hall 効果のような影響があるのではと心配されるかもしれないが、導線の方向(電流が流れる方向)と垂直の方向の電場は、ほぼ一瞬にしてゼロになる(これは、導体内の電場は、電流が流れない場合はゼロであるという「大前提」による。具体的は導線の側壁に電荷が誘起されて、垂直方向の電場はキャンセルされるので、実際上は、 $\mathbf{E}_L \cdot d\mathbf{s} = E \, ds$ としてよいであろう。 $\mathbf{E} = \mathbf{j}/\sigma \, \to \, \mathbf{E} \, \| \, \mathbf{j} \, \to \, \mathbf{E} \, \| \, d\mathbf{s}$ として(実用上は)よいことに注意。

また、当然のことではあるが、式(185)のベクトル・ポテンシャルの積分は(後での引用のために、再度、丁寧に書けば)、

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \frac{d}{dt} \int \text{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{d\Phi}{dt}$$
 (186)

であるので、式(185)は、Faraday の法則の形、

$$\oint \mathbf{E}_L \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{187}$$

にも書けるのであった。

「回路へのコメント (III)」で説明するように、キルヒホッフの法則の導出には、この二つの式だけが必要であり、他の物理的な式は必要ではないのである。おまけに、この二つの式が成り立つためには、「低周波であること」といった制約はないのである。もっとも高周波でこの二つの式が有効かどうかは別問題であるが・・・。一方では、例えば、(一般の)回路素子の内部を解析しようとする場合には、明らかに、この二つだけでは、不十分であろう。

さて、今一度、若干、異なる点から、Faradayの法則を見てみよう。議論は、ほとんど、(c)、(d)項で述べたことの繰り返しであると見なせるものであるが、式(185)はどこから出てきたかを思い出すと、

$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow rot\mathbf{E} = -\frac{\partial rot\mathbf{A}}{\partial t} \rightarrow rot\left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$$
 (188)

であるので、あるスカラー関数、Ψを使って、

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\text{grad}\Psi \tag{189}$$

と書け、この一周積分を考えると、

$$\oint \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s} = -\Delta \Psi = 0$$
(190)

となることからであった。今、場が軸対称であると仮定すると、それを中心として真空中に描いた円 (または絶縁体の円)を考えると、円上で、

$$\oint \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s} = 0$$
(191)

であり、かつ、軸対称であることから (Aも軸対称にすると)、円の接線方向のどこでも、

$$\left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)_{\parallel} = \text{const.} = 0 \tag{192}$$

となることがわかる。つまり、図 24(a)の a-b 端子間のスカラー関数の差は、

 $\Delta \Psi(a-b) = \int_a^b \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s} = 0$ となり、ゼロであることがわかる。スカラー関数は電圧と見なせる

ものであったので、電圧差がゼロになる。例えば、点、a、bからツィスト線を引き出して、a'、b'間の電圧を測ると、その差はゼロとなるのである(今の場合には、点、a、bは必ずしも接近している必要はない)。以上のような考察からも、電場が「純粋に」磁場変動から誘起される場合には、電圧は発生しないことがわかる。

一方、導体(完全導体)中では、電場はゼロであるので、図 24(b)の a-b 端子間の電圧差は、式

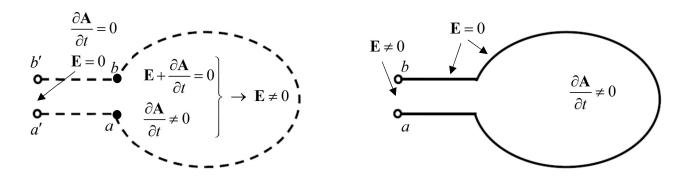


図 24

(190)から、

$$\Delta \Psi = -\int_{a}^{b} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \approx -\oint \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi}{dt}$$
(193)

となるのであった。ここで、Maxwell の方程式である式(188)から導いた式(190)において、勝手に電場、 $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ としてよいのかという(これまでも述べてきた)疑問について再度、コメントしておこう。 導体中でも、磁場変動を満たすように、

$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

は成り立っているのであるが、導体の場合には、この電場をキャンセルするような電場、E'が a-b 間の電圧によって発生しているのである。

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}' = 0$$
 (in the conductor), $\operatorname{rot} \mathbf{E}' = 0$ (194)

そして、式(188)は、

$$\operatorname{rot}(\mathbf{E} + \mathbf{E}') = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow \operatorname{rot}\left(\mathbf{E} + \mathbf{E}' + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0 \tag{195}$$

となる(よって、Maxwell 方程式は満たしている)。さらに、式(189)は、

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}' + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\text{grad}\Psi \rightarrow \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\text{grad}\Psi \text{ (in the conductor)}$$
 (196)

となって、式(193)が成り立つのである。電場の場合には、このように、内部に、自発的に電圧が発生して、電場をキャンセルしているのである(しかし、実際に電場がどうなっているかを求めるには、多分、全体の系について Maxwell 方程式を解かなければいけないであろうが・・・)。一方、磁場の場合には、高周波でない限り、磁場は真空中とほとんど変わらず、導体内に侵入するであろう(磁場が導体から排除されるような場合については、以下の「さらなる余分なコメント」を参照のこと)。よって、変動磁場によって誘起される電流の影響が無視できる場合には、第一近似では、式(185)、(190)の \mathbf{A} は導体中でも変わらないとしてよいであろう。いずれにしろ、適当な(適切な)物理的考察に基づくのあれば、一見、身勝手で、いい加減とも思えるような変更を \mathbf{E} (場合によっては \mathbf{A})に加えてよいであろう。言い換えれば、導体中では、(真空中での)磁場変動によって誘起される電場をキャンセルするように電圧が発生し、この電圧が $\mathbf{Faraday}$ の法則の誘導電圧になるのである。そして、この場

合、回路を一周した後のスカラー関数(スカラー・ポテンシャル)の変化が、 $\Delta \Psi(C) = 0$ であるべし

(位置の関数だから当然、成り立つ)という一種の guiding principle を課すことで、複雑な解析をしないでも電圧が求まるのである。これは、式(185)から導かれるキルヒホッフの第二法則(KVL)を課すことと同じことになるのである。

[若干、余分なコメント]

式(185)を再度、書くと、

$$\oint \mathbf{E}_L \cdot d\mathbf{s} + \frac{d}{dt} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

であるが、ここで二つの変換を考えよう。

(1) $\mathbf{E}'_{L} = \mathbf{E}_{L} - \operatorname{grad} \phi$ と変換しても、上の式は、周回積分であるので、当然、

$$\oint \mathbf{E}'_L \cdot d\mathbf{s} + \frac{d}{dt} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

という式が成り立つ。例えば、Faraday の法則で発生する誘導電圧に逆電圧をかけてキャンセルする、または global な逆電場をかけてキャンセルしても、この式は成り立つのである。これから、電圧はいつでもゼロである、ゼロにできることから、この法則はおかしいという結論を導いてもよいように見える。しかし、このような結論(詭弁)をまともに認める方は多くはないであろう(人為的に、逆電圧、逆電場をかけているので・・・)。

(2) $\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \operatorname{grad} \psi$ と変換しても、同様に、

$$\oint \mathbf{E}_L \cdot d\mathbf{s} + \frac{d}{dt} \oint \mathbf{A}' \cdot d\mathbf{s} = 0$$

という式は成り立つ。この変換によって、局所的には \mathbf{A}' を(ほぼ)ゼロにすることができる。よって、

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \left(\sum L_i\right) I$$

であることから、ある場所のインダクタンス、 L_i を(ほぼ)ゼロにすることができる。つまり、インダクタンスという概念はほとんど意味がなく、いつでも適当な値をとることができるという(おかしな)結論に導かれる。しかし、この式が言っている意味は、あくまでも、

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \oint \mathbf{A}' \cdot d\mathbf{s} = L_{total} I$$

ということを言っているのである。よって、場所ごとに異なる変換をしたベクトル・ポテンシャルをとって、各場所のインダクタンスを「局所的に」計算したものの和をもって、 L_{total} とすることは保証していないのである。よって、局所的に $\mathbf A$ をゼロにした場合(特にそのような場合には)、必ず、きちんと周回積分を行う必要があるのである。しかし、通常は、 $\mathbf A$ (より正確には $\mathbf A \cdot d\mathbf s$)があまり広がっていない場合を考えて(多くの場合、あまり広がっていない磁場を使って計算して)、周回積分を局

所的な積分の和としている(と近似しているのである)。逆に、**A**が広がっている場合を取り上げてみよう。一様磁場の場合には、次のような二通りの表式がよく使われている。

$$A = (-By/2, Bx/2, 0), A' = (0, Bx, 0)$$

ここで、 $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{A}' = \mathbf{B} = (0, 0, B)$ であり、 $\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \operatorname{grad} \phi$, $\phi = -Bxy/2$ である。明らかに、

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int \text{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int \text{rot} \mathbf{A}' \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{A}' \cdot d\mathbf{s} = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B S$$

である。また、同じことであるが、

$$\oint \mathbf{A}' \cdot d\mathbf{s} = \oint (\mathbf{A} - \operatorname{grad} \phi) \cdot d\mathbf{s} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

であり、どちらの表式を使っても、同じ結果が得られることが確認される。ついでに、余分かもしれないが、あからさまに成分で書いても同じであることを確認しておこう。

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \oint \left(-\frac{By}{2} dx + \frac{Bx}{2} dy \right) = \frac{B}{2} \int -d(ydx) + d(xdy)$$
$$= \frac{B}{2} \int 2dxdy = B \int dxdy = BS$$

$$\oint \mathbf{A}' \cdot d\mathbf{s} = \oint B \, x dy = B \int d(x dy) = B \int dx dy = B \, S$$

(「普通の | Stokes の公式より、微分形式の計算の方が機械的で簡単。)

以上のように、周回積分は、両者は一致するが、局所的な計算では、例えば、

$$\int_0^a \mathbf{A}_x(x,b) dx = -Bba/2 , \quad \int_0^a \mathbf{A}_x'(x,b) dx = 0$$
$$\int_0^b \mathbf{A}_y(a,y) dy = Bba/2 , \quad \int_0^b \mathbf{A}_y'(a,y) dy = Bba$$

となり、一致しないのである。

「さらなる余分なコメント〕

回路的には導線は(大抵の場合)太さのない導体と見なしている。上述の電場やベクトル・ポテンシャルを線積分で扱っているのは、その典型の一つであろう。しかし、上の議論で、(完全)導体中では電場はキャンセル、一方では導線(導体)があっても磁場は変化しないとしたのは、本当に OK であろうか? 伝導率が非常に大きい場合で、導体の太さが有限であるとすると、(変動)磁場は導体中には侵入しないので、導体があっても磁場に変化がないとしたのは明らかにおかしいのではないか?

この疑問は正しいのであるが、一方では、本文中で述べたことも正しいということを、以下にコメントしよう。その前に、まず、表皮効果について復習しよう。 \sinh depth δ の表式

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$$

は、概略、次のように求められるのであった。

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} = \mu_0 \sigma \mathbf{E} \quad , \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} = -\mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta \quad , \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \mathbf{B} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

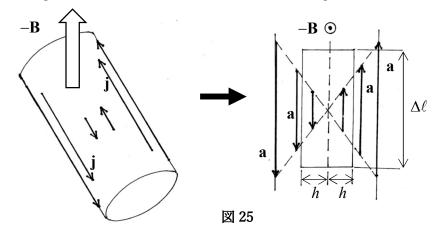
 $\mathbf{B} \propto e^{ikx-i\omega t}$ の依存性を仮定すると、 $k^2 = i\mu_0\sigma\omega$

$$k = \pm \sqrt{\mu_0 \sigma \omega} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) \implies \delta \left(\text{skin depth} \right) = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$$

よって、伝導率が大きく、周波数が高くなるに従って、skin depth は小さくなるが、導線の太さが skin depth に比して(十分)細い場合には、磁場はほぼ導線全体に入り込むことになる。つまり磁場は導線内でもほとんど変化しないと見なせる。

では逆に、導線の太さに比して、skin depth が十分小さい場合、極端な場合、skin depth がゼロの場

合はどうなるであろうか。この場合、磁場は完全に導線(導体)の外に追い出されることになる。そして、導体内では、磁場を追い出すように(キャンセルするように)渦電流が流れることになる(図 25 を参照)。すると、導体内では、電場もゼロ、磁場もセロとなり、「物理的な」場がゼロであることから、真空中と同じと同じ



と見なせることになる。よって、**図 24** のコイルの両端、a,bの間には電圧も発生しないであろうと思われるかもしれない。しかし、実際には、

$$V_{a-b} \approx -\frac{\partial}{\partial t} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

という、ベクトル・ポテンシャルによる電圧が発生しているのである(ここで、もしかしたら、Bohm-Aharonov 効果と「類似」しているかもと思うかもしれない?)。さて、**図 25** から、磁場を導体から追い出すように流れる渦電流によるベクトル・ポテンシャル、**a** の大きさは(渦電流と**a** が同じ方向であることを考えると)、超概略的には(「2 次元化した」ポンチ絵的には)、

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = -\mathbf{B} \implies 2a\Delta \ell = 2Bh\Delta \ell \implies a = Bh$$

としてよいであろう。一方、ループ状のコイルによるベクトル・ポテンシャルの大きさは(ループはほぼ円形で、半径をRとすると)、

$$2\pi R A = \pi R^2 B \implies A \approx B R$$

となる。よって、ループの大きさに比して、導線が十分、細い場合には、伝導率が非常に大きくても、ベクトル・ポテンシャルへの影響はほぼ無視できることになる(導体内では磁場が大きく変化してゼロとなっているにもかかわらず・・・)。なお、導体の近傍から外れた点から見ると、渦電流は接近し

た逆方向に流れる電流に見えるので、ベクトル・ポテンシャルは導体から離れると速やかに減衰するであろうことがわかる。一方、磁場はベクトル・ポテンシャルの微分であるので、導体内及びその近傍では小さくない(印加された磁場、Bのオーダーである)。しかし、電圧への影響を磁場で書くと、

$$\frac{\partial}{\partial t} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\partial}{\partial t} \int \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

であるので、導体の近傍で磁場が大きく変化しても、ループの面積が導体近傍(磁場が変化している 領域)の面積よりかなり大きい場合には、磁場の変化による影響は軽微であると見なすことができる であろう。以上のことから、導線が細い場合には、それがないと思って(磁場には変更がないと思っ て)、誘導電圧を求めてよいことがわかるのである。

余分なコメントついでに、もう一つ余分なコメントをしておこう。(1)コイル端、aから単位電荷を力学的な力でもう一方のコイル端、bまで、電圧に(または電場に)抗して、準静的に引き上げたとすると、その電荷には、ポテンシャル、Vが与えられることになる。(2)次に、aからループを回って単位電荷を引き上げようとすると、今度は電場がゼロであるので、力は要らず、bまで引き上げることが可能となる。しかし、それにもかかわらず、bでのポテンシャル、Vが付与されるのである(何かおかしいと思われるかも・・?)実は、(2)の場合は、(1)のように電荷を引き上げる力を外から加えなくても、すでに内にその力が存在するのである。それは、導線の存在によってほとんど影響を受けない磁場変動による誘導電場である。つまり、真空中の誘導電場、

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

である。これはベータトロン加速の電場と言ってもよいものであるが、今の場合には電圧、Vによる電場と釣り合っており、これが(1)の力学的な力に相当しているのである。このように考えると、(1)の場合と同じように、単位電荷がbまで引き上げられると、ポテンシャル、Vが与えられるということが納得されるであろう。また、これが、「ベクトル解析の補遺」の中で説明した、-符号をつけないで真空中の誘導電場をそのまま積分したものが「正しい符号の」電圧を与えているという理由(理屈)でもある。

しかし、あまり理屈をこねていると、ややもすると間違えることもあるので、繰り返しにはなるが、 以上のことを次のようにまとめておこう。

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \Psi$$

から、

(1) 磁場がない(より正確には $\partial \mathbf{A}/\partial t \approx 0$ または $\partial \mathbf{A}/\partial t \cdot d\mathbf{s} \approx 0$)

$$V = \Psi(b) - \Psi(a) = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

(2) 電場がない

$$V = \Psi(b) - \Psi(a) = -\int_{a}^{b} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

さて、電荷保存則も、電場とか磁場とのかの詳細に関係なく、電荷は保存すべしという guiding

principle と見なすことができる。つまるところ、キルヒホッフの法則とは、二つの guiding principle のことであるとも言えて、この二つで回路網が解けるということになる。guiding principle だけで、問題が解けてしまうというのは、ある意味、驚くべきことであろう。一方、この解ける、つまりきちんと電流、電圧の解が求まったとしても、求まった解が一意的でなければ意味を失うであろう。この解けることとその一意性を示そうという試みが「回路へのコメント(III)」のテーマとなっている。

なお、「回路へのコメント(III)」で説明するが、式(187)ように面積分を使った式ではなく、式 (185)のように線積分のままの方が、一般的な回路網での解の一意性を証明するのに有効であることも 付け加えておこう。

[弁解:モーターに関する解説の割愛]

当初の原稿案では、この項に、Faraday の電磁誘導の法則が活躍するモーターについても記述する予定でいたが、意外に、この項の分量が大きくなってしまったので、割愛することにした。実際、モーターをきちんと解説しようとすると、明らかにこの項の比重が大きくなってしまうであろう。しかし、本当の理由を暴露すれば、よく勉強した上でこれを執筆しないといけない、つまり相当の時間がかかることがわかったためである。将来(遠い将来?)、モーターに関する解説もできれば追加するつもりである。