Appendix A: 相互インダクタンス（mutual inductance）の相反定理（$M_{12} = M_{21}$）

空気中（真空中）の相互インダクタンスの場合、Neumann の公式、

$$M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{C_1}\int_{C_2}\frac{d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2}{\left|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right|} \tag{A-1}$$

を見れば、明らかに、$M_{12} = M_{21}$ となっている（図 A.1 を参照)。しかし、鉄等がある場合については、あまり明確な議論がされていないようで、特に鉄心の入ったソレノイドコイルやトランスの場合には、納得できるような説明は見当たらないように思われる。電磁気学の教科書やウェッブで調べてもきちんとした説明はないように思われる（多分、どこか専門的な文献にはあるであろうが・・・)。調べた範囲では、相反定理（reciprocity theorem）ありきであるものや、磁気エネルギーの二回微分（$\partial^2 W / \partial I_1 \partial I_2 = \partial^2 W / \partial I_2 \partial I_1$）の対称性でOK とするものが多いように思われる（なお、後者は、例えば、$M_{12} + M_{21}$ が $1, 2$ について対称と言っているだけで、相反定理にはなっていないのである)。一方で、磁場に非線形性や異方性がある場合には、かならずしも $M_{12} = M_{21}$ という関係が成り立たないであろう。また、成り立つことの証明も難しそうである（何か一般原理により一言で説明できるのかもしれないが・・・筆者には、浅学のためにわからない)。もっとも、非線形の場合には、M_{12} というような「係数」が「きちんと」定義できないであろうが・・・。

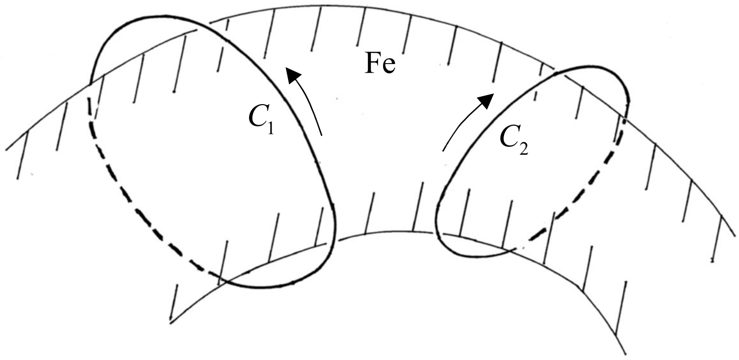

図 A.1

以下では、

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \tag{A-2}$$

と、$\mathbf{B}$ と $\mathbf{H}$ が線形で、かつスカラー倍である仮定しよう（異方性は考慮しない)。ただし、μ は、

$$\mu = \mu(\mathbf{r}) \quad (> 0) \tag{A-3}$$

と場所の関数とするのである。また、（ほぼ静的な場合を考えているので）値は正であるとする。（値が正でないとすると、磁場が強いほど世の中が安定であるという変なことになる）なお、余分なことながら、その他のパラメータ（例えば、時間）に依存してもよい。あくまでも準静的な場合であるが・・・。こうすることによって、鉄のあり、なし等を考慮することができる。なお、物質の磁場特性を線形化して考えることにすると、この式(A-2)、(A-3)の仮定でも、かなり広い範囲の状況をカバーできるであろう。さて、アンペールの法則から、

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{j} \quad \rightarrow \quad \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu}\right) = \mathbf{j}$$

となるのであるが、$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ であることから、

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) = \mathbf{j} \tag{A-4}$$

となる。

［蛇足的遊び］

実際とは異なるが、μ を二つに分けで、ナブラ（∇）の外に出せるとするという勝手な仮定をおいて、一種の遊びをしてみよう。すると、

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}} \nabla \times \left(\nabla \times \frac{1}{\sqrt{\mu}} \mathbf{A} \right) = \mathbf{j} \tag{A-5}$$

となり、（$\mathrm{div}\left(\mathbf{A} / \sqrt{\mu} \right) = 0$ を（勝手に）仮定すると）、

$$-\nabla^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} \mathbf{A} \right) = \sqrt{\mu}\, \mathbf{j} \tag{A-6}$$

となる。よって、この解は、

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\sqrt{\mu(\mathbf{r})}}{4\pi} \int \frac{\sqrt{\mu(\mathbf{r}')}\, \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \tag{A-7}$$

となる。これから、相互インダクタンスは、

$$M_{12} = \frac{1}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{\sqrt{\mu(\mathbf{r}_1)} \sqrt{\mu(\mathbf{r}_2)} d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \tag{A-8}$$

となり、$M_{12} = M_{21}$ が導かれたことになるのである。なお、これは、あくまでも遊びであるが・・。

さて、式(A-4)は、ベクトル記号を無視して眺めると、スツルムーリウヴィル（Sturm–Liouville）型の微分方程式であると見なせることがわかる。そこで、実際にもスツルム-リウヴィル型になっているかどうかを確認しよう。後のために、ここでは同じ微分演算子をもつ、

$$\nabla \times \left(\mu^{-1}\, \nabla \times \mathbf{A} \right) = \lambda\, \mathbf{A} \tag{A-9}$$

の固有方程式を使って考えてみよう。以下で、これが自己随伴型（self-adjoint）であることを示すために、

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \tag{A-10}$$

を使う。ここで、左辺の体積積分（全空間での積分）がゼロであることが示せれば、

$$\int \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) dV = \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}\, dV \tag{A-11}$$

となり、ナブラ（∇）を移動させることができる。今、$\mathbf{A} = \mathbf{a}$, $\mathbf{B} = \mu^{-1}\, \nabla \times \mathbf{A}$ とおくと、式(A-11)の左

辺の体積積分は、

$$\int \mathbf{a} \times \left(\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A} \right) dS \tag{A-12}$$

となるが、ここで、本文の(i-1)のコメントと同じような議論をしよう。$\mathbf{a}$, $\mathbf{A}$ は、ベクトル・ポテンシャルと同じ境界条件を満足するベクトルであるとすると、

$$\begin{aligned} &\mathbf{a} \quad\quad\; \rightarrow \left(\text{at least}\right)\ 1/r,\ \ \left(\text{usually}\right)\ 1/r^2 \\ &\nabla \times \mathbf{A} \rightarrow \left(\text{at least}\right)\ 1/r^2,\ \left(\text{usually}\right)\ 1/r^3 \end{aligned} \tag{A-13}$$

であるので、式(A-12)から、

$$\int \mathbf{a} \times \left(\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A} \right) dS\ \rightarrow \left(\text{at least}\right) \frac{1}{r^3} \cdot r^2\ \rightarrow 0 \tag{A-14}$$

よって、式(A-11)が成り立ち、

$$\int \mathbf{a} \cdot \left(\nabla \times \left(\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A} \right) \right) dV = \int \left(\nabla \times \mathbf{a} \right) \cdot \left(\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A} \right) dV \tag{A-15}$$

となる。全く同様に、式(A-15)の右辺の $\mathbf{A}$ に作用しているナブラをさらに左に移動するためには、

$$\left(\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{a} \right) \times \mathbf{A}$$

の体積積分がゼロになることを示せばよい。しかし、これは上と全く同様にして、ゼロになることがわかる。

［コメント］

しかし、現実は、後でも示すように、無限で式(A-14)が成り立つように、固有ベクトルを取るのは、不便であり、適当な「屁理屈」を言う必要があるのであるが・・

以上から、

$$\int \mathbf{a} \cdot \left[\nabla \times \left(\mu^{-1}\ \nabla \times \mathbf{A} \right) \right] dV = \int \left[\nabla \times \left(\mu^{-1}\ \nabla \times \mathbf{a} \right) \right] \cdot \mathbf{A} dV = \lambda \int \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}\, dV \tag{A-16}$$

となり、スツルム-リウヴィル型の性質（固有値は実数、固有ベクトルの直交性など）を使うことができる（参考として、Appendix B に「復習的な」解説を載せてある。）今の場合には、式(A-15)から、固有値、λ_n の固有ベクトルを $\mathbf{a}_n$ とおくと、

$$\int \frac{\left(\nabla \times \mathbf{a}_n^{\ *} \right) \cdot \left(\nabla \times \mathbf{a}_n \right)}{\mu} dV = \int \lambda_n \left(\mathbf{a}_n^{\ *} \cdot \mathbf{a}_n \right) dV \tag{A-17}$$

となるので、固有値は、正値（より正確に言えば、非負である。例えば、$\mathbf{a}_n$ が定数の場合、左辺はゼロであるので、固有値はゼロとなることがわかる。）一般には、固有ベクトルは、複素関数になるが、今の場合には、ある関数が固有ベクトルであれば、その複素共役も固有関数になることが直ちにわかるので、最初から固有ベクトルは実数であるとしてよい（例えば、e^{ikx} が固有ベクトルなら、その実部、虚部であ

る $\cos kx$ 、$\sin kx$ を固有ベクトルとしてよい。）よって、以下、しばらくは、固有ベクトルは実数であるとしよう。また、固有ベクトル、$\mathbf{a}_n$ は正規化されているとすると、

$$\sum_n \mathbf{a}_n(\mathbf{x})\mathbf{a}_n(\mathbf{y}) = \mathbf{I}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{A-18}$$

となる。ここで、左辺のベクトル積らしきものは、ダイアディック（dyadic）で、「単に」ベクトルを二つ並べたものであり（またはテンソル積と思ってもよい）、$\mathbf{I}$ は、単位ダイアディックである。また、δ はデルタ関数である（Appendix B を参照）。以下、若干の補足説明をする。まず、正規固有ベクトルがスカラーであると、よく知られたように、

$$\sum_n \phi_n(\mathbf{x})\phi_n(\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{A-19}$$

である（言うまでもなく、δ は三次元の δ で、$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \delta(x_1-y_1)\delta(x_2-y_2)\delta(x_3-y_3)$ のことである）。

これが意味するところは、一般に、ある関数を固有関数で展開したとすると（展開できたとすると）、

$$f(\mathbf{x}) = \sum\int f(\mathbf{y})\phi_n(\mathbf{y})d\mathbf{y}\ \phi_n(\mathbf{x}) = \int\left(\sum\phi_n(\mathbf{y})\phi_n(\mathbf{x})\right)f(\mathbf{y})d\mathbf{y}$$

であるが、ある関数を積分して、元に戻るためには、積分の中の和がデルタ関数でないといけないことからである。ダイアディックは、初めて見たときは、奇妙な感じがするかもしれないが、単にベクトルを並べたものと割り切った方がよいであろう。例を挙げると、

$$\mathbf{d}\cdot(\mathbf{a}\mathbf{b}) = (\mathbf{d}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}\ ,\ \ (\mathbf{a}\mathbf{b})\cdot\mathbf{d} = \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})$$

であり、最初の式の左辺は、ベクトルとダイアディックの左からの内積であり、それは内積とベクトルの積、つまりベクトルになる。第二式は、右から内積をとった場合であり、結果は同じくベクトルになるのである。また、単位ダイアディックは、具体的に書くと、

$$\mathbf{I} = \mathbf{i}\mathbf{i} + \mathbf{j}\mathbf{j} + \mathbf{k}\mathbf{k} \tag{A-20}$$

であり、

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{I} = \mathbf{a},\ \ \mathbf{I}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a} \tag{A-21}$$

という性質がある。それは、

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{I} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} = \mathbf{a}$$

であるからである。つまり、あるベクトルとの内積をとると、元のベクトルに戻るという性質がある。ベクトル関数を正規固有ベクトルで展開し、式(A-18)を使うと、

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \sum_n\left(\int\mathbf{f}(\mathbf{y})\cdot\mathbf{a}_n(\mathbf{y})d\mathbf{y}\right)\mathbf{a}_n(\mathbf{x}) = \int\mathbf{f}(\mathbf{y})\cdot\left(\sum_n\mathbf{a}_n(\mathbf{y})\mathbf{a}_n(\mathbf{x})\right)d\mathbf{y} \\ &= \int\mathbf{f}(\mathbf{y})\cdot\mathbf{I}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})d\mathbf{y} = \int\mathbf{f}(\mathbf{y})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})d\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\end{aligned} \tag{A-22}$$

となる。

　しかしながら、以上の話は、数学的にみると、突っ込みどころ、満載と言えるかもしれない。

○　固有値は、勝手に離散的としたが、領域は、全空間としたので、連続的固有値を含む可能性がある。

特に今の場合は、微分演算子がラプラシアン型のであるので、間違いなく連続固有値を含むであろう。よって、「強制的に」離散的な固有値になるようにするとすると、例えば、領域を有限の大きなボックスにとる必要がある。

○ しかし、そうすると、境界で、式(A-14)になるというのが使えないことになる。そこで、よくやるように、周期的境界条件をすべての関数、固有ベクトルに課すなどの必要が出てくる。

○ また、本当は、固有ベクトルが全体で、完全系をなす（complete である）ということも示す必要がある。しかし、これは物理でよくやるように、あまり気にしないことにしよう。

要するに、固有値は離散的で、固有ベクトルもせいぜい可算個であり、かつ固有ベクトルは完全系をなすとして、話を進めるのである。そして、その延長として、連続的固有値の場合を扱うのである。

よって、いかにも話がいい加減であるように思われるかもしれないが、$M_{12}=M_{21}$ を示すのには、多分、支障はないであろう（以下でわかるように、グリーン関数はその引数について対称になっていれば、それが示せるので・・・）

さて、(微分演算子、L をもつ）スツルムーリウヴィル型のグリーン関数（Green's function）は、固有ベクトルがスカラーの場合には、よく知られているように、

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_n \frac{\phi_n(\mathbf{x})\phi_n(\mathbf{y})}{\lambda_n} \tag{A-23}$$

で与えらる（これは、引数の $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ について対称になっている）。また、固有ベクトルは、

$$L\phi_n=\lambda_n\phi_n$$

を満足し、その微分方程式、

$$L\phi=f$$

の解は、

$$\phi=\int G(\mathbf{x},\mathbf{y})f(\mathbf{y})d\mathbf{y}$$

と与えられるのであった。実際、

$$\begin{aligned}L\phi&=\int\sum_n \frac{L\phi_n(\mathbf{x})\phi_n(\mathbf{y})}{\lambda_n}f(\mathbf{y})d\mathbf{y}=\int\sum_n \phi_n(\mathbf{x})\phi_n(\mathbf{y})f(\mathbf{y})d\mathbf{y}\\&=\int\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})f(\mathbf{y})d\mathbf{y}=f(\mathbf{x})\end{aligned}$$

以上のことから、式(A-4)の方程式の解は、

$$\mathbf{A}=\int\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y})\cdot\mathbf{j}(\mathbf{y})d\mathbf{y} \tag{A-24}$$

と求まり、$\mathbf{G}$ は、

$$\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_n \frac{\mathbf{a}_n(\mathbf{x})\mathbf{a}_n(\mathbf{y})}{\lambda_n} \tag{A-25}$$

であり（ここでも、引数の $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ について対称であることに注意。また、右辺のベクトルの積は、ダイアディック積である。)、$\mathbf{a}_n$ は、次の微分方程式を満たす（境界条件も満たす）正規固有ベクトルである。

$$\nabla\times\left(\frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{a}_n\right)=\lambda_n\,\mathbf{a}_n \tag{A-26}$$

となることがわかる。実際、式(A-4)の左辺の微分演算を$\mathbf{L}$とすると、

$$\begin{aligned}\mathbf{L}\,\mathbf{A}&=\int\mathbf{L}\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y})\cdot\mathbf{j}(\mathbf{y})d\mathbf{y}=\int\sum_n\frac{\mathbf{L}\,\mathbf{a}_n(\mathbf{x})\mathbf{a}_n(\mathbf{y})}{\lambda_n}\cdot\mathbf{j}(\mathbf{y})d\mathbf{y}\\&=\int\sum_n\mathbf{a}_n(\mathbf{x})\mathbf{a}_n(\mathbf{y})\cdot\mathbf{j}(\mathbf{y})d\mathbf{y}=\int\mathbf{I}\cdot\mathbf{j}(\mathbf{y})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})d\mathbf{y}\\&=\int\mathbf{j}(\mathbf{y})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})d\mathbf{y}=\mathbf{j}(\mathbf{x})\end{aligned} \tag{A-27}$$

となり、式(A-24)が式(A-4)の解となることがわかるのである。この式(A-24)を使うと、コイル２（図A,1のC_2）がコイル１（図A,1のC_1）のある場所につくるベクトル・ポテンシャルは、丁寧に書くと、

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_1)=\int\mathbf{G}(\mathbf{r}_1,\mathbf{y})\cdot\mathbf{j}(\mathbf{y})d\mathbf{y}=\int\mathbf{G}(\mathbf{r}_1,\mathbf{y}_2)\cdot\mathbf{j}(\mathbf{y}_2)dV_2=\int\mathbf{G}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}_2)dS_2ds_2 \tag{A-28}$$

となるが、細いコイルでは、$\mathbf{j}(\mathbf{r}_2)dS_2ds_1=\mathbf{I}(\mathbf{r}_2)ds_1=I(\mathbf{y}_2)d\mathbf{s}_1$であり、

電流保存から、$I(\mathbf{y}_2)=I_2=\text{const.}$であるので、$\mathbf{A}(\mathbf{r}_1)=\oint_{C_2}\mathbf{G}(\mathbf{r}_1,\mathbf{y}_2)\cdot d\mathbf{s}_2\,I_2$と書けることがわかる。よって、これをコイル１の一周について積分すると、

$$\oint_{C_1}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{s}_1=\oint_{C_1}d\mathbf{s}_1\cdot\oint_{C_2}\mathbf{G}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\cdot I_2\,d\mathbf{s}_2=\oint_{C_1}\oint_{C_2}d\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{G}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\cdot d\mathbf{s}_2\,I_2 \tag{A-29}$$

となり、これから、

$$M_{12}=\oint_{C_1}\oint_{C_2}d\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{G}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\cdot d\mathbf{s}_2=\oint_{C_1}\oint_{C_2}\sum_n\frac{\left(d\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{a}_n(\mathbf{r}_1)\right)\left(d\mathbf{s}_2\cdot\mathbf{a}_n(\mathbf{r}_2)\right)}{\lambda_n} \tag{A-30}$$

となることがわかる。これから、明らかに、$M_{12}=M_{21}$となることが示されたことになる。。

<u>全空間で透磁率が一様な場合</u>

この場合には、式(A-1)、(A-8)などから、グリーン関数は、

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=\frac{\mu\,\mathbf{I}}{4\pi|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|} \tag{A-31}$$

である（であろう）ことがわかるが、一応、これを確認しておこう。ただし、計算は、原点に電荷が集中している場合のポテンシャルをポアソン方程式(Poisson's equation)のフーリエ分解（この場合の固有ベクトルの展開）で求めるのとほぼ同じであるので、「復習」といってもよいであろう。
この場合、式(A-4)で、μを外に出して、

$$\mu^{-1}\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\mathbf{j} \tag{A-32}$$

とし、後は定番で、(座標系は直交座標であるとして)、

$$\mu^{-1}\left(\text{grad}(\text{div}\,\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}\right)=\mathbf{j} \tag{A-33}$$

と変形し、

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A}=0 \tag{A-34}$$

というクーロン・ゲージを採用して、式(A-33)から、

$$-\mu^{-1}\nabla^2\mathbf{A}=\mathbf{j} \tag{A-35}$$

というポアソン型の方程式を得るという手順を踏むのであった（コメント：式(A-34)と式(A-35)は矛盾しないことに注意。今の場合、準静的を想定しているので、$\mathrm{div}\,\mathbf{j}=0$ である)。ここでは、式(A-35)の左辺のマイナス記号はそのままにしておくことにしよう。なぜならば、

$$-\mu^{-1}\nabla^2\mathbf{A}=\lambda\,\mathbf{A} \tag{A-36}$$

という固有値問題を考えたときに、固有値を正にしたいからである。今は、直交座標系としているので、式(A-36)は、

$$-\mu^{-1}\nabla^2 A=\lambda\,A \tag{A-37}$$

というスカラー方程式を考えれば、十分であることがわかる。後で、

$$\mathbf{A}=A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$$

のようにすればよいのである。しかし、式(A-34)のクーロン・ゲージの条件はどうなるのか、固有値に制限がついてしまうのかという悩みが生じるかもしれない。これについては以下のように解消するのである。

・クーロン・ゲージの条件は全く無視して、固有値問題を解き、そして式(A-35)の解を得たとしよう。

・次に、クーロン・ゲージ条件の「教科書的な」取り扱いで、

$$\mathbf{A}'=\mathbf{A}-\mathrm{grad}\,\phi$$

とする。すると、物理量、$\mathbf{B}$ には影響がない（$\mathrm{rot}\,\mathbf{A}'=\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$）。

・$\mathrm{div}\mathbf{A}'=\mathrm{div}\mathbf{A}-\nabla^2\phi$ であるので、$\nabla^2\phi=\mathrm{div}\mathbf{A}$ となる解、ϕ を求めれば（実際には解く必要はない）、$\mathrm{div}\mathbf{A}'=0$ となるというものである。

・要するに、クーロン・ゲージの条件を無視して、計算をすればよいということになる。

・実際、相互インダクタンスの場合でも、求めるものは、周回積分であり、

$$\oint_C \mathbf{A}'\cdot d\mathbf{s}=\oint_C\left(\mathbf{A}-\mathrm{grad}\phi\right)\cdot d\mathbf{s}$$

であるが、

$$\oint_C \mathrm{grad}\phi\cdot d\mathbf{s}=\phi\big|_C=0$$

となり、ϕ は一切、積分に寄与しないのである。

さて、周知のように、式(A-37)のような微分方程式は、空間が全空間である場合、一般には、スツルムーリウヴィル型にはならないという悩みがある。これを解消するためには、空間を大きなボックスとし、境界に周期的条件を付与する、または、我々の日常的な世界よりはるかかなでは、目立たないように解が減衰し、無限大ではゼロになるというある種の屁理屈を言って、逃れるのである。

式(A-37)の解は、明らかに、

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,,\quad \lambda_{\mathbf{k}}=\mu^{-1}\mathbf{k}^2 \tag{A-38}$$

で、巨大なボックス空間で考えれば、$\mathbf{k}$ は連続変数とみなすことができ、固有ベクトルの「個数」は、$\mathbf{k}$

の空間で一様である。ただし、式(A-38)の最初の式を「規格化された」固有ベクトルにするには、式(A-19)の連続変数版かつ複素版、

$$\int \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\phi_{\mathbf{k}}^{*}(\mathbf{y})\,d\mathbf{k} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{A-39}$$

を満たさないといけない。先ほどまでは、関数は実数としてきたが、以下では、固有ベクトルは複素数とした方が記述が簡単になるのでそうすることにしよう)。すると、容易に、

$$\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{3}}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) \tag{A-40}$$

とすればよいことがわかる。なんとなれば、

$$\begin{aligned}\int \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\phi_{\mathbf{k}}^{*}(\mathbf{y})\,d\mathbf{k} &= \frac{1}{(2\pi)^{3}}\int \exp\big(i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\big)\,d\mathbf{k} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int \exp\big(ik_1(x_1-y_1)\big)\,dk_1 \cdots = \delta(x_1-y_1)\cdots = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\end{aligned} \tag{A-41}$$

であるからである。

さて、式(A-23)の連続（かつ複素）版は、

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \int \frac{\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\phi_{\mathbf{k}}^{*}(\mathbf{y})}{\mu^{-1}\mathbf{k}^{2}}\,d\mathbf{k} = \frac{\mu}{(2\pi)^{3}}\int \frac{\exp\big(i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})\big)}{k^{2}}\,k^{2}dk\,d\Omega \tag{A-42}$$

となる。ここで、$\mathbf{r}=\mathbf{x}-\mathbf{y}$, $d\Omega = 2\pi\sin\theta d\theta$, $x=-\cos\theta$ とおくと、

$i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = ikr\cos\theta = -ikrx$, $d\Omega = 2\pi\,dx$ となる。よって、

$$\begin{aligned}G(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \frac{2\pi\mu}{(2\pi)^{3}}\int_0^\infty dk\int_{-1}^{1}dx\,\exp(-ikrx) = \frac{\mu}{(2\pi)^{2}}\int_0^\infty dk\,\frac{\exp(-ikr)-\exp(ikr)}{-ikr} \\ &= \frac{2\mu}{(2\pi)^{2}r}\int_0^\infty dk\,\frac{\sin(kr)}{k}\end{aligned}$$

ここで、「有名な」公式（Appendix D を参照)、

$$\int_0^\infty dk\,\frac{\sin(kr)}{k} = \int_0^\infty dz\,\frac{\sin(z)}{z} = \pi/2$$

を使うと、

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\mu}{4\pi r} = \frac{\mu}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \tag{A-43}$$

と求まるのである。これは、スカラー場の微分方程式の式(A-37)のグリーン関数であるが、今の場合には、よく知られている、

$$\nabla^{2}\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\,\delta(\mathbf{r}) \tag{A-44}$$

を使えば、直ちに、式(A-43)が得られるのであるが・・・。

さて、ベクトル方程式である式(A-36)のグリーン関数を求めるためには、ベクトル場の固有ベクトルを

求める必要があるが、これは容易に、

$$\mathbf{a_k}^1(\mathbf{r})=\phi_\mathbf{k}\,\mathbf{i}\,,\ \mathbf{a_k}^2(\mathbf{r})=\phi_\mathbf{k}\,\mathbf{j}\,,\ \mathbf{a_k}^3(\mathbf{r})=\phi_\mathbf{k}\,\mathbf{k} \tag{A-45}$$

のようにおけばよい（ここで、単位ベクトルの $\mathbf{k}$ と波数ベクトルの $\mathbf{k}$ をチャンポンに使っているが、特に混乱はないであろう）。よって、式(A-25)を参考にして、

$$\begin{aligned}\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y})&=\int d\mathbf{k}\frac{\mu}{\mathbf{k}^2}\phi_\mathbf{k}(\mathbf{x})\phi^*{}_\mathbf{k}(\mathbf{y})(\mathbf{i}\,\mathbf{i}+\mathbf{j}\,\mathbf{j}+\mathbf{k}\,\mathbf{k})\\&=\frac{\mu}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\mathbf{I}\end{aligned} \tag{A-46}$$

となり、式(A-31)と同じものであることがわかる。これは、明らかに、$\mathbf{x},\mathbf{y}$ について対称になっており、

これから、$M_{12}=M_{21}$ となることが示され、相反定理が成り立つのである。

［余分なコメント１］

今の場合（式(A-40)の場合)、容易に、

$$\int\phi_\mathbf{k}(\mathbf{x})\phi_{\mathbf{k}'}{}^*(\mathbf{x})d\mathbf{x}=\delta(\mathbf{k}'-\mathbf{k})$$

という一つの「規格化」を示すことができるが、以下ではこれは使わない。

［余分なコメント２］

μ が一様な場合、元の微分方程式は、

$$\mu^{-1}\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\lambda\mathbf{A}$$

となるが、この場合の固有ベクトルは、

$$\mathbf{a_k}=\mathbf{t}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}),\quad \mathbf{t}\cdot\mathbf{k}=0,\quad \lambda=\mathbf{k}^2/\mu$$

と与えられる。ここで、$\mathbf{t}$ は、$\mathbf{k}$ に直交する単位ベクトルであり、独立なものは二つある。実際、

$$\begin{aligned}\nabla\times(\nabla\times\mathbf{a_k})&=i\mathbf{k}\times(i\mathbf{k}\times\mathbf{t})\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})=-((\mathbf{k}\cdot\mathbf{t})\mathbf{k}-(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\mathbf{t})\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\\&=k^2\,\mathbf{t}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})=k^2\,\mathbf{a_k}\end{aligned}$$

となるから、これが固有ベクトルであることがわかる（横波の平面波のようなものである)。しかし、これを使って、グリーン関数を求めようとすると、そのままでは、あまりきれいな形にはならない（と思われる)。そこで、独立なもう一つの候補、

$$\mathbf{a_k}=\hat{\mathbf{k}}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}),\quad \hat{\mathbf{k}}=\mathbf{k}/k$$

を取ってみると、これは、

$$\nabla\times\mathbf{a_k}=i\mathbf{k}\times\hat{\mathbf{k}}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})=0$$

と一つ目の rotation の演算で、ゼロとなってしまう。これは固有値、ゼロの固有ベクトルと見なせるが、少なくとも、固有値、k^2 の固有ベクトルではない。しかし、これを捨てることにすると、十分な固有ベクトルが揃えらないのではないかと懸念される。一方、ベクトル・ポテンシャルに、この成分があっても、なくても、物理的に意味のある磁場は、その rotation であるので、磁場にはなんら影響は与えないのである。一方、微分方程式(A-32)の divergence を取ると、

$$\mathrm{div}\,\mathbf{j} = 0$$

となり、$\mathbf{j}$ の $\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$ 成分、$\mathbf{j}_{\mathbf{k}}$ には、$\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}_{\mathbf{k}} = 0$ という条件が課されることになる。つまり、この　$\mathbf{k}$ 方向の成分はなくても、$\mathbf{j}$ は展開可能であることがわかる。そこで、二つの固有ベクトルを、式(A-45)を真似て、

$$\mathbf{a}_{\mathbf{k}}{}^{1}(\mathbf{r}) = \phi_{\mathbf{k}}\,\mathbf{e}_1\,,\ \mathbf{a}_{\mathbf{k}}{}^{2}(\mathbf{r}) = \phi_{\mathbf{k}}\,\mathbf{e}_2 \quad ,\ \mathbf{e}_1\cdot\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{e}_2\cdot\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 = 0$$

とし、さらに、式(A-46)を真似ると、

$$\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \int d\mathbf{k}\,\frac{\mu}{\mathbf{k}^2}\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\phi_{\mathbf{k}}{}^{*}(\mathbf{y})\left(\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_2\right)$$

となると推測される。しかしながら、$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ は、$\mathbf{k}$ とともに向きが変わる単位ベクトルであるので、うまく $\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ が計算できるかどうか、わからないのである（多分、できないであろう）。しかし、上述したように、ベクトル、$\mathbf{a}_{\mathbf{k}}{}^{3}(\mathbf{r}) = \phi_{\mathbf{k}}\,\mathbf{e}_3 \quad \left(\mathbf{e}_3 = \hat{\mathbf{k}}\right)$ を勝手に付け加えても、物理的な結果には影響しないことから、

$$\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \int d\mathbf{k}\,\frac{\mu}{\mathbf{k}^2}\phi^{*}{}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{y})\left(\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\,\mathbf{e}_3\right)$$

と変形しても問題はないであろう。さらに、

$$\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\,\mathbf{e}_3 = \mathbf{i}\,\mathbf{i} + \mathbf{j}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\,\mathbf{k} \qquad \text{(A-47)}$$

となることから、実は、式(A-46)と同じものになることがわかる。
なお、式(A-47)は、

$$\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}\mathbf{i}\\ \mathbf{j}\\ \mathbf{k}\end{pmatrix}\,,\quad \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\end{pmatrix}P^{T}$$

から、

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3=\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\end{pmatrix}P^TP\begin{pmatrix}\mathbf{i}\\ \mathbf{j}\\ \mathbf{k}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{i}\\ \mathbf{j}\\ \mathbf{k}\end{pmatrix}=\mathbf{i}\mathbf{i}+\mathbf{j}\mathbf{j}+\mathbf{k}\mathbf{k}$$

となることからわかるのである。

［余分なコメント２への追記］

よく知れれているように、一般に、線形方程式、

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

の解は、$\det A\neq 0$であれば、一意的な解が、$\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}$と求まり、$\det A=0$の場合は、解が存在しないか、解はあっても一意的ではない。さらに、Aがエルミート行列で、$\det A\neq 0$の場合、つまり、固有値がすべて nonzero の場合、その解は、

$$\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}=\sum_i \frac{\mathbf{v}_i\mathbf{v}_i^{*}}{\lambda_i}\cdot\mathbf{b}$$

と書ける。一方、$\det A=0$の場合、つまり固有値にゼロが含まれる場合で、かつ$\mathbf{b}$が nonzero の固有値からなる空間に存在する場合（$\mathbf{b}$が nonzero 固有値の固有ベクトルで展開可能な場合）、解（の一つ）は、

$$\mathbf{x}=\sum_i{}' \frac{\mathbf{v}_i\mathbf{v}_i^{*}}{\lambda_i}\cdot\mathbf{b}$$

と書ける。ここで、右辺の和は、nonzero 固有値についてのみ和をとるものとする。実際、

$$A\mathbf{x}=\sum_i{}' \frac{A\mathbf{v}_i\mathbf{v}_i^{*}}{\lambda_i}\cdot\mathbf{b}=\sum_i{}'\left(\mathbf{v}_i^{*}\cdot\mathbf{b}\right)\mathbf{v}_i=\mathbf{b}$$

となり、この$\mathbf{x}$が解（の一つ）であることがわかる（最後の等式は、$\mathbf{b}$が nonzero 固有値の固有ベクトルで展開できることから導かれるが、もし展開できない場合には等しくならないので、$\mathbf{x}$は解ではない）。この$\mathbf{x}$に、zero 固有値のベクトルから作られるベクトル、$\mathbf{z}$を加えても、それは、

$$A\left(\mathbf{x}+\mathbf{z}\right)=A\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

であるので、解となる。また、固有ベクトル、$\mathbf{v}_i$に適当にゼロ固有値のベクトルを加えた、

$$\tilde{\mathbf{x}}=\sum_i{}' \frac{\left(\mathbf{v}_i+\mathbf{z}_i\right)\left(\mathbf{v}_i+\mathbf{z}_i\right)^{*}}{\lambda_i}\cdot\mathbf{b}$$

も解となる。実際、

$$A\tilde{\mathbf{x}}=\sum_i{}' \frac{\left(A\mathbf{v}_i+A\mathbf{z}_i\right)\left(\mathbf{v}_i+\mathbf{z}_i\right)^{*}}{\lambda_i}\cdot\mathbf{b}=\sum_i{}' \frac{\left(\lambda_i\mathbf{v}_i\right)\left(\mathbf{v}_i+\mathbf{z}_i\right)^{*}}{\lambda_i}\cdot\mathbf{b}$$

であるが、$\mathbf{z}_i^* \cdot \mathbf{b} = 0$ であることから、$A\tilde{\mathbf{x}} = \sum_i{}' \mathbf{v}_i \left(\mathbf{v}_i^* \cdot \mathbf{b} \right) = \mathbf{b}$ となる。

※　この Appendix の議論は、数学的厳密性に欠けているということを付記しておく。