

Appendix D : $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \pi$ と δ 関数

積分の計算

これは、「有名な」積分の公式の一つであると言えるであろう。しかしながら、記憶力がかなりよくないと、しばらく（たとえば、数年以上）、この公式を見ていないと、忘れてしまうのではないか（ π の何倍かであった気がするというようなことは思い出したとしても・・・。）

しかし、以下の示すように、忘れてしまっても、暗算で、直ちに、この公式を求めることができるのである。それは、次の図式によるのである。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \boxed{\text{mental calculation}} = \frac{2\pi i}{2i} = \pi \quad (\text{D-1})$$

この暗算 (mental calculation) の内容は、

- (1) 関数、 $\sin z/z$ の $z=0$ は特異点ではない（うるさいことを言えば、除くことができる特異点 (removable singularity) ではあるが・・・）。よって、積分路を図 D.1 のように変形できる。

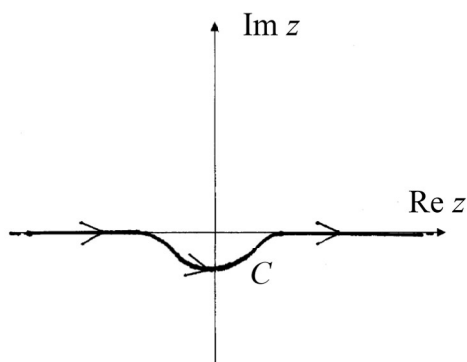


図 D.1

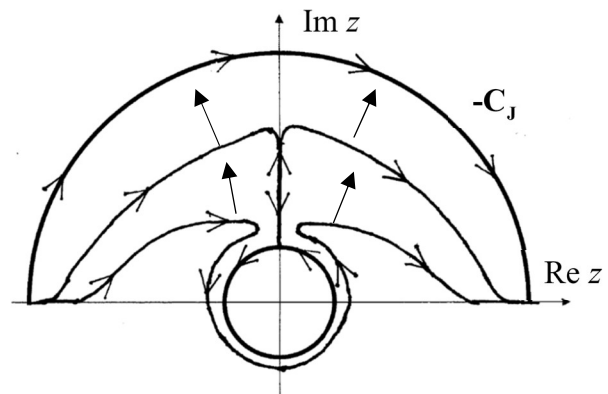


図 D.2

- (2) この積分路では、

$$\int_C \frac{\sin z}{z} dz = \int_C \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2iz} dz = \int_C \frac{e^{iz}}{2iz} dz - \int_C \frac{e^{-iz}}{2iz} dz \quad (\text{D-2})$$

のように、積分を分けても、積分路上には特異点は存在しないことになる。

- (3) 式(D-2)の三番目の式で、最初の項は、図 D.2 のように変形できる。

・原点の周りの周回積分は、留数定理により、

$$\frac{1}{2i} \cdot 2\pi i e^{i0} = \frac{2\pi i}{2i} = \pi \quad (\text{D-3})$$

・無限の境界積分は、これも「有名な」ジョルダンの補題 (Jordan's lemma) により、ゼロとなる (図 D.3 を参照)。

$$-\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_J} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0 \quad (D-4)$$

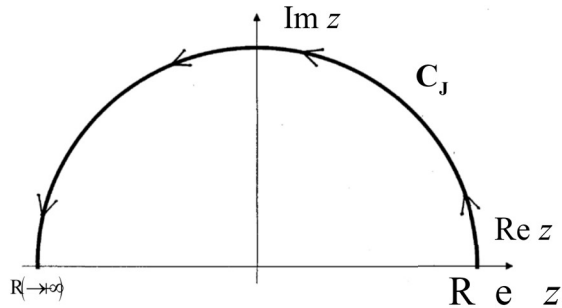


図 D.3

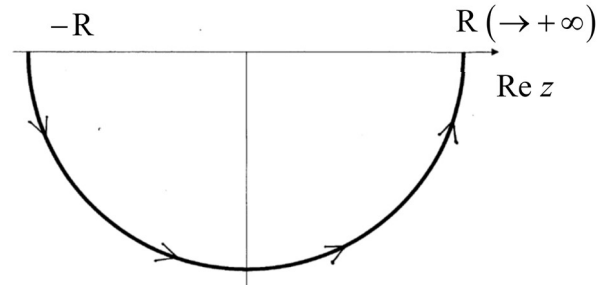


図 D.4

- (4) 式(D-2)の三番目の式で、2番目の項は、図 D.4 のように変形できる。よって、
 (5) ジョルダンの補題のよって、ゼロになることがわかる ($z \rightarrow -z$ とすれば、通常のジョルダンの補題となる)。

以上から、式(D-1)が導かれるのである。ここで、ジョルダンの補題は、暗算ではないのでもないかという苦情がでるかもしれないが、実は、これらも、以下のように暗算で出せるのである。

$$\left| -\int_{C_J} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \int_{C_J} \frac{|e^{iz}|}{|z|} |dz| = \int_0^\pi \frac{e^{-R \sin \theta}}{R} R d\theta = \int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta \quad (D-5)$$

となるが、 $\lim_{R \rightarrow \infty} e^{-R \sin \theta}$ は、 $\theta = 0$ or π の二点を除いて、ゼロとなる。普通は(リーマン積分では)、極限記号、 \lim を積分記号の中に入れることは勝手にはできない。しかし、上の積分はルベグ積分であると思っても積分値に変化がない。かつこの積分は、可積分関数で抑えることができる(明らかに、定数1で抑えることができる)。よって、いわゆるルベグの収束定理が適用できる。極限の関数は、明らかにリーマン積分可能でゼロなる(素朴な積分でも可能で、明らかに積分はゼロなる)。

[コメント] ルベグの収束定理

収束する関数列、 f_n に対して、ある可積分関数、 g があり、

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

となるとすると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

が成り立つ。

なお、ルベークの収束定理が成り立たない典型的な（よく知られた）例は、**図 D.5** のデルタ関数の「モデル」である。**図 D.5** の f_n の積分は、 n に依らず、

$$\int f_n(x) dx = 1$$

であるので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx = 1$$

となる。一方、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} \infty & (x = 0) \\ 0 & (x \neq 0) \end{cases}$$

であるので、このルベーク積分は（ルベーク積分の「規約」、 $\infty \cdot 0 = 0$ を使うと）、

$$\int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = 0$$

となる。よって、ルベークの収束定理は成り立たない。

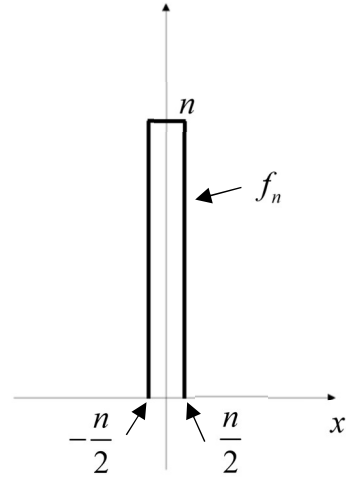


図 D.5

[コメント] ジョルダンの補題について

教科書等によくある補題の証明は次のようなものである。

$$\sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right) \tag{D-6}$$

であるので、

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta &= 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-2R\theta/\pi} d\theta \\ &< 2 \int_0^\infty e^{-2R\theta/\pi} d\theta = \frac{\pi}{R} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty) \end{aligned} \tag{D-7}$$

となるというものである。しかし、この証明に初めて触れたとき、多分、式(D-6)の形にかなり注意が行ってしまうのではないだろうか。この不等式は**図 D.6** から明らかであるが、これはある種の「数学者の見切り」のようなものではないかと思われる。また、（簡単とは言え）不等式の証明もしたくなるであろう。しかしながら、実際には、このような「見切り」は必要ではなく、**図 D.7** のようなグラフを描けば十分なのである。**図 D.7** では、直線の傾き、 a は、 $1/1000$ としており（実際は、図のグラフの傾きは、相当、いい加減で、目の子で描いてある）、明らかに、

$$\sin \theta \geq a\theta \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

である（これだと、多分、これを証明しようという気にはならないであろう。） a をどんなに小さくとっても、式(D-7)の最後の式は、

$$\frac{2}{aR} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

となるのである。よって、ここでは、鋭い「数学者の見切り」のようなものは不要で、素朴な評価で十分であることがわかるのである。

また他に、教科書的なジョルダンの

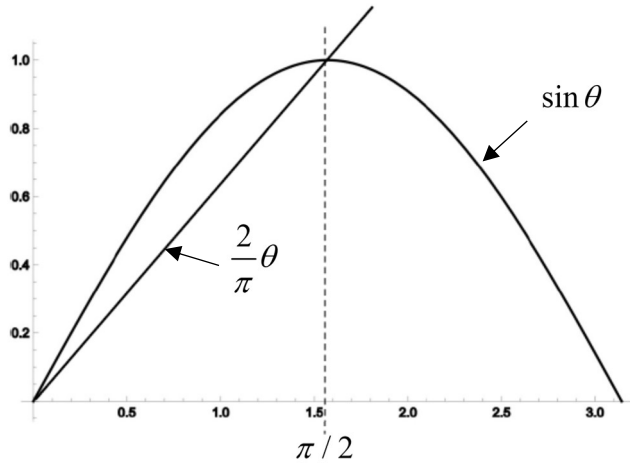


図 D.6

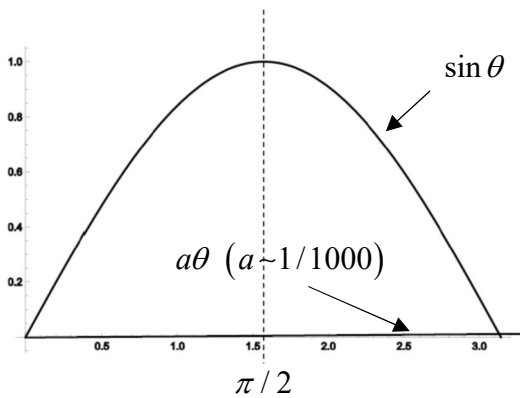


図 D.7

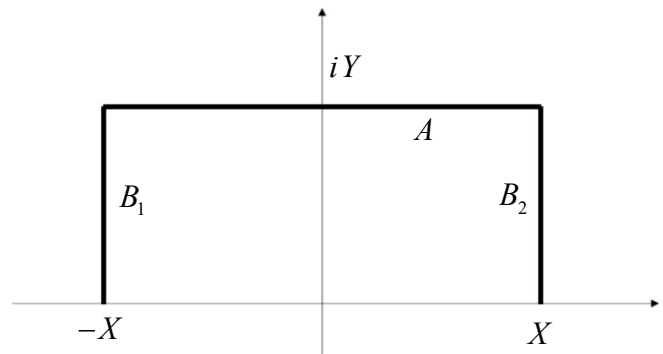


図 D.8

補題の証明として、次のようなものもある。

それは大門の代わりに、図 D.8 のように大きな矩形を使うものである。図の A 部の評価は、

$$\left| \int_A \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \int_A \frac{|e^{iz}|}{|z|} |dz| \leq \int_{-X}^X \frac{e^{-Y}}{Y} dX = \frac{2X e^{-Y}}{Y} \quad (D-8)$$

矩形が正方形であっても長方形であっても結果は同じであるが、ここでは簡単のために、 $X=Y$ としよう。すると、明らかに、式(D-8)は、 $Y \rightarrow \infty$ でゼロになる。また、図の B 2 部は、

$$\left| \int_{B_2} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \int_{B_2} \frac{|e^{iz}|}{|z|} |dz| \leq \int_0^Y \frac{e^{-Y}}{X} dY = \frac{1 - e^{-Y}}{X} \quad (D-9)$$

となるこれも同様に、 $X=Y \rightarrow \infty$ でゼロになる。B1 部についても同じである。

この二つの教科書的な証明のメリットは、ジョルダンの補題の式に似ている、

$$\int_{C_j} f(z) e^{iz} dz \quad (D-10)$$

を考え、 $z \rightarrow \infty$ で、 $f(z) \rightarrow 0$ であるとする、式(D-10)は、

$$\int_{C_j} f(z) e^{iz} dz \rightarrow 0 \quad (D-11)$$

となることを示すことができることである。積分路上で、

$$\text{Max}|f(z)| = M$$

とおくと、式(D-7)や式(D-8)、(D-9)を見ると、式(D-10)の評価は、

$$\left| \int_{C_j} f(z) e^{iz} dz \right| \leq M \times \text{const.} \quad (D-12)$$

となる。よって、 $z \rightarrow \infty$ で $M \rightarrow 0$ となることから、式(D-11)が成り立つことがわかるのである。

δ 関数との関係

表題の積分は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \pi \quad (D-13)$$

であるが、書き換えると、

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz = 1 \quad (D-14)$$

となるが、さらに、 $z \rightarrow Nz$ と書き換えると、

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nz}{z} dz = 1 \quad (D-15)$$

となり、この積分は、 N に依らないことがわかるが、一方、被積分関数の様相は N によって大きく変わる (図 D.9 を参照)。

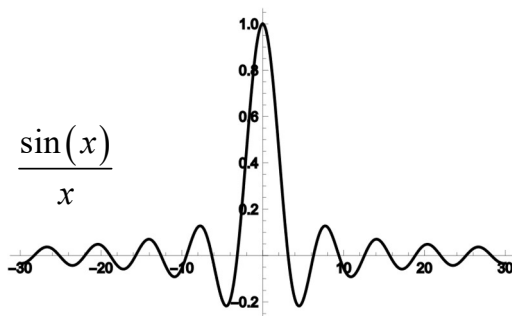


図 D.9(a)

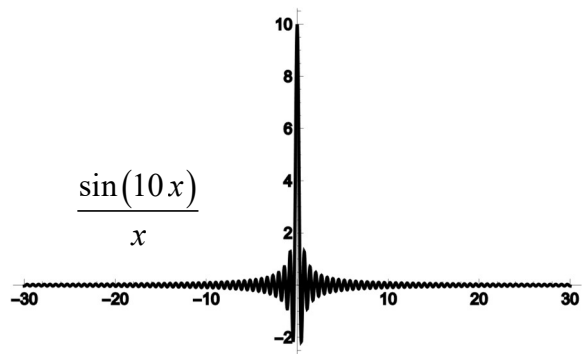


図 D.9(b)

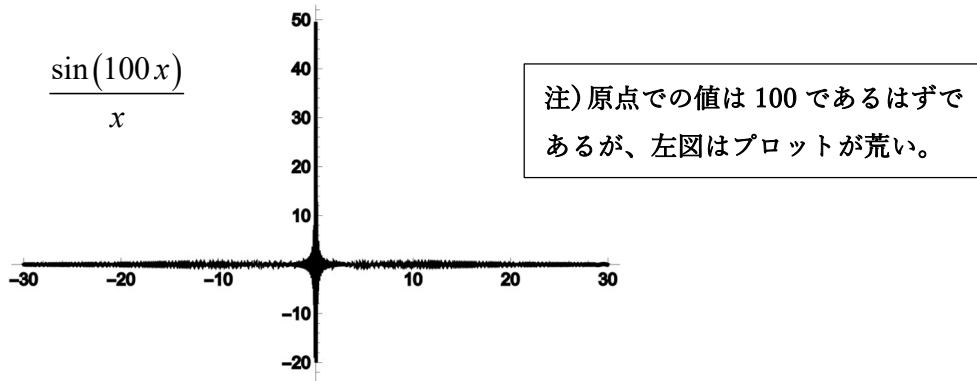


図 D.9(c)

N が非常に大きくなると、原点での値は、 N となり、無限大に近づく。一方、それ以外の領域では、激しく振動することになり、積分にはほとんど寄与しなくなると予想される。つまり、この被積分関数は、 $N \rightarrow \infty$ で δ 関数的になると思われるのである。実際、

$$\delta(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin Nz}{z} \quad (\text{D-16})$$

である（と見なすことができる）。もっとも、これはよく知られた関係であるので、わざわざ、説明するまでもないと言われるかもしれないが、以下に、若干、余分かもしれないコメントをしておこう。

素朴なイメージでは、式(D-16)の左辺は、

$$\delta(z) = \begin{cases} \infty & \text{for } z = 0 \\ 0 & \text{for } z \neq 0 \end{cases} \quad (\text{D-17})$$

であるが、式(D-16)の右辺の関数の envelope は、明らかに、

$$\frac{1}{\pi|z|}$$

であり、決してゼロにはならない。また、これは N にも依存しない普通の関数で、 δ 関数の素朴なイメージとは全くかけ離れている。よって、通常関数だと思えば等式は成り立たないのである。しかし、 δ 関数は、積分した結果が最終的には意味があるという観点に立つと、次のように等式が成り立つとしてよいのである。今、普通の関数を式(D-16)にかけて積分すると、左辺については、明らかに、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z) \delta(z) dz = f(0)$$

となる。一方、右辺の積分については、原点から離れた点で、ある小区間、 $[h, h + \Delta h]$ を

とると、その区間内では、 $f(z)$ と $1/z$ は、ほぼ定数であると考えてよいので、初等的計算

で、

$$\begin{aligned}
 \int_h^{h+\Delta h} \frac{f(z)}{\pi} \frac{\sin Nz}{z} dz &\approx \text{const.} \int_h^{h+\Delta h} \sin Nz dz \\
 &= \text{const.} \frac{\cos Nh - \cos N(h + \Delta h)}{N} \\
 &= \text{const.} \frac{2 \sin \frac{N \Delta h}{2} \sin N(h + \Delta h / 2)}{N} \approx 1/N \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)
 \end{aligned}
 \tag{D-18}$$

 [「超」初等的コメント]

振動する sine 関数を積分しても、いつまでたっても（どんな長い距離にわたって積分しても）決して（特別な距離の値を除けば）ゼロにならず、値は振動したままである。よって、例えば、 $\sin z \rightarrow \sin Nz$ としても、相変わらず積分値は振動したままになるのである。しかし、 N が大きくなると、積分値の振動の振幅がゼロに近づいてくるのである。言うまでもなく、その理由は明らかで、最後の振動がゼロから正の方向に始まって、半波長で終わる場合が、積分値が最大になるが、その値は、半波長の長さに比例するためである（ N が大きくなると、波長が短くなる）。

 また、原点付近では、

$$\begin{aligned}
 \int_{-h}^h \frac{f(z)}{\pi} \frac{\sin Nz}{z} dz &= \int_{-Nh}^{Nh} \frac{f(x/N)}{\pi} \frac{\sin x}{x} dx \\
 &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(0)}{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = f(0)
 \end{aligned}
 \tag{D-19}$$

となり、先の結果と合わせて、「超関数的には」式(D-16)の等号が成り立つことがわかったことになる。

さて、式(D-14)は、正弦積分 (sine integral) 関数、

$$\text{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin x}{x} dx$$

を使うと、

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \text{Si}(z) = 1
 \tag{D-20}$$

と書ける。さらに、式(D-15)は、

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nz}{z} dz = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \text{Si}(Nz) = 1
 \tag{D-21}$$

ここで、 $\text{Si}(z)$ を図示すると、**図 D.10** のようになる。 N が大きくなると、たちまち、一定

値、1に近づく。逆に言えば、 z がゼロから離れると、その部分は積分にはほとんど寄与しないことがわかる。これからも、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin Nz}{z} \quad (\text{D-22})$$

は、素朴な δ 関数のイメージと同じ働きをすることがわかるのである。

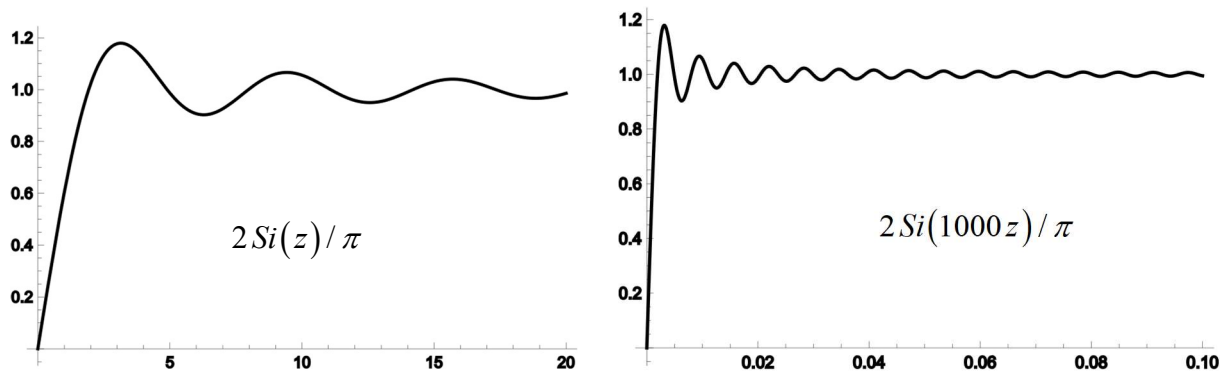


図 D.10