(0)　準備的注意

(a) 虚数単位、 j

通常、多くの分野では、虚数単位として、i が採用されている。また、物理の分野では、振動等を表現するのに、$\exp(i\omega t)$ 、$\exp(-i\omega t)$ のどちらも「自由に」使われている。そのため、どちらを使っているのか、注意しておく必要がある。一方、工学、特に電気工学の分野では、「圧倒的に（？）」、$\exp(i\omega t)$ が使われているようである。これを強調する意味もあると思われるが、虚数単位を、 j として、多くの場合、

$$\exp(j\omega t) \tag{1}$$

と書かれることが多い。$\exp(-j\omega t)$ と表現されるような場面にはほとんど出くわさないであろう。よって、 j を使うことで、安心して、常に $\exp(i\omega t)$ （つまり、$\exp(j\omega t)$ ）が使われていると思ってよいのである。文献等で、たまたま、

$$j = -i \tag{2}$$

とするのであると書いている場面に出くわすこともあるが、それは、$\exp(-i\omega t)$ という表現に慣れ親しんでいる方に、受け入れやすくしているためであると考えるのがよいかもしれない（ただし、このように解釈すると便利なこともあると思われる）。
この lecture note でも、電気工学、回路の習慣に従って、虚数単位、 j と $\exp(j\omega t)$ を使うことにする。

（記載するまでもないことであろうが・・・）一応、以下のことを記しておこう。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &\quad\rightarrow\quad j\omega \\ \int^{t} dt &\quad\rightarrow\quad \frac{1}{j\omega} \end{aligned} \tag{3}$$

ただし、二番目の式では、積分の定数項は、$\exp(j\omega t)$ の成分を含まないので省略する、または、初期値（下限値）はゼロとするという了解に基づく。次のインピーダンスの表現も、同様に周知であろうが、重要であるので、一応、書いておく。

	インダクタンス L	抵抗 R	キャパシタンス C
インピーダンス $Z(\omega)$	$j\omega L$	R	$1/j\omega C$

(b) phasor 表現

大学での物理関係分野の授業では（または教科書等の学習では）、「物理量は、実数値である。よって、ある量を複素数で表したとしても、それはあくまでも便宜上のことであって、意味のあるのは、実数値、複素数の実部である」というようなドグマを頭の中に叩き

こまれる。少なくとも昔はそうであった。勿論、これは（ある意味では）正しいのであるが・・・。しかし、そもそもドグマなるものは、それに不用意に従うと、とんでもないことになる代物であることは間違いないであろう。これに固執すると、認識を間違う、または物事を正しく理解できないかもしれないのである。もしかすると、電気工学または回路における複素表示を理解する上で、このドグマが邪魔になることもあるかも・・・(？)

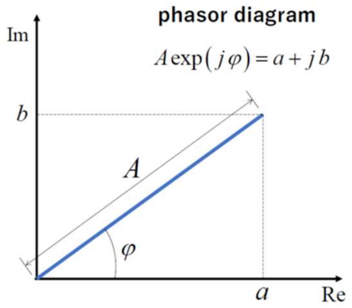

図 1. Phasor diagram

（教訓：ドグマに陥るは易く、それから抜け出すは難し）

以下に述べることは、非常に初歩的であるにも拘わらず、重要であるだろう（ただし、あまりに初歩的であるので、ここでの説明は粗雑になっているかもしれないが・・・）。今、次のような単振動があったとしよう。

$$A\cos(\omega t+\varphi) \tag{4}$$

すると、この振動を決めているものは、（ωt 以外に）A と φ のふたつであり、これは、

$$\text{振幅、位相、} A,\varphi \iff A\exp(j\varphi) \tag{5}$$

と見なしてもよい。2 番目の表現は複素数となっているが、何か余分なものがつけ加わったわけではないので、1 番目のことと等価である。この 2 番目の表現が、振動の phasor 表示と呼ばれるものであり、振動を決めるのに必要十分な情報を与える。式(4)を展開すると、

$$A\cos\varphi\cos\omega t-A\sin\varphi\sin\omega t \tag{6}$$

となるが、周波数、ω に関するフーリエ分解だと考えると、$\cos\omega t$ 、$-\sin\omega t$ の成分が、2 次元表示で、$(A\cos\varphi, A\sin\varphi)$ であると見ることもできる。これを複素表示すると、式(5)が得られるのである。式(4)を複素表示（複素化）すると、

$$Ae^{j(\omega t+\varphi)} \tag{7}$$

となるが、この表式にも、何も新たな（余分な）情報は含まれていないことに注意する。また、ほとんど繰り返しで、しつこいかもしれないが、

$$a\cos\omega t-b\sin\omega t=\mathrm{Re}\left[(a+jb)\exp(j\omega t)\right] \tag{8}$$

であるので、振動を決めるためには、二つのパラメータをもつ、複素数、$a+jb$ を与えてもよい。そして、$\exp(j\omega t)$ を外した、この複素数、$a+jb$ $(=\text{const.})$ が振動の phasor 表示になることは明らかであろう。これらのことを図 1 に図示しておく。ここで、

$\exp(j\omega t)$は、図中に登場しないのである（もっとも、登場させて、図をグルグル回して考えるのも有りではあるが、phasor 表示は、フーリエ分解の表示、周波数ドメインでの表示という意味をもつことに留意した上で、乱暴なことをする必要がある。）また、位相、φは時間の原点の選び方でどうにでもなるので、例えば、phasor 表示された電圧を実数軸上に持ってくることは任意にできる。ただし、一旦、選んだ後は、位相は固定するのである。

今、二つの場所、例えば、境界の内と外で振動を比べることを考え、二つの場所での振動の値が（時間に依らず）等しいための条件を書いてみよう。一つは、式(4)を使うもので、

$$A_1\cos(\omega t+\varphi_1)=A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \tag{9}$$

となる。これから（必要なら、式(6)も見て・・）、

$$A_1=A_2\,,\quad \varphi_1=\varphi_2 \tag{10}$$

となる。一方、振動は、二つのパラメータ、振幅と位相から決まることから、等しい条件は、直ちに、式(10)となることがわかる。または、この条件は、phasor 表示では、

$$A_1\exp(j\varphi_1)=A_2\exp(j\varphi_2) \tag{11}$$

または、

$$a_1+jb_1=a_2+jb_2 \tag{12}$$

となる。

つまり、一般に phasor 表示で方程式を書いたとき（通常、回路方程式は、複素インピーダンスを使った phasor 表示であることが多い）、等式が成り立つのは、両辺が複素数として等しくなる時であり、例えば、実部のみが等しいとしてもダメなのである。

(c) 複素パワー（complex power）

以上は、あまりにも初歩的なことであったかもしれないが、次のことは、電気工学の分野以外の方には、もしかしたら、それほど初歩的ではないかもしれない。

今、電力（パワー）は、電圧v×電流iであるとすると（このことは認めるとして・・）、

$$P(t)=v\times i=V\cos(\omega t+\varphi_1)I\cos(\omega t+\varphi_2) \tag{13}$$

で与えられることになる。これから、以下のような三角関数に関する簡単な変形をすると、

$$\cos\left(\omega t+\varphi_1\right)\cos(\omega t+\varphi_2)=\frac{1}{2}\left(\cos\left(2\omega t+\varphi_1+\varphi_2\right)+\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\cos\left(2\left(\omega t+\varphi_2\right)+\varphi_1-\varphi_2\right)+\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\left(1+\cos 2\left(\omega t+\varphi_2\right)\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\sin 2\left(\omega t+\varphi_2\right)$$

であるので、式(13)は、(表示を簡単にするために、時間の原点をずらして)

$$P\left(t\right)=\frac{VI}{2}\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)+\frac{VI}{2}\left(\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\cos 2\omega t'-\sin\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\sin 2\omega t'\right) \tag{14}$$

と書ける。ここで、定数項はよく知られているように、平均パワーで、

$$P_{AV}=\frac{1}{2}VI\cos\theta \tag{15}$$

である。ここで、$\cos\theta=\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)$であり、力率と言われる。さて、電圧、電流をphasor 表示すると、

$$\mathbf{V}=V\exp\left(j\varphi_1\right),\quad \mathbf{I}=I\exp\left(j\varphi_2\right) \tag{16}$$

と書けるが、これを使って、複素パワー(complex power)、$\mathbf{S}$を次のように定義する。

$$\mathbf{S}=\frac{1}{2}\mathbf{V}\,\mathbf{I}^*=\frac{1}{2}VI\exp j\left(\varphi_1-\varphi_2\right)=\frac{1}{2}VI\left(\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)+j\sin\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right) \tag{17}$$

または、

$$\mathbf{S}=\frac{1}{2}\mathbf{V}\,\mathbf{I}^*=\frac{1}{2}VI\exp j\theta=\frac{1}{2}VI\left(\cos\theta+j\sin\theta\right) \tag{18}$$

とする。これから、振動を表す式(6)と phasor 表示との対応が、式(14)の電力パワー、$P\left(t\right)$と、式(17)(または式(18))の複素パワー、$\mathbf{S}$とに対応していることがわかる。つまり、複素パワーがわかれば、電力パワー(の時間変化)がわかったと言えるのである。また、二つの場所のパワーが(時間に依らず)等しいということは、その場の複素パワーが等しいことと同値であることがわかる(勿論、ここでも、実部のみの議論ではダメである)。なお、電力パワーは、式(14)にあるように、定数項と二倍の周波数の時間変動項からなり、定数項、つまり平均パワーは複素パワーの実部に等しいということに注意。最後に、周知であろうが、複素パワーの絶対値、実部、虚部は、

$$S=\left|\mathbf{S}\right|:\text{apparent power (皮相電力)}$$

$$P=\mathrm{Re}\,\mathbf{S}:\text{active power}\left(\text{有効電力}\right)=P_{AV}$$

$$Q=\mathrm{Im}\,\mathbf{S}:\text{reactive power}\left(\text{無効電力}\right)$$

$$\mathbf{S}=P+jQ$$

と呼ばれていることを付け加えておく（図 2 を参照のこと）。これらの中で、特に、

$$P_{AV}=\mathrm{Re}\,\mathbf{S}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\mathbf{VI}^{*}\right) \tag{19}$$

は、（よく知られた）重要な表式である。物理関係の分野では、主に、この関係式だけが取り上げられることが多いが、電力のパワー・バランスという観点では、当然、reactive power も考慮に入れる必要があるのである（つまり、複素パワーで考える必要がある）。reactive power を日本語で無効電力と呼ぶのは、門外漢からすると、何かどうでもよい電力、無視してよい電力のように勘違いされる可能性が大きいので、適切な言葉ではないように思われるのであるが、すでに慣用語になっているので、変更はむつかしいであろう。

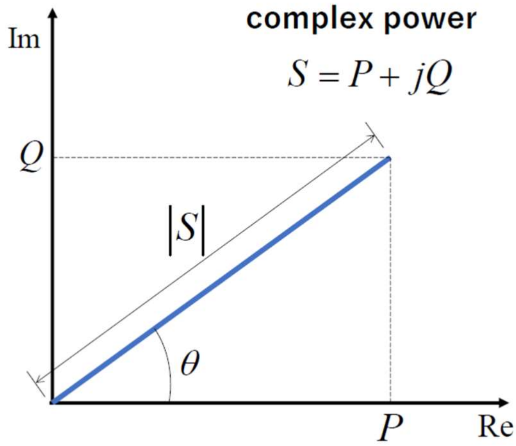

図 2. 複素パワー（complex power）

(d) 実効値（effective value）

最後に、実効値について、簡単に触れておこう（これも周知であろうが・・・）。今、家庭の 100VAC を負荷抵抗（純抵抗）にかけて、1 A が流れたとすると、そのパワーは、

$$100V\times 1A=100W$$

となる。しかし、この場合に使われている（日常的な）100V、1A は実際には、実効値であり、よく知られているように、ピーク値は、その $\sqrt{2}$ 倍である。ある量がピーク値なのか、実効値なのか区別するための notation は記述の省略という点からすると、面倒なところがある（悩ましいところがある）。本 lecture note では、混乱がなさそうな時には区別する記号等は用いない場合もあるが、混乱しそうな時には、

・ピーク値：　添え字なし

・実効値：　下付きで eff を付ける（若干、長いがわかりやすいであろう）

とする。

すると、日常的な 100V は、$100V_{\mathrm{eff}}$ のことであり、これは、

・電圧・電流計（今時はデジタル）の表示では、100 V

となり、

・（アナログ）オシロスコープでの波形の振幅の表示では、約 141 V

となる。なお、オシロスコープで、初めて 100VAC を測った時に、この振幅の値に「新鮮な感じ」がしたこと憶えている方も多いのではないだろうか。

また、世の中での交流の表示は、通常、実効値で示されていることがほとんどである。よって、電力のパワーは、DC の場合と同様に、電圧×電流で与えられ、1/2 は付かない。

一応、前項のいくつかの表式を実効値で書き直しておくと、

$$\begin{aligned}
P_{AV} &= V_{\mathrm{eff}} I_{\mathrm{eff}} \cos\theta \\
\mathbf{S} &= \mathbf{V}_{\mathrm{eff}} \mathbf{I}_{\mathrm{eff}}^{*} = V_{\mathrm{eff}} I_{\mathrm{eff}} \exp j\theta = V_{\mathrm{eff}} I_{\mathrm{eff}} \left(\cos\theta + j\sin\theta\right) \\
P_{AV} &= \mathrm{Re}\,\mathbf{S} = \mathrm{Re}\left(\mathbf{V}_{\mathrm{eff}} \mathbf{I}_{\mathrm{eff}}^{*}\right)
\end{aligned} \tag{20}$$

となる。

ついでに、3 相交流の場合の（平均）電力を書いておくと、

$$P_{AV} = \sqrt{3}\, V_{\mathrm{eff}} I_{\mathrm{eff}} \cos\theta \tag{21}$$

で与えれる。ただし、ここで、V_{eff} は、相間電圧（3 本のうちの 2 本の間の電圧）、I_{eff} は、相電流（3 本のうちの 1 本に流れる電流）である（文章で書くと、若干、複雑であるが、これらは、通常、測定できる量である。また、この若干、複雑な（？）関係のために、$\sqrt{3}$ が式に出てくるのである）。なお、この導出は、至って簡単であるが、ここには書かない（lecture note 本文には書く予定。）しかし、3 相交流を利用するという利用者の立場に立てば、この式は、重要なものであり、そして、多くの場合、これだけ知っていればよいかもしれないのである。（蛇足：この式は、導出するより憶えていることが重要である。電力が電圧×電流で与えられるということは、導出するより記憶していることが重要であるのと同じように・・・）