Appendix E： 楕円積分と円形ループ電流による磁場

楕円積分（elliptic integral）

楕円関数に踏み込もうとすると若干の知識（複素関数論等）を必要とするが、楕円積分の範囲に留まる限り、計算は初等的で、理解も容易である。

まず、

$$\Delta = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} \tag{E-1}$$

と定義すると、

$$\sin^2\varphi = \frac{1-\Delta^2}{k^2}\ ,\quad \cos^2\varphi = \frac{k^2-1+\Delta^2}{k^2}\ ,\quad \frac{d\Delta}{d\varphi} = -\frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} \tag{E-2}$$

となる。次のよく知られた楕円積分（第一種、第二種、第三種）を書いておこう。楕円積分の notation にはいくつかあるが、ここでは次のように定義する（なお、modulus の定義の内容を取り違えると、混乱することになる）。

第一種楕円積分

$$F = F\left(\varphi|k^2\right) = \int_0^{\varphi}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi = \int_0^{\varphi}\frac{1}{\Delta}d\varphi \tag{E-3}$$

第二種楕円積分

$$E = E\left(\varphi\,|\,k^2\right) = \int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = \int_0^{\varphi}\Delta\,d\varphi \tag{E-4}$$

第三種楕円積分

$$\Pi = \Pi\left(n;\varphi\,|\,k^2\right) = \int_0^{\varphi}\frac{1}{\left(1-n\sin^2\varphi\right)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi = \int_0^{\varphi}\frac{1}{\left(1-n\sin^2\varphi\right)\Delta}d\varphi \tag{E-5}$$

本稿では、次の形の積分のみが必要で、これは第二種楕円積分で表すことができる（式(E-11)を参照)。

$$\Pi\left(k^2;\varphi\,|\,k^2\right) = \int_0^{\varphi}\frac{1}{\left(1-k^2\sin^2\varphi\right)\Delta}d\varphi = \int_0^{\varphi}\frac{1}{\Delta^3}d\varphi \tag{E-6}$$

次の文献に、楕円積分に関する以下の公式が載っているが、多分、これらは有用であろうと思われるので、ここに転載することにする（本稿で実際に使うのは、一部であるが・・・）

Ref. A) A. L. Baker, ”Elliptic Functions”, John & Sons, 1890

$$\int_0^{\varphi}\frac{\sin^2\varphi}{\Delta}d\varphi=\frac{F-E}{k^2} \tag{E-7}$$

これは、(E-2)の第一式から直ちに導かれる。

$$\int_0^{\varphi}\frac{\cos^2\varphi}{\Delta}d\varphi=\frac{E-\left(1-k^2\right)F}{k^2} \tag{E-8}$$

これは、$\cos^2\varphi=1-\sin^2\varphi$ から導かれる。

$$\int_0^{\varphi}\frac{\tan^2\varphi}{\Delta}d\varphi=\frac{\Delta\tan\varphi-E}{1-k^2} \tag{E-9}$$

これは、

$$\frac{d\left(\Delta\tan\varphi\right)}{d\varphi}=\frac{-k^2\sin^2\varphi}{\Delta}+\frac{\Delta}{\cos^2\varphi}=\frac{\left(\Delta^2-1\right)}{\Delta}+\frac{\Delta}{\cos^2\varphi}$$

$$=\Delta+\frac{-\cos^2\varphi+1-k^2\sin^2\varphi}{\Delta\cos^2\varphi}=\Delta+\frac{\left(1-k^2\right)}{\Delta}\tan^2\varphi$$

であることから導かれる。

$$\int_0^{\varphi}\frac{\sec^2\varphi}{\Delta}d\varphi=\frac{\Delta\tan\varphi+\left(1-k^2\right)F-E}{1-k^2} \tag{E-10}$$

これは、$\sec^2\varphi=1+\tan^2\varphi$ から直ちに導かれる。

$$\int_0^{\varphi}\frac{1}{\Delta^3}d\varphi=\frac{1}{1-k^2}\left(E-\frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}\right) \tag{E-11}$$

これは、まず、式(E-13)が導かれているとすると、(E-2)の 2 番目の式から、

$$\int_0^{\varphi}\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^3}d\varphi=\int_0^{\varphi}\frac{k^2-1+\Delta^2}{k^2\Delta^3}d\varphi=\frac{k^2-1}{k^2}\int_0^{\varphi}\frac{1}{\Delta^3}d\varphi+\frac{1}{k^2}F$$

となるが、これに式(E-13)を適用すれば、導かれる。この式(E-11)が先に述べた式(E-6)である。

$$\int_0^{\varphi}\frac{\sin^2\varphi}{\Delta^3}d\varphi=\frac{1}{1-k^2}\left(\frac{E-\left(1-k^2\right)F}{k^2}-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}\right) \tag{E-12}$$

これは、式(E-11)から式(E-13)を引けば、導かれる。

$$\int_0^{\varphi}\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^3}d\varphi=\frac{F-E}{k^2}+\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} \tag{E-13}$$

これは、

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}\right)=\frac{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{\Delta}+\sin\varphi\cos\varphi\frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^3}$$
$$=\frac{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{\Delta}+\frac{\left(1-\Delta^2\right)\cos^2\varphi}{\Delta^3}=-\frac{\sin^2\varphi}{\Delta}+\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^3}$$

から導かれる。

なお、完全楕円積分は、

$$K\left(k\right)=F\left(\frac{\pi}{2}\,|\,k^2\right)=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi \tag{E-14}$$

$$E\left(k\right)=E\left(\frac{\pi}{2}\,|\,k^2\right)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi \tag{E-15}$$

と与えられる（ここで、突然、modulus を「古い」定義に戻している）。これを使うと、式(E-7)、式(E-8)から、

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\varphi}{\Delta}d\varphi=\frac{K\left(k\right)-E\left(k\right)}{k^2} \tag{E-16}$$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\varphi}{\Delta}d\varphi=\frac{E\left(k\right)-\left(1-k^2\right)K\left(k\right)}{k^2} \tag{E-17}$$

となる。また、式(E-11)、式(E-12)、式(E-13)から、

$$\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\Delta^3}d\varphi=\frac{E\left(k\right)}{1-k^2} \tag{E-18}$$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\varphi}{\Delta^3}d\varphi=\frac{E\left(k\right)-\left(1-k^2\right)K\left(k\right)}{k^2\left(1-k^2\right)} \tag{E-19}$$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^3}d\varphi=\frac{K\left(k\right)-E\left(k\right)}{k^2} \tag{E-20}$$

が得られる。

［蛇足１］　簡単な計算（級数展開）による $\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\Delta^3}d\varphi=\frac{E\left(k\right)}{1-k^2}$ の証明

この箇所は、ほとんど「遊び」に近いかもしれないが、個人的な趣味で掲載した。

まず本当にこの関係が成り立っていそうかどうかを簡単に確かめてみよう。

$1/\left(1-x\right)^{3/2}$ を二項展開（binomial expansion）すると、

$$1/\left(1-x\right)^{3/2}=1+\frac{3}{2}x+\frac{15}{8}x^2+\cdots$$

これに、$x=k^2\sin^2\theta$ を代入して、$\left[0,\ \pi/2\right]$ で積分すると、

$$\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\Delta^3}d\varphi=\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}k^2\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{15}{8}k^4\cdot\frac{3\pi}{16}+\cdots\right) \tag{E-21}$$

となる。一方、

$$\left(1-x\right)^{1/2}=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\cdots$$

についても、同様な積分を行うと、

$$\int_0^{\pi/2}\Delta\,d\varphi=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}k^2\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{8}k^4\cdot\frac{3\pi}{16}-\cdots\right) \tag{E-22}$$

となる。式(E-21)に $1-k^2$ をかけて、k の冪の係数を求めると、

$$\begin{aligned}
k^0:&\quad \frac{\pi}{2}\\
k^2:&\quad \frac{3}{8}\pi-\frac{\pi}{2}=-\frac{1}{8}\pi\\
k^4:&\quad \frac{15}{8}\cdot\frac{3}{16}\pi-\frac{3}{8}\pi=-\frac{3}{8\cdot 16}\pi
\end{aligned}$$

となり、式(E-22)の展開の 3 項までは一致することがわかる。よって、すべての項でも一致するであろうと期待されるので、それをきちんと計算してみよう。

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\cdot\left(-1\right)^n k^{2n}\sin^{2n}\varphi$$

であるので、

$$E\left(k\right)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)k^{2n}\frac{\left(2n-3\right)!!}{\left(2n\right)!!}\cdot\frac{\left(2n-1\right)!!}{\left(2n\right)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

となる（少し計算を省略)。同様にして、

$$\frac{1}{\Delta^3}=\frac{1}{\left(1-k^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{3}{2}-n+1\right)}{n!}\cdot\left(-1\right)^n k^{2n}\sin^{2n}\varphi$$

であるので、

$$\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\Delta^3}d\varphi=1+\sum_{n=1}^{\infty}k^{2n}\frac{\left(2n+1\right)!!}{\left(2n\right)!!}\cdot\frac{\left(2n-1\right)!!}{\left(2n\right)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

となる。これに、$1-k^2$をかけて、k^{2n}の項を求めると（$n\geq 2$とする）、

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi}{2}k^{2n}\left[\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}-\frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\right]\\
&=\frac{\pi}{2}k^{2n}\frac{(2n-1)!!(2n-3)!!}{(2n)!!(2n)!!}\left[(2n+1)(2n-1)-(2n)(2n)\right]\\
&=-\frac{\pi}{2}k^{2n}\frac{(2n-1)!!(2n-3)!!}{(2n)!!(2n)!!}
\end{aligned}$$

となり、$E(k)$の展開と一致する。よって、$|k|<1$の範囲で完全に一致することがわかる（もし解析接続したとすると、すべてのkについて成り立つことになる）。

［蛇足２］$1/\Delta^5$を含む公式

次の項にある Ref. B では、磁場の空間微分の式が与えれているが、それを求めようとすると、$1/\Delta^5$を含む公式が必要となるであろう。そこで、この項で、その公式を与えておこう（詳細な途中経過は省く）。しかし、磁場の空間微分の公式を導くのは、かなり面倒そうであるのと、本稿では磁場の空間微分は使わないので、この磁場に関する公式の導出はしないことにしよう。

式(E-13)の導出に倣って、

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin\theta\cos\theta}{\Delta^3}\right)=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\Delta^3}-\frac{3}{2}\cdot\frac{-2k^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\Delta^5} \qquad \text{(E-23)}$$

ここで、$k^2\sin^2\theta=1-\Delta^2$を使うと、

$$3\int\frac{\cos^2\theta}{\Delta^5}d\theta=2\int\frac{\cos^2\theta}{\Delta^3}d\theta+\int\frac{\sin^2\theta}{\Delta^3}d\theta+\frac{\sin\theta\cos\theta}{\Delta^3} \qquad \text{(E-24)}$$

ここで、$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$を使うと、式(E-24)の左辺は、

$$3\int\frac{1}{\Delta^5}d\theta-3\int\frac{\sin^2\theta}{\Delta^5}d\theta \qquad \text{(E-25)}$$

となり、また、$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1+\dfrac{\Delta^2-1}{k^2}=\dfrac{\Delta^2+k^2-1}{k^2}$を使うと、この左辺は、

$$3\frac{k^2-1}{k^2}\int\frac{1}{\Delta^5}d\theta+\frac{3}{k^2}\int\frac{1}{\Delta^3}d\theta \qquad \text{(E-26)}$$

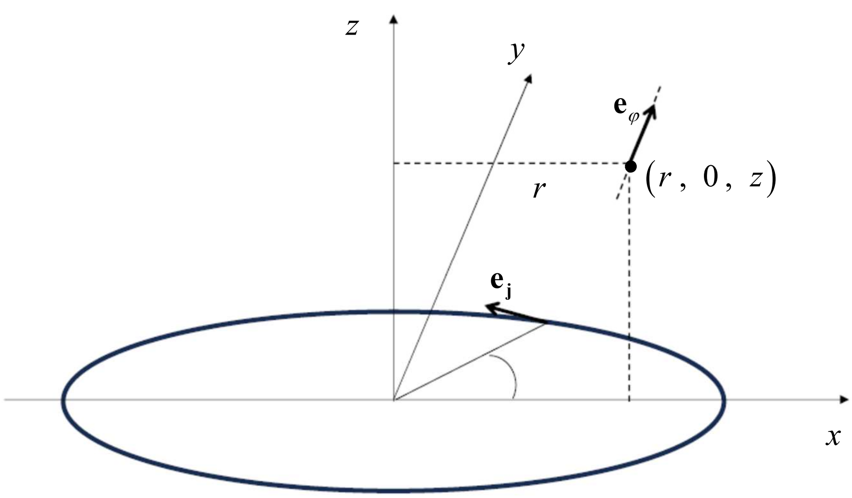
となる。以上より、

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\cos^2\theta}{\Delta^5}d\theta &= \frac{2}{3}\int\frac{\cos^2\theta}{\Delta^3}d\theta+\frac{1}{3}\int\frac{\sin^2\theta}{\Delta^3}d\theta \\
&\quad +\frac{\sin\theta\cos\theta}{3\Delta^3} \\
\int \frac{1}{\Delta^5}d\theta &= \frac{1}{1-k^2}\int\frac{1}{\Delta^3}d\theta-\frac{2}{3}\cdot\frac{k^2}{1-k^2}\int\frac{\cos^2\theta}{\Delta^3}d\theta-\frac{1}{3}\cdot\frac{k^2}{1-k^2}\int\frac{\sin^2\theta}{\Delta^3}d\theta \\
&\quad -\frac{1}{3}\cdot\frac{k^2}{1-k^2}\frac{\sin\theta\cos\theta}{\Delta^3} \\
\int \frac{\sin^2\theta}{\Delta^5}d\theta &= \frac{1}{1-k^2}\int\frac{1}{\Delta^3}d\theta-\frac{2}{3\left(1-k^2\right)}\int\frac{\cos^2\theta}{\Delta^3}d\theta-\frac{1}{3\left(1-k^2\right)}\int\frac{\sin^2\theta}{\Delta^3}d\theta \\
&\quad -\frac{1}{3\left(1-k^2\right)}\frac{\sin\theta\cos\theta}{\Delta^3}
\end{aligned}
\tag{E-27}
$$

積分範囲を$\left[0,\ \pi/2\right]$として、式(E-18)、(E-19)、(E-20)を代入すると（細かい計算は省略)、

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\theta}{\Delta^5}d\theta &= \frac{1}{3k^2\left(1-k^2\right)}\left(\left(2k^2-1\right)E\left(k\right)+\left(1-k^2\right)K\left(k\right)\right) \\
\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\Delta^5}d\theta &= \frac{1}{3\left(1-k^2\right)^2}\left(2\left(2-k^2\right)E\left(k\right)-\left(1-k^2\right)K\left(k\right)\right) \\
\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\theta}{\Delta^5}d\theta &= \frac{1}{3k^2\left(1-k^2\right)^2}\left(\left(k^2+1\right)E\left(k\right)-\left(1-k^2\right)K\left(k\right)\right)
\end{aligned}
\tag{E-28}
$$

となる。これらの公式は、手計算で導いたものであるが、Mathematica を使うと、たちまち導かれてしまうのある（よって、式(E-28)の公式は正しいはずである)。ただし、母数（modulus）を一般の変数にして計算しないと「たちまち」とはいかないようである（実数値の場合にはかなりの計算時間を要しているので、たとえば、母数を変えて多くの計算をする場合には、公式を使った方がよいであろう)。



円形ループ電流による磁場（ループの断面積、無限小）

まず、ベクトル・ポテンシャルは、一般に、

$$\mathbf{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{j}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV \tag{E-29}$$

と書けるが、図 E.1 のような円形ループ電流、座標を取ると、ベクトル・ポテンシャルの成分は、φ方向のみがゼロではなく、また、対称性から、A_φは、φ方向に一様であることがわかる。よって、計算しやすい点で、A_φを求めればよい。これらを考慮すると、

$$A_\varphi=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{\mathbf{e}_\varphi\cdot\mathbf{e}_\mathbf{j}\,ds}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{E-30}$$

を計算すればよいことがわかる。ただし、

$$\mathbf{e}_\mathbf{j}=\left(-\sin\theta,\ \cos\theta,\ 0\right),\quad \mathbf{e}_\varphi=\left(0,\ 1,\ 0\right)$$

とするのである。ここで、$\mathbf{e}_\mathbf{j}$は、円形ループ上の点での単位接線ベクトルであり、$\mathbf{e}_\varphi$は、$x-z$平面内でとったある点のφ方向（この場合、y方向と同じ）の単位ベクトルである。すると、

$$\mathbf{e}_\varphi\cdot\mathbf{e}_\mathbf{j}=\cos\theta,\quad ds=R\,d\theta \tag{E-31}$$

となる。さらに、$x-z$平面内の点の座標と円形ループ上の点の座標を、

$$\mathbf{r}=\left(r,\ 0,\ z\right),\quad \mathbf{r}'=\left(R\cos\theta,\ R\sin\theta,\ 0\right) \tag{E-32}$$

とすると、

$$\begin{aligned}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|&=\left(r-R\cos\theta\right)^2+R^2\sin^2\theta+z^2\\&=R^2+r^2+z^2-2r\,R\cos\theta\end{aligned} \tag{E-33}$$

となるので、式(E-30)は、

$$A_\varphi=\frac{\mu_0 IR}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{R^2+r^2+z^2-2r\,R\cos\theta}} \tag{E-34}$$

となる。ここで、$\cos\theta=2\cos^2\left(\theta/2\right)-1$を代入すると、式(E-34)は、

$$A_\varphi=\frac{\mu_0 IR}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2\cos^2\left(\theta/2\right)-1}{\sqrt{R^2+r^2+z^2+2r\,R-4r\,R\cos^2\left(\theta/2\right)}}d\theta \tag{E-35}$$

となるが、明らかに、cos を sin に変更してもよい。また、変数を$\theta/2 \to \theta$に変更し、さらに積分範囲を$\left[0, \pi/2\right]$とすると、「基本的な」式、

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 IR}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{2\sin^2\theta - 1}{\sqrt{R^2 + r^2 + z^2 + 2rR - 4rR\sin^2\theta}}d\theta \tag{E-36}$$

が得られる。ここで、

$$k^2 = 4rR/\left(R^2 + r^2 + z^2 + 2rR\right) \tag{E-37}$$

とおくと、式(E-36)は、

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{R}{\sqrt{R^2 + r^2 + z^2 + 2rR}}\int_0^{\pi/2} \frac{2\sin^2\theta - 1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}}d\theta \tag{E-38}$$

と変形される。今、

$$\Delta^2 = 1 - k^2\sin^2\theta \tag{E-39}$$

とおくと、$\sin^2\theta = \left(1 - \Delta^2\right)/k^2$であるので、被積分関数は、

$$\frac{2(1-\Delta^2) - k^2}{k^2\Delta} = \frac{2 - k^2 - 2\Delta^2}{k^2\Delta}$$

となる。再度、第一種、第二種の完全楕円積分を書いておくと、

$$K\left(k\right) = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}d\varphi,\quad E\left(k\right) = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi \tag{E-40}$$

であるので、

$$\int_0^{\pi/2}\frac{2\sin^2\theta - 1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}}d\theta = \frac{\left(2 - k^2\right)K\left(k\right) - 2E\left(k\right)}{k^2} \tag{E-41}$$

となり、最終的な結果が、

$$A_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{4IR}{\sqrt{R^2 + r^2 + z^2 + 2rR}}\left(\frac{\left(2 - k^2\right)K\left(k\right) - 2E\left(k\right)}{k^2}\right) \tag{E-42}$$

と求まる。

なお、次の文献には、円形のループ電流による磁場（及び空間微分）の厳密解が与えられている。

Ref. B）J. C. Simpson, J. E. Lane, C. D. Immer, R. C. Youngquist, “Simple Analytic

Expressions for the Magnetic Field of a Circular Current Loop", NASA/TM-2013-217919
なお、Stratton の教科書、"Electromagnetic Theory", McGraw-Hill Book Company, Inc, 1941 の p.263 にも磁場の厳密解が与えられている。ただし、B を H としたミスプリ（？）があるが・・
この中で、軸方向（z 方向）及び動径方向（r 方向）の磁場は、

$$B_r = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{z}{r} \cdot \frac{\left(R^2+r^2+z^2\right)E(k) - \left(R^2+z^2+r^2-2Rr\right)K(k)}{\left(R^2+z^2+r^2-2Rr\right)\sqrt{R^2+z^2+r^2+2Rr}}$$
$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\left(R^2-r^2-z^2\right)E(k) + \left(R^2+r^2+z^2-2Rr\right)K(k)}{\left(R^2+r^2+z^2-2rR\right)\sqrt{R^2+r^2+z^2+2rR}} \tag{E-43}$$

と与えられている。この導出は若干、面倒であると思われるので、一応、以下に、その導出を記載しておく（少し省略した個所もあるが・・・）。まず、上記の文献に倣って、以下のような記号を導入しよう。

$$C = \frac{\mu_0 I}{\pi}$$
$$\alpha^2 = R^2+r^2+z^2-2rR = \left(R-r\right)^2+z^2 \tag{E-44}$$
$$\beta^2 = R^2+r^2+z^2+2rR = \left(R+r\right)^2+z^2$$

すると、

$$k^2 = \frac{4rR}{\beta^2}, \quad \beta^2-\alpha^2 = 4rR, \; k^2 = 1-\alpha^2/\beta^2 \tag{E-45}$$

さらに、

$$D^2 = R^2+r^2+z^2+2rR-4rR\sin^2\theta = \beta^2\Delta^2 \tag{E-46}$$

としよう。さて、磁場は、

$$B_r = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \quad B_z = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(rA_\varphi\right)}{\partial r}$$

で与えられるが、最初に計算が簡単な、B_r を求めよう。式(E-36)から、

$$B_r = CR\int_0^{\pi/2}\left(2\sin^2\theta-1\right)\left(\frac{1}{2}\right)\frac{2z}{D^3}d\theta$$
$$= \frac{CRz}{\beta^3}\int_0^{\pi/2}\frac{2\sin^2\theta-1}{\Delta^3}d\theta \tag{E-47}$$

となる。これに、楕円積分の公式、式(E-18)、式(E-19)を代入すると、

$$\int_0^{\pi/2}\frac{2\sin^2\theta-1}{\Delta^3}d\theta=\frac{1}{1-k^2}\left(\frac{2E(k)-2(1-k^2)K(k)}{k^2}-E(k)\right)$$
$$=\frac{2-k^2}{k^2(1-k^2)}E(k)-\frac{2K(k)}{k^2} \tag{E-48}$$

よって、

$$B_r=\frac{CRz}{\beta^3k^2}\left(\frac{2-k^2}{1-k^2}E(k)-2K(k)\right) \tag{E-49}$$

ここで、

$$k^2\beta^2=4rR,\ \ 1-k^2=\alpha^2/\beta^2,$$
$$2-k^2=1+\alpha^2/\beta^2=\frac{2(R^2+r^2+z^2)}{\beta^2} \tag{E-50}$$

を代入すると、

$$B_r=\frac{CzR}{\beta 4rR}\left(\frac{2(R^2+r^2+z^2)}{\alpha^2}E(k)-2K(k)\right)$$
$$=\frac{Cz}{2\beta r\alpha^2}\left((R^2+r^2+z^2)E(k)-\alpha^2K(k)\right) \tag{E-51}$$

となり、元の変数で書けば、

$$B_r=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{z}{r(R^2+z^2+r^2-2Rr)\sqrt{R^2+z^2+r^2+2Rr}}$$
$$\cdot\left((R^2+r^2+z^2)E(k)-(R^2+z^2+r^2-2Rr)K(k)\right) \tag{E-52}$$

となる。次は、B_z であるが、これは、

$$B_z=\frac{A_\varphi}{r}+\frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \tag{E-53}$$

と二つの項からなる。式(E-36)から、

$$\frac{A_\varphi}{r}=\frac{CR}{r}\int_0^{\pi/2}\frac{2\sin^2\varphi-1}{D}d\varphi=\frac{CR}{r\beta}\int_0^{\pi/2}\frac{2\sin^2\varphi-1}{\Delta}d\varphi \tag{E-54}$$

$$\frac{\partial A_\varphi}{\partial r}=CR\int_0^{\pi/2}(2\sin^2\theta-1)\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2r+2R-4R\sin^2\theta}{D^3}d\theta$$
$$=-\frac{CR}{\beta^3}\int_0^{\pi/2}\frac{r+R-2R\sin^2\theta}{\Delta^3}(2\sin^2\theta-1)d\theta \tag{E-55}$$

この式(E-55)は、

$$\frac{\partial A_\varphi}{\partial r} = (I) + (II) \tag{E-56}$$

で、

$$\begin{aligned} (I) &= -\frac{CR}{\beta^3}\left(r+R\right)\int_0^{\pi/2}\frac{\left(2\sin^2\theta-1\right)}{\Delta^3}d\theta \\ (II) &= \frac{CR}{\beta^3}\int_0^{\pi/2}\frac{2R\sin^2\theta}{\Delta^3}\left(2\sin^2\theta-1\right)d\theta \end{aligned} \tag{E-57}$$

となる。このうち、$\left(I\right)$は、式(E-48)を使えば求まる。また、$\left(II\right)$は、$\sin^2\theta = \left(1-\Delta^2\right)/k^2$

を使うと、

$$\begin{aligned} &\left(II\right) = +\frac{CR}{\beta^3}\cdot\frac{2R}{k^2}\int_0^{\pi/2}\frac{\left(1-\Delta^2\right)\left(2\sin^2\theta-1\right)}{\Delta^3}d\theta \\ &= \left(III\right)+\left(IV\right) \\ &\left(III\right) = \frac{CR}{\beta^3}\cdot\frac{2R}{k^2}\int_0^{\pi/2}\frac{\left(2\sin^2\theta-1\right)}{\Delta^3}d\theta \\ &\left(IV\right) = -\frac{CR}{\beta^3}\cdot\frac{2R}{k^2}\int_0^{\pi/2}\frac{\left(2\sin^2\theta-1\right)}{\Delta}d\theta \end{aligned} \tag{E-58}$$

この(IV)は、$\beta^2k^2 = 4Rr$であることを使うと、式(E-54)の$-1/2$倍であることがわかる。

以上をまとめると、

$$\begin{aligned} B_z = &\frac{CR}{r\beta}\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^{\pi/2}\frac{\left(2\sin^2\theta-1\right)}{\Delta}d\theta \\ &-\frac{CR}{\beta r}\frac{\left(r+R\right)}{4R}k^2\int_0^{\pi/2}\frac{\left(2\sin^2\theta-1\right)}{\Delta^3}d\theta \\ &+\frac{CR}{\beta r}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\left(2\sin^2\theta-1\right)}{\Delta^3}d\theta \end{aligned} \tag{E-59}$$

これに、式(E-41)及び式(E-48)を代入すると、

$$B_z = \frac{CR}{2r\beta k^2}\left[\left(2-k^2\right)K\left(k\right)-2E\left(k\right)+\left(1-\frac{r+R}{2R}k^2\right)\left(\frac{2-k^2}{1-k^2}E\left(k\right)-2K\left(k\right)\right)\right] \tag{E-60}$$

となる。ここで、大括弧の中で、まず$K\left(k\right)$の係数を整理すると、

$$K(k):\ 2-k^2+-2+\frac{r}{R}k^2+k^2=\frac{r}{R}k^2$$

となり、これから、B_z の $K(k)$ の係数は、$C/2\beta$ となることがわかる。次に $E(k)$ の係数であるが、式(E-50)から、

$$\frac{2-k^2}{1-k^2}=\frac{2\left(R^2+r^2+z^2\right)}{\alpha^2} \tag{E-61}$$

また、

$$1-\frac{r+R}{2R}k^2=\frac{\beta^2-2(r+R)r}{\beta^2}=\frac{R^2-r^2+z^2}{\beta^2} \tag{E-62}$$

であるので、大括弧の中の $E(k)$ の係数は、

$$\begin{aligned}
&E(k):\ -2+\frac{R^2-r^2+z^2}{\beta^2}\cdot\frac{2\left(R^2+r^2+z^2\right)}{\alpha^2}\\
&=2\left(\frac{\left(R^2+r^2+z^2\right)\left(R^2+r^2+z^2-2r^2\right)-\left(R^2+r^2+z^2\right)^2+4r^2R^2}{\beta^2\alpha^2}\right)\\
&=4r^2\frac{2R^2-\left(R^2+r^2+z^2\right)}{\beta^2\alpha^2}=\frac{4r^2}{\beta^2\alpha^2}\left(R^2-r^2-z^2\right)
\end{aligned}$$

となる。よって、B_z の $E(k)$ の係数は、$C/2\beta\alpha^2$ となる。以上から、

$$\begin{aligned}
B_z&=\frac{C}{2\beta\alpha^2}\left[\left(R^2-r^2-z^2\right)E(k)+\alpha^2K(k)\right]\\
&=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{1}{\left(R^2+z^2+r^2-2Rr\right)\sqrt{R^2+z^2+r^2+2Rr}}\\
&\quad\cdot\left[\left(R^2-r^2-z^2\right)E(k)+\left(R^2+z^2+r^2-2Rr\right)K(k)\right]
\end{aligned} \tag{E-63}$$

となることがわかる。
ループの平面内では、$z=0$ であるので、

$$\alpha^2=(R-r)^2,\quad \beta^2=(R+r)^2$$

$$k^2=\frac{4Rr}{(R+r)^2},\quad 1-k^2=\left(\frac{R-r}{R+r}\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
B_z &= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{1}{(R-r)^2(R+r)}\cdot\left(\left(R^2-r^2\right)E(k)+(R-r)^2K(k)\right)\\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{E(k)}{R-r}+\frac{K(k)}{R+r}\right)
\end{aligned}
\qquad \text{(E-64)}
$$

となる。なお、$0 \le k^2 \le 1$である。

一方、ループの中心軸上では、$r=0$であるので、

$$
\alpha^2=\beta^2=R^2+z^2\ ,\quad k^2=0
$$

である。当然、$B_r=0$となるはずであるが、実際、

$$
\begin{aligned}
B_r &= \frac{Cz/R}{2\left(R^2+z^2\right)\sqrt{R^2+z^2}}\left[\left(R^2+z^2\right)E\left(k^2\right)-\left(R^2+z^2\right)K\left(k^2\right)\right]\\
&= \frac{Cz/R}{2\sqrt{R^2+z^2}}\left(E(0)-K(0)\right)
\end{aligned}
\qquad \text{(E-65)}
$$

となり、明らかに、$E(0)=K(0)=\pi/2$であるので、$B_r=0$となる。また、B_zは、

$$
\begin{aligned}
B_z &= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{1}{\left(R^2+z^2\right)\sqrt{R^2+z^2}}\\
&\cdot\left(\left(R^2-z^2\right)E\left(k^2\right)+\left(R^2+z^2\right)K\left(k^2\right)\right)\\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{1}{\left(R^2+z^2\right)\sqrt{R^2+z^2}}\cdot 2R^2\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\mu_0 I}{2}\cdot\frac{R^2}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}
\end{aligned}
\qquad \text{(E-66)}
$$

と与えられるが、これは、ビオ・サバールの法則（Biot–Savart law）の「演習問題」であり、簡単に得られるものである。なお、

$$
B_z(z=0)=\frac{\mu_0 I}{2R} \qquad \text{(E-67)}
$$

となる。一方、$k \approx 1$の場合には（ループ近傍の場所では）、

$$
\begin{aligned}
&E(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi \approx \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2\varphi}d\varphi\\
&=\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi=1\\
&K(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\varphi+\left(1-k^2\right)\sin^2\varphi}}d\varphi \qquad \text{(E-68)}\\
&=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{\cos^2+k'^2\sin^2\varphi}}d\varphi \approx \log\left(\frac{4}{k'}\right)
\end{aligned}
$$

となる。ここで、k' は補母数（complementary modulus）と呼ばれるもので、

$$k'^2=1-k^2 \qquad \text{(E-69)}$$

である。式(E-68)の最後の結果は、$K(k)$ の漸近展開であり、適当な公式集（例えば、NIST Digital Library of Mathematical Functions（ただし、見つけづらいかも・・・））にあるが、Appendix C の最後の方にも導出を載せてある。