Appendix C：インダクタンスの計算への補足、初等関数の逆関数等

このAppendixは、高橋先生の教科書、「高橋秀俊、『電磁気学』、物理学選書3、裳華房、第12版、1969」のpp.244-250にある「公式」に関するコメント及び導出＋αに関するものである。

楕円関数

上記の教科書で使われている楕円関数は、

$$K(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi$$

$$E(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

であるが、その計算過程は初等的であり、単に、計算結果を楕円関数の定義式で表したものであると言える。さらに、実際に使っているのは、パラメーターを極限に近づけたものである（なお、関連する楕円関数については、Appendix Eを参照のこと）

積分公式（その１）

$$\int_0^{2\pi}\log\left(r^2+r'^2-2rr'\cos\theta\right)d\theta=4\pi\log r\quad(r>r')\tag{C-1}$$

これは、

$$\int_0^{2\pi}\log\left(1+a^2-2a\cos\theta\right)d\theta=0\quad(0<a<1)\tag{C-2}$$

が証明できれば、$a=r'/r$とおくことで、上の式が求まることになる。

$$1+a^2-2a\cos\theta=\left(1-a\,e^{i\theta}\right)\left(1-a\,e^{-i\theta}\right)$$

であるので、

$$\int_0^{2\pi}\log\left(1+a^2-2a\cos\theta\right)d\theta=\int_0^{2\pi}\log\left(1-ae^{i\theta}\right)d\theta+\int_0^{2\pi}\log\left(1-ae^{-i\theta}\right)d\theta$$

右辺の第2項は、変数変換によって第一項に等しいことがわかる。一方、第一項は、複素積分で表すと、半径1の周回積分となる。

$$\int_0^{2\pi}\log\left(1-ae^{i\theta}\right)d\theta=\oint\log(1-az)\frac{dz}{iz}\tag{C-3}$$

ここで、$0<a<1$であるので、半径1の円内では、対数関数は正則である。よって、円内の特異点は原点のみとなる。しかし、そこでの留数は、$\log(1-a0)=0$であることから、ゼロ

となり、式(C-2)が導かれる。もっと初等的には、$|z|<1$ に対する次の Taylor 展開（証明は簡単：$1/(1-z)$ の展開を積分すればよい）を使えばよい。

$$-\log(1-z)=z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}\cdots \qquad \text{(C-4)}$$

で、$z=ae^{i\theta}$ とおいて、θ について積分すれば、直ちに、すべての項が消えてしまうことがわかるのである。

さて、これらを Mathematica でチェックしようと、Mathematica に次の式、

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{Log}[1+(1/5)^2-2\,1/5\,\mathrm{Cos}[x]]\,dx$$

を入力すると、若干、時間がかかった後、

$$\frac{55i\pi^2}{24}+\pi\mathrm{Log}[\frac{2048}{225}]$$

という「驚くべき」結果を出力する。なんとも“もっともらしいような”数値であるが、明らかに被積分関数が実数であるので、誤りであることがわかる（私の使用方法が間違っていたら、御免なさい！）。そこで、次に、以下のように、数値を実数タイプに直して入力すると、

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{Log}[1+(1./5.)^2-2./5.\,\mathrm{Cos}[x]]\,dx$$

出力が、

$$2.804105392328892\times10^{-9}-4.440892098500626\times10^{-16}i$$

となり、もっともらしい結果が得られる。

ちなみに、被積分関数の様子をみるために、Mathematica で、

$$\mathrm{Plot}[\mathrm{Log}[1+(1/5)^2-2\times1/5\times\mathrm{Cos}[x]],\{x,0,2\pi\}]$$

と入力すると、図 C.1 に示すようになり、

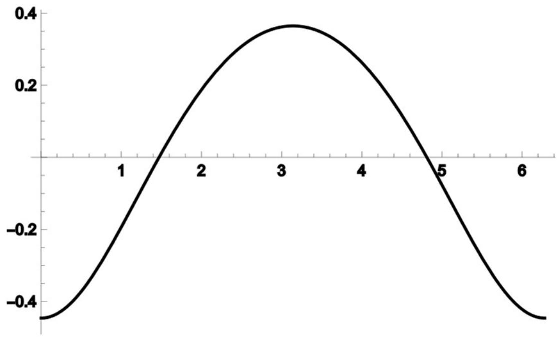


図 C.1

当然、特殊な関数ではないことがわかる。もう少し、形が歪んだものとして、

$$\mathrm{Plot}[\mathrm{Log}[1+(4/5)^2-2\times4/5\times\mathrm{Cos}[x]],\{x,0,2\pi\}]$$

と入力すると、図 C.2 のようになり、

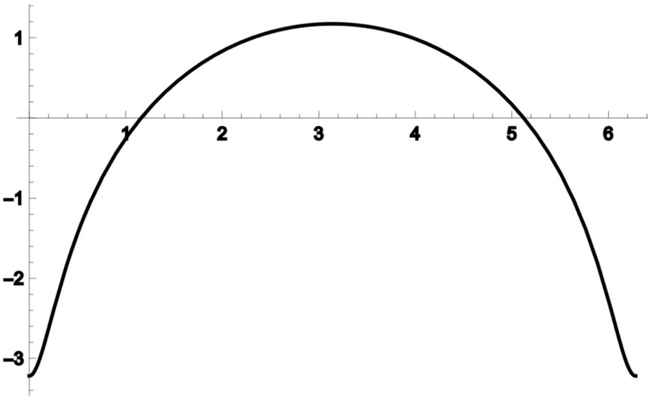


図 C.2

これも特殊な関数とは言えないことがわかる。一方、式(C-3)のような場合には、Mathematica は、例えば、分数、$a=1/5$ に対して、厳密なゼロを与える。Mathematica は言うまでもなく非常に素晴らしい強力なツールであるが、まれに変な結果を出すことがある（ようである）ので、注意（またはクロスチェック）が必要であろう（これは、今、流行りの AI の利用についての警鐘になるかも・・・間違いなく、Mathematica の方が、今の AI よりはるかに厳密で完成度が高いであろう）。

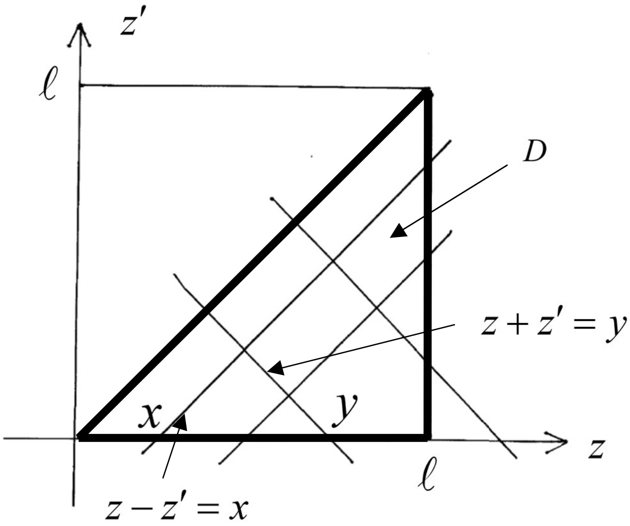


図 C.3

<u>積分公式（その２）</u>

$$\int_0^\ell \int_0^\ell \frac{dz\,dz'}{\sqrt{\left(z-z'\right)^2+a^2}} = -2\left(\sqrt{\ell^2+a^2}-a-\ell\sinh^{-1}\left(\ell/a\right)\right) \tag{C-5}$$

一見、簡単な積分に見えるが、すこし工夫が必要である。積分領域は、図 C.3 のような正方形であるが、被積分関数は z と z' を入れ替えても同じであることを考えると、式(C-5)の積分は、図 C.3 の D の領域（太線の三角形の内部）に関する積分の 2 倍であることがわかる。

$$2\iint_D \frac{dz\,dz'}{\sqrt{\left(z-z'\right)^2+a^2}} \tag{C-6}$$

ここで、次の変数変換をすると、

$$\begin{aligned} z - z' &= x \\ z + z' &= y \end{aligned} \tag{C-7}$$

$$dx \wedge dy = \left(dz - dz'\right) \wedge \left(dz + dz'\right) = 2dz \wedge dz' \tag{C-8}$$

$$0 \le x \le \ell \ , \quad x \le y \le 2\ell - x \tag{C-9}$$

よって、式(C-6)は、

$$\int_0^\ell dx \int_x^{2\ell - x} \frac{dy}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int_0^\ell \frac{2\ell - 2x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx \tag{C-10}$$

となるが、

$$\begin{aligned} &\int_0^\ell \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\Bigg|_0^\ell = \sinh^{-1}\left(\frac{\ell}{a}\right) \\ &\int_0^\ell \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \sqrt{x^2 + a^2}\Bigg|_0^\ell = \sqrt{\ell^2 + a^2} - a \end{aligned} \tag{C-11}$$

を使うと、(C-5)が得られるのである。

<u>余分なコメント 1</u>

以上で、高橋先生の教科書にある二つの公式の説明は終わりであるが、ついでにさらに余分なコメントを追加しておこう（明らかに寄り道に過ぎるかもしれないが、多分、有用であろう）。教科書の中の計算に、積分の公式、

$$\int \frac{1}{\cos\theta} d\theta = \log\tan\left(\theta / 2 + \pi / 4\right) \tag{C-12}$$

というものが出てくる。これは初等積分である。（記憶が非常にあやしいが・・）かつて Landu が、$1/\sin\theta$ や $1/\cos\theta$ の積分ができない者は、理論物理をやってはいけないと言ったという話を読んだ記憶がある。想像するに（全く個人的な勝手な解釈では）、多分、その趣旨は、初等積分を学んでから何年も経った後に、そして、これらの積分をほとんど忘れてしまった者でも、自分で工夫して、この種の積分ができないようでは、理論をやってはいけないということではないかと思う。

このような積分は、いろいろな計算方法があるが、ここでは、式(C-12)が直ぐに出てくる方法をとることにしよう。まず、$1/\sin\theta$ について計算する。ここで、$t = \tan\left(\theta / 2\right)$ とおくと、

$$\begin{aligned} &\int \frac{1}{\sin\theta} d\theta = \int \frac{1}{2t / \left(1 + t^2\right)} \frac{2}{1 + t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt = \log t \\ &= \log\tan\left(\theta / 2\right) \end{aligned} \tag{C-13}$$

ここで、$\cos\theta = \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)$とおくと、直ちに、

$$\int \frac{1}{\cos\theta} d\theta = \int \frac{1}{\sin(\theta + \pi/2)} d\theta = \log\tan(\theta/2 + \pi/4) \tag{C-14}$$

と求まる。さらに、被積分関数をできるだけ「引きずった」公式も参考のために挙げておこう。

$$\int \frac{1}{\cos\theta} d\theta = \int \sec\theta d\theta = \log(\sec\theta + \tan\theta) \tag{C-15}$$

$$\int \frac{1}{\sin\theta} d\theta = \int \csc\theta d\theta = -\log(\csc\theta + \cot\theta) \tag{C-16}$$

（簡単にわかるように、(C-15)の最後の表式は、(C-14)のものと一致する。また、(C-16)と(C-13)も同様である。）

前者は、

$$\frac{d}{d\theta}\sec\theta = \sec\theta\tan\theta \ , \ \frac{d}{d\theta}\tan\theta = \sec^2\theta$$

から、

$$\frac{d}{d\theta}(\sec\theta + \tan\theta) = \sec\theta(\sec\theta + \tan\theta)$$

となることからわかる。後者も同様に、

$$\frac{d}{d\theta}\csc\theta = -\csc\theta\cot\theta \ , \ \frac{d}{d\theta}\cot\theta = -\csc^2\theta$$

から、

$$\frac{d}{d\theta}(\csc\theta + \cot\theta) = -\csc\theta(\csc\theta + \cot\theta)$$

となることからわかる。最後に、

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \sinh^{-1} x \tag{C-17}$$

について、コメントしておこう。これは、左辺で、$x = \sinh y$とおくことで、ほとんど暗算で、

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int \frac{1}{\cosh y} \cosh y \, dy = y \tag{C-18}$$

となることからわかる。昔、初等積分を習った時には、

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \tag{C-19}$$

という式が出てきたのではないだろうか。しかし、その時、右辺を微分すれば、左辺の被積分関数になるので、OK という習い方をしたのではないだろうか。さて、ここで、式(C-17)

と(C-19)を比べると、

$$\sinh^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \tag{C-20}$$

という逆関数の表示が得られることになる（定数項も含めても OK である)。これから、

$$\sinh^{-1} x \;\rightarrow\; \log(2x) \qquad (\text{for}\, x \rightarrow \infty) \tag{C-21}$$

ということがわかる（注：実際、$x>5$ 程度であれば、$\sinh^{-1} x \approx \log(2x)$ としても全く問題はないであろう)。もっとも、これは、$y = \sinh^{-1} x$ とすると、

$$\sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \;\rightarrow\; \frac{e^y}{2} \qquad (\text{for}\, y \rightarrow \infty)$$

$$e^y \;\rightarrow\; 2x$$

からもわかることでもあるが・・・。

なお、積分の公式としては、明らかに、式(C-17)の方がすっきりしている。同じようにして、

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \cosh^{-1} x \tag{C-22}$$

が導かれる。そして、

$$\cosh^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \tag{C-23}$$

と与えられるのであった。以上のような逆関数の表示は、相当、記憶がよい人（または記憶力がなくても常時、使っている人）でないときちんと憶えておくのはむつかしいかもしれない。そこで、以下に、忘れても、すぐに導くことができる（すぐに思いだすことができる）方法を与えておこう。それは、

$$e^{\theta} = \cosh\theta + \sinh\theta \tag{C-24}$$

という明らかな式を使うのである。ここで、$x = \sinh\theta$ とおくと、

$$e^{\theta} = \sqrt{x^2+1} + x \;\rightarrow\; \theta = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \tag{C-25}$$

となり、直ちに、式(C-20)が得られる。

［コメント］

ちなみに、この逆関数を求めるために、よく使われる方法は、

$$\sinh^{-1} x = y \;\rightarrow\; x = \sinh y \;\rightarrow\; e^y = Y,\; x = (Y + 1/Y)/2$$

として、Y の二次方程式を解く方法である。よって、計算は簡単で、暗算でもこの逆関数を求めることができるのであるが・・・、あまり見通しがよくないであろう。

また、$x=\cosh\theta$とおくと、

$$e^{\theta}=x+\sqrt{x^2-1} \;\;\rightarrow\;\; \theta=\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \qquad \text{(C-26)}$$

となり、式(C-23)が得られる。さらに、

$$e^{2\theta}=\frac{e^{\theta}}{e^{-\theta}}=\frac{\cosh\theta+\sinh\theta}{\cosh\theta-\sinh\theta}=\frac{1+\tanh\theta}{1-\tanh\theta} \qquad \text{(C-27)}$$

で、$x=\tanh\theta$とおくと、

$$e^{2\theta}==\frac{1+x}{1-x} \;\;\rightarrow\;\; 2\theta=\log\frac{1+x}{1-x} \qquad \text{(C-28)}$$

となり、

$$\tanh^{-1}x=\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} \qquad \text{(C-29)}$$

が得られる。同様にして、

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \qquad \text{(C-30)}$$

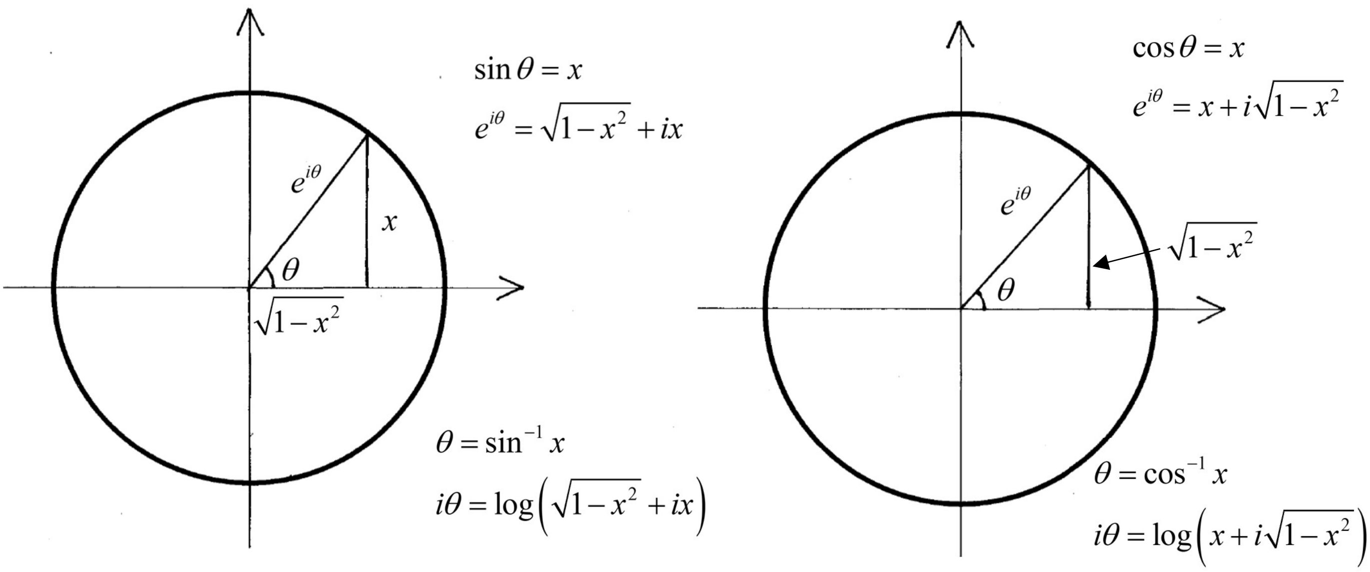
で、$x=\sin\theta$とすると、

$$e^{i\theta}=\sqrt{1-x^2}+i\,x \;\;\rightarrow\;\; i\theta=\log\left(\sqrt{1-x^2}+i\,x\right) \qquad \text{(C-31)}$$

となり、

$$\sin^{-1}x=\frac{1}{i}\log\left(\sqrt{1-x^2}+i\,x\right) \qquad \text{(C-32)}$$

が得られる。$-1<x<1$の場合は、式(C-31)は、複素平面上に単位円を描いてみればわかる



(a) (b)

図 C. 4

ように、単に単位円上の点の極座標表示に過ぎないことがわかる（図 C.4(a)）。また、式

(C-32)の右辺は、多価関数と解釈すべきで、その多価性は、log と $\sqrt{\ }$ から出てくるのである。一方、x が一般の複素数、z の場合でも、解析接続により、

$$\sin^{-1} z = \frac{1}{i}\log\left(\sqrt{1-z^2} + i\,z\right) \tag{C-33}$$

と与えられる。同じようにして（図 C.4(b)を参照)、

$$\cos^{-1} z = \frac{1}{i}\log\left(z + i\sqrt{1-z^2}\right) = \frac{1}{i}\log\left(z + \sqrt{z^2-1}\right) \tag{C-34}$$

が得られる。また、図 C.5 を見ると、

$$\tan^{-1} z = \frac{1}{2i}\log\frac{1+iz}{1-iz} = \frac{1}{2i}\log\frac{i-z}{i+z} \tag{C-35}$$

となることもわかる。この余分なコメントは、明らかに本線から外れたものであるが、結構、役に立つかもしれないと思い、追記した。

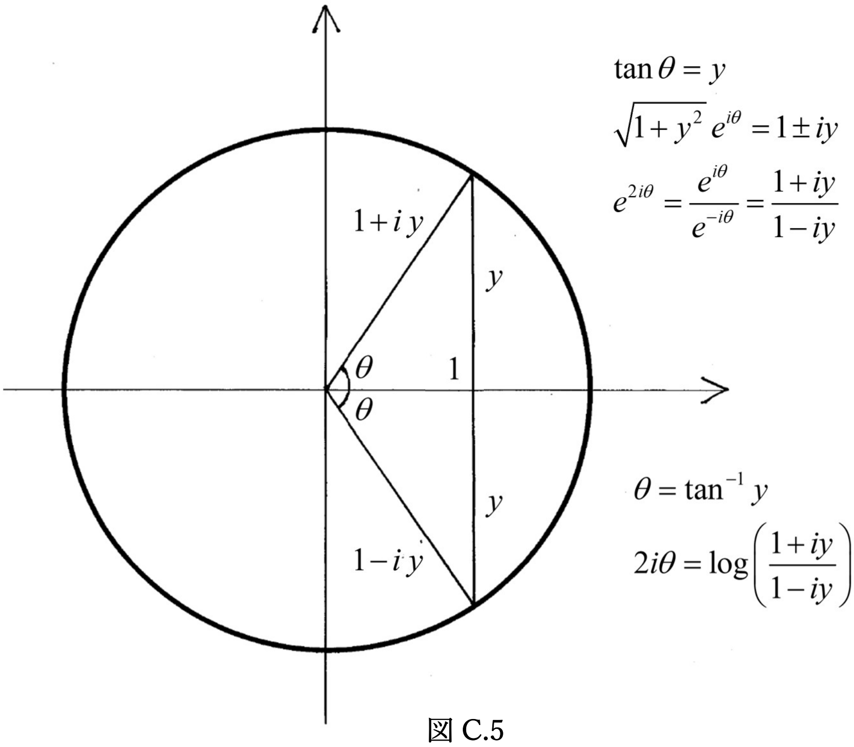


図 C.5

<u>余分なコメント 2</u>

最後に、高橋先生の教科書から抜粋して、（自己）インダクタンスなどの公式の対数依存性を示しておこう（ただし、教科書を読むのであれば、以下は、不要)。これは、次の式から来ているのである。

$$\begin{aligned} K(k) &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\varphi + \left(1-k^2\right)\sin^2\varphi}}\,d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\cos^2\varphi + k'^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi \approx \log\left(\frac{4}{k'}\right) \quad \left(k' \sim 0\right) \end{aligned} \tag{C-36}$$

ここで、$k'^2 = 1-k^2$ である。

$k \to 1,\ k' \to 0$ の場合、$K(k)$ は対数発散をするのである。最後の積分をもう一度、書くと、

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\cos^2\varphi + k'^2 \sin^2\varphi}} d\varphi \tag{C-37}$$

であるが、$k' = 0$ の場合には、$\pi/2 - \varphi \ \to\ \varphi$ とおくと、見やすくなり、

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos\varphi} d\varphi = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin\varphi} d\varphi \sim \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\varphi} d\varphi \to \infty$$

と発散する。また、k'^2 が非常小さい場合で、φ が $\pi/2$ に近くないときは、

$\cos^2\varphi \gg k'^2 \sin^2\varphi$ となる。一方、$\theta = \pi/2 - \varphi$ とおくと、φ が $\pi/2$ に近いとき（つまり θ が 0 に近いとき)、

$\cos^2\varphi + k'^2 \sin^2\varphi = \sin^2\theta + k'^2 \cos^2\theta \sim \theta^2 + k'^2$ となる。よって、(C-37)は、

$$\int_0^{\pi/2-\delta} \frac{1}{\cos\varphi} d\varphi + \int_0^{\delta} \frac{1}{\sqrt{\theta^2 + k'^2}} d\theta \tag{C-38}$$

となる（ここで、δ は $\delta^2 \gg k'^2$ となる適当な小さい数である)。この積分は、先に求めた公式から、ただちに、

$$\int_0^{\pi/2-\delta} \frac{1}{\cos\varphi} d\varphi = \log\left(\tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)\Bigg|_0^{\pi/2-\delta} = \log\left(\cot(\delta/2)\right) \approx \log\left(\frac{2}{\delta}\right)$$

$$\int_0^{\delta} \frac{1}{\sqrt{\theta^2 + k'^2}} d\theta = \sinh^{-1}\left(\frac{\theta}{k'}\right)\Bigg|_0^{\delta} = \sinh^{-1}\left(\frac{\delta}{k'}\right) \approx \log\left(\frac{2\delta}{k'}\right)$$

となるので、式(C-37)は、

$$\int_0^{\pi/2-\delta} \frac{1}{\cos\varphi} d\varphi + \int_0^{\delta} \frac{1}{\sqrt{\theta^2 + k'^2}} d\theta \approx \log\left(\frac{4}{k'}\right) \tag{C-39}$$

と評価できることがわかる。