

(I) テブナン (Thevenin) の定理、ノートン (Norton) の定理

---- 等価回路 (equivalent circuit) に関する定理 ----

電気工学や回路理論を学んだ方にとって、多分、これらの定理は周知のことで、今更、何をと思われるかもしれない。一方、他分野の方にはそれほど知られていないかもしれないし、それを知ったところで、どうなのと思われるかもしれない。しかしながら、これらの定理の意味するところやその考え方を知っておくことは無駄ではないであろう。

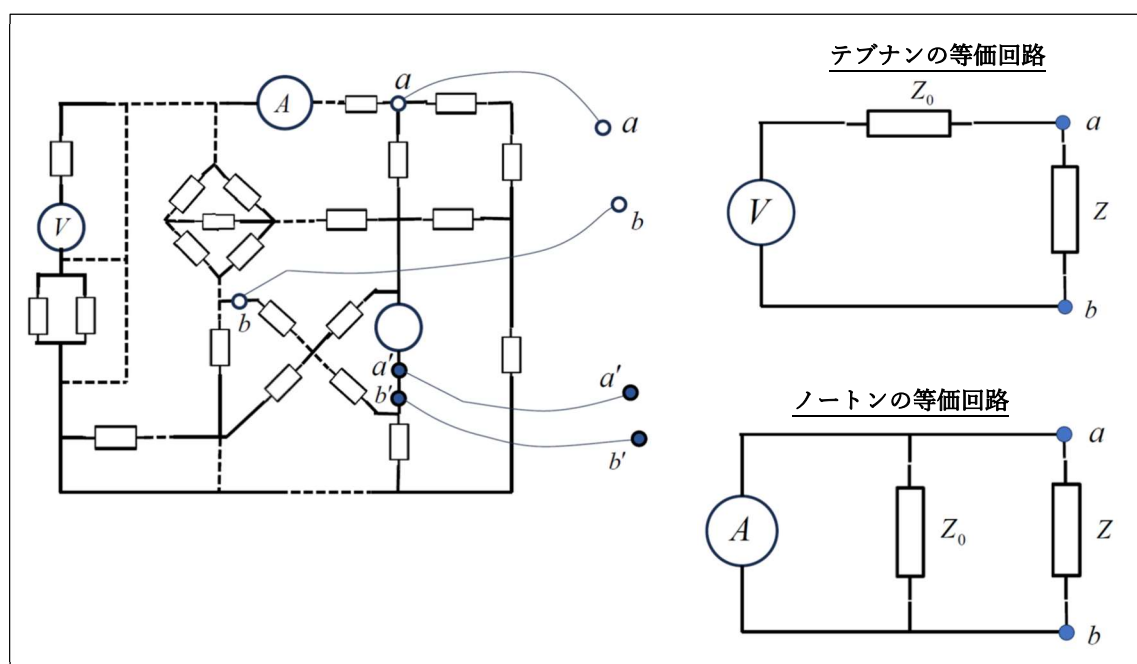


図 1. テブナンの等価回路、ノートンの等価回路

今、一目見ただけでは、素人には全くどうなっているのかわからない複雑怪奇な電気回路があったとし、その回路の中の任意の端点（節点）から適当に電圧や電流を取り出して利用しようとしたとしてみよう。すると、この利用するという観点からは、この複雑で理解しがたい回路は、極めて単純な回路（等価回路）と完全に等価であると見なすことができるのである（ただし、回路は線形であると仮定しての話であるが、多くの場合に、それは近似的に成り立っているであろう）。これがテブナン、ノートンの定理であるが、一方では、この定理は、回路自体の解析や理解にも役立つものである。いずれにしても、この定理は、素人にとって、理解不能な回路であっても、利用するという観点では、

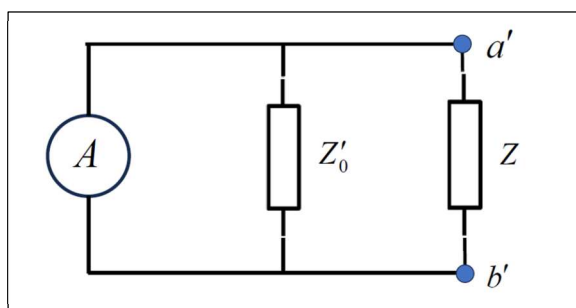


図 2. もう一つのノートンの等価回路

非常に単純な（理解が容易な）回路と思ってよいと言っている「優れもの」である。よって、これを知らない手はないであろう（さらに、これは回路とは無縁の様々な複雑な現象を理解するのに役立つであろう）。

この二つの定理を図示すると、**図 1** のようになる。これは、いたって単純であり、これ以上のものではない。この説明（及び初等的証明）は、後述するが、ノートンの定理の説明としては、**図 2** の方が（個人的には）より自然ではないかと思っている（なぜ、これの方がより自然かについても後述する）。

なお、蛇足的なコメントをすると、

- ・回路中の二つの節点に電位差があるとき、この電圧を電圧源と考えて利用しようとした場合にどうなるかを表すのが、テブナンの定理であると言ってもよい。例えば、川の途中に落差があるときに、それを利用して発電をしようという場合に相当する。
- ・一方、回路の中に流れている電流を電流源と考えて利用しようという場合が、ノートンの定理であると言ってもよいであろう。（落差がない）川の流れを利用して発電しようという場合に相当するのである。

○ テブナン (Thevenin) 定理、ノートン (Norton) 定理に関する逸話

この定理にまつわる話は、次の文献が参考になるだろう。

- ・ D. H. Johnson, “Origins of the equivalent circuit concept: the voltage-source equivalent”, Proc. IEEE, vol. 91, No. 4, pp. 636-640, April 2003
- ・ D. H. Johnson, “Origins of the equivalent circuit concept: the current-source equivalent”, Proc. IEEE, vol. 91, No. 5, pp. 817-821, May 2003

まず、これを読んで個人的に印象に残ったことは、次の二つのことであった。一つは、テブナンがこの定理を新たに発見したと思って、専門家 (A. Vaschy、数理物理学者) に相談したところ、「間違いでしょう」と指摘されたという点である。このようなことは新しい発見にはよく付きまとう話であるかもしれない。特に、今の場合には、どんな複雑な回路も単純な回路に等価であるという大胆な定理であるので、当然かもしれない。よって、これは専門家の先入観、既存の古い知識に固執したためであろうというような「批評家的」評価は適切ではないだろう。むしろ、このようなことを初めて聞いた人は誰でも専門家、非専門家に拘わらず、「嘘でしょう？」と思うのが自然ではないだろうか（多分、今でも、これを初めて聞いた人のほぼ 100% がそう答える、またはそう思うのではないだろうか）。なお、最初に誤って間違いと指摘した A. Vaschy の「すばらしい」ところは、その後、このテブナンの定理を大いに「宣伝」したという点である。もう一つ印象に残った点は、文献に名前が何度も出てくる、メイヤー (H. F. Mayer) に関することである。メイヤーは、第二次大戦下のナチス・ドイツで、「自主的スパイ」活動を行い、連合軍側に情報を提供していた。発覚すれば、即処刑という状況で、このようなことはなかなかできることではないだろう。おまけに、

メイヤーの恩師は、ヒトラーの熱烈な信奉者であったレーナルド（Philipp Lenard）であった。なお、レーナルドは、陰極線の研究で、1905 年にノーベル賞を受賞しており、光電効果の実験的検証も行っている。また、同じ 1905 年に光電効果の理論を提唱した、アインシュタインを痛烈に非難、差別をしていることでも有名である。この恩師に「反逆」していたメイヤーは、スパイ容疑ではなく BBC 放送を隠れて聞いていたという（些細な？）罪で断罪されるところを恩師、レーナルドの助命嘆願で命拾いをするという「貴重な（？）」経験もしている。

さて本題の一つのテブナンの定理であるが、これは、テブナンが登場する前、1853 年に既にヘルムホルツ（Helmholtz）が発見していたようである。テブナンは、このことを知らず、ちょうど 30 年後の 1883 年に「テブナンの定理」を発見したのである。さらに、遅れること、約 40 年後の 1926 年、ノートンとメイヤーが独立に、「ノートンの定理」を発見している。定理発見の経緯、定理の命名などの詳細は、文献を参照していただくことにして、文献の著者のジョンソンの結語から引用すると、ヨーロッパでは、これらの定理は、Helmholtz-Thévenin, Helmholtz-Norton, Mayer-Norton などと呼ばれているようであるが、著者としては、テブナンの定理は、Thévenin の定理と呼び、ノートンの定理は、Mayer-Norton の定理と呼ぶことを提唱している。

なお、テブナン（フランス）がヘルムホルツ（ドイツ）の研究を知らずに、テブナンの定理を発見したのと同じように、我が国でも、（日本人の）鳳（ほう）秀太郎（東京帝国大学教授で、与謝野晶子の兄）がテブナン、ヘルムホルツとは独立にテブナンの定理を発見している。このため、我が国の回路等の比較的古い（？）教科書では、テブナンの定理を鳳-テブナンの定理として紹介している。しかし、以下では、簡潔な表現をよしとして（また、世の中の多くの慣習に従って）、短くテブナン、ノートンの定理ということにさせて頂く。

○ テブナン（Thevenin）定理、ノートン（Norton）定理の初等的説明

これまで若干、長い前置きが続いたが、定理の証明自体はたいへん簡単なものである。テブナンの定理の初等的導出については、いろいろな教科書・ウェブ等に載っているが、後者についてはあまり見当たらないようなので、両者を比較しつつ、初等的な説明をすることにする。しかし、その前に、非常に初等的というか初歩的な検討をしておこう（本題の定理の証明があまりにも簡単なので、単に、話を引き延ばそうしていると疑われるかもしれないが・・・）

（非常に）初歩的な考察

今、ある回路が線形でかつ DC 的であると、**図 3** のように、回路の中の二つの任意の節点を出力端だと思って、ここに抵抗を付加することを考えてみよう。すると、回路は線形

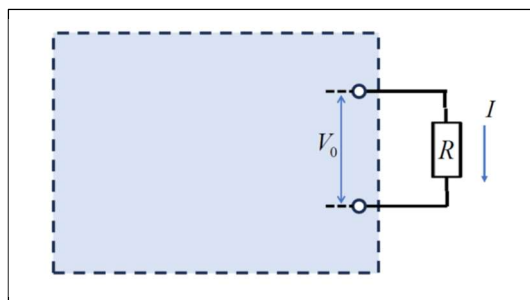


図 3. DC 回路への抵抗付加

であること、さらに、抵抗を付加して、それに電流、 I を流せば、出力端の電圧は降下するであろうという、至極、もっともな仮定をすると、電圧は、最初の値、 V_0 から、

$$V = V_0 - cI \quad (c > 0) \quad (1)$$

のように変化するであろう。ここで、比例係数、 c の次元は、抵抗（インピーダンス）の次元となることから、式(1)は、

$$V = V_0 - R_0 I \quad (2)$$

と書けるはずである。一方、付加した抵抗の値を R とすると、 $V = RI$ と式(2)から、

$$V_0 = (R + R_0)I \quad (3)$$

となる。つまり、出力側から見れば、抵抗、 R_0 を使って、全体の回路は、**図 4** のようになっていると見なすことができるということになる。つまり、テブナンの等価回路と同じものが得られる。このままでは、 R_0 は何なのかよくわからないが、 R をゼロ、つまり出力端をショートした時の電流、 I_0 を測定すれば、 R_0 は、

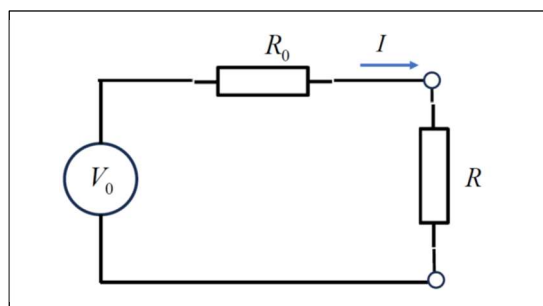


図 4. 図 3 の（テブナン）等価回路

ば、 R_0 は、

$$R_0 = V_0 / I_0 \quad (4)$$

から得られる。さて、式(3)から、

$$\frac{V_0}{R + R_0} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_0} \right) I \quad (5)$$

となるが、これをさらに変形すると、式(4)を使って、

$$I_0 = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_0} \right) RI = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_0} \right) V \quad (6)$$

となり、全体の回路は**図 5** のようになっている

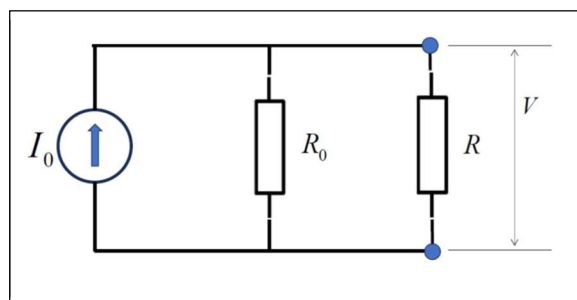


図 5. 図 3 の（ノートン）等価回路

と見なすことができる。つまり、ノートンの等価回路と同じものが得られたことになる。

では、以上で、抵抗を一般のインピーダンス（複素インピーダンス）に置き換えれば、テブナン、ノートンの定理の証明は終わりかということ、必ずしもそうではないのである。テブナン、ノートンの定理では、 R_0

の意味がもっと具体的であり、出力端から回路内部を見た、内部インピーダンスであることが明示的に示されるのである（また、これにより回路図から具体的に、 R_0 または、内部インピーダンス、 Z_0 を計

算で求めることができるのである）。

さて、式(1)では、付加した抵抗に電流を流せば、電圧が降下すると仮定したが、例えば、出力端に何かフィードバックを仕掛けて、電流に比例して、電圧を上昇させたとすると、式(1)は、

$$V = V_0 + cI \quad (c > 0) \quad (7)$$

のようになり、その結果、式(3)は、

$$V_0 = (R - R_0)I \quad (8)$$

となる。これを図示すると、**図 6** のようになる。つまり、出力端が開の状態（ $R = \infty$ ）から抵抗値を下げていくと、 $R \approx R_0$ の付近で、電流が限りなく大きくなるのである。さらに下げると、電流の流れる方向が逆転するということが起きるのである。この場合は、フィードバックを仕掛けるという小細工をしているが、式(8)からわかるように、このようなフィードバックはなくても、内部抵抗が負性抵抗をもつとすれば同じようになることがわかる。さらに、複素インピーダンスの場合には、（よく知られているように）フィードバックとか負性抵抗とかを持ち出さなくても一見、似たような現象が起きるのである（**図 7a,b** を参照）。

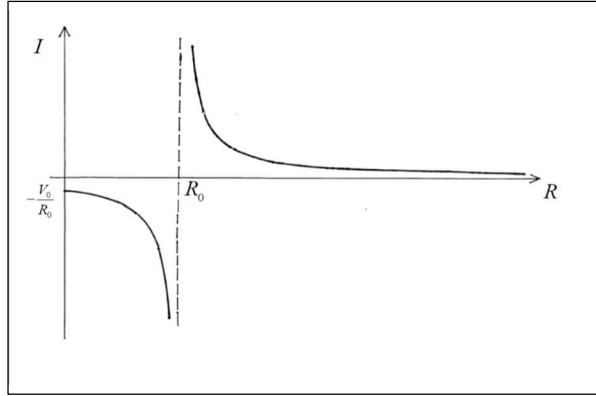


図 6. 式(8)の電流-抵抗のグラフ

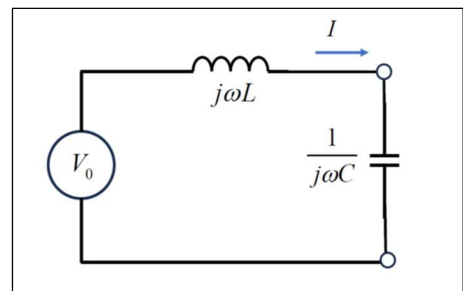


図 7a. 負荷が複素インピーダンスの場合

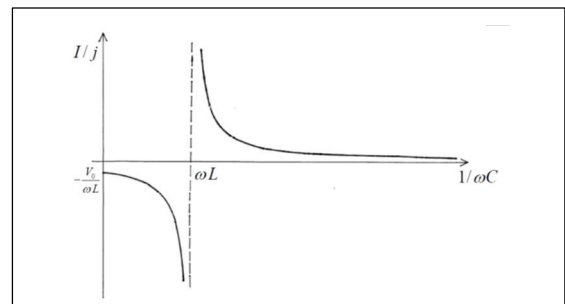


図 7b. 図 7a の電流- $1/\omega C$ のグラフ

以上では、回路の二つの節点に電圧がかかっているとした場合であったが、回路中には、一般に、抵抗ゼロと見なせる導線に電流が流れている場所がある（例えば、図1の $a'-b'$ 間のような場所）。そこで、この流れている電流を利用しようということを考えてみよう。つまり、**図8**のように、この導線の部分を引き出して、電流源にしようというわけである。最初、抵抗ゼロの時に、流れて

いた電流を I_0 とし、ゼロの抵抗の代わりに、あるコンダクタンス、 G を挿入したとすると、そこにはある電圧が発生し、電流自体も変化するであろう。すると、議論は、先の場合(電圧源と見なした場合)

と同様になるので、式(2)に相当するものは、

$$I = I_0 - G_0 V \quad (9)$$

となる。同様に、 $I = GV$ から、式(3)に相当する、

$$I_0 = (G + G_0)V \quad (10)$$

が得られる。つまり、**図9**のような回路と等価になり、**図2**のようなノートンの等価回路が得られるのである。

テブナン、ノートンの定理の前提

まず初めに、この証明のための前提条件を示しておこう。

- ・全体の回路は線形であると仮定する。つまり線形システムであるとする。しかしながら、線形化したものや線形と見なしてよいような微小変動の場合にも適用可能である。

- ・すべては、単一周波数（DCを含む）で動作し、定常状態であると仮定する。

こうすることで、 R 、 C 、 L などの受動素子は、複素インピーダンスで表すことができる。

- ・電源は、いくつあってもよいが、一定振幅（複素振幅）の定電圧源または定電流源とする。さらに、これらの電源は理想電源（ideal source）と仮定する。

注）理想電圧源： 流れる電流に拘わらず、出力電圧は一定である。電圧ゼロの場合には、単なる導線と見なせる。短絡（ショート）状態となる。

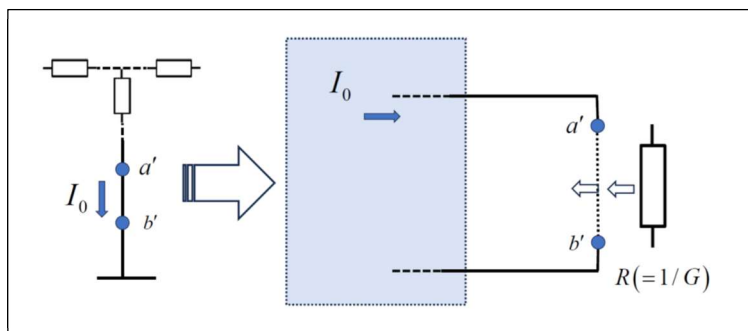


図8. 電流が流れている導体の部分を電流源と見なす

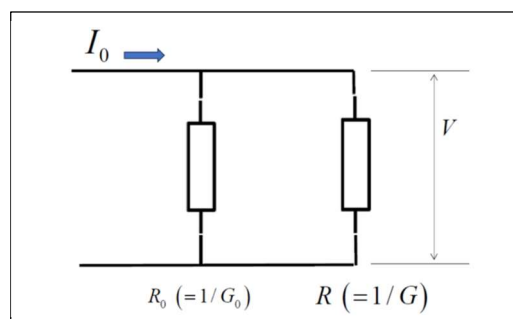
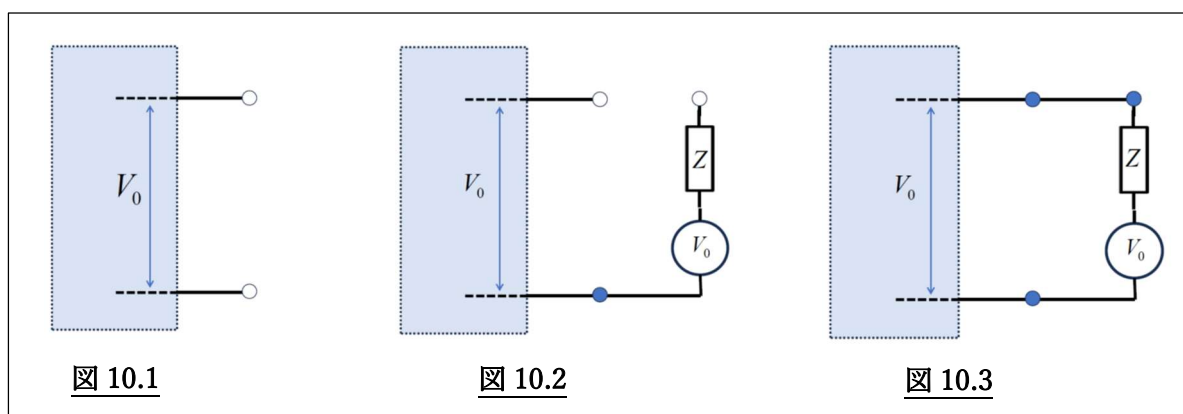


図9. 図8の（ノートン）等価回路

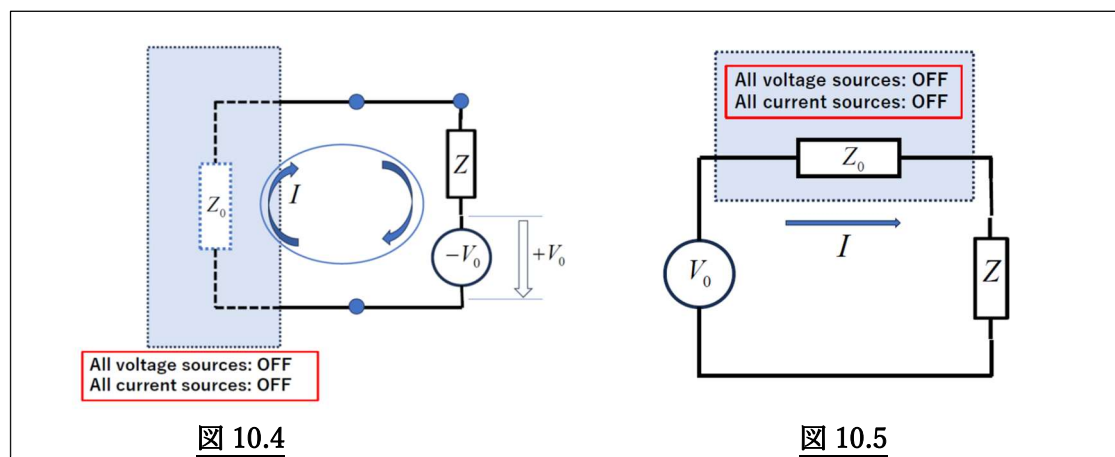
理想電流源： 電流源にかかる電圧に拘わらず、出力電流は一定である。電流ゼロの場合、断線したのと同じになる。オープン状態となる。

テブナンの定理の証明

定理の証明は、言葉でなく、ポンチ絵で示せば、一目瞭然である。ここでは、テブナンの定理の証明を図 10.1～10.7 に示す。出力端の電圧を V_0 とし、図 10.2 で出力端に接続する負荷側の電源の電圧も同じとする。すると、図 10.1～図 10.3 では、回路（以下では、図の左



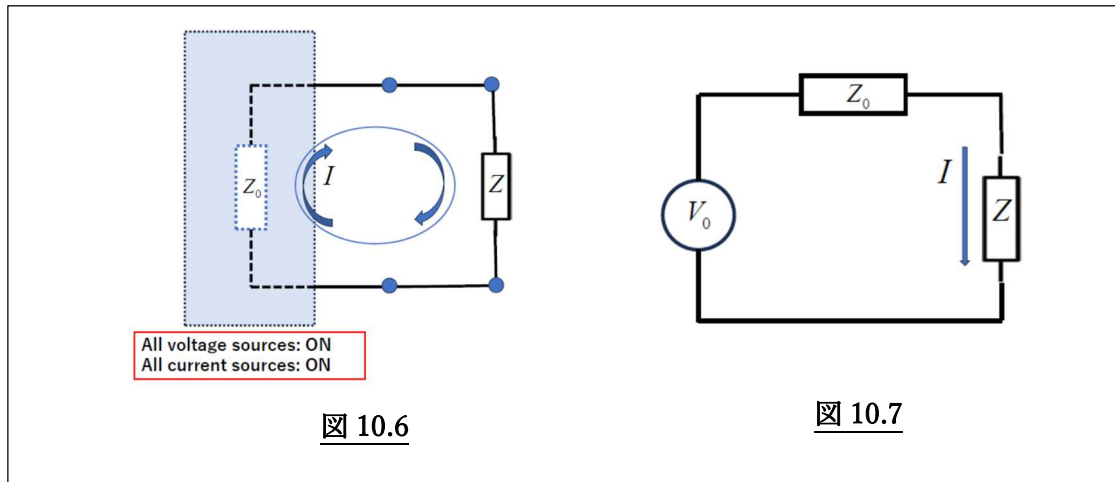
側のボックスのことをいう) の状態 (内部の電圧、電流) は変化しないし、出力端の電圧も変化しない。ここで、重要な点は、図 10.3 では、負荷に流れる電流はゼロであるということである。



次に、すべての電源 (負荷側の電源も含む) を OFF して (出力電圧や出力電流をゼロにして)、図 10.4 のように、回路+負荷に電圧、 V_0 を逆方向に加えたものを考える。これは書きかえると、図 10.5 と同じになる (等価になる)。ここで、 Z_0 は、出力端から見た回路の内部抵抗である。よって、負荷に流れる電流、 I は、

$$(Z + Z_0)I = V_0 \quad (11)$$

となる。さて、全体のシステムは線形であるので、重ね合わせができる。よって、**図 10.3** と **図 10.4** を重ね合わせると、**図 10.6** のようになる。ここで、負荷側の二つの電圧源の電圧は、



互に逆符号であるので、重ね合わせで打ち消しあって、付加した外部の電源はないのと同じになる。さらに、負荷に流れる電流は、 $0 + I = I$ となり、式(11)で与えられることになる。つまり、出力側から見ると、流れる電流は、**図 10.5** で与えられ、図式的には**図 10.7** のようになる（等価になる）のである。以上から、テブナンの定理が証明されたことになる。ここで、多分、重要だと思われる次の注意（余分な注意？）を与えておこう。

<付記 1：重要な注意>

図 10.4 では、すべての電源を OFF しているが、これを机上、紙の上でやる分には、何ら問題はないのであるが、もしこれを実際の現場で行う場合、例えば、 Z_0 を実測しようとした

場合には、注意が必要である。多分、現実の定電圧、定電流の電源は出力ゼロ付近では、本来の機能（定電圧電源の場合はショート状態、定電流電源の場合はオープン状態にすること）を果たせないであろうことから、試験する場合には、落ち着いて、それぞれの電源を OFF して切り離し、定電圧電源の場合には、出力端子をショート、定電流電源の場合には、出力端子をオープンにすることが望ましい。一方、電源が ON 状態で、定電圧電源の場合には出力端子をショートすること、また定電流電源の場合にはオープンにすることは、絶対にやってはいけないのである（厳禁である）。

ほとんどのの人にとっては、例えば、家庭の AC コンセントの出力端子をショートするようなことはやってはいけないということは常識であろう。家庭用の 100V は、ほぼ 100V の定電圧電源から供給されているものと考えて差し支えないので、たこ足配線する場合でも、常に電圧は一定の 100V が供給されているはずであると思って、あまり電圧降下のことは気にし

ないのである。しかし、このような場合でも、絶対にショートさせないように「細心の」注意を払うのである。それは、電圧が一定であるとする、よく知られたパワーの式

$$P = \frac{V^2}{R} \quad (12)$$

から、抵抗、 R がゼロだと、パワーが無限大になって、大変なことになることを知っているからである。さて、家庭用の AC はなぜ定電圧と考えてよいか（それにより、ショートは厳禁という我々の常識が成り立つのであるが・・・）は、一般に電力を供給する側（高压側）の抵抗が小さいこともあるが、低压側から見ると、その抵抗がさらに電圧のステップダウンの比の 2 乗に比例して小さくなることにも依っている。つまり、一般家庭から見ると、高压側の内部抵抗が非常に小さく見えるので、家庭では電力は定電圧電源から供給されていると考えてよいのである。話がだんだん外れて

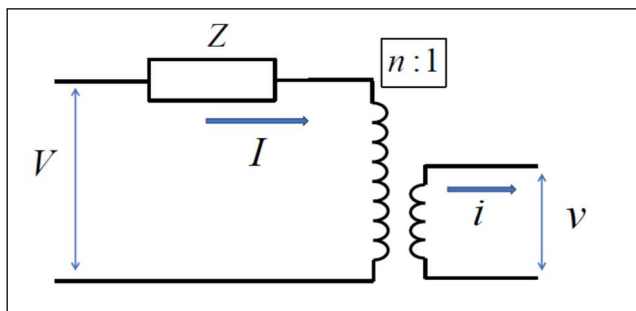


図 11. 変換トランスによるステップダウン

きたついでに、若干、蛇足的ではあるが、低压側から見て、高压側の抵抗（インピーダンス）がどのように見えるかを以下に示しておこう。図 11 で、変換トランスの比は、 $n:1$ であるとし、トランスは理想トランスしよう。すると、二次側（低压側）に電流が流れていない時（注：理想トランスでは、この時、一次側にも電流は流れていない）の電圧、 v_0 は、

$$v_0 = V / n \quad (13)$$

である。今、二次側に電流、 i が流れたとすると、一次側には、

$$I = i / n \quad (14)$$

の電流が流れる。すると、一次側のトランスにかかる電圧は、電圧降下により、

$$V_1 = V - Z I \quad (15)$$

となる。よって、二次側の電圧、 v は、

$$v = V_1 / n = V / n - Z I / n = v_0 - \frac{Z}{n^2} i \quad (16)$$

となる。これから、二次側からは、内部インピーダンス、 Z / n^2 をもった電圧、 v_0 の電源がつながっているように見えることがわかる。今、かなりいい加減なオーダー評価をしてみよう。高压 6.6 kV から二次側に AC200V が供給されているとしよう。それも三相ではなく単相であると仮定しよう。負荷として 0.1Ω をつないだとすると、消費電力は、

$(200\text{V})^2 / 0.1\Omega = 400\text{kW}$ とかなりの電力となる。また、ステップダウンの比の2乗は、

$1/n^2 = (200\text{V} / 6.6\text{kV})^2 \sim 10^{-3}$ となる。高圧側の抵抗を 2Ω と「適当に」仮定しよう（高圧ケーブルの抵抗： $\sim 0.2\Omega/\text{km}$ 、ケーブル長： $5\text{km} \times 2$ ）。また、より高圧部については、問わないことにしよう。すると、2次側からみて、高圧ケーブルの抵抗は、約 $2\text{m}\Omega$ に見えることになる。つまり負荷の抵抗に比べて、約2%程度となる。よって、これくらいの大電力をとっても2次側の電圧は2%ぐらいしか下がらない。つまり電源として定電圧電源がつながっていると見なすことができる（なお、現在の国内の送電ロス、抵抗ロス以外も含めて約5%以下の程度のようなものである。）

さて、いずれにしろ、定電圧電源またはこれに近い電源の場合、出力端をショートしてはいけないことは、私たちのほぼ常識になっている。しかし、定電流電源の場合には、逆に出力端をショートしていれば、安全であるということは、一般的にはそれほど常識ではないかもしれない。逆に電源 ON の状態でオープンすることは非常に危険で、やってはいけないのである（定電流電源は、特に理想的な定電流電源は、（障害があっても）その定められた電流を流そうと、どんどん出力電圧を上げるので、高電圧が出力に発生する。出力端がオープンであると、原理的にはどこまでも電圧が上がることになる）。かつて私が若かった頃、加速器のマグネット電源の初期調整の段階で、電源メーカ（日立製作所）の技術者の方が出力端をブスバー（導体棒、または導体板のこと）でショートして電源を ON して電流を流そうとしたことがあり、さすがに「エー?!」とびっくりしたが、定電流源なので OK という説明を聞いて、納得したことがあった。なお、その後、この方には、実際の電源や回路の仕組み、回路図の見方などについていろいろと教えていただいた。特にプロは、回路図を見ながら（回路図を床に広げて）、事に当たる、例えば、電源の調整、故障、不具合のチェックを行うものであるということを（つまり、現物だけではダメであるということを）、身をもって教えていただいた。

ノートンの定理の証明

あまり、きちんと調べていないが、ノートンの定理については、テブナンの定理のような初等的説明は文献等にはあまりないように思われる（調査不足かもしれないが・・・）。文献等にある説明は、テブナンの定理と同じ結果がノートンの定理（ノートンの等価回路）から得られるので、OK というものや双対性（duality）（電圧 $\leftrightarrow$ 電流、インピーダンス $\leftrightarrow$ アドミタンス、直列 $\leftrightarrow$ 並列の入れ換え等をすれば、同じ式が使えるという性質）から導かれるというものがある。しかし、この双対性を使う方法は、係数合わせが必要になる（と思われる）。そうであるなら、むしろ、式(6)の場合と同様に、式(11)から導いた方が簡単であるように思われる。式(11)から、

$$\frac{V_0}{Z Z_0} = \left(\frac{1}{Z} + \frac{1}{Z_0} \right) I \quad (17)$$

となるが、ここで、 $I_0 = V_0 / Z_0$ とおき、 $V = Z I$ とすると、

$$I_0 = \left(\frac{1}{Z} + \frac{1}{Z_0} \right) V = (Y + Y_0) V \quad (18)$$

と書けることがわかる。これを図示すると、**図 12** のノートンの等価回路が得られるのである。しかし、この導出では、非常に簡単な式の変形とはいえ、式を使っている。一方、テブナンの定理の導出では、一切、式は使っていないので、同様に式なしで導かれるはずである。以下で、ポンチ絵だけ

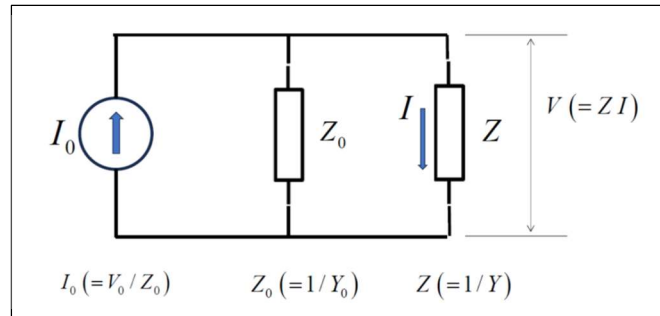


図 12. ノートンの等価回路への変換

でノートンの定理を証明してみよう。まず、**図 13.1** のように、出力端にかかっている電

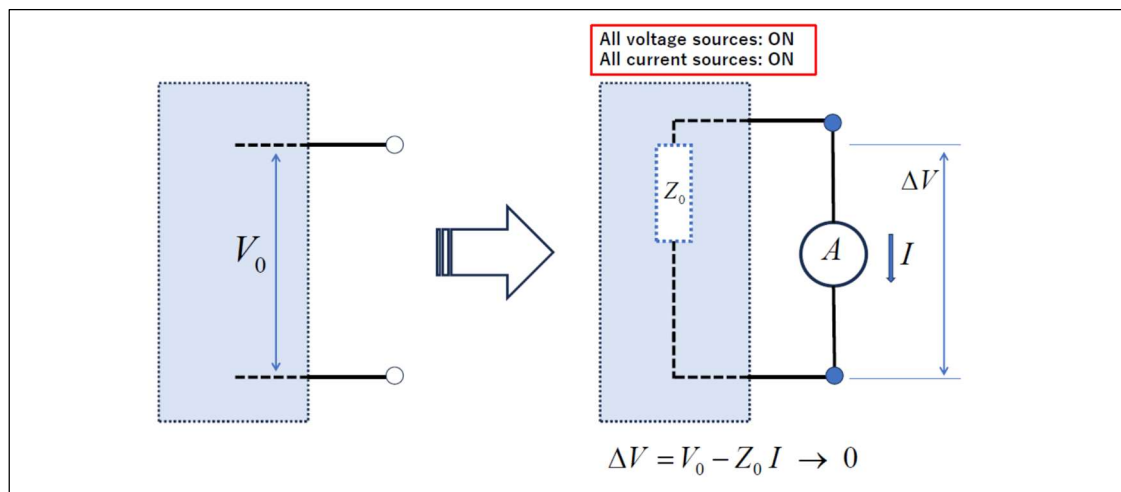


図 13.1

圧をキャンセルするように、電流源をつないで逆電圧を発生させる。どのくらい電流を流せばよいかというと、重ね合わせの原理から、すべての電圧源、電流源を OFF した状態で、出力端の電圧をキャンセルするような電圧を発生すればよい。つまり、出力端から見た回路の内部インピーダンスに電流をかけたものが電圧に等しくなればよい。**図 13.2** では、両端の電圧はゼロであるので、これに負荷をつないでも何らの変化も起こらない。特に、負荷に流れる電流はゼロである（うるさいことを言えば、負荷の Z は、 $Z \neq 0$ と仮定）。次に、**図 13.3** のように、すべての電源を OFF して、電圧をキャンセルする電流源の電流と逆符号の

電流を流すような定電流源を接続し、その時に負荷に流れる電流を I としよう。最後に、**図 13.2** と **図 13.3** を重ねると、**図 13.4** のようになり、回路に、単に負荷をつないだ状態になる。そして、負荷に流れる電流は、 $0 + I = I$ となる。よって、負荷側から見ると、回路は、**図 13.3** を書き換えた **図 13.5** と等価であることがわかり、ノートンの定理が証明されたことになる。

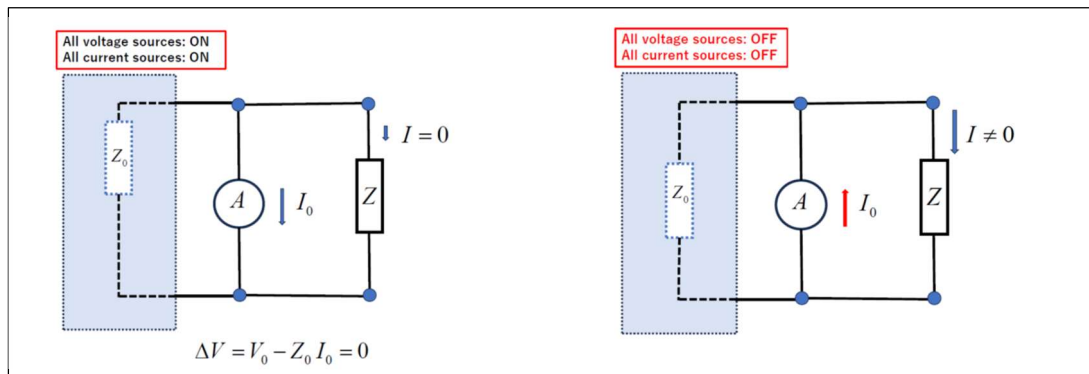


図 13.2

図 13.3

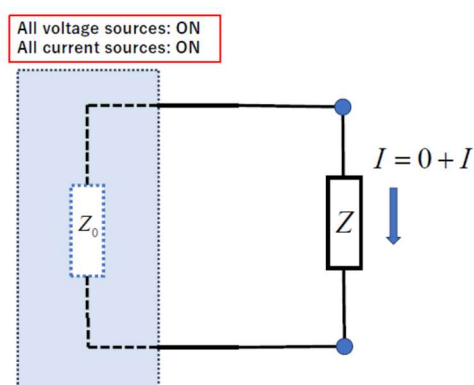


図 13.4

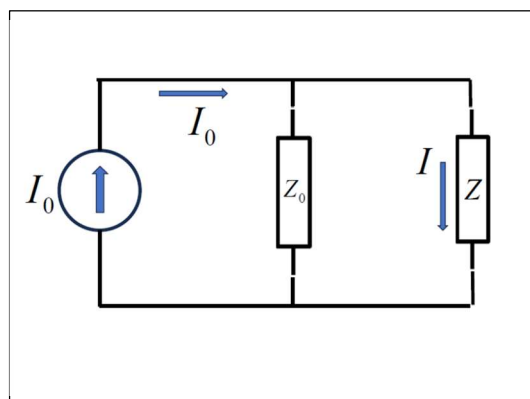


図 13.5

以上で、ポンチ絵による初等的説明は終わったことになるが、テブナンの定理の説明と比較すると、対称的（双対的）になっていないことに気づく。テブナンでは、負荷をつないでも **図 10.3** のように回路内部への影響はないようになっているが、ノートンでは負荷をつなぐために、出力端の電圧がゼロになるように回路内部の電圧・電流が変化している。そこで、まず、双対的になるようにするために、上記の付記で述べたことに注意しよう。定電圧電源では、出力端がオープンになっていれば安全で、それからパワーを利用しようとすれば、出力端から徐々に電流を取り出すことが望ましいのである（これが、多分、安全な使い方、正しい使い方であろう）。一方、定電流電源の場合には、先に **図 2**、**図 8** の箇所でコメントしたように、ショート状態から始めて、徐々にショートしている箇所の抵抗を上げていくことが望ましいであろう。つまり、定電流源として回路を見ようとするならば、回路内のショー

ト状態、つまり電流が流れている（無抵抗の）線、またはある一点から導線を引き出して、電流やパワーを利用するとした場合を考えるというのが適当であろう（テブナンの場合には、回路上の適当な2点を出力端としたのであるが、この場合、負荷をつなぐ前は、オープン状態になっている）。このように設定して、かつ（完全ではないが）テブナンと双対的になるような説明を試みると、**図 14** のようになる（一応、 $Z \neq 0$ と仮定）。**図 14.2** と **図 14.4** を重ね合わせると、**図 14.5** のようになるが、外部から見ると、負荷に流れる電流は、**図 14.4** と同じであり、等価的回路は、**図 14.6** となるのである。当然、出力端が異なるので、内部抵抗の値も異なるが、その値は、出力端から見た内部抵抗という点では同じ意味をもつ。**図 13**、**図 14** のどっちを採用するにしても、式を使わず、ポンチ絵でノートンの定理が証明できたことになるのである（なお、 $Z = 0$ の場合は、そもそも最初から何もしなくてよかったので、この場合にも成り立つのである）。

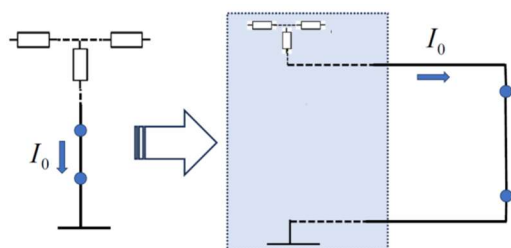


図 14.1

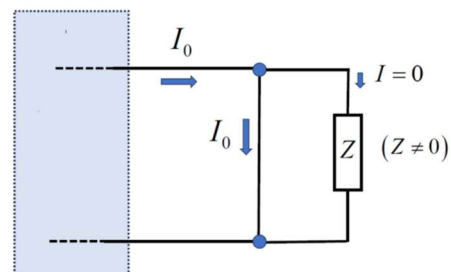


図 14.2

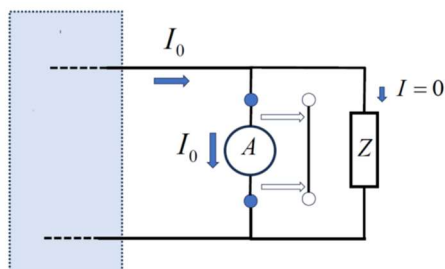


図 14.3

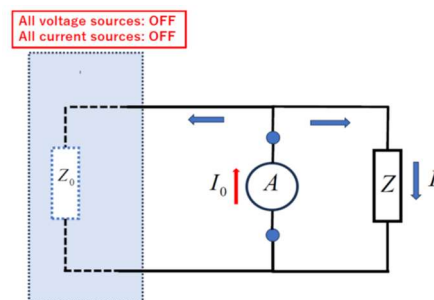


図 14.4

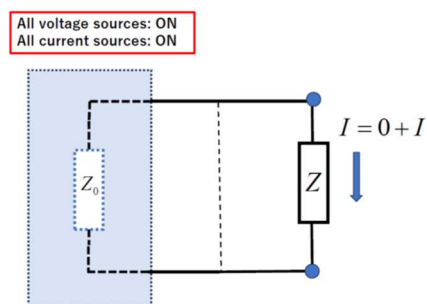


図 14.5

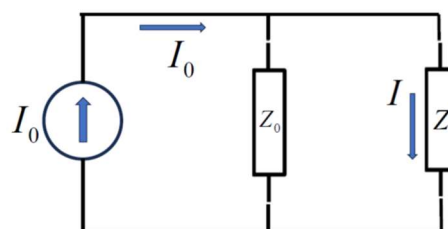
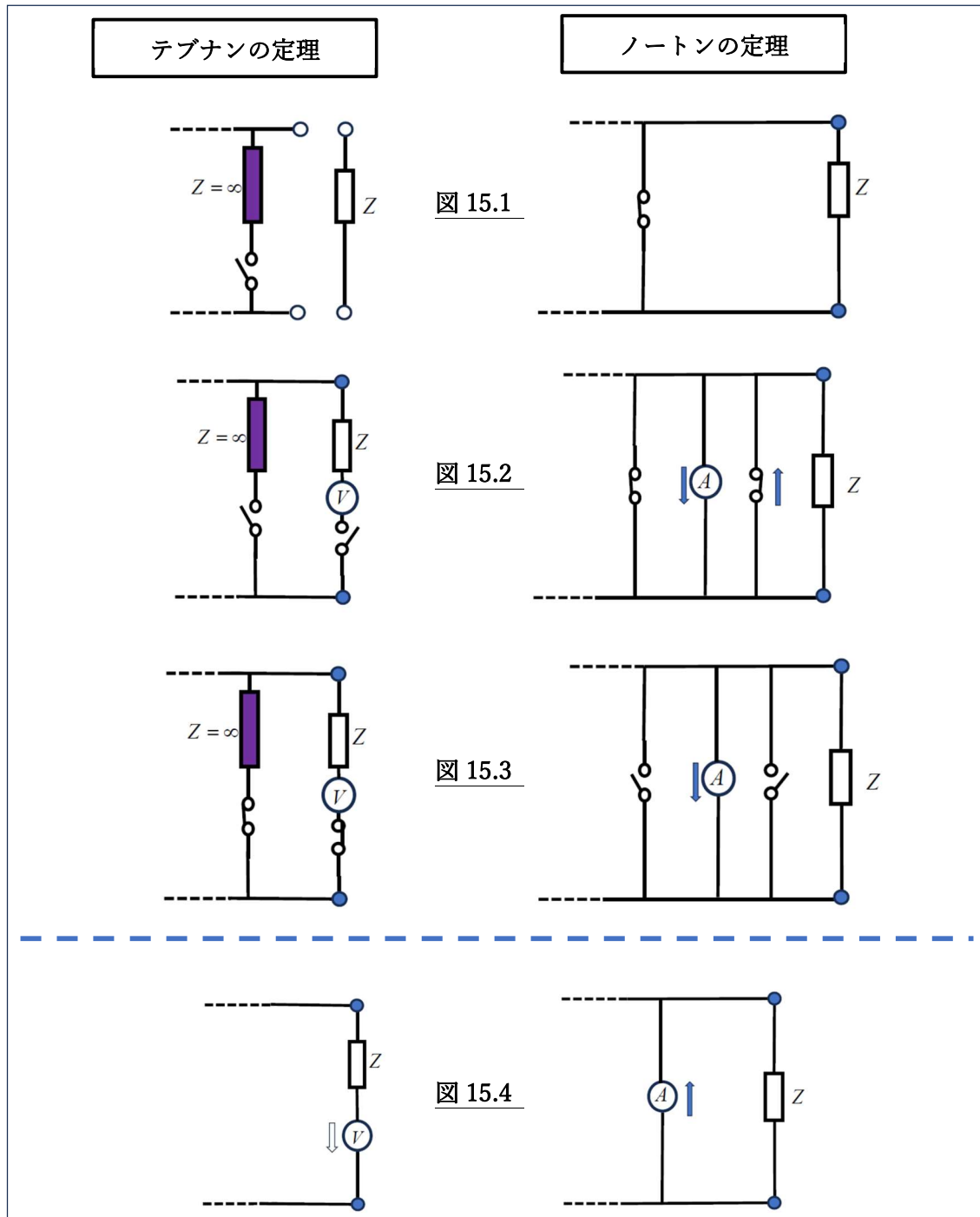


図 14.6

しかし、まだテブナンとノートンが完全には双対的でないと考える向きもあるかもしれないので、若干、マニアック的ではあるが双対的になるよう試みてみよう（一応、ほぼ完全に双対的になっていると思うが、もう少しすっきりと議論できるかも・・・）



この双対的でないように見えた箇所のみを双対的になるように修正したポンチ絵を図 15 に示す。最後に、（若干、しつこい繰り返しになるが）テブナンとノートンの等価回路の関係

を図 15.5 に図示しておこう。ここで、内部と外部のインピーダンスが、テブナンでは直列に、ノートンでは並列になっていることに注意。

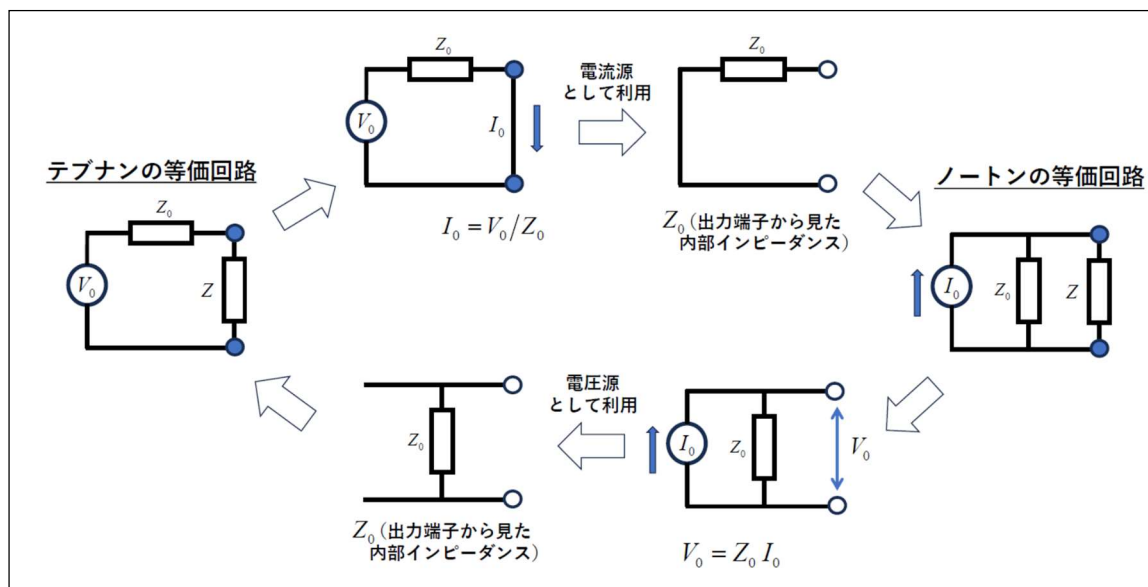


図 15.5

○ テブナン (Thevenin) 定理、ノートン (Norton) 定理の簡単応用例

この lecture note では主に定理の初等的説明を目的にしており、その応用を目指したものではない (つまり専門的説明は目的とはしていない) のであるが、以下に、2, 3 の例を挙げておこう。

ブリッジ回路

等価回路の考え方をを使うと、図 16 のようなブリッジ回路の抵抗 (インピーダンス)、 z に流れる電流をキルヒホッフの回路方程式を使うことなく求めることができる。これはよく知られていることのようにであるが、等価回路の有用性を示すよい例であると思われるので、以下でも、これを示すことにしよう。

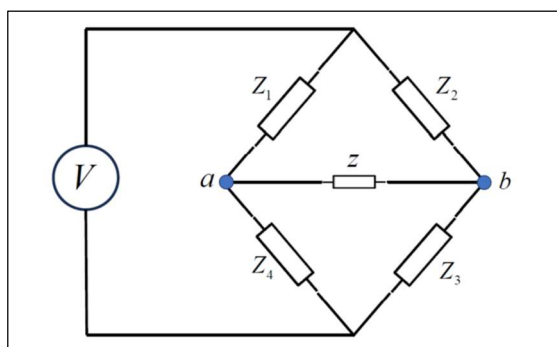


図 16

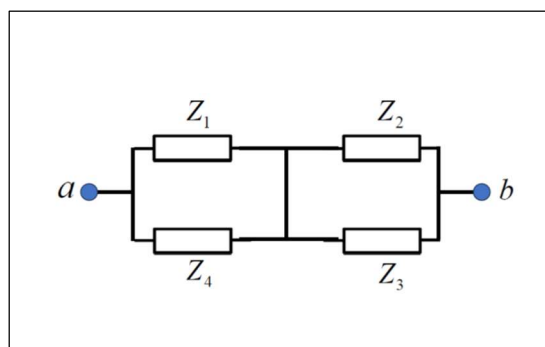


図 17

- (1) まず、抵抗、 z を外して、図の $a-b$ 間の電圧、 V_0 を求める。この場合、 a 点、 b 点での電圧は、簡単に、

$$V_a = \frac{Z_4}{Z_1 + Z_4} V, \quad V_b = \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} V \quad (19)$$

となるので、

$$V_0 = \left(\frac{Z_4}{Z_1 + Z_4} - \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} \right) V = \frac{Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3}{(Z_1 + Z_4)(Z_2 + Z_3)} V \quad (20)$$

- (2) 内部抵抗、 Z_0 を求めるために、電圧源を OFF し、ショートすると、等価的には、
図 17 の抵抗と同じになる。よって、

$$Z_0 = \frac{1}{1/Z_1 + 1/Z_4} + \frac{1}{1/Z_2 + 1/Z_3} = \frac{Z_1 Z_4 (Z_2 + Z_3) + Z_2 Z_3 (Z_1 + Z_4)}{(Z_1 + Z_4)(Z_2 + Z_3)} \quad (21)$$

となる。

- (3) テブナンの定理から、図の $a-b$ 間の抵抗、 z に流れる電流、 i は、

$$\begin{aligned} i = \frac{V_0}{Z_0 + z} &= \frac{\frac{Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3}{(Z_1 + Z_4)(Z_2 + Z_3)} V}{\frac{Z_1 Z_4 (Z_2 + Z_3) + Z_2 Z_3 (Z_1 + Z_4)}{(Z_1 + Z_4)(Z_2 + Z_3)} + z} \\ &= \frac{(Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3) V}{Z_1 Z_4 (Z_2 + Z_3) + Z_2 Z_3 (Z_1 + Z_4) + z (Z_1 + Z_4)(Z_2 + Z_3)} \end{aligned} \quad (22)$$

と求まる。

ここで、電流、 i がゼロになる条件は、回路図の対角の抵抗の積が等しい時であるというよく知られたものになるが、このことは式(20)からも明らかである。

次に、表示を簡単にするために、以下のような記号を導入しよう。

$$\begin{aligned} \Pi Z &= Z_1 Z_2 Z_3 Z_4, \quad \Sigma Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 \\ Z_L &= Z_1 + Z_4, \quad Z_R = Z_2 + Z_3 \\ \Delta &= Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3 \end{aligned} \quad (23)$$

すると、

$$\begin{aligned} &Z_1 Z_4 (Z_2 + Z_3) + Z_2 Z_3 (Z_1 + Z_4) \\ &= Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 (1/Z_1 + 1/Z_2 + 1/Z_3 + 1/Z_4) = \Pi Z \cdot \Sigma Y \end{aligned} \quad (24)$$

と書ける（勿論、 $\Pi Z \cdot \Sigma Y = \Sigma ZZZ$ という記号を使ってもよい）。これから、

$$Z_0 = \frac{\Pi Z \cdot \Sigma Y}{Z_L Z_R}, \quad i = \frac{V_0}{Z_0 + z} = \frac{\Delta}{\Pi Z \cdot \Sigma Y + z Z_L Z_R} V \quad (25)$$

となる。

(4) また、この回路をノートンの等価回路と見なすと、その電源電流、 I_0 は、出力端をショートして ($a-b$ 間をショートする、つまり z をゼロにして) $a-b$ 間に流れる電流をもとめればよい。よって、式(25)から、

$$I_0 = \frac{V_0}{Z_0} = \frac{\Delta}{\Pi Z \cdot \Sigma Y} V \quad (26)$$

と与えられることがわかる。また、 z がゼロでないときの電流、 i は、ノートンの等価回路から、

$$i = \frac{Z_0}{Z_0 + z} I_0 = \frac{Z_0}{Z_0 + z} \frac{V_0}{Z_0} = \frac{V_0}{Z_0 + z} \quad (27)$$

となり、当然ではあるが、式(22) (の最初の等式) が得られることになる。

(5) 次に、**図 18** のようなブリッジ回路 (電圧源を電流源に置き換えたもの) を考えてみよう。まず電源が電流源 (電流: I) であるので、ノートンの等価回路から始めてみよう。内部抵抗を求めるために、電源を OFF すると、この箇所はオープンになり、また $a-b$ 間もオープンとして、抵抗を求めることになるので、内部

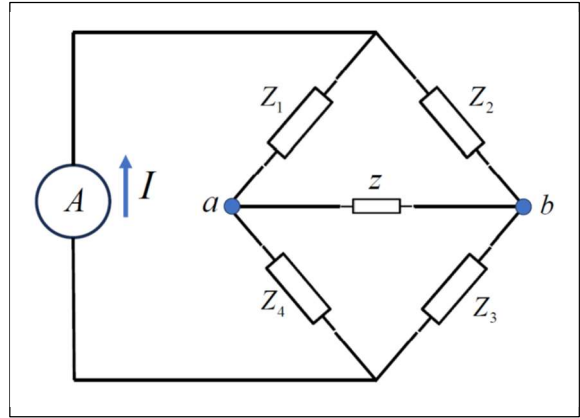


図 18

抵抗、 Z_0 は、

$$1/Z_0 = \frac{1}{Z_1 + Z_2} + \frac{1}{Z_3 + Z_4} \quad (28)$$

これから、

$$Z_0 = \frac{Z_U Z_D}{\Sigma Z} \quad (29)$$

と求まる。ただし、ここで、

$$\begin{aligned} Z_U &= Z_1 + Z_2, & Z_D &= Z_3 + Z_4 \\ \Sigma Z &= Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 \end{aligned} \quad (30)$$

とおいた。

(6) 等価回路の電源の電流は、出力端、 $a-b$ 間をショートした時に、 $a-b$ 間に流れる電流である。このとき、当然、 Z_1 と Z_2 にかかる電圧は等しいので、 Z_1 に流れる電流は、

$$\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} I \quad (31)$$

となり、同様に、 Z_4 に流れる電流は、

$$\frac{Z_3}{Z_3 + Z_4} I \quad (32)$$

となる。これから、 $a-b$ 間に流れる電流（等価回路の定電流源の電流）、 I_0 は、

$$I_0 = \left(\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} - \frac{Z_3}{Z_3 + Z_4} \right) I = \frac{\Delta}{Z_U Z_D} I \quad (33)$$

と求まる。よって、 $a-b$ 間に負荷、 z をつないだ時に、これに流れる電流、 i は、

$$i = \frac{Z_0}{Z_0 + z} I_0 = \frac{\frac{Z_U Z_D}{\Sigma Z}}{\frac{Z_U Z_D}{\Sigma Z} + z} \frac{\Delta}{Z_U Z_D} I = \frac{\Delta}{Z_U Z_D + z \Sigma Z} I \quad (34)$$

となる。

(7) なお、テブナンの等価回路での電源電圧は、 $Z_0 I_0$ であるので、

$$V_0 = Z_0 I_0 = \frac{Z_U Z_D}{\Sigma Z} \frac{\Delta}{Z_U Z_D} I = \frac{\Delta}{\Sigma Z} I \quad (35)$$

となる。これを確認のために、直接、回路図から求めてみよう。 $a-b$ 間がオープンであるとする、回路にかかる電圧、 V は、

$$V = Z I \quad (36)$$

で、抵抗、 Z は、

$$1/Z = \frac{1}{Z_1 + Z_4} + \frac{1}{Z_2 + Z_3} \quad (37)$$

である。これは、

$$Z = \frac{Z_L Z_R}{\Sigma Z} \quad (38)$$

とも書ける。これから、 $a-b$ 間にかかる電圧、 V_0 は、

$$V_0 = \left(\frac{Z_4}{Z_1 + Z_4} - \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} \right) V = \frac{\Delta}{Z_L Z_R} Z I = \frac{\Delta}{\Sigma Z} I \quad (39)$$

となり、式(35)と同じ結果が得られる。また、 $a-b$ 間の抵抗、 z を挿入した場合の電流は、

$$i = \frac{V_0}{Z_0 + z} \quad (40)$$

となり、式(34)と同じ結果になる。

(8) ブリッジ回路は、バランスが取れている場合、 Δ がゼロとなり、 $a-b$ 間の電圧、電流がゼロになるので、回路素子の非常に感度の良い測定に使える。ブリッジ回路には、各種あるようであるが、ここでは、代表的なものについて簡単に説明しておこう。

・ホイートストン・ブリッジ (Wheatstone bridge) は、すべての Z が純抵抗の場合であり、例えば、

$$R_1 = \frac{R_2 R_4}{R_3} \quad (41)$$

であれば、バランスが取れている。これにより、未知の抵抗、 R_1 を決めることができる。

・マックスウェル・ブリッジ (Maxwell bridge) は、 L (インダクタンス) を既知の C (キャパシタンス) から求めようというものである。 $\Delta = 0$ を書き換えると、

$$\frac{Z_1}{Y_3} = R_2 R_4 \quad (42)$$

となる。ただし、 Z_2, Z_4 は純抵抗とする。今、 Z_1 を抵抗と L の直列とし、 Y_3 を抵抗と C の並列とすると、両者とも虚数部が正になるので、パラメータを適当に調整すれば、式(42)が成り立つことがわかる。

$$R_1 + j\omega L = R_2 R_4 \left(\frac{1}{R_3} + j\omega C \right) \quad (43)$$

これから、

$$R_1 = \frac{R_2 R_4}{R_3}, \quad L = R_2 R_4 C \quad (44)$$

となり、未知の抵抗、 R_1 と未知の L を求めることができる。なお、式(44)の一番目の式は、

ホイートストン・ブリッジの場合と同じ式である。なお、式(44)からわかるように、理想的な素子であれば (周波数依存性がなければ)、周波数に依存することなく、パラメータを決めることができる (ただし、実用上は、使用する周波数帯で測定)。

・ウィーン・ブリッジ (Wien bridge) は、マックスウェル・ブリッジに似ており、

$$\frac{R_1}{Y_3} = Z_2 R_4 \quad (45)$$

という構成で、 Z_2 を抵抗とキャパシタンスとを直列にしたものである。よって、

$$R_1 = \left(\frac{1}{R_3} + j\omega C_3 \right) \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right) R_4 \quad (46)$$

となり、これから、

$$R_1 = \frac{R_2 R_4}{R_3} + \frac{C_3 R_4}{C_2}, \quad \omega^2 = \frac{1}{R_2 R_3 C_2 C_3} \quad (47)$$

となる。または書き換えると、

$$\frac{C_3}{C_2} = \frac{R_1}{R_4} - \frac{R_2}{R_3}, \quad \omega^2 = \frac{1}{R_2 C_2 R_3 C_3} \quad (48)$$

となり、これから、未知の C_3 と R_3 を求めることができる（他の文献とは、notationが異なるかもしれない）。

一つの回路例

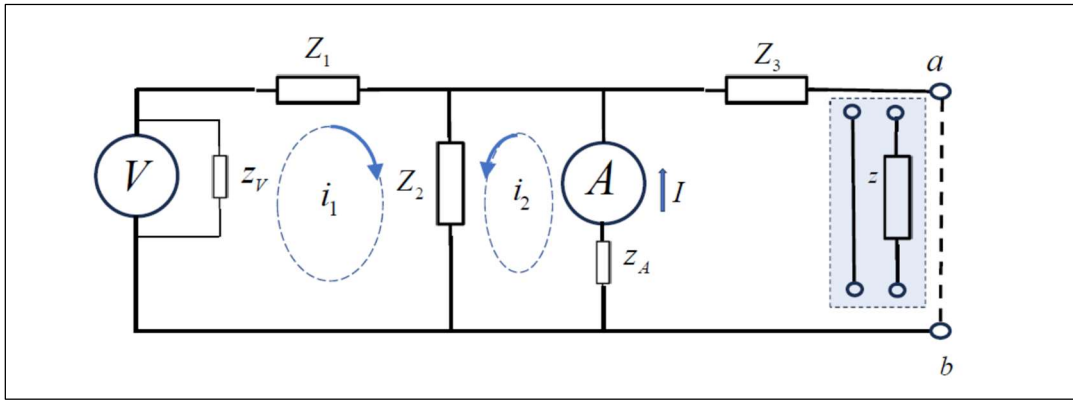


図 19

図 19 は、一見すると、回路方程式（キルヒホッフの法則）が必要であるように見えるが、テブナン、ノートンの定理を使うと、これを必ずしも必要としないのである（キルヒホッフの方程式が頭わには出てこない）。まず、この図の中にある z_v と z_A は、出力側から見ると、回路図を複雑にしているだけのように思われる代物で、出力側には見えないものである（何の働きもしていないように思われる）。それは、内部抵抗を求めるための図 20 を見れば明らかであろう。この内部抵抗は、簡単に、

$$Z_0 = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} + Z_3 = \frac{\Sigma Z Z}{Z_1 + Z_2} \quad (49)$$

となる。ここで、

$$\Sigma ZZ = Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1 \quad (50)$$

とおいた。

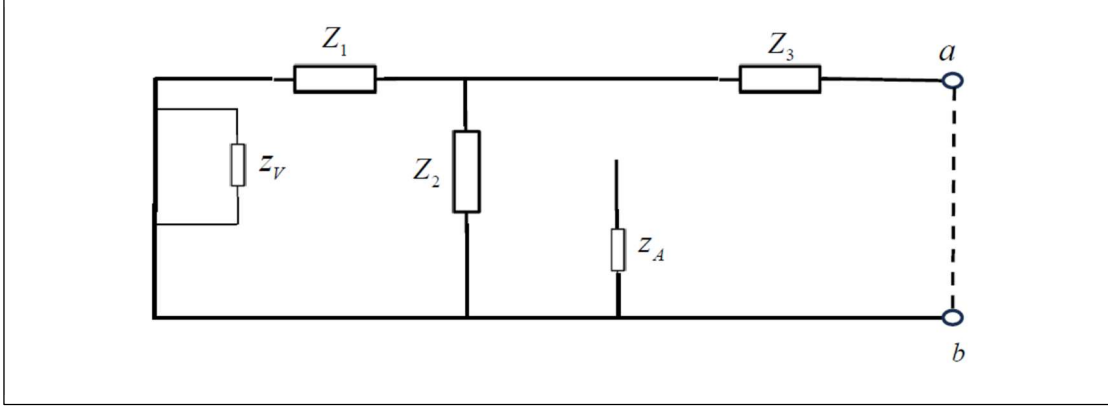


図 20

最初に、テブナンの等価回路を考えることにし、出力端、 $a-b$ をオープンにする。よって、
 図 19 の電流、 i_2 は、定電流源の電流、 I に等しくなる。よって、定電流源の電流によって
 抵抗、 Z_2 に励起される電圧は、 $Z_2 I$ となるので、図 19 の電流、 i_1 は、

$$(Z_1 + Z_2) i_1 = V - Z_2 I \quad (51)$$

と与えられる。抵抗、 Z_2 に流れる全電流は、 $i_1 + I$ であるので、テブナンの等価回路の電圧、

V_0 は、

$$V_0 = (i_1 + I) Z_2 = \left(\frac{V - Z_2 I}{Z_1 + Z_2} + I \right) Z_2 = \frac{V + Z_1 I}{Z_1 + Z_2} Z_2 \quad (52)$$

となる。よって、 $a-b$ 間に抵抗、 z を挿入した時の電流、 i は、

$$i = \frac{V_0}{Z_0 + z} = \frac{\frac{V + Z_1 I}{Z_1 + Z_2} Z_2}{\frac{\Sigma ZZ}{Z_1 + Z_2} + z} = \frac{(V + Z_1 I) Z_2}{\Sigma ZZ + z(Z_1 + Z_2)} \quad (53)$$

となる。また、ノートンの等価回路での電流、 I_0 は、

$$I_0 = \frac{V_0}{Z_0} = i(z=0) = \frac{(V + Z_1 I) Z_2}{\Sigma Z Z} \quad (54)$$

と求まるが、一応、確認のために、元の回路図からも求めてみよう。

$a-b$ 間をショートした場合には、定電流源から見ると、今度は、 Z_2 ではなく、 Z_2 と Z_3 を

並列にしたものに励起電圧が発生する。よって、**図 19**の電流、 i_1 は、

$$(Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}) i_1 = V - \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} I \quad (55)$$

となる。よって、 i_1 と Z_2 と Z_3 を並列したものに流れる電流、 $I + i_1$ は、

$$i_1 = \frac{V - \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} I}{Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}}, \quad I + i_1 = \frac{V + Z_1 I}{Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}} \quad (56)$$

となる。よって、 Z_3 に流れる電流、つまり $a-b$ 間に流れる電流、 I_0 は、

$$I_0 = \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} I = \frac{(V + Z_1 I) Z_2}{\Sigma Z Z} \quad (57)$$

となり、式(54)と同じ結果が得られることになるのである。