# F理論入門

## 茨城大・東科大合宿
## 日立シビックセンター

溝口　俊弥

KEK

November 6-8, 2026

# 目次

イントロダクション

**1 F 理論の基本構成：その考え方**
- **1.1 IIB 型理論の複素スカラー $\tau$ の 2 次元配置**
- **1.2 Manifolds と Varieties**
- **1.3 3 次方程式のワイエルシュトラス形式**
- **1.4 8 次元 F-theory**
- **1.5 小平の特異ファイバーの分類**

**2 微分幾何学と代数幾何学の基礎：数学的予備知識**
- **2.1 ファイバー束、ベクター束、直線束**
- **2.2 ケーラー多様体 (Kähler manifold) とチャーンクラス (Chern class)**
- **2.3 トーリック多様体 (Toric varieties)**

**3 6 次元 F-theory**
- **3.1 ヒルツェブルフ曲面 (Hirzebruch surface) 上の楕円ファイブレーション**
- **3.2 ヘテロティック弦理論との双対性：安定退化 (stable degeneration) 極限**
- **3.3 ヘテロティック弦理論での指数計算**

**4 Dessin on the base**
- **4.1 "Elliptic-point planes" と dessin on the base**
- **4.2 $(p, q)$-branes from elliptic-point planes**
- **4.3 オリエンティフォルドプレインのサブ構造**

## イントロダクション

F 理論は IIB 型弦理論のコンパクト化における非摂動的な枠組みです。F 理論は、IIB 型理論における複素スカラー場の配位を、その複素構造モジュラスが当該複素スカラー場と等しい 2 次元トーラスの配位へと置き換えることによって構築されます。

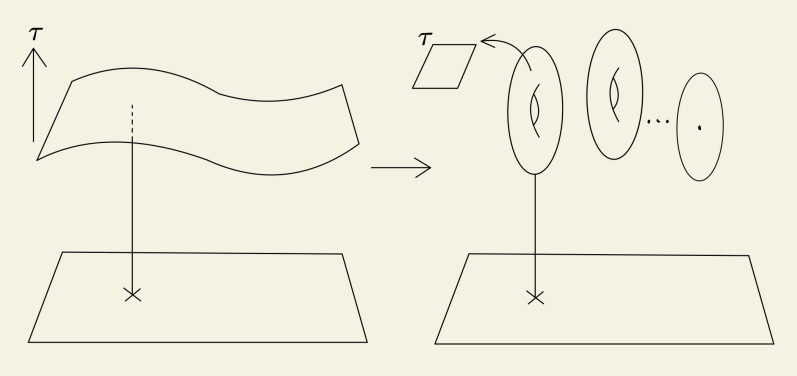



Figure 1: The idea of F-theory.

多くの場合、我々は超対称性を保持するコンパクト化を考察します。LHC 実験において超対称性は観測されていないものの、標準模型が何らかの形で超対称性と関連していると考えるべき理由は依然として数多く存在します。例えば、標準模型の 1 世代分は $SO(10)$ のスピノル表現に収まりますが、このスピノル表現は、例外群 $E_6, E_7, E_8$ を分解することによって得られるものです。こうした例外群は、超対称性を保持するコンパクト化に関連して現れます。その一例として、K3 曲面の 2 次コホモロジー格子が挙げられます。

そこで、超対称コンパクト化について考えます。フラックスが存在しない場合、超弦理論の超対称コンパクト化は、カラビ・ヤウ多様体上でのコンパクト化として実現されます。しかし、底空間 $B$ には複素スカラー場の非自明な配位が存在するため、これはカラビ・ヤウ多様体にはなり得ません。少し驚くべきことに、複素スカラーがトーラスの族で表されるこの空間は、カラビ・ヤウ空間です。空間の一部が人工的に、そして仮想的に構築されているため、奇妙に思えるかもしれません。実際には、この空間は仮想的なものではなく、ある意味では実際に存在します。より正確に言うと、この空間上でのタイプ IIB 理論のコンパクト化は、ある極限をとれば、この空間上での M 理論のコンパクト化と等価です。この場合、複素スカラー場のフラックスは幾何学に置き換えられるため、コンパクト空間をカラビ・ヤウ空間とすることで超対称性が実現されます。したがって、F 理論において重要なのは、局所的にタイプ IIB コンパクト空間と 2 次元トーラスの直積となる幾何学であり、全体がそれらを貼り合わせたもので構成されている幾何学です。このような幾何学は「楕円ファイブレーション」と呼ばれます。

本講義では、F 理論を理解するために、楕円ファイブレーションの局所的および大域的な幾何学に関する技術的な詳細を解説します。具体的には、予告した通り、特異点を解消するための「ブ

ローアップ」の手続きについて、その詳細を説明する予定です。これが「局所的」な部分にあたります。一方、「大域的」な部分については、トーリック幾何学について解説します。この部分は主に、Denef 氏による講義ノートの「幾何学的ツールキット（geometrical tool kit）」という節に基づいています。これは非常に優れたレビューであり、ここで紹介される有用な手法を用いることで、因子（divisor）の交点数や、与えられたトーリック多様体のチャーン類といった、多くの重要な量を計算できるようになります。

実は、当初はもっと多くのことについて話すつもりでした。しかし準備を進める中で、それぞれのトピックを扱うには、予想していたよりもずっと多くの時間が必要だと気づきました。そこで今回は、6 次元コンパクト化に焦点を絞ってお話しします。6 次元理論については、すでに 25 年以上前から理解が進んでいますが、それでもなお重要です。なぜなら、6 次元理論を理解していなければ、4 次元理論を理解することもできないからです。

講義では触れませんが、言及しておく価値があるかもしれないもう一つのトピックとして、「局所 F-GUT（local F-GUT）」があります。この理論は 10 年以上前にはよく議論されていました。これを、特にその場における場の「ツイスト（ねじれ）」の起源を理解するためには、フリードマン（Friedman）、モーガン（Morgan）、ウィッテン（Witten）によって示された、スペクトル被覆（spectral cover）を用いたヘテロティック・ベクター束の構成法を理解する必要があります。ある意味で、この「ヒッグズ束」は、有理楕円曲面における $E_8$ の切断（セクション）と特異点の相補性を利用して、無限遠から $\mathbb{P}^1$ の原点における特異ファイバーを間接的に制御するものです。結局のところ、この理論は重力を切り離して（デカップルさせて）扱うものですが、その一方で、LHC やプランク（Planck）衛星の時代以降、インフレーションの実現や標準模型を超える素粒子模型の構築といった課題は、同一の理論的枠組みの中で考察されなければならないという認識が定着してきています。このような観点から、現在では local F-GUT はあまり重要とは言えなくなってきています。

代わりに、最近の進展として、特異ファイバー間のモノドロミーを視覚的に理解する新しい方法を説明します。これは、従来の ABC 7-ブレイン表現に代わるものです。これは、「dessin on the base」と呼ばれる 2 次元プロットを描くことによって行われます。このプロットは、グロタンディークの「dessin d'enfant」にちなんで名付けられました。「dessin」は絵や図を意味し、「enfant」はフランス語で子供を意味するので、「dessin d'enfant」は子供の絵を意味します。実際、数学的なグラフである「dessin d'enfant」は、どんな子供でも描けるものですが、私たちの「dessin on the base」は、「dessin d'enfant」と同様の規則に従って、Mathematica を用いて描画されます。この図を描くことで、F 理論コンパクト化と D-ブレインのみを含む摂動コンパクト化（例えばオリエンティフォールドコンパクト化）との違いがすぐに理解できるでしょう。実際、この「基底上の図」は、モノドロミーを計算する非常にシンプルな方法を提供します。(p,q) 7-ブレイン間のモノドロミーは、20 世紀後半にツヴァイバッハらが開発した ABC 7-ブレイン技術によって以前は記述されていましたが、ある意味では非常に人工的な表現でした。なぜなら、2 次元空間上に存在する 7-ブレインを何らかの任意の方法で 1 次元の直線に整列させる必要があったからです。

このノートの構成は次のとおりです。セクション 1 では F 理論の基本構成、その考え方について説明します。1.1 ではタイプ IIB 理論の複素スカラー場の 2 次元配置を考え、F 理論のアイデアのもとになったコズミックストリング解について説明します。1.2 ではどちらも「多様体」と日本語に訳される “Manifold” と “Variety” について簡単な数学的準備をした後、1.3 では複素 1 次元上の実 2 次元トーラス配置を表すワイエルシュトラス形式を導入します。これを使って 1.4 ではいよいよ 8 次元 F 理論を構成します。1.5 は小平の特異ファイバーの分類について、ブローアップの具体例を交えながら少し長くなりますが説明します。

セクション 2 では「微分幾何学と代数幾何学の基礎：数学的予備知識」と題して、F 理論で使ういろいろな基本的な事実を概観します。2.1 ではファイバー束、ベクター束、直線束について、2.2 ではケーラー多様体 (K ähler manifold) とチャーンクラス (Chern class) についてまとめます。これらはほとんど GSW 第 2 巻に書いてあることです。2.3 ではトーリック多様体について、その扱い方を中心にまとめます。これらはほとんど Denef のレビューに書いてあることです。

これらの準備の後、セクション 3 では Morrison-Vafa の 6 次元 F 理論について説明します。

最後のセクション 4 ではこれらのような数学的技巧に隠された F 理論の本質、すなわちスカラー場を幾何学に置き換えただけ（？）なのになぜこのような多様な摂動論的な弦理論にはない性質が現れるのか、について明らかにします。そこでは楕円ファイブレーションの複素 1 次元ベース空間に D-ブレインの位置ともにそこでの結合定数 $\tau$ のおおよその値が一目でわかる “dessin on the base” (ベース上のデッサン) について解説します。これは簡直人君をはじめとする総研大学生だった方々との結果です。

# 1　F 理論の基本構成：その考え方

## 1.1　IIB 型理論の複素スカラー $\tau$ の 2 次元配置

IIB 型超重力作用について考えてみましょう。

$$S = \frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int d^{10}x\sqrt{-g}\left(R - \frac{1}{2}g^{MN}\frac{\partial_M\tau\partial_N\bar{\tau}}{(\mathrm{Im}\tau)^2}\right). \tag{1}$$

これは：

- 「アインシュタインフレーム」作用です。
- 計量 $g_{MN}$ と複素スカラー $\tau = C_0 + ie^{-\phi}$ のみを保持するボソン作用です。ここで、$C_0$ はラモン＝ラモン（RR）スカラー、$\phi$ はディラトンです。
- 2 形式 $B_{2\,MN}$ と $C_{2\,MN}$、および自己双対 4 形式 $C_{4\,MNPQ}$ はすべて 0 に設定されます。

☆ 実際、これはポルチンスキーの著書で示されているいわゆる「ほぼ正しい作用」です。$C_4$ の 5 形式場強度 $F_5$ の自己双対性のため、このように共変作用を記述することはできません。しかし、（少なくともボソン方程式の場合）正しい運動方程式は、$F_5$ が自己双対でないかのように扱い、運動方程式が得られた後に自己双対性を課すことによって、この作用から導出されることが知られています。本稿では、$C_4 = 0$ と仮定し、この作用を用います。

アインシュタイン方程式は次の通りです：

$$R_{MN} = \frac{\partial_{(M}\tau\partial_{N)}\bar{\tau}}{2(\mathrm{Im}\tau)^2}. \tag{2}$$

計量場とスカラー場の構成が、いくつかの 2 次元座標のみに依存する場合を考えてみましょう。

7 ブレインのアンザッツ:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^i dx_i + \ e^{\varphi(z,\bar{z})}dzd\bar{z}, \tag{3}$$

$z = x^8 + ix^9$, $\bar{z} = x^8 - ix^9$. すると

$$R_{z\bar{z}} = -\partial_z\partial_{\bar{z}}\varphi. \tag{4}$$

です。ここで

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_8 - i\partial_9), \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_8 + i\partial_9). \tag{5}$$

するとアインシュタインの方程式は次のようになります。

$$\partial_z\partial_{\bar{z}}\varphi = \frac{\partial_z\tau\partial_{\bar{z}}\bar{\tau} + \partial_{\bar{z}}\tau\partial_z\bar{\tau}}{(\tau - \bar{\tau})^2}. \tag{6}$$

$\tau$ の EOM は次のとおりです。

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} \tau = \frac{2\partial_z \tau \partial_z \bar{\tau}}{\tau - \bar{\tau}}. \tag{7}$$

(**??**) の正則解

$$\partial_{\bar{z}} \tau = 0 \tag{8}$$

を考えてみましょう。すると（**??**）は

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} \varphi = \frac{\partial_z \tau \partial_{\bar{z}} \bar{\tau}}{(\tau - \bar{\tau})^2}. \tag{9}$$

この方程式は容易に解くことができ、次の式が得られます。

$$\varphi(z, \bar{z}) = \log \frac{\tau(z) - \bar{\tau}(\bar{z})}{2i} + F(z) + \bar{F}(\bar{z}) \tag{10}$$

ここで、$F(z)$ とその複素共役 $\bar{F}(\bar{z})$ は任意の関数です。$2i$ は便宜上挿入されています。これを指数関数の肩にのせるとある $A(z)$ と $\bar{A}(\bar{z})$ に対して

$$e^{\varphi(z,\bar{z})} = \frac{\tau(z) - \bar{\tau}(\bar{z})}{2i} A(z) \bar{A}(\bar{z}) \tag{11}$$

となります。

この時点で、$A(z)$ と $\bar{A}(\bar{z})$ は任意です。ここで、これらの運動方程式が (**??**) から導出されたものであることを考慮に入れます。これは、タイプ IIB 弦理論の $SL(2,\mathbb{Z})$ S 双対性の下で不変です。$\tau$ は、$SL(2,\mathbb{Z})$ S 双対性によって次のように変換されます。

$$\tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \bar{\tau} \mapsto \frac{a\bar{\tau} + b}{c\bar{\tau} + d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}), \tag{12}$$

すると

$$\tau - \bar{\tau} \mapsto \frac{\tau - \bar{\tau}}{|c\tau + d|^2}. \tag{13}$$

このとき

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

と

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

のもとで $\tau-\bar{\tau}$ はそれぞれ次のように変化します：

$$\tau-\bar{\tau} \overset{S}{\mapsto} \frac{\tau-\bar{\tau}}{|\tau|^2}, \tag{16}$$

$$\tau-\bar{\tau} \overset{T}{\mapsto} \tau-\bar{\tau}. \tag{17}$$

弦理論の旧来の世界面解析では、組み合わせ $(\tau-\bar{\tau})\eta(\tau)^2\bar{\eta}(\bar{\tau})^2$ がモジュラー不変であることがよく知られています。ここで、$\eta(\tau)$ はデデキントのイータ関数です。実際

$$\eta\left(\frac{1}{\tau}\right)=\sqrt{-i\tau}\,\eta(\tau), \tag{18}$$

$$\eta(\tau+1)=e^{\frac{2\pi i}{24}}\eta(\tau), \tag{19}$$

であるので $\eta(\tau)^2\bar{\eta}(\bar{\tau})^2$ は $S$ と $T$ とで

$$\eta(\tau)^2\bar{\eta}(\bar{\tau})^2 \overset{S}{\mapsto} |\tau|^2\eta(\tau)^2\bar{\eta}(\bar{\tau})^2, \tag{20}$$

$$\eta(\tau)^2\bar{\eta}(\bar{\tau})^2 \overset{T}{\mapsto} \eta(\tau)^2\bar{\eta}(\bar{\tau})^2, \tag{21}$$

のように変換し、それは $\tau-\bar{\tau}$ の変化を相殺します。したがって $\tilde{A}(z)$ を $z$ のモジュラー不変関数として $A(z)$ を $\eta(\tau(z))^2\tilde{A}(z)$ と書くことができます。

$$\eta(\tau)=q^{\frac{1}{24}}\prod_{n\in\mathbb{Z}}(1-q^n), \quad q=e^{2\pi i\tau}, \tag{22}$$

なので、$\eta(\tau)^2\bar{\eta}(\bar{\tau})^2$ は $q\to 0$ のとき $|q|^{\frac{1}{6}}$ のようにゼロになります。これは、$e^{\varphi(z,\bar{z})}$ が共形因子であるため、$\tilde{A}(z)\bar{\tilde{A}}(\bar{z})$ によって補償されなければなりません。後ほど、2 次元基底空間が $\mathbb{P}^1$ となるように、$\tilde{A}(z)\bar{\tilde{A}}(\bar{z})$ を決定します。

<u>$D7$-ブレインとしての $q=0$ のローカス</u>

$q=e^{2\pi i\tau}\to 0$ が $z\to z_0$ のとき $O(z-z_0)$ のように変化すると仮定します。

$$\Rightarrow \quad q\sim \text{const.}\times(z-z_0)+\cdots, \tag{23}$$

$$\Rightarrow \quad \tau\sim\frac{1}{2\pi i}\log(z-z_0)+\text{const.}+\cdots, \tag{24}$$

すると $z=z_0$ はブランチポイントです。

$\tau$ はスカラー場なので、「0 形式」とみなすことができます。したがって、その「場の強さ」は 1 形式 $d\tau$ であり、z 平面上の点、例えば $z=z_0$ の周りの経路積分によって、スカラー場の「磁荷」

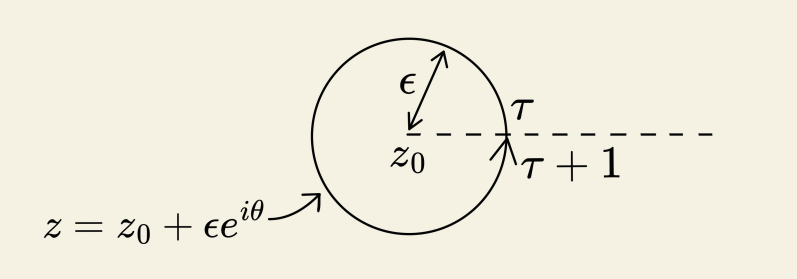



Figure 2: $q = 0$ のローカスはブランチポイントになる。

が得られます。この場合は

$$\begin{aligned}\oint_{z_0} d\tau &= \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\partial \tau}{\partial \theta} \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{2\pi i}\log \epsilon e^{i\theta}\right) \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\theta}{2\pi} + \text{const.}\right) \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{2\pi} \\ &= 1. \end{aligned} \tag{25}$$

です。

☆ $z$ 平面上の点 $z = z_0$ は、実際には 10 次元空間における 8 次元時空を伴っています。したがって、それは $C_0$（RR スカラー）の磁荷を持つ D7-ブレインです。

したがって、7-ブレインの存在を許容することにより興味深い解が得られます。しかし、7-ブレインの位置がブランチカットであるという事実は解が一価ではないことを意味します。一見すると、これは受け入れられないように思えます。しかし、この論文の著者たちは、この解が妥当で意味のある解であると主張します。それは、$\tau$ が $\tau + 1$ に変化する多価関数ではあってもそれら両者の違いはタイプ IIB 理論の $SL(2,\mathbb{Z})$ S 双対性変換のみによるからです。一般に、弦理論の双対性変換は元の理論とは異なる記述を与えるため、値が元の値に戻らなくても問題はなく、この変化は一種の「ゲージ変換」とみなすことができます。このような理解の仕方は、1990 年の論文「Stringy cosmic strings and non-compact Calabi-Yau manifolds」（Greene、Shapere、Vafa、Yau 共著）で初めて提唱されました。

このアイデアが 1990 年にまで遡るというのは驚きです。それは弦の双対性や D-ブレインが 90 年代半ばに発見されるずっと前のことだからです。その後、サイバーグとウィッテンは 1994 年に、４次元 $\mathcal{N} = 2$ 超対称ゲージ理論の複素ゲージ結合定数 $\tau$ を楕円ファイブレーションに置き換える、というアイデアを提案しました [**?**]。おそらくこれに触発されて、ヴァファは 1996 年に F 理論を提唱しました [**?**]。

複素スカラー $q = e^{2\pi i\tau}$ が 2 次元空間上のいくつかの点でゼロになるような配置を記述する便利な方法があります。そのアイデアは、$\tau$ の配位をトーラスの配位に置き換えることです。これを説明するために、少し数学的な準備をしましょう。

## 1.2 Manifolds と Varieties

- Manifold（多様体）: 微分幾何などで用いられる概念。大まかには、各点の近傍で滑らかな座標系を導入できる空間。
- Variety（代数多様体）: 代数幾何で用いられる概念。大まかには、（複素）代数方程式の解集合として局所的に記述できる空間。特異点を持つこともある。

弦理論の場の理論的記述、すなわち低エネルギー有効超重力理論を考察します。特にコンパクト化について研究したいと思います。10 次元時空の一部がコンパクト空間 $M$ であると仮定します。

コンパクト空間の定義により、空間 $M$ は、添え字集合 を $A$ とする $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ という開集合族を持ち、有限個の $U_\alpha$ の和集合 $\bigcup_{\alpha:\text{finite}} U_\alpha$ が $M$ を覆います（(“open covering”)。

各点 $p \in M$ には $M$ の開空間 $U_\alpha$ (a “neighborhood” of $p$) が存在し、$U_\alpha$ はある $n$ に対して $\mathbb{R}^n$ 内の開集合と同型であると仮定します。そのとき $M$ は “manifold” と呼ばれます。同型写像は、各 “coordinate patch” $U_\alpha$ 上に座標 $\{x^1_{(\alpha)}, x^2_{(\alpha)}, \ldots, x^n_{(\alpha)}\}$ を定義します。

☆ 最終的には、4 次元ミンコフスキー空間（あるいは少しド・ジッター空間）と何らかのコンパクト空間の積を考えたいと思います。4 次元ミンコフスキー空間もまた多様体であり、この場合（4 次元量子場理論を考える際に通常行うように)、時空は単一の開集合 $\mathbb{R}^{3,1}$ で覆われ、その座標系は $(t, x, y, z)$ のようになります。しかし、コンパクト空間の場合、多様体全体を単一の座標系で覆うことはできず、複数の開集合 $\{U_\alpha, U_\beta, \ldots\}$ が必要となります。それぞれの開集合は独自の座標系 (“local coordinate system”) を持ちます。

例: $S^2$

実二次元球面 $S^2$ はオイラー角 $\theta$ と $\varphi$ によってパラメータ化されます。一見すると、単一の座標パッチで覆えるように見えますが、$0 \le \theta \le \pi$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合ではありません。(Figure **??**).

その代わりに

$$U_{\text{north}} = S^2 - \{\text{south pole } (\theta = \pi)\}, \tag{26}$$

$$U_{\text{south}} = S^2 - \{\text{north pole } (\theta = 0)\}, \tag{27}$$

を考えたとすると、すると、それらは $\mathbb{R}^2$ の開集合となり、それぞれの局所座標系 $(\theta, \varphi)$ と $(\theta' \equiv \pi - \theta, \varphi)$ を定義します。(Figure **??**).

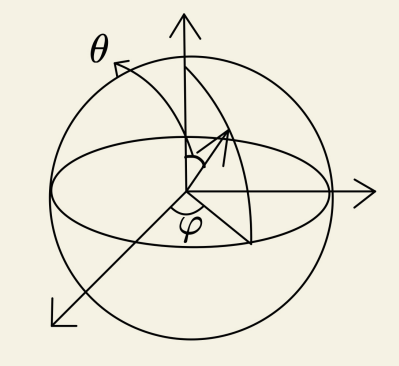



Figure 3: 実二次元球面 $S^2$。

図**??**の右下パネルは北方向からの上面図を示しているため、パッチの向きが反転していることに注意してください。両方のパッチの向きを一致させるには、パッチ $U_{\text{north}}$ 上の通常の（反時計回りの）角度変数として $\varphi' \equiv -\varphi$ を用いる必要があります。

例*:* $\mathbb{CP}^1 (\equiv \mathbb{P}^1)$

☆ 射影空間自体は、何らかの代数方程式の解として定義されるものではありませんが、しばしば、何らかの代数方程式が考察される “ambient space” として用いられます。

$(u, v) \in \mathbb{C}^2$、$(u, v) \neq (0, 0)$ を考えましょう。同値関係

$$(u, v) \sim (u', v') \quad \text{if} \quad u' = \lambda u, \quad v' = \lambda v \quad \text{for some } \lambda \in \mathbb{C}. \tag{28}$$

を導入します。

$$\begin{aligned} \mathbb{CP}^1 &= \{\text{Equivalence classes in } \mathbb{C}^2 \text{ modulo } \sim\} \\ &= \{(u : v) | (u, v) \in \mathbb{C}^2,\ (u, v) \neq (0, 0)\}. \end{aligned} \tag{29}$$

と定義します。

*Stereographic projection*（立体射影）

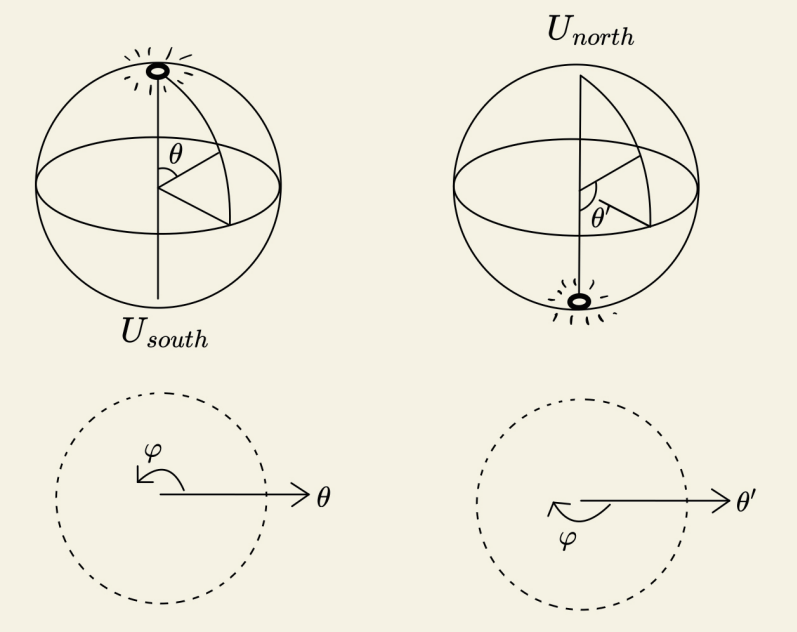



Figure 4: The two patches covering $S^2$.

$(u:v) \in \mathbb{P}^1$ を考えます。$u \neq 0$ の場合

$$(u:v) \sim (1:\frac{v}{u}) \equiv (1:z) \tag{30}$$

は $z \equiv \frac{v}{u} \in \mathbb{C}$ と 1-1 対応します。もし $u = 0$ なら

$$(0:v) \sim (0:1) \tag{31}$$

は 1 点で、それは $z = \frac{v}{u} = \infty$ と見ることができます。このことは通常

$$\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\} \simeq S^2, \tag{32}$$

と表されます。ここで後ろの同一視は立体射影でなされます。(Figure **??**).

$\mathbb{P}^1$ と $S^2$ の対応関係は、以下のように定義されます。$(u:v) \in \mathbb{P}^1$ が与えられているとします。$u \neq 0$ の場合、$z = \frac{v}{u}$ が決定されます。図**??**の左パネルに示すように、半径 1/2 の球を考え、南極に接する平面を、南極を原点とする複素平面 $z$ とします。すると、北極と、南極に接する $z$ 平面上の点 $z$ を結ぶ直線は、球とある点で交わります。このようにして、複素平面 $z$ と、北極を除いた球は 1 対 1 に対応します。同様に、$v \neq 0$ の場合、$w = \frac{u}{v}$ と定義し、球面と、南極と北極に接する複素平面 $w$ 上の点 $w$ を結ぶ直線との交点を考えることができます。実際、この 2 点は同一点であることが示されます。このようにして、$z$ 平面はパッチ $U_{\text{south}}$ に対応し、$w$ 平面はパッチ $U_{\text{north}}$ に対応するため、$\mathbb{P}^1 \simeq S^2$ が成り立ちます。

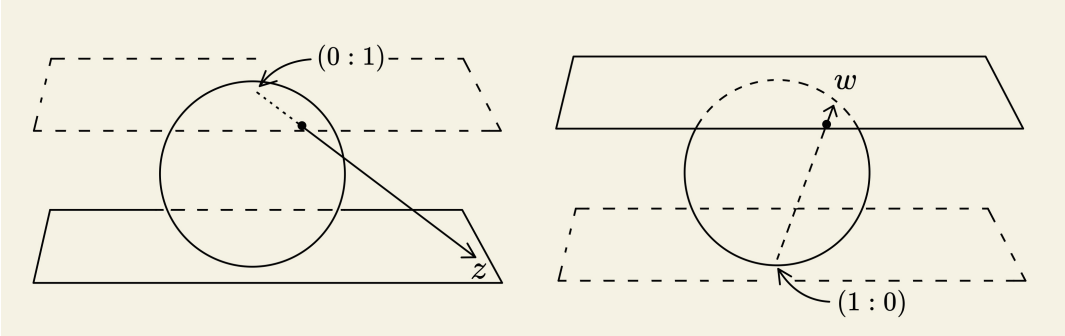



Figure 5: Stereographic projection.

☆ したがって、$z \equiv \frac{v}{u}$ は $U_{\text{south}}$ の座標であり、$w \equiv \frac{u}{v}$ は $U_{\text{north}}$ の座標です。これらは、それぞれの局所座標パッチにおいて「アフィン座標 (affine coordinates)」または「非同次座標 (inhomogeneous coordinate
と呼ばれます。一方、$(u : v)$ のような座標は「同次座標 (homogeneous coordinates)」と呼ばれます。

例: $\mathbb{P}^2$ ($\equiv \mathbb{CP}^2$) 内の 3 次方程式

（複素）2 次元射影空間 $\mathbb{P}^2$ は次のように定義される。

$$\mathbb{P}^2 = \{(z_1, z_2, z_3) \neq (0, 0, 0) \in \mathbb{C}^3\}/\sim, \tag{33}$$

ここで ある $\lambda \in \mathbb{C}^* \equiv \mathbb{C} - \{0\}$ で $(z_1', z_2', z_3') = (\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda z_3)$ のとき $(z_1', z_2', z_3') \sim (z_1, z_2, z_3)$ としている。

☆ 同値関係により、ある射影空間で定義された方程式は、同次座標系では同次方程式となります。

$z_1 \equiv x$、$z_2 \equiv y$、$z_3 \equiv z$ とします。このとき、$\mathbb{P}^2$ における三次方程式の最も一般的な形式は次のようになります。

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dx^2y + ex^2z + fy^2z + gy^2x + hz^2x + jz^2y + kxyz = 0, \tag{34}$$

ここで、$a, b, c, d, e, f, g, h, j, k$ は定数複素数です。

実際、トーリック幾何学の議論で行うように、「重み」（＝同値関係 における $\lambda$ 因子の指数 ($\lambda = \lambda^1 \Rightarrow$ "1")）の合計 $1 + 1 + 1 = 3$ を考えましょう。一般的な規則によれば、$\mathbb{P}^2$ の同次座標において この数値 3 が次数になっている方程式、つまり 3 次方程式が、第 1 次チャーン類がゼロの多様体を表すことを示しています。別の一般定理によれば、これは、このような方程式で定義される多様体がリッチ平坦であることを意味します。この場合、多様体は複素一次元であるため、

リッチ平坦とは真に平坦であることを意味します。したがって、これは（実）二次元トーラスに他なりません。この事実は、三次方程式をワイエルシュトラス形式と呼ばれる「標準」形式に変換することで明確に確認できます。これは次の節で詳しく説明しますが、ここでは特殊な場合におけるこの事実の確認にとどめます。

そのために、(**??**) において $b = d = g = j = k = 0$、$a = 1$、$f = -1$ の場合を考えてみましょう。座標パッチ $z \neq 0$ では、$(x, y, z) \sim (\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1)$ となるので、(**??**) は次のように簡略化されます。

$$y'^2 = x'^3 + ex'^2 + hx' + c. \tag{35}$$

これは 2 つの切断線を持つ 2 枚のシートからなるリーマン面であり、2 つのカットのの 4 つのブランチ本とのうち 3 つは右辺の根であり、残りの 1 つは無限遠点です。これは、2 つのカットに沿って 2 枚のシートを貼り合わせることで得られるトーラスです。

## 1.3 3 次方程式のワイエルシュトラス形式

前の節で考察したいくつかの特殊な場合において、$\mathbb{P}^2$ における三次方程式が 2 次元トーラスを表すことを理解したところで、次に「ワイエルシュトラス形式」と呼ばれる 3 次方程式の標準的な表現について議論しましょう。後ほど、F 理論モデルの具体的な構築において、この形式を多用します。

一般の *3* 次方程式とワイエルシュトラス形式との間の双有理的等価性

再び、$z \neq 0$ の座標パッチにおいて、$(x, y, z) \sim (\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1)$ が成り立ち、$x'$ と $y'$ をそれぞれ $x$ と $y$ に改名します。これらはこのパッチ上のアフィン座標です。すると、3 次方程式のワイエルシュトラス形式は、次の形式で定義されます

$$y^2 = x^3 + fx + g \tag{36}$$

ただし、$f$ と $g$ は定数です。

このワイエルシュトラス方程式に関するよく知られた重要な事実の一つは、$\mathbb{P}^2$ 上の任意の三次方程式は、ワイエルシュトラス形式の方程式と双有理的に同値であるということです。これは、任意の三次方程式は、新しい変数が元の変数の有理関数となるような変数変換によって、ワイエルシュトラス形式に変換できることを意味します。証明については、Joseph H. Silverman と John T. Tate 共著の『楕円曲線上の有理点』を参照してください。

☆ ちなみに、ある日本のウェブサイトでは別の証明を示そうとしていますが、それは間違っています。なぜなら、線形変換のみを用いて一般的な三次方程式をワイエルシュトラス形式に変換しようとしているからです。

*3*次曲線の複素モジュラス $\tau$

$f, g \in \mathbb{C}$ を定数として

$$y^2 = x^3 + fx + g \tag{37}$$

を考えます。$(x, y)$ は、$Z \neq 0$ パッチにおける $\mathbb{P}^2 \ni (X : Y : Z) = (x : y : 1)$ のアフィン座標です。これはトーラスであることを見ましたが、そうだとすると、その複素構造モジュラス $\tau$ の値はいくつでしょうか？

この目的のために、ワイエルシュトラスの式を、ワイエルシュトラスの $\wp$ 関数と $\wp'$ 関数の関係式と比較します。

$$\wp'(z)^2 = 4\wp^3(z) - g_2(\tau)\wp(z) - g_3(\tau). \tag{38}$$

$\wp$ と $\wp'$ は

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Gamma - \{0\}} \left( \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right), \tag{39}$$

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in \Gamma} \frac{1}{(z-w)^3}, \tag{40}$$

で与えられます。ここで $\Gamma$ は格子

$$\Gamma(\omega_1, \omega_2) = \{ m\omega_1 + n\omega_2 \in \mathbb{C} | (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \}. \tag{41}$$

です。$g_2(\tau)$ と $g_3(\tau)$ は、$g_2(\omega_1, \omega_2)$ と $g_3(\omega_1, \omega_2)$ から得られます。定義は以下のとおりです。

$$g_2(\omega_1, \omega_2) = 60 \sum_{\omega \in \Gamma - \{0\}} \frac{1}{\omega^4}, \tag{42}$$

$$g_3(\omega_1, \omega_2) = 140 \sum_{\omega \in \Gamma - \{0\}} \frac{1}{\omega^6}. \tag{43}$$

それらの関係は

$$g_2(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{\omega_1^4} g_2(1, \tau) \equiv \frac{1}{\omega_1^4} g_2(\tau), \tag{44}$$

$$g_3(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{\omega_1^6} g_3(1, \tau) \equiv \frac{1}{\omega_1^6} g_3(\tau) \tag{45}$$

ただし

$$\tau \equiv \frac{\omega_2}{\omega_1}. \tag{46}$$

です。

$$g_2(\tau) = 60G_4(\tau), \tag{47}$$

$$g_3(\tau) = 140G_6(\tau), \tag{48}$$

と書いて、この $G_4(\tau)$ と $G_6(\tau)$ はアイゼンシュタイン級数として知られています。$\zeta(2k)$ リーマンゼータ関数として

$$E_{2k}(\tau) \equiv \frac{G_{2k}(\tau)}{2\zeta(2k)}, \tag{49}$$

とすると、

$$E_4(\tau) = \frac{\vartheta_3^8 + \vartheta_4^8 + \vartheta_2^8}{2}, \tag{50}$$

$$E_6(\tau) = \frac{(\vartheta_3^4 + \vartheta_4^4)(\vartheta_4^4 - \vartheta_2^4)(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)}{2}, \tag{51}$$

であることも知られています。ここで、$\vartheta_i(\tau)$ $(i = 3, 4, 2)$ は、楕円関数 $\vartheta_i(\tau) \equiv \vartheta_i(0, \tau)$ において $z = 0$ と設定することによって定義される「テータ定数 (theta constants)」です。$E_{2k}(\tau)$ は、正規化されたアイゼンシュタイン級数とも呼ばれます。

*"J-function" (Klein's j-invariant)*

$$\begin{aligned} J(\tau) &\equiv \frac{g_2(1,\tau)^3}{g_2(1,\tau)^3 - 27g_3(1,\tau)^2} \left( = \frac{g_2(\omega_1,\omega_2)^3}{g_2(\omega_1,\omega_2)^3 - 27g_3(\omega_1,\omega_2)^2} \right) \\ &\equiv \frac{j(\tau)}{12^3}. \end{aligned} \tag{52}$$

と定義します。$j(\tau)$ は、テータ関数を用いて

$$j(\tau) = \left( \frac{\vartheta_3(\tau)^8 + \vartheta_4(\tau)^8 + \vartheta_2(\tau)^8}{2\eta(\tau)^8} \right)^3, \tag{53}$$

のように表すことができます。ここで、$\eta(\tau)$ はデデキントのイータ関数です。

（**??**）の $x$、$y$ を $\wp(z)$ と $\wp'(z)$ でパラメータ化しましょう。そのためにある定数 $a \in \mathbb{C}$ に対して

$$x = 4a\wp, \quad x = 4a^{\frac{3}{2}}\wp' \tag{54}$$

とおきます。(**??**) と (**??**) を比較すると、

$$f = -4a^2 g_2, \quad g = -16a^3 g_3. \tag{55}$$

がわかります。したがって、ワイエルシュトラスの式 (**??**) における $f$ と $g$ が与えられた場合、$J$ 関数の値は次のように求められます。

$$J(\tau) = \frac{4f^3}{4f^3 + 27g^2}. \tag{56}$$

☆ したがって、与えられた $f$ と $g$ に対して、絶対値 $\tau$ は $J(\tau)$ の逆関数によって与えられます。

$$\tau = J^{-1}\left(\frac{4f^3}{4f^3 + 27g^2}\right). \tag{57}$$

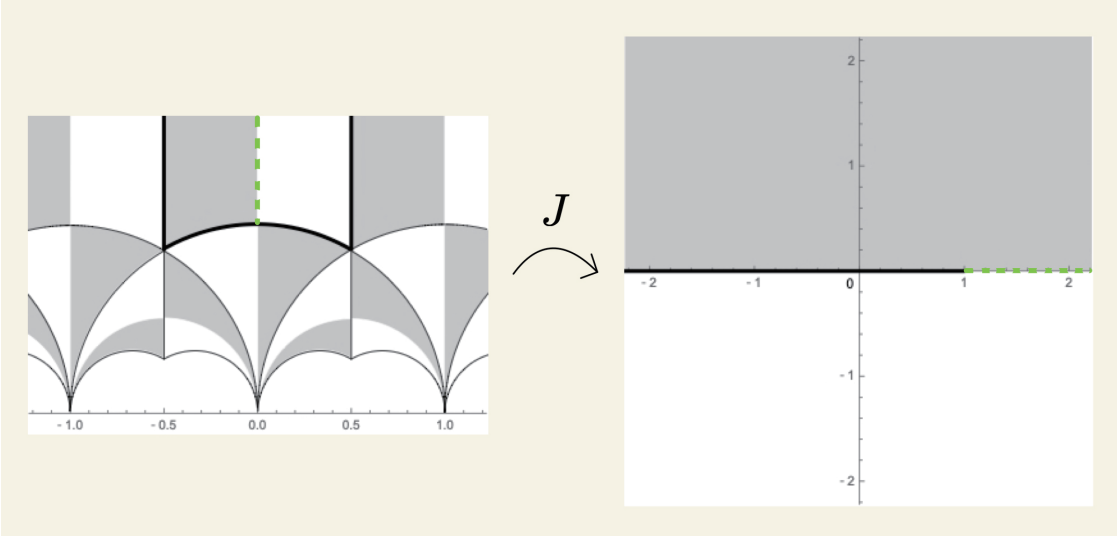



Figure 6: $J$ 関数。

$J$関数の性質

$$H = \{\tau \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}\tau > 0\}. \tag{58}$$

を上半平面とします。$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ は $\tau \in H$ に

$$\sigma(\tau) = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}. \tag{59}$$

のように作用します。これは “モジュラー変換 (modular transformation)” として知られています。すると

- $J(\sigma(\tau)) = J(\tau)$。すなわち、$J$ はモジュラー不変量である。
- $J(\tau)$ は $\tau \in H$ に対する正則関数である。
- $J(\tau) = J(\tau')$（$\tau, \tau' \in H$）$\Leftrightarrow$ $\tau' = \sigma(\tau)$（ある $\sigma \in SL(2,\mathbb{Z})$ に対して）。

が成り立ちます。したがって、$J(\tau)$ は基本領域 $H/SL(2,\mathbb{Z})$ と複素平面 $\mathbb{C}$ との間の 1 対 1 写像です。

☆ F 理論において、$\tau$ は複素スカラー場の値を表し、その実部は弦結合定数の逆数です。上記の $J$ 関数の性質を用いることで、コンパクト空間における位置による弦結合の変化をグラフで示すことができます（後述します）。

フーリエ展開

$j(\tau) = 12^3 J(\tau)$ は次のように展開されます。

$$j(\tau) = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + \cdots, \tag{60}$$

ただし $q \equiv e^{2\pi i\tau}$ です。0 次以上の項の係数は、モンスター群の既約表現の次元の単純な和となっています。この現象は “Monstrous Moonshine” として知られています。

### 1.4 8 次元 F-theory

$\mathbb{R}^{7,1} \times \mathbb{P}^1$ 上のタイプ IIB 理論を考え、複素スカラーの配置が $\tau = C_0 + ie^{\phi}$ で、$\mathbb{P}^1$ 上の位置に応じて正則に変化すると仮定します。つまり $\tau = \tau(z)$ です。前節で見たように、この構成は

$$J(\tau(z)) = \frac{4f(z)^3}{4f(z)^3 + 27g(z)^2} \tag{61}$$

をみたす $\tau(z)$ が $z$ におけるトーラスのモジュラスになっている 2 次元トーラス

$$y^2 = x^3 + f(z)x + g(z) \tag{62}$$

で記述できます。逆に、$\mathbb{P}^1$ 上の与えられた関数 $f(z)$ と $g(z)$ に対して、(**??**) は、(**??**) (図 **??**) を満たすスカラー配置 $\tau(z)$ を記述します。

☆ $J(\tau)$ は、定義 (**??**) および (**??**) によって与えられる関数であることに注意してください。

(**??**) の右辺の分母が、ある $z_0$ において $z = z_0$ でゼロになると仮定しましょう。一般の場合は

$$\Delta(z) \equiv 4f(z)^3 + 27g(z)^2 = O(z - z_0). \tag{63}$$

です。ここで、$\Delta(z)$ は「判別式」と呼ばれます。この場合、$z \to z_0$ のとき、$J(\tau) \to \infty$ となります。

$$J(\tau) = \frac{1}{12^3}\left(\frac{1}{q} + 744 + O(q)\right) \tag{64}$$

($q = e^{2\pi i\tau}$) なので

$$\frac{1}{12^3 q} \sim \frac{\text{const.}}{z - z_0}$$

$$\Rightarrow \quad \tau(z) = \frac{1}{2\pi i}\log(z - z_0) + \text{const.} + O(z). \tag{65}$$

です。$\Delta(z)$ がゼロとなるローカスを "discriminant locus" (または複数形で "discriminant loci") と呼びます。したがって、$\tau(z)$ は discriminant locus の周りでは一価関数ではありません。

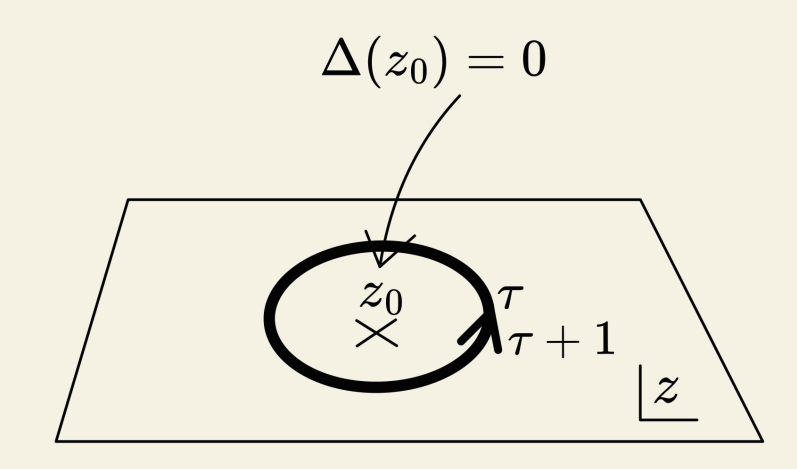



Figure 7: Discriminant locus の周りのモノドロミー。

中心が $z = z_0$ にある、半径 $\epsilon$ の小さい円周に沿った経路を考えます。この経路は次のようにパラメトライズされます。

$$z(\theta) = z_0 + \epsilon e^{i\theta}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi. \tag{66}$$

すると

$$\tau(z(2\pi)) = \tau(z(0)) + 1, \tag{67}$$

でそれは

$$C_0(z(2\pi)) = C_0(z(0)) + 1, \tag{68}$$

を意味します。したがって $C_0$ の磁荷は

$$\oint dC_0 = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\partial C_0}{\partial \theta} = [C_0(z(\theta))]_0^{2\pi} = 1. \tag{69}$$

次のように計算されます。よってこれは D7-ブレインと同定されます (Figure **??**)。

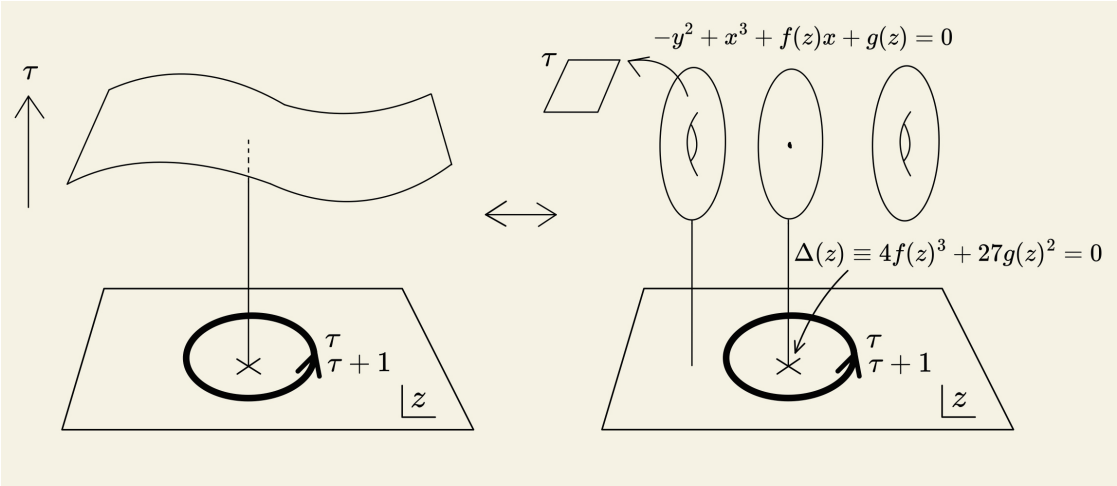



Figure 8: Discriminant locus にある D7-ブレイン。

☆ $\Delta(z)$ がゼロになる場所には、7-ブレインが存在します。上の場合、そのブレインは D7-ブレインであり、その周りのモノドロミーは $\tau \to \tau + 1$、すなわち "T 変換" です。

$$\sigma(\tau) = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad \text{with} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv T. \tag{70}$$

☆ 実は discriminant locus のモノドロミーは必ずしも一般に $T$ とは限らず、別の $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ になりえます。

☆ $-y^2 + x^3 + f(z)x + g(z) = 0$ の全空間は、局所的に $\mathbb{P}^1$ 内の開集合とトーラス族の直積となります。このような構造は "楕円ファイブレーション (elliptic fibration)" と呼ばれます。判別式上の楕円（トーラス）ファイバーは退化しており、特異点を持つことがあります。特異点（ファイバー）の種類は、"Kodaira's classification" に従って分類されます。

楕円ファイブレーションのグローバル構造

特異点の詳細な解析に入る前に、まずグローバル構造について考えてみましょう。最初に見たように、計量の共形因子はある $\tilde{A}(z)$ および $\bar{\tilde{A}}(\bar{z})$ に対して次の形をとります。

$$\begin{aligned} e^{\varphi(z,\bar{z})} &= \frac{\tau(z)-\bar{\tau}(\bar{z})}{2i} A(z)\bar{A}(\bar{z}) \\ &= \frac{\tau(z)-\bar{\tau}(\bar{z})}{2i} \eta(\tau(z))^2 \bar{\eta}(\bar{\tau}(\bar{z}))^2 \tilde{A}(z)\bar{\tilde{A}}(\bar{z}) \end{aligned} \tag{71}$$

$q \equiv e^{2\pi i\tau} \to 0$ のとき

$$\eta^2\bar{\eta}^2 \sim q^{\frac{2}{24}}\bar{q}^{\frac{2}{24}} = |q|^{\frac{1}{6}} \to 0 \tag{72}$$

となり、また discriminant $z = z_0$ 付近では $q \to 0$ のように $z - z_0$ (すなわち $\Delta(z_0) = 0$) となるので $\eta^2\bar{\eta}^2$ は $z = z_0$ 付近で $|z - z_0|^{\frac{1}{6}}$ のように消えます。これらのゼロを相殺するために、

$$A(z)\bar{A}(\bar{z}) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{N} |z - z_i|^{\frac{1}{6}}}, \tag{73}$$

ととります。ここで、$i$ はすべての discriminant locus を走ります。したがって、

$$\begin{aligned} e^{\varphi(z,\bar{z})} &= \frac{\tau(z)-\bar{\tau}(\bar{z})}{2i} A(z)\bar{A}(\bar{z}) \\ &= \frac{\tau(z)-\bar{\tau}(\bar{z})}{2i} \cdot \frac{\eta(\tau(z))^2\bar{\eta}(\bar{\tau}(\bar{z}))^2}{\prod_{i=1}^{N} |z - z_i|^{\frac{1}{6}}}. \end{aligned} \tag{74}$$

これは [**?**] の結果です。

Discriminant locus の数 $N$ が 24 であるとします。$z = \infty$ に特に何もなく $\eta(\tau(z))$ が regular の場合、$z = \infty$ では $e^{\varphi(z,\bar{z})}$ は $z \to \infty$ で $\sim |z|^{-4}$ のように消えます。したがって

$$ds^2 \xrightarrow{z\to\infty} |z|^{-4} dz d\bar{z} \tag{75}$$

であり　$w = \frac{1}{z}$　で表せば

$$= |w|^4 d\left(\frac{1}{w}\right) d\left(\frac{1}{\bar{w}}\right) \;=\; dw\, d\bar{w} \quad !!! \tag{76}$$

となります。したがって、$e^{\varphi}$ は $z = \infty$（$w = 0$）においても正則であり、$\mathbb{P}^1$ 全体にわたって滑らかな計量を定義することがわかります。

☆ $\Delta = 4f^3 + 27g^2$ であるので、$\Delta = 0$ となる点は 24 で $\Delta$ が $z$ に関する 24 次多項式であるということは $f$ と $g$ はそれぞれ $z$ に関する 8 次多項式と 12 次多項式ということになります。実は、$f$ と $g$ がこのように $z$ の 8 次と 12 次多項式になっているワイエルシュトラス方程式

$$-y^2 + x^3 + f(z) + g(z) = 0 \tag{77}$$

は、$\mathbb{P}^2$ のアフィン座標 $(x, y)$ が $\mathbb{P}^1$ の (座標 $z$ をもつ) ある "line bundles" のセクションとして変換されると仮定するならば "K3 surface" を記述する、と言うことを見ます。したがって、計量が $\mathbb{P}^1$ 全体で滑らかであるという条件は、楕円ファイブレーションの全空間がカラビ・ヤウ空間であることを意味します。

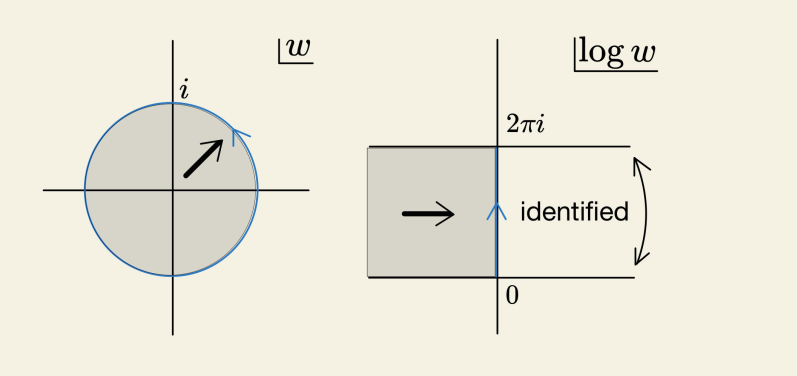



Figure 9: $N = 12$ の場合、無限遠はシリンダーになる。

☆ ちなみに、N=24 ではなく N=12 とすると、計量は

$$\begin{aligned} ds^2 &\overset{z\to\infty}{\longrightarrow} |z|^{-2} dz d\bar{z} \\ &= |w|^2 d\left(\frac{1}{w}\right) d\left(\frac{1}{\bar{w}}\right) = \frac{1}{|w|^2} dw\, d\bar{w} \\ &= d\log w d\overline{\log w}. \end{aligned} \tag{78}$$

のようになります。したがって、これは無限に長いシリンダーを表します。この場合、$f$ と $g$ はそれぞれ $z$ に関する 4 次および 6 次の多項式であり、ワイエルシュトラス方程式は、"有理楕円曲面 (rational elliptic surface)" あるいは "$\frac{1}{2}$K3" を記述します。

☆ 実は、ある種の K3 曲面には、2 つの有理楕円曲面に「分裂」する極限が存在します。この

ような極限は “stable degeneration limit” と呼ばれます。K3 の第 2 コホモロジー格子は

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -E_8 \\ \text{Cartan} \end{matrix}} & & & & & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} -E_8 \\ \text{Cartan} \end{matrix}} & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{79}$$

ですが、一方有理楕円曲面の第 2 コホモロジー格子は

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -E_8 \\ \text{Cartan} \end{matrix}} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \tag{80}$$

なので、K3 は、ヘテロティック理論と双対な $E_8 \times E_8$ 対称性を生み出す幾何学的構造をもつ一方、有理楕円曲面は、その 2 つのうちの 1 つだけをもつ、ということができます。

### 1.5 小平の特異ファイバーの分類

前の例では、$\Delta = 4f^3 + 27g^2 \to 0$ の場合を検討しました。しかし、$f$ は一般的な $f \neq 0$ であるため、$J \equiv \frac{4f^3}{\Delta} \to \infty$ となります。どの方向から $z_0$ に近づいても、この関係は変わりません。しかし、$f$（および $g$）$\to 0$ の場合、discriminant locus の周りのモノドロミーは必ずしも $T$ ではなく、縮退した（つまりつぶれた）ファイバー上の特異点のタイプは異なります。これらは、$f$、$g$、および discriminant$\Delta$ の零点の次数に応じて、以下のように分類されます。($\mathrm{ord}(f) = n \Leftrightarrow f(z) = O((z - z_0)^n)$):

☆ 特異点タイプ $G$ は、特異ファイバーによって実現されるゲージ対称性の群を示します。ほとんどの場合（$II$ と $III$ を除く）、“exceptional fibers” の交点図は、$G$ の 拡張 ディンキン図と一致します。

Table 1: Kodaira's classification of singular fibers.

| $\mathrm{ord}(f)$ | $\mathrm{ord}(g)$ | $\mathrm{ord}(\Delta)$ | fiber type | singularity type |
|---|---|---|---|---|
| $\geq 0$ | $\geq 0$ | 0 | smooth | none |
| 0 | 0 | $n$ | $I_n$ | $A_{n-1}$ |
| $\geq 1$ | 1 | 2 | $II$ | none |
| 1 | $\geq 2$ | 3 | $III$ | $A_1$ |
| $\geq 2$ | 2 | 4 | $IV$ | $A_2$ |
| 2 | $\geq 3$ | $n+6$ | $I_n^*$ | $D_{n+4}$ |
| $\geq 2$ | 3 | $n+6$ | $I_n^*$ | $D_{n+4}$ |
| $\geq 3$ | 4 | 8 | $IV^*$ | $E_6$ |
| 3 | $\geq 5$ | 9 | $III^*$ | $E_7$ |
| $\geq 4$ | 5 | 10 | $II^*$ | $E_8$ |

☆ 次の条件をみたすとき、$y^2 = x^3 + f(z)x + g(z)$ は $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ で特異であると言います。

$$
\begin{aligned}
& (-y^2 + x^3 + f(z)x + g(z))\Big|_{(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)} = 0 \\
\text{and} \quad & \frac{\partial}{\partial x}(-y^2 + x^3 + f(z)x + g(z))\Big|_{(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)} = 0 \\
\text{and} \quad & \frac{\partial}{\partial y}(-y^2 + x^3 + f(z)x + g(z))\Big|_{(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)} = 0 \\
\text{and} \quad & \frac{\partial}{\partial z}(-y^2 + x^3 + f(z)x + g(z))\Big|_{(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)} = 0.
\end{aligned} \tag{81}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & y_0^2 = x_0^3 + f(z_0)x_0 + g(z_0), \\
& 3x_0^2 + f(z_0) = 0, \\
& y_0 = 0, \\
& f'(z_0)x_0 + g'(z_0) = 0.
\end{aligned} \tag{82}
$$

例：$I_2$ ファイバー

上記の方程式を解くと、

$$y_0 = 0, \quad x_0^2 = -\frac{1}{3}f(z_0)$$
$$\Rightarrow -\frac{2}{3}f(z_0)x_0 = g(z_0). \tag{83}$$

となります。ここで、$x_0 \neq 0$ と仮定します。すると、$f(z_0) \neq 0$、$g(z_0) \neq 0$ となり、$x_0 = -\frac{3g(z_0)}{2f(z_0)}$ となります。したがって、この場合、$\mathrm{ord}(f) = \mathrm{ord}(g) = 0$ となります。すると

$$\frac{9g(z_0)^2}{4f(z_0)^2} + \frac{1}{3}f(z_0) = 0 \quad \Rightarrow \ \Delta(z_0) = 0. \tag{84}$$

です。また、$f'(z_0)x_0 + g'(z_0) = 0$ を使うと

$$\begin{aligned}
\Delta'(z_0) &= (12f^2f' + 54gg')\big|_{z=z_0} \\
&= (12f^2f' + 54gf'x_0)\big|_{z=z_0} \\
&= 6f'\left(2f^2 - 9g\left(-\frac{3g}{2f}\right)\right)\Big|_{z=z_0} \\
&= 3f'(4f^3 + 27g^2)\big|_{z=z_0} \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{85}$$

がわかります。よって $\mathrm{ord}(\Delta) \geq 2$ です。したがって、このファイバーは（ジェネリックには）$I_2$ 型です。

☆ この場合の特異点タイプが $A_1$ であることを理解するためには、特異点を “blow up” （あるいは “resolve”） し、解消後に現れる “例外的な曲線 (exceptional curves)” がどのように交差するかを調べる必要があります。

特異点のブローアップ：ブローアップとは何か？

「ブローアップ」とは、座標空間において（パラメータ空間ではなく）、ある種の double-scaling limit を取ることを意味します。

*Double-scaling limit* の例：*'t Hooft* 結合

例：$I_2$ ファイバーの特異点のブローアップ

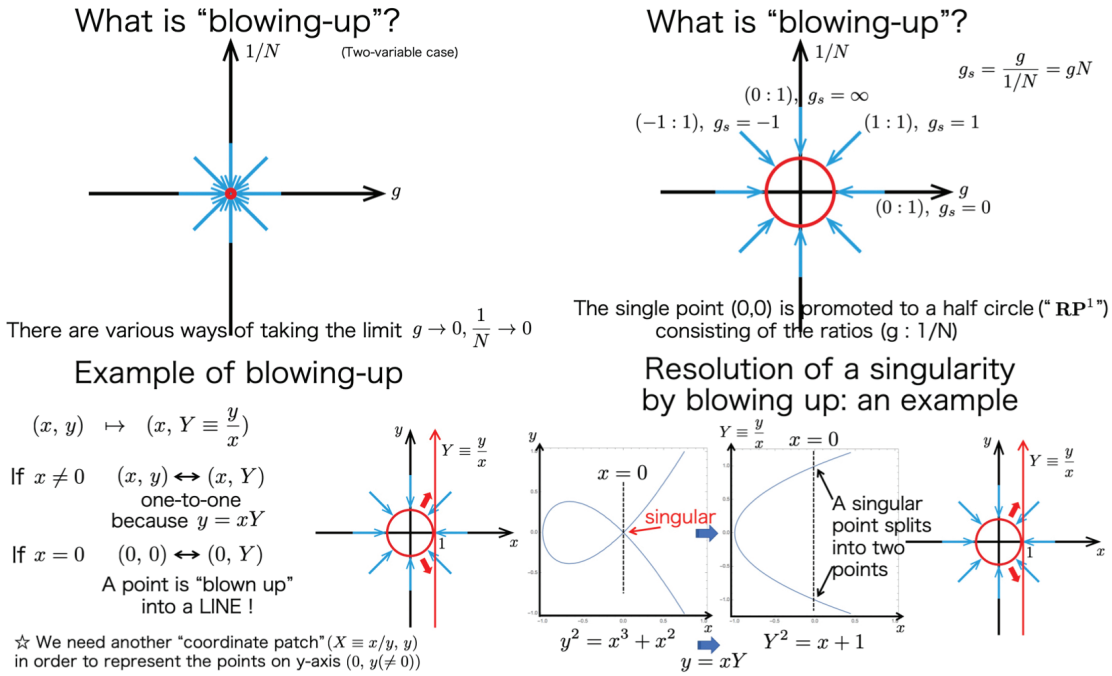



Figure 10: パラメータ空間におけるブローアップとしての't Hooft 結合と、ブローアップ手順の例。

前の例と同様に、$y^2 = x^3 + f(z)x + g(z)$ が $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ で

$$\begin{aligned} &y_0^2 = x_0^3 + f(z_0)x_0 + g(z_0), \\ &3x_0^2 + f(z_0) = 0, \\ &y_0 = 0, \\ &f'(z_0)x_0 + g'(z_0) = 0 \end{aligned} \tag{86}$$

を満たすと仮定します。このとき、$(x_0, y_0, z_0)$ は特異点 $x_0 = -\frac{3g(z_0)}{2f(z_0)}$ となりますが、これを $(0, 0, 0)$ に移動させると便利です。そのために

$$\tilde{x} \equiv x + \frac{3g(z_0)}{2f(z_0)}, \quad \tilde{z} \equiv z - z_0. \tag{87}$$

とします。これらを用いると、ワイエルシュトラス方程式は

$$y^2 = \tilde{x}^3 + \frac{1}{4}(b_{2,0} + \cdots)\tilde{x}^2 + \frac{1}{2}(b_{4,1}\tilde{z}\cdots)\tilde{x} + \frac{1}{4}(b_{6,2}\tilde{z}^2 + \cdots), \tag{88}$$

次の形式で書き直されます。ここで、$\cdots$ は $\tilde{z}$ の高次項です。$\tilde{x}$ と $\tilde{z}$ を単に $x$ と $z$ と改名して、

$$\Phi(x, y, z) \equiv -y^2 + \tilde{x}^3 + \frac{1}{4}(b_{2,0} + \cdots)\tilde{x}^2 + \frac{1}{2}(b_{4,1}\tilde{z}\cdots)\tilde{x} + \frac{1}{4}(b_{6,2}\tilde{z}^2 + \cdots). \tag{89}$$

と定義します。すると $(x,y,z)=(0,0,0)$ で $\Phi(x,y,z)=0$ です。またそこ $(x,y,z)=(0,0,0)$ で

$$\begin{aligned}\partial_x\Phi(x,y,z)&=3x^2+\frac{1}{2}(b_{2,0}+\cdots)x+\frac{1}{2}(b_{4,1}z+\cdots) \;=\; 0,\\ \partial_y\Phi(x,y,z)&=-2y \;=\; 0,\\ \partial_z\Phi(x,y,z)&=\frac{1}{2}(b_{4,1}+\cdots)x+\frac{1}{4}(2b_{6,2}z+\cdots) \;=\; 0\end{aligned} \tag{90}$$

です。したがって当然のことながら $(x,y,z)=(0,0,0)$ は特異点です。

☆ $\mathbb{C}^3$ の $(0,0,0)$ におけるブローアップを $\hat{\mathbb{C}}^3$ と表記すると、次のように定義されます：

$$\hat{\mathbb{C}}^3\equiv\Big\{\big((x,y,z),(X:Y:Z)\big)\in\mathbb{C}^3\times\mathbb{P}^2\Big|\,xY=yX,\;yZ=zY,\;xZ=zX\Big\} \tag{91}$$

- もし $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ なら、$(X:Y:Z)$ は一意に決定。
- もし $(x,y,z)=(0,0,0)$ なら、$(X:Y:Z)$ は任意!
  $\Rightarrow$ $\mathbb{C}^3$ の点 $(0,0,0)$ が $\mathbb{P}^2$ に置き換わる！

$\Phi(x,y,z)=0$ の特異点をブローアップするためには、$\mathbb{C}^3$ ではなく $\hat{\mathbb{C}}^3$ でこの方程式を考えます。

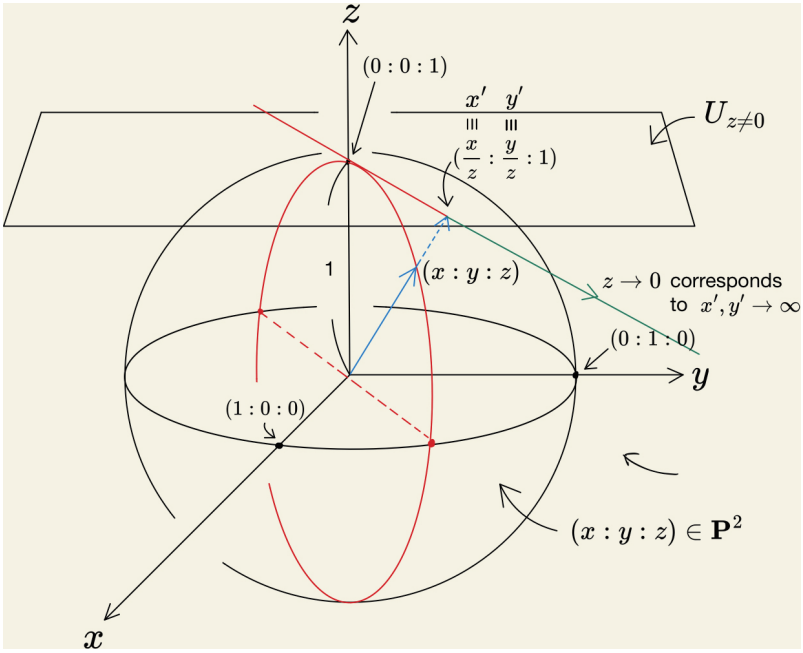



Figure 11: アファインチャート $U_{z\neq0}$。$z\neq0$ の場合、$(x,y,z)\equiv(x'z,y'z,z)$ と設定する。$U_{x\neq0}$ および $U_{y\neq0}$ についても同様。

☆ $\mathbb{P}^2$ は 3 つの “アファインチャート (affine charts)”で覆われます：

$$\begin{aligned} U_{x\neq 0} &= \left\{(1:y':z') \in \mathbb{P}^2 \mid y', z' \in \mathbb{C}\right\} \quad \ni (1:0:0), \\ U_{y\neq 0} &= \left\{(x':1:z') \in \mathbb{P}^2 \mid x', z' \in \mathbb{C}\right\} \quad \ni (0:1:0), \\ U_{z\neq 0} &= \left\{(x':y':1) \in \mathbb{P}^2 \mid x', y' \in \mathbb{C}\right\} \quad \ni (0:0:1), \end{aligned} \tag{92}$$

$$\mathbb{P}^2 = U_{x\neq 0} \bigcup U_{y\neq 0} \bigcup U_{x\neq 0}. \tag{93}$$

点 $(1:0:0)$ は $U_{x\neq 0}$ でのみ「見」え、$U_{y\neq 0}$ や $U_{z\neq 0}$ では「見」えないことに注意。

$\Phi(x,y,z)=0$ を $\hat{\mathbb{C}}^3$ における 3 つの異なるチャート $U_{x\neq0}$、$U_{y\neq0}$、$U_{z\neq0}$ で考えます。

- $U_{x\neq0}$ では $(x,y,z)$ を $(x,xy',xz')$ に置き換えると

$$\begin{aligned}\Phi(x,y,z) &= -y^2+x^3+\frac{1}{4}(b_{2,0}+\cdots)x^2+\frac{1}{2}(b_{4,1}z+\cdots)x+\frac{1}{4}(b_{6,2}z^2+\cdots)\\ &= -x^2y'^2+x^3+\frac{1}{4}(b_{2,0}+\cdots)x^2+\frac{1}{2}(b_{4,1}xz'+\cdots)x+\frac{1}{4}(b_{6,2}x^2z'^2+\cdots)\\ &= x^2\left(-y'^2+x+\frac{1}{4}(b_{2,0}+\cdots)+\frac{1}{2}(b_{4,1}z'+\cdots)+\frac{1}{4}(b_{6,2}z'^2+\cdots)\right)\\ &\equiv x^2\Phi_x(x,y',z') \end{aligned} \tag{94}$$

  ☆ この $x^2$ がくくり出された場合にのみカラビ・ヤウはカラビ・ヤウのまま保たれます。

$$\Rightarrow\ \Phi_x(x,y',z') = -y'^2+x+\frac{1}{4}(b_{2,0}+\cdots)+\frac{1}{2}(b_{4,1}z'+\cdots)+\frac{1}{4}(b_{6,2}z'^2+\cdots) \tag{95}$$

$$\overset{x\to0}{\to} -y'^2+\frac{1}{4}b_{2,0}+\frac{1}{2}b_{4,1}z'+\frac{1}{4}b_{6,2}z'^2. \tag{96}$$

  ☆ $\Phi(x,y,z)=0$ とは異なり、"proper transform" $\Phi_x(x,y',z')=0$ は（ジェネリックには）正則です。

  ☆ $\mathbb{C}^3$（$\hat{\mathbb{C}}^3$ ではない）では、$(x,xy',x,z')$ の極限は $\overset{x\to0}{\to}(0,0,0)$ で、一点のみとなる。一方、$\hat{\mathbb{C}}^3$ では、$(x,xy',xz')$ の $x\to0$ の極限は $\mathbb{C}^2\ni(y',z')$ となり、$\Phi(x,y,z)=0$ との交点は既約な曲線

$$-y'^2+\frac{1}{4}b_{2,0}+\frac{1}{2}b_{4,1}z'+\frac{1}{4}b_{6,2}z'^2=0,\quad x=0. \tag{97}$$

  となります。ブローアップによって新たに現れるこのような曲線は、"例外曲線 (exceptional curve)" と呼ばれます。これは 二次方程式 $\frac{1}{4}b_{2,0}+\frac{1}{2}b_{4,1}z'+\frac{1}{4}b_{6,2}z'^2=0$ の discriminant

$$D=\frac{1}{4}(b_{4,1}^2-b_{2,0}b_{6,2}) \tag{98}$$

  が消えるとき既約でなくなり、この場合、曲線は 2 本の直線に分かれ、ファイバーの型は $I_3$（またはそれより高い型）となります（図**??**）。

- $U_{y\neq0}$ では $\Phi(x,y,z)$ において、$(x,y,z)$ を $(x'y,y,yz')$ に置き換え

$$\Phi(x'y,y,yz')\equiv y^2\Phi_y(x',y,z'). \tag{99}$$

  と置きます。するとすると、$\Phi_y(x',y,z')=0$ がブローアップ後の式となり、これも（一般的に）正則であることが確認できます。

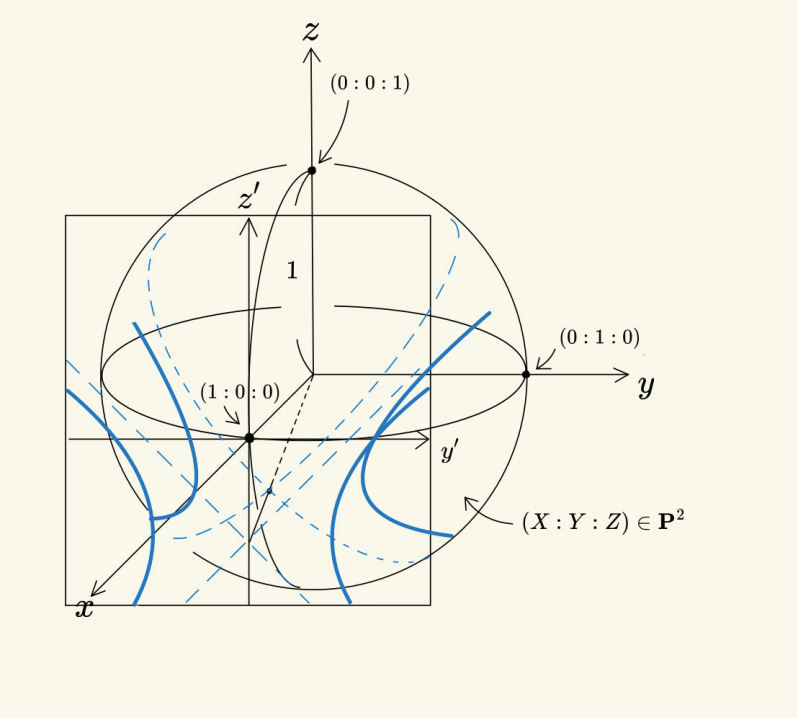



Figure 12: 特異曲線。$D$ がゼロの場合、既約特異曲線（太い曲線）は 2 つの既約曲線（破線の直線）に変化する。前面平面への投影は、チャート $U_{x\neq 0}$ で見たもの。

- $U_{z\neq 0}$ では 同様に、$\Phi(x,y,z)$ において $(x,y,z)$ を $(x'z,y'z,z)$ に置き換え、

$$\Phi(x'z,y'z,z) \equiv z^2\Phi_z(x',y',z). \tag{100}$$

とすると、$\Phi_z(x',y',z) = 0$ がこのチャートにおけるブローアップ後の式で、これも（一般的に）正則です。

☆ 我々は異なるチャートでブローアップを行った後、方程式の異なる表現式、$\Phi_x(x,y',z') = 0$、$\Phi_y(x',y,z') = 0$、および $\Phi_z(x',y',z) = 0$ が得ました。同次座標系、例えば $(x,y,z) = (\alpha X,\alpha Y,\alpha Z)$、 $(x : y : z) = (X : Y : Z)$ を用いると、この後の式は

$$\Phi(\alpha X,\alpha Y,\alpha Z) \equiv \alpha^2\Phi_\alpha(X,Y,Z) \tag{101}$$

と定義することにより

$$\Phi_\alpha(X,Y,Z) = 0. \tag{102}$$

と統一的に表現できます。この式は単純ですが、特異点の実際の解析においては、各チャートごとに各式を検証する方がより便利です。

したがって、この場合の特異点は、ただ１回のブローアップ操作によって解消されます。この解消により、新たな特異曲線が一つ出現します。

$$\Phi(x,y,z) = x^2\left(-y'^2 + x + \frac{1}{4}(b_{2,0}+\cdots) + \frac{1}{2}(b_{4,1}z' + \cdots) + \frac{1}{4}(b_{6,2}z'^2 + \cdots)\right) \tag{103}$$

であり、またもとの特異ファイバーは、$z(\equiv xz') = 0$ に位置するファイバーであり

$$-y'^2 + x + \frac{1}{4}b_{2,0} = 0, \quad z' = 0. \tag{104}$$

で与えられます。これは例外曲線 (**??**) と２点

$$x = z' = 0, \quad y' = \pm\frac{\sqrt{b_{2,0}}}{2} \tag{105}$$

で交差します (Figure **??**)。

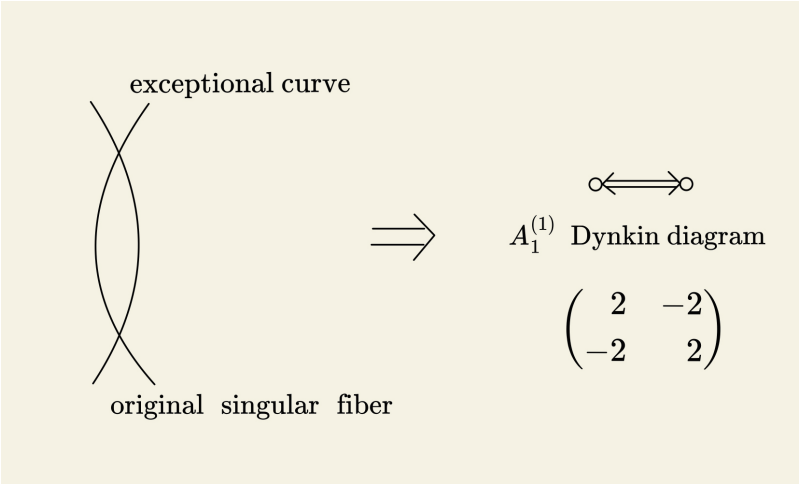



Figure 13:

テイトのアルゴリズム *(Tate's algorithm)*

ワイエルシュトラス形式において、特異点は一般に $(x,y,z) = (0,0,0)$ には存在しません。変数変換（座標のシフト）によって、特異点を $(0,0,0)$ に移動させることができます。すると、3 次方程式は次の形になる。

$$-y^2 + x^3 - a_1xy + a_2x^2 - a_3y + a_4x + a_6 = 0. \tag{106}$$

この形式の方程式は "Tate's form" として知られています。「テイトのアルゴリズム」は、係数 $a_1,\ldots,a_6$ の $z$ の次数が低次から高次へと変化するにつれて、小平ファイバーのタイプがどのように変化するかを決定します [**?**]。

図**??**は、Bershadsky et al. [**?**] から引用した表で、示されたファイバータイプの $a_i$ の次数を示しています。

☆ これは 6 次元 F 理論におけるファイバータイプの分類であり、同じ小平ファイバーの中でも、$I^s_{2k+1}$ や $I^{ns}_{2k+1}$ といったさらなる区別が存在します。分類の添え字は、「分割型」と「非分割型」の区別を示しています。詳細は原著論文を参照してください。また、テイトのアルゴリズムに関する最近の議論も存在します。

☆ これらは十分条件であることに注意してください！実際、

$$\begin{aligned} 0 &= -y^2 + x^3 - a_1xy + a_2x^2 - a_3y + a_4x + a_6 \\ &= -\left(y + \frac{1}{2}(a_1x + a_3)\right)^2 + \left(x + \frac{1}{3}(\frac{1}{4}a_1^2 + a_2)\right)^3 + \left(\frac{1}{2}a_1a_3 + a_4 - \frac{1}{3}(\frac{1}{4}a_1^2 + a_2)^2\right)\left(x + \frac{1}{3}(\frac{1}{4}a_1^2 + a_2)\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{4}a_3^2 + a_6 - \frac{1}{27}(\frac{1}{4}a_1^2 + a_2)^3\right) - \left(\frac{1}{2}a_1a_3 + a_4 - \frac{1}{3}(\frac{1}{4}a_1^2 + a_2)^2\right)\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}a_1^2 + a_2\right) \end{aligned} \tag{107}$$

したがって、テイトの式はワイエルシュトラスの式で表すことができます。逆に、ワイエルシュトラスの式はテイトの式で表すことができます（そして実際によく表される）が、それは一意ではありません。また、常に表せるわけでもありません。

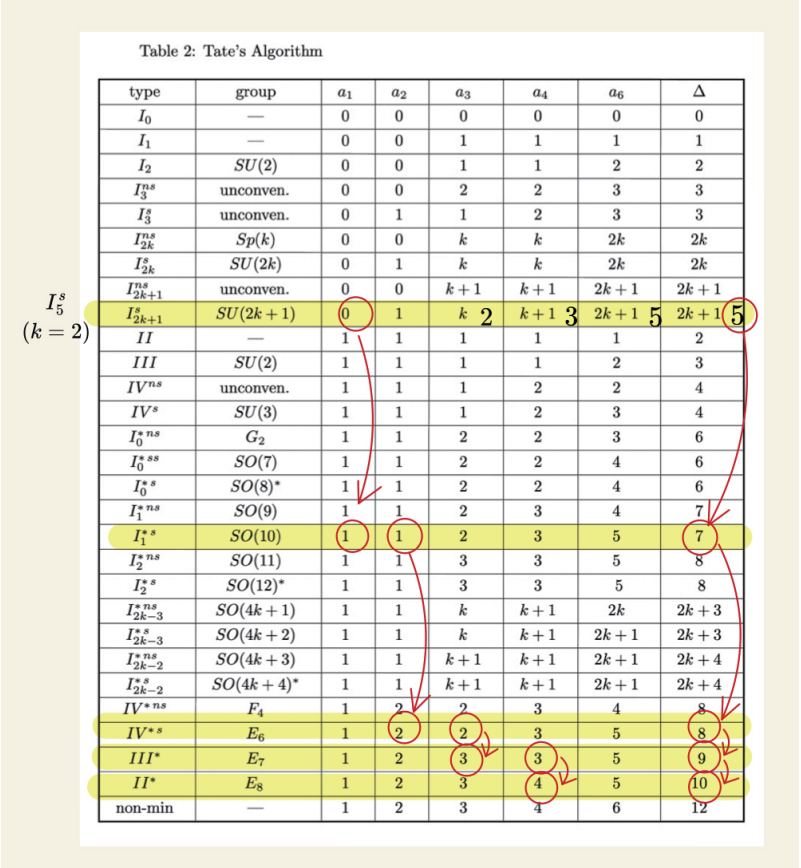



Table 2: Tate's Algorithm

| type | group | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_6$ | $\Delta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_0$ | — | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $I_1$ | — | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $I_2$ | $SU(2)$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| $I_3^{ns}$ | unconven. | 0 | 0 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| $I_3^{s}$ | unconven. | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 |
| $I_{2k}^{ns}$ | $Sp(k)$ | 0 | 0 | $k$ | $k$ | $2k$ | $2k$ |
| $I_{2k}^{s}$ | $SU(2k)$ | 0 | 1 | $k$ | $k$ | $2k$ | $2k$ |
| $I_{2k+1}^{ns}$ | unconven. | 0 | 0 | $k+1$ | $k+1$ | $2k+1$ | $2k+1$ |
| $I_{2k+1}^{s}$ | $SU(2k+1)$ | 0 | 1 | $k$ | $k+1$ | $2k+1$ | $2k+1$ |
| $II$ | — | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| $III$ | $SU(2)$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 |
| $IV^{ns}$ | unconven. | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 4 |
| $IV^{s}$ | $SU(3)$ | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $I_0^{*\,ns}$ | $G_2$ | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 6 |
| $I_0^{*\,ss}$ | $SO(7)$ | 1 | 1 | 2 | 2 | 4 | 6 |
| $I_0^{*\,s}$ | $SO(8)^*$ | 1 | 1 | 2 | 2 | 4 | 6 |
| $I_1^{*\,ns}$ | $SO(9)$ | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 7 |
| $I_1^{*\,s}$ | $SO(10)$ | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 |
| $I_2^{*\,ns}$ | $SO(11)$ | 1 | 1 | 3 | 3 | 5 | 8 |
| $I_2^{*\,s}$ | $SO(12)^*$ | 1 | 1 | 3 | 3 | 5 | 8 |
| $I_{2k-3}^{*\,ns}$ | $SO(4k+1)$ | 1 | 1 | $k$ | $k+1$ | $2k$ | $2k+3$ |
| $I_{2k-3}^{*\,s}$ | $SO(4k+2)$ | 1 | 1 | $k$ | $k+1$ | $2k+1$ | $2k+3$ |
| $I_{2k-2}^{*\,ns}$ | $SO(4k+3)$ | 1 | 1 | $k+1$ | $k+1$ | $2k+1$ | $2k+4$ |
| $I_{2k-2}^{*\,s}$ | $SO(4k+4)^*$ | 1 | 1 | $k+1$ | $k+1$ | $2k+1$ | $2k+4$ |
| $IV^{*\,ns}$ | $F_4$ | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 8 |
| $IV^{*\,s}$ | $E_6$ | 1 | 2 | 2 | 3 | 5 | 8 |
| $III^*$ | $E_7$ | 1 | 2 | 3 | 3 | 5 | 9 |
| $II^*$ | $E_8$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 |
| non-min | — | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 12 |

Figure 14: テイトのアルゴリズム（Bershadsky et.al.[?] より引用）。黄色のマーカー、赤色の円と矢印は、セクション??で議論されている一連の特異点のエンハンスメントを表しています。

例: $I_5(SU(5)) \to I_1^*(SO(10)) \to IV^*(E_6) \to III^*(E_7) \to II^*(E_8)$

$$
\begin{aligned}
I_5: \quad & \mathrm{ord}(a_1,a_2,a_3,a_4,a_6) = (0,1,2,3,5) \\
\Rightarrow \quad & \Phi(x,y,z) = -y^2 + x^3 - a_{1,0}xy + a_{2,1}zx^2 - a_{3,2}z^2y + a_{4,3}z^3x^2 + a_{6,5}z^5, \qquad (108)
\end{aligned}
$$

ここで、各 $a_i$ の $z$ 展開は、主要項まで示されています。$i = 1,2,3,4,6$ すべてについて $a_i \neq 0$ であると仮定します。このとき $(x,y,z) = (0,0,0)$ は特異です。

1st blow up $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ の場合、$(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$, $(X:Y:Z) \in \mathbb{P}^2$, $(x:y:z) = (X:Y:Z)$ とします。$\mathbb{P}^2 = U_{X\neq 0} \bigcup U_{Y\neq 0} \bigcup U_{Z\neq 0}$。

- $U_{X\neq 0}$ 以前と同様に、$\Phi(x,y,z) = 0$ の $(x,y,z)$ を $(x, xy_1, xz_1)$ に置き換えると

$$
\begin{aligned}
\Phi(x, xy_1, xz_1) &= x^2(-y_1^2 + x - a_{1,0}y_1 + a_{2,1}xz_1 - a_{3,2}xz_1^2y_1 + a_{4,3}x^3z_1^3 + a_{6,5}x^3z_1^5) \\
&\equiv \Phi_x(x, y_1, z_1). \qquad (109) \\
\Phi_x(x, y_1, z_1) &= -y_1^2 + x - a_{1,0}y_1 + a_{2,1}xz_1 - a_{3,2}xz_1^2y_1 + a_{4,3}x^3z_1^3 + a_{6,5}x^3z_1^5 \\
&\xrightarrow{x\to 0} -y_1^2 - a_{1,0}y_1 \\
&= -y_1(-y_1^2 + a_{1,0}). \qquad (110)
\end{aligned}
$$

  $\Rightarrow \Phi_x(x = 0, y_1, z_1) = 0$ は、2 つの例外的な曲線 $y_1 = 0$ と $y_1 = -a_{1,0}$ から構成されます。

  ☆ $\Phi_x(x, y_1, z_1) = 0$ は正則です。

  ☆ 実は、2 つの特異曲線 $y_1 = 0$ と $y_1 = -a_{1,0}$ の交点は特異点ですが、このチャートでは見えません（図 **??**）。

- $U_{Y\neq 0}$ このケースも同様です。このチャートには特異点がないため、詳細は省略します。

- $U_{Z\neq 0}$ $\Phi(x,y,z) = 0$ で $(x,y,z)$ を $(x_1z, y_1z, z)$ とおきます。集合 $z \to 0$ は、$(x_1 : y_1 : 1) \in U_{Z\neq 0} \subset \mathbb{P}^1$ からなります。

$$
\begin{aligned}
\Phi(x_1z, y_1z, z) &= z^2(-y_1^2 + zx_1^3 - a_{1,0}x_1y_1 + a_{2,1}zx_1^2 - a_{3,2}zy_1 + a_{4,3}z^3x_1^2 + a_{6,5}z^3) \\
&\equiv z^2\Phi_z(x_1, y_1, z). \qquad (111) \\
\Phi_z(x_1, y_1, z) &= -y_1^2 + zx_1^3 - a_{1,0}x_1y_1 + a_{2,1}zx_1^2 - a_{3,2}zy_1 + a_{4,3}z^3x_1^2 + a_{6,5}z^3 \\
&\xrightarrow{z\to 0} -y_1^2 - a_{1,0}x_1y_1 \;=\; -y_1(y_1 + a_{1,0}x_1). \qquad (112)
\end{aligned}
$$

  ☆ $\Phi_z(x_1, y_1, z = 0) = 0$ は、$y_1 = 0$ と $y_1 = -a_{1,0}x_1$ という 2 つの例外的な曲線から構成されます。$x_1 \neq 0$ の場合、これらは $U_{X\neq 0}$ で見たものと同じです。$U_{X\neq 0}$ にも $U_{Y\neq 0}$ にも見られない点 $(x_1, y_1, z) = (0,0,0)$ だけが、$\Phi_z(x_1, y_1, z) = 0$ が特異点となる点です。
  $\Rightarrow$ さらなるブローアップ

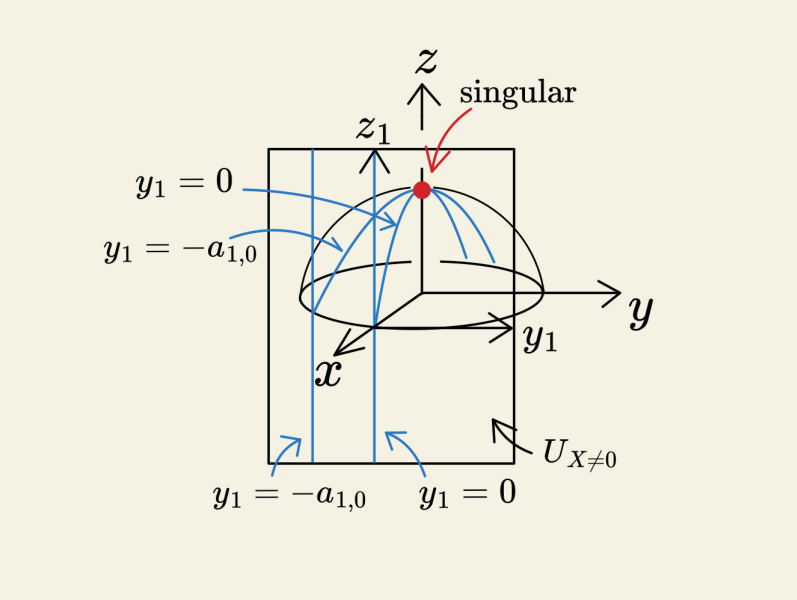



Figure 15:

2nd blow up

$$\Phi_z(x_1, y_1, z) = -y_1^2 + zx_1^3 - a_{1,0}x_1y_1, + a_{2,1}zx_1^2 - a_{3,2}zy_1 + a_{4,3}z^3x_1^2 + a_{6,5}z^3. \tag{113}$$

- $\underline{U_{X\neq 0}}$ This time we set $(x_1, y_1, z) = (x_1, x_1y_2, x_1z_2)$, then

$$\begin{aligned}\Phi_z(x_1, x_1y_2, x_1z_2) &= x_1^2(-y_2^2 + z_2x_1^2 - a_{1,0}y_2 + a_{2,1}z_2x_1 - a_{3,2}z_2y_2 + a_{4,3}z_2^3x_1^3 + a_{6,5}z_2^3x_1)\\ &\equiv x_1^2\Phi_{zx}(x_1, y_2, z_2). \end{aligned}\tag{114}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{zx}(x_1, y_2, z_2) &= -y_2^2 + z_2x_1^2 - a_{1,0}y_2 + a_{2,1}z_2x_1 - a_{3,2}z_2y_2 + a_{4,3}z_2^3x_1^3 + a_{6,5}z_2^3x_1\\ &\xrightarrow{x_1\to 0} -y_2^2 - a_{1,0}y_2 - a_{3,2}z_2y_2 = -y_2(y_2 + a_{1,0} + a_{3,2}z_2). \end{aligned}\tag{115}$$

例外的な曲線 $y_2(y_2 + a_{1,0} + a_{3,2}z_2) = 0$ は 2 つの直線から構成されます。

☆ $a_{1,0} \neq 0$ である限り、$\Phi_{zx}(x_1, y_2, z_2) = 0$ が正則であることが確認できます。他のチャートについても同様であり、それでブローアップ手順は完了します。

これまで、z 平面上の楕円ファイブレーションの特異ファイバーと、その特異点のブローアップについて考察してきました。この z 平面を $\mathbb{P}^1$ を覆うチャートの一つとみなし、特異ファイバーの数を 24 とすると、ファイバー空間を含む空間全体が K3 曲面となります。ずっと以前、ウィッテンは、K3 コンパクト化における非可換ゲージ対称性は、K3 が特異点を持つ際に、消滅する 2 サイクルを巻き込む M2 ブレインによって説明できると提唱しました。これは、可換ゲージ対称

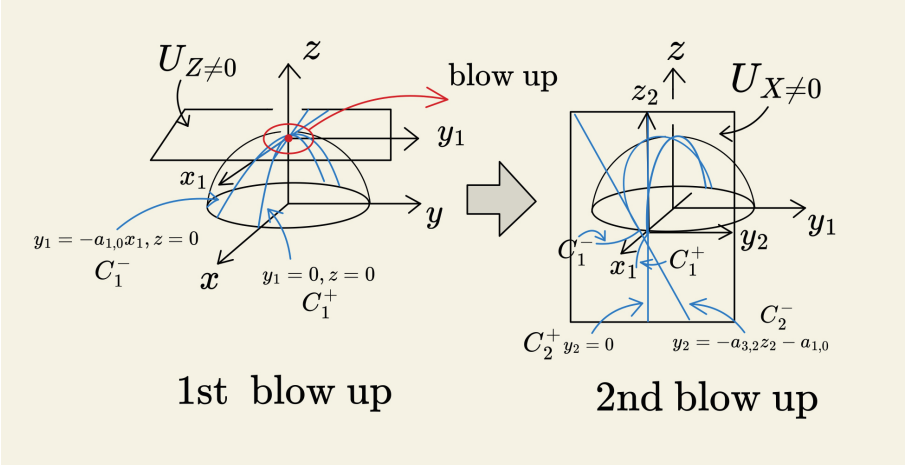



Figure 16:

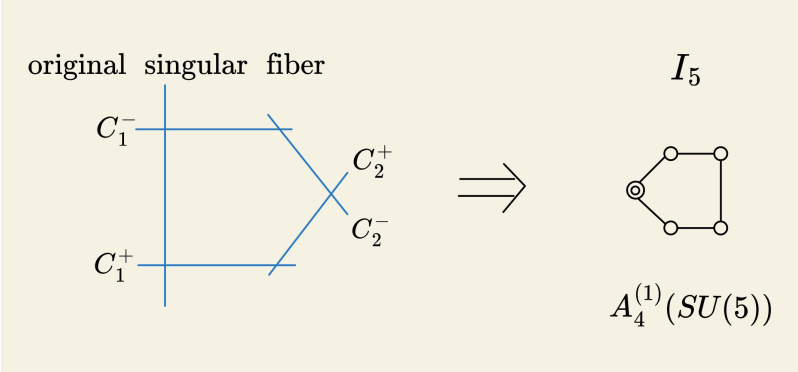



Figure 17:

性のみが破れていないモジュライ空間の一般的な点における、ヘテロティック／タイプ IIA 双対性の一般化です。

今の場合には、ファイバーが 2 次元トーラスである楕円ファイブレーションを考えました。実は、M 理論の 9 次元へのトーラスコンパクト化は、タイプ IIB 理論の $S^1$ コンパクト化と等価であることが知られています。したがって、楕円ファイバーが特定の特異点を持つ場合、同様に非可換ゲージ対称性が生じると考えられます。この場合、特異曲線（$\mathbb{P}^1$）に巻き付いた M2 ブレインがゲージ対称性の起原となります。

# 2　微分幾何学と代数幾何学の基礎：数学的予備知識

## 2.1　ファイバー束、ベクター束、直線束

ファイバー束 *(Fiber bundle)*

$M$ が局所的に開集合 $U_\lambda$（$B$ の開被覆を構成するもの）と何らかのファイバー空間（例えば、2 次元トーラスや $\mathbb{P}^1$ のような幾何学的対象、あるいはベクトル空間や群のような代数的対象）の直積で、$M$ 全体がそれらを貼り合わせることによって作られる場合、$M$ はベース $B$ 上のファイバー束であると言います（大まかな定義）（図**??**）。

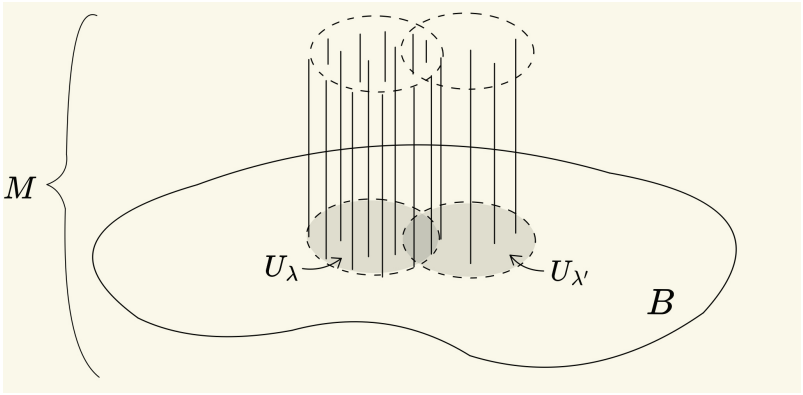



Figure 18: ファイバー束。

$$\begin{aligned}
&\text{Fiber} = \text{ベクトル空間} \quad \Rightarrow \quad \text{“ベクター束 (vector bundle)”}\\
&\text{Fiber} = \text{リー群 } G \quad \Rightarrow \quad \text{“主束 (principal bundle)” of a group } G\\
&\text{Fiber} = \text{複素直線 (a complex line)} \quad \Rightarrow \quad \text{“直線束 (line bundle)”}
\end{aligned} \tag{116}$$

☆ $M$ が、(実)2 次元トーラスをファイバーとするファイバー束の全空間として表現される場合、$M$ は “elliptically fibered” “$M$ allows an elliptic fibration” または “$M$ is an elliptically fibered manifold” と言います（厳密には「セクション」がある場合）。

ベクター束 *(vector bundle)*

$E$ をファイバー $\mathbb{R}^n$ を持つベクター束、$\pi$ を射影作用素 $\pi : E \to B$ とすると
$\Rightarrow E = \bigcup_\lambda \pi^{-1}(U_\lambda)$ （図 **??** 参照）。

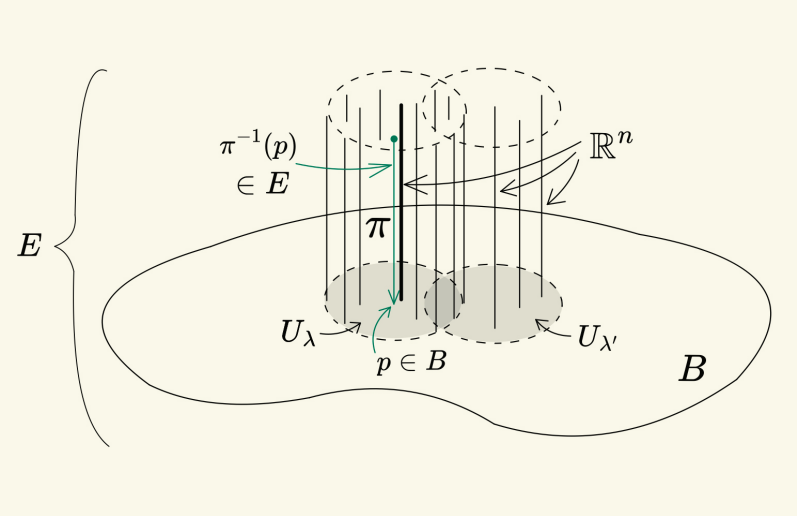



Figure 19: ベクター束。

ベクター束を特徴づけるもの：*transition function*

各チャート $U_\lambda$ 上で、同型写像 $\varphi_{U_\lambda} : \pi^{-1}(U_\lambda) \to U_\lambda \times \mathbb{R}^n$ が存在すると仮定します。これは“局所自明化 (local trivialization)” と呼ばれます。

☆ $\varphi_{U_\lambda}$ は、単にファイバー (= ベクトル空間) 内のベクトルに $n$ 個の実数の集合を対応させるものです。

☆ 複素ベクター束も同様の方法で定義されます。

例：ディラックスピナー波動関数 *(*複素ベクター束*)*

ディラックスピナー波動関数

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \eta^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{117}$$

は（線形代数の意味での）ベクトルであり、4 つの（複素）数から構成されます。$B$ は 4 次元ミンコフスキー空間です。

☆ この場合、単一のチャート（したがって単一の座標系）で十分です。以下では主にコンパクトな場合を考察します。

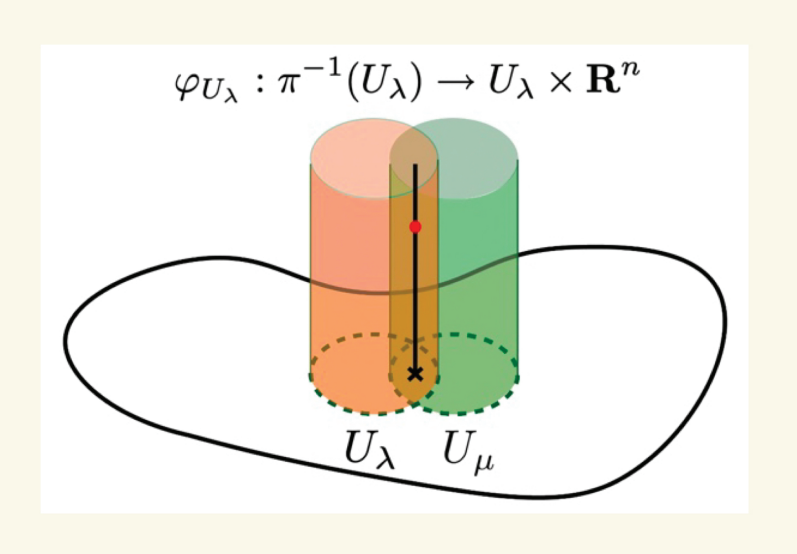



Figure 20: ベクター束の局所自明化 $\varphi_{U_\lambda}$。

あるファイバーが 2 つの異なるチャート、$U_\lambda$ と $U_\mu$ に属していると仮定します。このファイバー内のベクトル $v$ は、2 つの異なる「数値ベクトル」$\varphi_{U_\lambda}(v)$ （$\left(\begin{array}{c}\bullet\\ \bullet\\ \vdots\\ \bullet\end{array}\right\}n$ のような）と $\varphi_{U_\mu}(v)$ （$\left(\begin{array}{c}\blacktriangle\\ \blacktriangle\\ \vdots\\ \blacktriangle\end{array}\right\}n$ のような）を持ちます。

$$\varphi_{U_\lambda} = f_{\lambda\mu} \circ \varphi_{U_\mu} \tag{118}$$

をみたす変換写像 $f_{\lambda\mu}$（行列で表される）を “transition function” と言います。

例：接束のヤコビ行列 *(A Jacobian matrix of a tangent bundle)*

多様体 M の座標を $x^\mu$、$y^\mu$ とし、チャート $U_\lambda$、$U_\mu$ における座標とします。ある点における接ベクトル を $v$(∈ “$TM$”) とすると、それぞれの座標において、$v$ は次の 2 つの異なる方法で表されます。

$$v = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = Y^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu}. \tag{119}$$

$TM$ は $M$ の “接束 (tangent bundle)” を表します。すると

$$X^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} Y^\nu, \tag{120}$$

したがって、ヤコビ行列 $\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}$ が接束の transition function です。

直線束 *(Line bundle)*

ファイバーが一次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}$ であるベクター束。

（複素ですが）1 次元 $\Rightarrow$ “線”

☆ $\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}_{\geq 0} \times U(1)$ と極分解でき、$\mathbb{R}_{\geq 0}$ は何にも巻き付けないので位相的に自明です。

$$\Rightarrow \quad \boxed{\text{A line bundle = A } U(1) \text{ bundle}}$$

☆ 直線束の transition function はどこにも零点を持たない複素数値関数です。

☆ $U(1)$（位相因子）の部分が束の位相的性質を決定します。

*Dirac monopole bundle*

$S^2$ 上で $e^{in\varphi}$ を遷移関数とすると、モノポール数（「第 1 チャーン数」）が $n$ の直線束が得られます。

例：$n = 1$ の場合

$$A_\varphi^{(north)} = \frac{i}{2}(\cos\theta - 1),$$
$$A_\varphi^{(south)} = \frac{i}{2}(\cos\theta + 1).$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad A_\varphi^{(north)} &= A_\varphi^{(south)} - i \\ &= A_\varphi^{(south)} - i\partial_\varphi \Lambda(\theta,\varphi) \\ &= A_\varphi^{(south)} - e^{-i\Lambda(\theta,\varphi)} \partial_\varphi e^{i\Lambda(\theta,\varphi)}, \end{aligned} \tag{121}$$

としたとします。ただし $\Lambda(\theta,\varphi) = \varphi$ です。これらは $S^2$ 上のスピノル波動関数 $\psi(\theta,\varphi)$ に対して共変微分

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + A_\mu \psi \tag{122}$$

を定義します：

$$
\begin{aligned}
\psi^{(north)} &= e^{i\Lambda}\psi^{(south)} \\
\partial_\mu\psi^{(north)} &= e^{i\Lambda}(\partial_\mu\psi^{(south)} + i\partial_\mu\Lambda\cdot\psi^{(south)}) \\
A_\mu^{(north)}\psi^{(north)} &= e^{i\Lambda}A_\mu^{(north)}\psi^{(south)} \\
\Rightarrow \quad D_\mu^{(north)}\psi^{(north)} &= e^{i\Lambda}(\partial_\mu\psi^{(south)} + (A_\mu^{(north)} + i\partial_\mu\Lambda)\psi^{(south)}) \\
&= e^{i\Lambda}(\partial_\mu\psi^{(south)} + A_\mu^{(south)}\psi^{(south)}) \\
&= e^{i\Lambda}D_\mu^{(south)}\psi^{(south)}. \qquad (123)
\end{aligned}
$$

この場合、$A_\mu^{(north)}$ と $A_\mu^{(south)}$ の両方に対して $(A_\theta^{(north)} = A_\theta^{(south)}) = 0)$

$$
\begin{aligned}
F_{\theta\varphi} &= \partial_\theta A_\varphi - \partial_\varphi A_\theta \\
&= -\frac{i}{2}\sin\theta. \qquad (124) \\
F &= \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu \\
&= F_{\theta\varphi}d\theta \wedge d\varphi. \qquad (125) \\
\int_{S^2} F &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \left(-\frac{i}{2}\sin\theta\right) \\
&= 2\pi\cdot\frac{i}{2}\left[\cos\theta\right]_0^{\pi} \\
&= -2\pi i \\
\Rightarrow \quad \frac{i}{2\pi}\int_{S^2} F &= 1. \qquad (126) \\
\Rightarrow \quad &\text{monopole number} = 1.
\end{aligned}
$$

例：$\mathbb{P}^1$ の標準直線束 *(canonical line bundle)*

$n$ 次元複素多様体の標準束 (canonical bundle) = 正則 $n$ 形式 $dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n$の直線束

$\mathbb{P}^1$ は

$$
\mathbb{P}^1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} - \{(0,0)\}\}/\sim \qquad (127)
$$

として $\lambda \in \mathbb{C}$ とする関係式 $(z_1, z_2) \sim (\lambda z_1, \lambda z_2)$ で定義されます。これは 2 つのチャート

$$
\begin{aligned}
U_1 &= \{(z_1 : z_2) = (1 : \frac{z_2}{z_1}) \equiv (1 : z) \in \mathbb{P}^1, z_1 \neq 0\} \quad \text{south patch} \\
U_2 &= \{(z_1 : z_2) = (\frac{z_1}{z_2} : 1) \equiv (w : 1) \in \mathbb{P}^1, z_2 \neq 0\} \quad \text{north patch}, \qquad (128)
\end{aligned}
$$

で覆われます。ここで $w = \frac{1}{z}$ です (Figure **??**)。

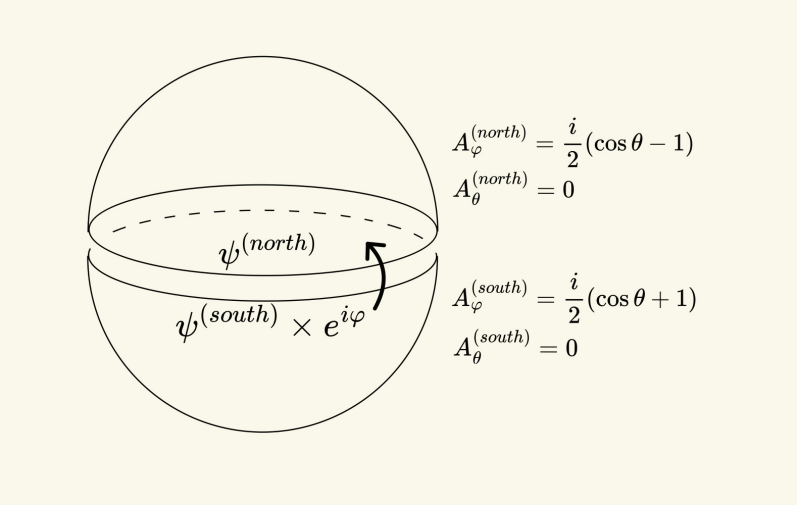



Figure 21: The Dirac monopole bundle.

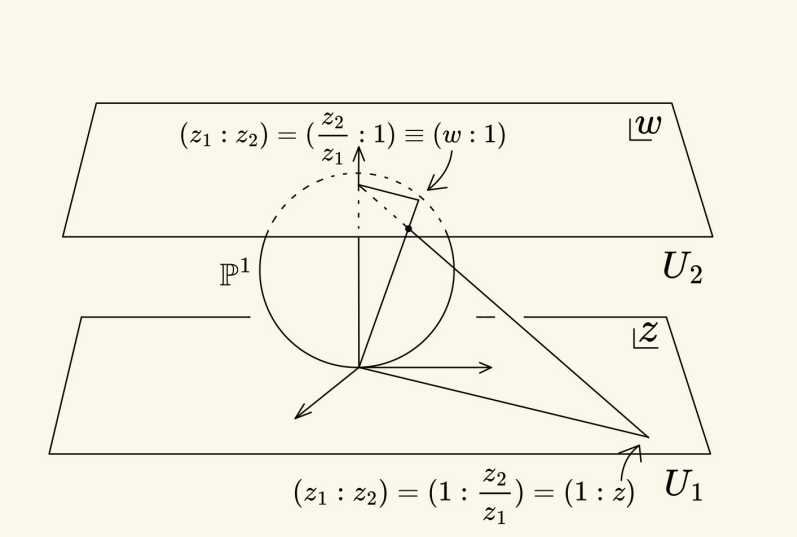



Figure 22: 2つの $\mathbb{P}^1$ のアファインチャート。

すると、$U_1$ の $dz$ は、$U_2$ の $w$ を用いて次のように表されます。

$$dz \;=\; d\frac{1}{w} \;=\; -\frac{1}{w^2}dw, \tag{129}$$

これは $w=0$ に 2 次の極を持ちます。

☆ したがって、$U_1$ から $U_2$ へ移動すると、この直線束のセクション $dz$ は $(-)w^{-2}$ 倍されます。$\mathbb{P}^1$ 上のこのような直線束を "$O(-2)$ bundle" と呼びます。

*$O(n)$ bundle*

より一般的に、$\mathbb{P}^1$ 上の $z_1$ と $z_2$ の $n$ 次多項式を考えましょう：

$$f(z_1,z_2)=a_0z_1^n+a_1z_1^{n-1}z_2+\cdots+a_nz_2^n. \tag{130}$$

各チャート上のアファイン座標に関して、$U_1$ では

$$\begin{aligned} f(1,z)&=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n, \\ f(z_1,z_2)&=z_1^nf(1,z), \end{aligned} \tag{131}$$

また $U_2$ では

$$\begin{aligned} f(w,1)&=a_0w^n+a_1w^{n-1}+\cdots+a_n, \\ f(z_1,z_2)&=z_2^nf(w,1), \end{aligned} \tag{132}$$

と表されます。したがって

$$f(w,1)=w^nf(1,z). \tag{133}$$

$\mathbb{P}^1$ 上のこのような transition function $w^n$ をもつ直線束を "$O(n)$ bundle" と呼びます。

☆ 一見すると、前の例は逆べき乗になっているように見えますがそうではありません。比較すべきなのは、$dz$ と $dw$ の係数だからです：

$$-\frac{1}{w^2}(\text{the coefficient of } dw)=-w^{-2}\times 1(\text{the coefficient of } dz). \tag{134}$$

したがって、$\mathbb{P}^1$ の標準束は $O(-2)$ bundle です。

*Divisors and line bundles*

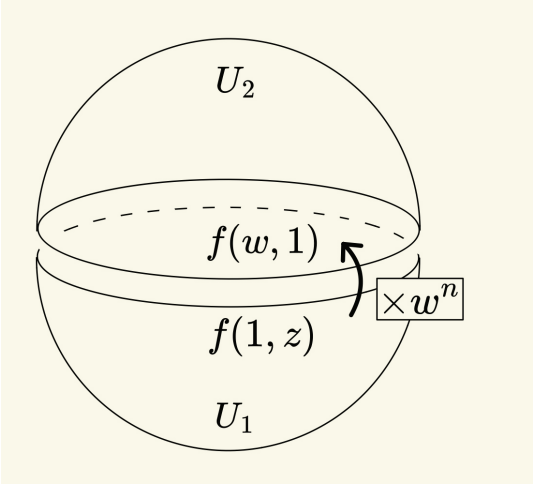



Figure 23: An $O(n)$ bundle over $\mathbb{P}^1$.

"Divisor" は、大まかに言えば、重複度を持つ可能性のある、余次元 1 の複素部分多様体のことです。

滑らかな複素多様体上では、因子 $D$ は局所的に単一の方程式 $f_i = 0$ で記述できます。重なり合うパッチ上の比 $f_i/f_j$ は、至るところで零にならない正則関数であり、直線束 $\mathcal{O}(D)$ の transition function を定義します。

例

$$\begin{aligned} D_0 &: \{z \in \mathbb{P}^1 | z = 0\}, \\ D_\infty &: \{z \in \mathbb{P}^1 | z = \infty\}. \end{aligned} \tag{135}$$

Divisor は足し合わせることも、整数を掛けることもできます。

*Example*

$$D_0 + D_\infty, \quad 2D_0, \ldots \tag{136}$$

☆ Divisor は直線束を定義する！

やり方

(1) もしパッチ $U_\lambda$ が divisor $D$ を含む場合は、$D$ に沿って 1 次零点を持つ関数 $f_\lambda$ を $U_\lambda$ に割り当てる。

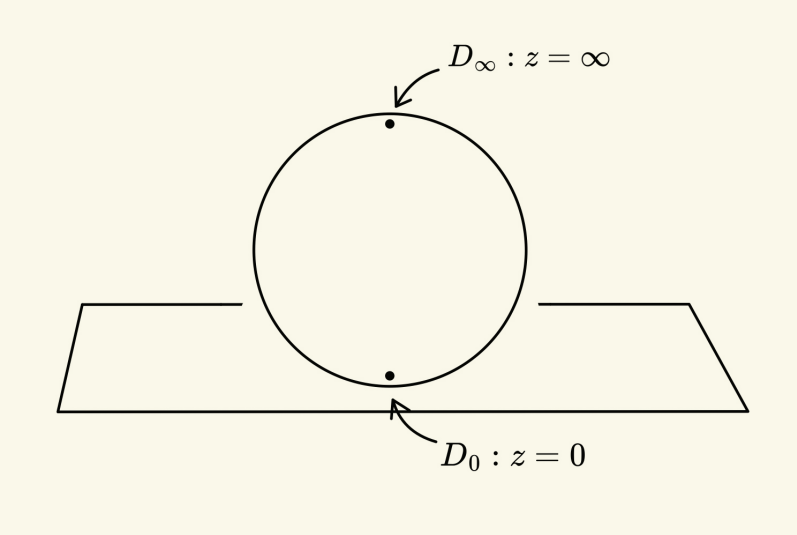



Figure 24: A example of divisors on $\mathbb{P}^1$.

(2) もしパッチ $U_\lambda$ が divisor $D$ を含まない場合は、$U_\lambda$ に $f_\lambda = 1$ を割り当てる。

(3) $U_\lambda \bigcap U_\mu$ の transition function $f_{\lambda\mu}$ を $f_{\lambda\mu} = f_\lambda / f_\mu$ と定義する。

☆ $f_\lambda / f_\mu$ は決してゼロにならないので、これらは直線束を定義します。

例：$O(n)$ *bundle over* $\mathbb{P}^1$ *(again)*

Divisor $D_0 : \{z \in \mathbb{P}^1 | z = 0\}$ を考えましょう。すると

(1) $U_1$ には $D_0$ が含まれているので、$f_1 = z$ とします。

(2) $U_2$ は $D_0$ を含まないので、$f_2 = 1$ とします。

(3) すると transition function は $f_{12} = f_1 / f_2 = z$ です。

したがって、$D_0$ は $O(1)$ バンドルを定義します（図**??**、左パネル）。
次に、$D_0 + D_\infty$ を考えてみましょう。この場合

(1) $U_1$ には $D_0$ が含まれる。$\Rightarrow f_1 = z$。

(2) $U_2$ には $D_\infty$ が含まれる。$\Rightarrow f_2 = w$。

(3) $\Rightarrow$ Transition function は $f_{12} = f_1 / f_2 = z/w = z^2 = 1/w^2$ となる。

$\Rightarrow f_2(w) = w^2 \times f_1(z)$, したがって、$O(2)$ バンドルとなります。（図**??**、右パネル）。

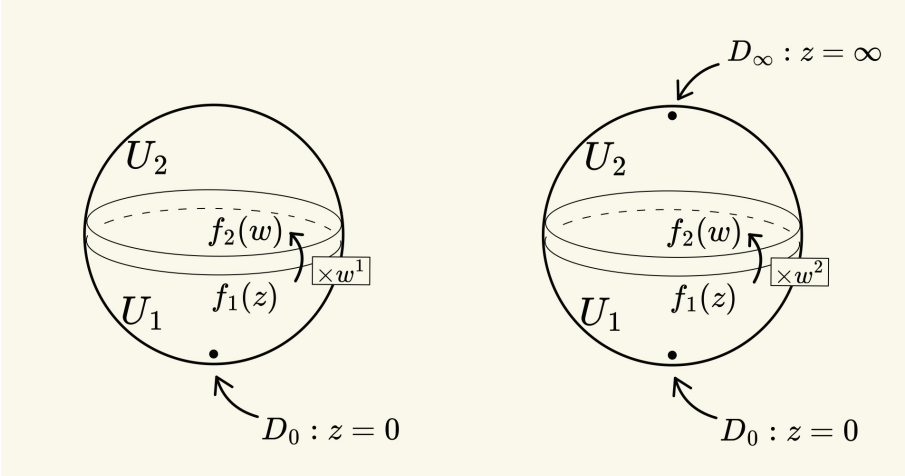



Figure 25: An $O(1)$ bundle (left) and an $O(2)$ bundle (right).

## 2.2 ケーラー多様体 (Kähler manifold) とチャーンクラス (Chern class)

*Chern class*

最も基本的な（重要な）“特性類 (Characteristic class)”。いくつかの定義がありますが、ド・ラームコホモロジーの言葉では、以下のように定義されます。

$$\begin{aligned} &E : U(N) \text{ vector bundle} \\ &F : \text{The curvature 2-form} \\ &\quad = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \end{aligned} \tag{137}$$

とします。ただし

$$\begin{aligned} A &\equiv A_\mu dx^\mu \ \equiv \ A^a_\mu T^a dx^\mu \\ T^a &: \text{Generators of } U(N) \\ F &= dA + A \wedge A \\ x^\mu &: \text{Coordinates of the base space of } E. \end{aligned} \tag{138}$$

です。したがって、$F$ は要素が 2-form である $N \times N$ 行列です。

$F$ がある行列 $P$ で対角化されていると仮定します（これはジェネリックには可能）：

$$P^{-1} F P = \begin{pmatrix} F_1 & & \\ & \ddots & \\ & & F_N \end{pmatrix} \tag{139}$$

$F_1, \ldots, F_N$ は 2-form です。このとき、"total Chern form" $c(E)$ は次のように与えられます：

$$c(E) = \det\left(1 + \frac{i}{2\pi}F\right) = \det\begin{pmatrix} 1+\frac{i}{2\pi}F_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1+\frac{i}{2\pi}F_N \end{pmatrix}. \tag{140}$$

さらに "Chern root" と呼ばれる

$$x_i \equiv \frac{i}{2\pi}F_i, \tag{141}$$

を定義すると、

$$c(E) = \prod_{i=1}^{N}(1 + x_i). \tag{142}$$

これを展開すれば

$$\begin{aligned} c(E) &= 1 + (x_1 + \cdots + x_N) + (x_1x_2 + \cdots + x_{x-1}x_N) + \cdots + x_n \ldots x_N \\ &= 1 + \quad c_1 \quad + \quad c_2 \quad + \cdots + \quad c_N, \\ c_1 &= \frac{i}{2\pi}\mathrm{Tr}F \\ c_2 &= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{2}\left((\mathrm{Tr}F)^2 - \mathrm{Tr}F^2\right) \equiv \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{2}\left(\mathrm{Tr}F \wedge \mathrm{Tr}F - \mathrm{Tr}F \wedge F\right) \\ &\vdots \quad . \end{aligned} \tag{143}$$

となります。

例：*The 1st Chern class of the monopole bundle*

モノポール数 1 のディラックモノポール束を考えると (Figure **??**)：

$$\begin{aligned} F_{\theta\varphi} &= \partial_\theta A_\varphi - \partial_\varphi A_\theta \\ &= -\frac{i}{2}\sin\theta \end{aligned} \tag{144}$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= F_{\theta\varphi}d\theta \wedge d\varphi \end{aligned} \tag{145}$$

$$\int_{S^2} F = -2\pi i \quad \Rightarrow \quad \frac{i}{2\pi}\int_{S^2} F = 1. \tag{146}$$

| 1st Chern number = monopole number |
|---|

ケーラー多様体 *(Kähler manifold)*

- “ケーラー多様体 (Kähler manifold)” は、 共変的に定数 (covariantly constant)な複素構造 $J$ を持つ複素多様体、すなわち、$\nabla J = 0$ である多様体のことです。

- 複素多様体とは、複素座標 $z^\alpha$ $(\alpha = 1, ..., n)$ をもつ多様体であり、複素構造 $J$ に対して

$$J(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}) = i\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \quad J(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\bar{\alpha}}}) = -i\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\bar{\alpha}}}. \tag{147}$$

  をみたします。

- 一方、(同じ記号を使いますが) 一般の実 $2n$ 次元多様体 $M$ において、テンソル $J : TM \to TM$ が存在して $J^2 = -1$ であるならば、$M$ の各点において $J$ を対角化することで、

$$\begin{aligned} J(v^j) &= iv^j, \\ J(v^{j+n}) &= -iv^{j+n} \end{aligned} \tag{148}$$

  $(j = 1, \ldots, n)$, とできます。ここで、$v^j$、$v^{j+n}$ は $\frac{\partial}{\partial x^i}$ $(i = 1, \ldots, 2n)$ の線形結合です。そのとき $J$ は “概複素構造 (almost complex structure)” と呼ばれます。

- しかし、$v^j$ が ある複素座標 $z^\alpha$ について $\frac{\partial}{\partial z^\alpha}$ と表せたり、あるいは $v^{j+n}$ が $\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\bar{\alpha}}}$ と表せたりする保証はありません。そうなるための必要十分条件は、‘Nienhuis tensor” $N^k_{ij}$ がゼロになることです：

$$\begin{aligned} N^k_{ij} &\equiv J^l{}_i(\partial_l J^k_j - \partial_j J^k_l) - J^l{}_j(\partial_l J^k_i - \partial_i J^k_l) \\ &= J^l{}_i(\nabla_l J^k_j - \nabla_j J^k_l) - J^l{}_j(\nabla_l J^k_i - \nabla_i J^k_l). \end{aligned} \tag{149}$$

  したがって Kähler であれば、それは複素多様体です。

- 複素構造 $J$ は、複素多様体上で接ベクトルに虚数単位 ”$i$” を乗じたときに、その接ベクトルがどの方向を向くかを決定します。これが「複素構造」と呼ばれる所以です（図 **??**）。

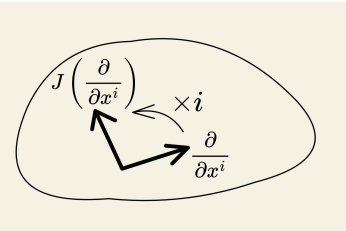



Figure 26: 複素構造 $J$ は、複素多様体上で、接ベクトルに虚数単位 ”$i$” を乗じたときに、その接ベクトルがどの方向を向くかを決定する。

ケーラー多様体におけるリッチテンサーと第 *1* チャーン類

$$M:\text{Kähler} \quad \Rightarrow \quad \text{Ricci tensor: } R_{i\bar{j}} \text{ のみノンゼロ} \tag{150}$$

です。そこで 次のように “Ricci form” を定義すると

$$R_{i\bar{j}}dz^i \wedge d\bar{z}^{\bar{j}} \quad \propto \quad c_1(M) \quad \text{!!!} \tag{151}$$

となっています。

それは次のような理由からです。ケーラー計量のノンゼロ成分は $g_{i\bar{j}}$ のみであり、ある $K$ に対して $\partial_i\partial_{\bar{j}}K$ と表すことができます。したがって、アフィン接続のノンゼロ成分は

$$\Gamma_{i\bar{j}\bar{k}} = \frac{1}{2}(\partial_{\bar{j}}g_{i\bar{k}} + \partial_{\bar{k}}g_{i\bar{j}} - \underbrace{\partial_i g_{\bar{j}\bar{k}}}_{=0}) \;=\; \partial_i\partial_{\bar{j}}\partial_{\bar{k}}K \tag{152}$$

とその複素共役 $\Gamma_{\bar{i}jk} \;=\; \partial_{\bar{i}}\partial_j\partial_k K.$ だけです。したがって

$$R_{ij**} = 0, \quad R_{\bar{i}\bar{j}**} = 0, \tag{153}$$

であり、リーマンテンサーのノンゼロ成分は $R_{i\bar{j}k\bar{l}}$ のみです。さらに、

$$\begin{aligned} R_{i\bar{j}k\bar{l}} &= g_{i\bar{i}}\partial_k\Gamma^{\bar{i}}{}_{\bar{j}\bar{l}} \\ &= \partial_k\Gamma_{i\bar{j}\bar{l}} - \partial_k g_{i\bar{i}}\cdot\Gamma^{\bar{i}}{}_{\bar{j}\bar{l}} \\ &= \partial_k\partial_i\partial_{\bar{j}}\partial_{\bar{l}}K - \partial_k\partial_i\partial_{\bar{i}}K\cdot g^{\bar{i}i}\partial_j\partial_{\bar{j}}\partial_{\bar{l}}K, \end{aligned} \tag{154}$$

となっているので、これは、$i \leftrightarrow k$ および $\bar{j} \leftrightarrow \bar{l}$ の変換に対して対称です。したがって、Kähler の場合、リッチテンソル $R_{\bar{j}k}$ は次のように書くことができます：

$$\begin{aligned} R_{\bar{j}k} &\equiv R^{\mu}{}_{\bar{j}k\mu} \\ &= R^{\bar{l}}{}_{\bar{j}k\bar{l}} \\ &= g^{i\bar{l}}R_{i\bar{j}k\bar{l}} \\ &= g^{i\bar{l}}R_{k\bar{j}i\bar{l}}. \end{aligned} \tag{155}$$

最後の式はトレースを取っているので、これは第 1 チャーンクラスの定義そのものです。

☆ したがって

$$\text{Ricci flat, Kähler} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Kähler with vanishing 1st Chern class} \tag{156}$$

このような多様体は “カラビ・ヤウ多様体 (Calabi-Yau manifold)” と呼ばれます。

- $c_1$ は $R$ のトレースであるため、$U(N)$ ホロノミーの $U(1)$ 部分を測定します。したがって、$c_1 = 0$ は、ホロノミーが $U(N)$ ではなく、$SU(N)$ であることを意味します。
- （複素）3 次元（実 6 次元）において、ホロノミーは一般的に $SO(6) \simeq SU(4)$ です。Kähler の場合、$U(3) = U(1) \times SU(3) \subset SU(4)$ となります。
- したがって、$c_1 = 0$ となる Kähler は、ホロノミーが $SU(3)$ であることを意味します。すると共変的に定数なスピノルが存在し、超対称性の 1/4 は破れずに残ることになります。

☆ 先に述べたように、前の例における IIB 理論のコンパクト空間はカラビ・ヤウ空間ではありませんが、楕円ファイブレーションの全空間はカラビ・ヤウ空間です。これは、IB/M 理論の双対性の結果です。

### 2.3 トーリック多様体 (Toric varieties)

"トーリック多様体 (toric variety)" $M$ は次のように定義されます：

$$M = \left\{ x \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} Q_i^{(a)} |x_i|^2 = \xi^{(a)} \right\} \Big/ \left( \prod_{a=1}^{s} U(1)^{(a)} \right), \tag{157}$$

ここで、$\xi^{(a)}$ $(a = 1, \ldots, s)$ はあるの正の実数パラメータ（"FI パラメータ"）です。$Q_i^{(a)}$ $(i = 1, \ldots, n;\ a = 1, \ldots, s)$ は $x_i$ の $U(1)^{(a)}$ 電荷であり、"toric charge" と呼ばれるものです。$U(1)^{(a)}$ は $x_i$ に

$$x_i \quad \mapsto \quad e^{iQ_i^{(a)} \varphi_{(a)}} x_i, \tag{158}$$

のように作用します。ここで $\varphi_{(a)} \in \mathbb{R}$ は角度変数パラメータです。$\{\cdots\} \big/ \left( \prod_{a=1}^{s} U(1)^{(a)} \right)$ は、$M$ が同値類

$$\begin{aligned} (x_1, \ldots, x_n) \quad &\sim \quad (e^{iQ_1^{(a)} \varphi_{(a)}} x_1, \ldots, e^{iQ_n^{(a)} \varphi_{(a)}} x_n) \\ &= \quad (\lambda_{(a)}^{iQ_1^{(a)}} x_1, \ldots, \lambda_{(a)}^{iQ_n^{(a)}} x_n), \end{aligned} \tag{159}$$

からなる集合であることを意味しています。ただし $\lambda_{(a)} \equiv e^{i\varphi_{(a)}}$, $a = 1, \ldots, s$ です。

例

$n = 3 \Rightarrow (x_1, x_2, x_3)$、$s = 2 \Rightarrow (Q^{(1)}, Q^{(2)})$ とし、$\lambda_{(a=1)} \equiv \lambda$、$\lambda_{(a=2)} \equiv \mu$ とします。このとき、$(x_1, x_2, x_3)$ と $(\lambda^{Q_1^{(1)}} \mu^{Q_1^{(2)}} x_1, \lambda^{Q_2^{(1)}} \mu^{Q_2^{(2)}} x_2, \lambda^{Q_3^{(1)}} \mu^{Q_3^{(2)}} x_3)$ は $M$ における同一の要素とみなされま

す。
一方、条件

$$\begin{aligned} Q_1^{(1)}|x_1|^2 + Q_2^{(1)}|x_2|^2 + Q_3^{(1)}|x_3|^2 &= \xi^{(1)} > 0, \\ Q_1^{(2)}|x_1|^2 + Q_2^{(2)}|x_2|^2 + Q_3^{(2)}|x_3|^2 &= \xi^{(2)} > 0 \end{aligned} \tag{160}$$

は $\mathbb{C}^{n=3}$ から特定の離散集合を除外する役割を果たします。

トーリックチャージ *(Toric charges),* トーリックファン *(toric fan)* と *divisors*

例*:* $\mathbb{P}^1$ *fibration over* $\mathbb{P}^2$

次のような "トーリックチャージ (toric charge)" を考えてみます：

$$\begin{array}{c|ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ Q^{(1)} & 1 & 1 & 1 & -n & 0 \\ Q^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} . \tag{161}$$

$(x_1, x_2, x_3)$ に対する $Q^{(1)}$ チャージ $(1,1,1)$ は、この多様体の基底が $\mathbb{P}^2$ であることを示し、$(x_4, x_5)$ に対する $Q^{(2)}$ チャージ $(1,1)$ は、ファイバーが $\mathbb{P}^1$ であることを示しています。その全体空間は

$$M = \left\{ x \in \mathbb{C}^5 \;\middle|\; \begin{array}{c} |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 - n|x_4|^2 = \xi^{(1)}, \\ |x_4|^2 + |x_5|^2 = \xi^{(2)} \end{array} \right\} \Big/ \left( \prod_{a=1}^{2} U(1)^{(a)} \right), \tag{162}$$

です。正の実数パラメータ $\xi^{(1)}$、$\xi^{(2)}$ は、"FI パラメータ (FI parameters)". と呼ばれます。

☆ この名前は、これらの条件がある種の超対称性理論において $D$ ターム条件として現れる、という事実に由来しています。

このトーリック多様体のトーリックファンは

$$\begin{array}{c|ccccc} Q^{(1)} & 1 & 1 & 1 & -n & 0 \\ Q^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \tag{163}$$

を 2 つの 5 成分ベクトルと見立てて、残りの 3 つの直交するベクトル

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} . \tag{164}$$

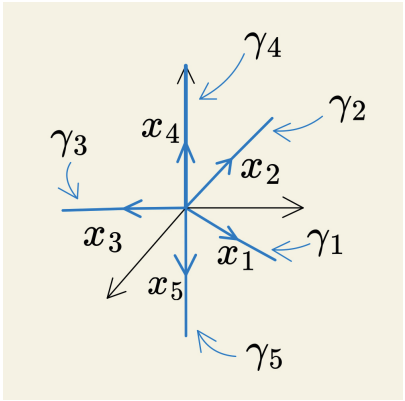



Figure 27: トーリックファンの例（n=0 の場合）。

を 5 つの 3 次元ベクトル

$$\begin{pmatrix}1\\1\\n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} \tag{165}$$

とみなすことによって得られます。さらにこれらの方向に走る半直線を考えると、 “扇 (fan)” は、隣接する半直線によって張られる凸状の “コーン (cones)” and consider half-lines running in these directions.

$$\{0,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,\gamma_5,\gamma_{12},\gamma_{13},\gamma_{14},\gamma_{15},\gamma_{23},\gamma_{24},\gamma_{25},\gamma_{34},\gamma_{35},\gamma_{124},\gamma_{125},\gamma_{134},\gamma_{135},\gamma_{234},\gamma_{235}\} \tag{166}$$

から構成されます (Figure **??**)。

スタンレー・ライスナーイデアル *(Stanley-Reisner ideal)*

1 次元コーンの部分集合が、扇を構成する円錐のいずれとも一致しない場合、対応するすべての座標を 0 に設定して得られる集合は除外されます。前の例では、扇は (**??**) で与えられます。したがって、

$$\begin{aligned}\text{No } \gamma_{45} &\Rightarrow x_4 = x_5 = 0\\ \text{No } \gamma_{123} &\Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0\end{aligned} \tag{167}$$

はこのトーリック多様体から除外されます。

☆ これらの集合は次の条件によってちょうど除外できます：

$$\begin{cases} |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 - n|x_4|^2 = \xi^{(1)}, \\ |x_4|^2 + |x_5|^2 = \xi^{(2)} \end{cases} \tag{168}$$

$(\xi^{(1)}, \xi^{(2)} > 0)$.

*Divisor* 間の同値関係

既に述べたように、ある座標を 0 において定義される部分多様体は "divisor" と呼ばれます。そして、そのファンは divisor 間の線形関係式を決定します。

例

例（**??**）において、$D_i$ を、座標 $x_i$ を 0（$i = 1, \ldots, 5$）においてことによって得られる divisor（= 部分多様体）とします。そのときそのファン（**??**）から、線形関係は次のように読み取れます：

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \Rightarrow & D_1 - D_2 = 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \Rightarrow & D_1 - D_3 = 0 \\ n & 0 & 0 & 1 & -1 & \Rightarrow & nD_1 + D_4 - D_5 = 0. \end{array} \tag{169}$$

トーリック多様体のチャーンクラス

- Divisor は複素余次元 1 の部分多様体を表すので、もし "ambient space"（つまり、その部分多様体を内部に含む空間）が $d$ 次元であれば、それは複素 $(d-1)$ 次元の対象を表します。したがって、$2(d-1)$-form をその上で積分することで、ある数値が得られます。
- 一方、2-form と 2(d-1)-form はそれらの外積をとり、全空間で積分することによってある数を与えることができます。
- したがって、divisor と 2-form は 1 対 1 に対応します。このような関係は "ポアンカレ双対 (Poincaré dual)" と呼ばれます。
- 実は、$z_i = 0$ は $\bar{z}_i = 0$ を意味するのでこれは $(1,1)$-form です。ここで重要な点は、トーリック幾何学において、すべての因子の和 $\sum_i D_i$ は第 1 チャーン類 $c_1(M)$ に対応し、これは $\mathcal{K}^{-1}$ で表される "反標準類 (anti-canonical class)" と一致するということです。したがって、因子 $\sum_i D_i$ は $-K$ で表される "反標準因子 (anti-canonical divisor)" です。

- すでに述べたように、divisor は直線束を定義します。$-K$ で定義される直線束は、transition function が標準束の transition function の逆関数となるものです。
- 実は、もっと一般に次が成り立ちます：

$$\boxed{c(M) = \prod_{i=1}^{\text{all}} (1 + D_i)}. \tag{170}$$

例：$\mathbb{P}^2$

$\mathbb{P}^2$ はトーリック多様体としてトーリックチャージは

$$\begin{array}{ccccc} & x & y & z \\ Q^{(1)} & 1 & 1 & 1 \end{array}, \tag{171}$$

で与えられます。$x, y, z$ は座標です。同値関係式は $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ のとき

$$(x, y, z) \sim (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \tag{172}$$

で、$x, y, z$ は

$$|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 = \xi (> 0), \tag{173}$$

が要請されます。これで $\mathbb{C}^3$ から $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ が除かれます。

☆ したがって、これは $\mathbb{P}^2$ を $\mathbb{C}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ の中で同値類

$$(x, y, z) \sim (\lambda x, \lambda y, \lambda z), \quad \lambda \in \mathbb{C}^* (\equiv \mathbb{C} - \{0\}) \tag{174}$$

の集合として定義することと同等です。

そのトーリックファンは

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ D_x & D_y & D_z \end{array}, \tag{175}$$

からきまります。線形関係式は

$$D_x = D_y = D_z, \tag{176}$$

よって

$$
\begin{aligned}
-K &= D_x + D_y + D_z \ = 3D_z, \\
\Rightarrow K &= -3D_z.
\end{aligned} \tag{177}
$$

となります。これはカノニカルバンドルのセクションは3つの極をもつことを示しています。実際

$$
(x:y:z) \ = \ (x':y':1) \ = \ (1:y'':z'') \ = \ (x''':1:z''') \tag{178}
$$

をそれぞれ $\mathbb{P}^2$ の $z \neq 0$、$x \neq 0$、$y \neq 0$ の 3 つのチャート上のアファイン座標として、最初のチャートにおける正則 2-form $dx' \wedge dy'$ を考えてみましょう。すると

$$
\begin{aligned}
(x':y':1) \ &= \ (1:\frac{y'}{x'},\frac{1}{x'}) \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{1}{z''}, \quad y' = \frac{y''}{z''}, \\
\Rightarrow dx' \wedge dy' \ &= \ d\left(\frac{1}{z''}\right) \wedge d\left(\frac{y''}{z''}\right) \ = \ \frac{1}{z''^3} dy'' \wedge dz''.
\end{aligned} \tag{179}
$$

なので、2番目のチャートでは $z'' = 0$ に 3 次の極が存在します。この極は3番目のチャートでも見えます。これは、カノニカル divisor（標準因子）$K$ が $-3D_z$ であるという事実と一致します。

別の例：$W\mathbb{P}^2_{2,3,1}$

この場合には、トーリックチャージは

$$
\begin{array}{cccc}
 & x & y & z \\
Q^{(1)} & 2 & 3 & 1
\end{array}. \tag{180}
$$

です。$\mathbb{P}^2$ と同様に、$W\mathbb{P}^2_{2,3,1}$ は同値類

$$
(x,y,z) \ \sim \ (\lambda^2 x, \lambda^3 y, \lambda z) \tag{181}
$$

として定義されます。ここで $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ です。拘束条件は

$$
2|x|^2 + 3|y|^2 + |z|^2 = \xi (> 0), \tag{182}
$$

で、この場合にも $(x,y,z) = (0,0,0)$ が $\mathbb{C}^3$ から除去されます。which again removes $(x,y,z) = (0,0,0)$ from $\mathbb{C}^3$. そしてまたこの定義は、$\lambda \in \mathbb{C}^*$ in $\mathbb{C}^3 - \{(0,0,0)\}$ の同値類

$$
(x,y,z) \ \sim \ (\lambda^2 x, \lambda^3 y, \lambda z) \tag{183}
$$

の集合として定義することと同じです。

線形関係は以下から読み取れなす：

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ D_x & D_y & D_z \end{matrix}, \tag{184}$$

$$\Rightarrow \quad D_x = 2D_z, \quad D_y = 3D_z. \tag{185}$$

したがって、したがって、反標準因子は今度の場合

$$-K = D_x + D_y + D_z \ = 6D_z, \tag{186}$$

で、したがって

$$\Rightarrow K = -6D_z. \tag{187}$$

です。この場合も同様に、$z \neq 0$ の領域における正則 2-form $dx' \wedge dy'$ は、$x \neq 0$ または $y \neq 0$ の領域において $z'' = 0$ に *6* 次 の極を持つことが確認できます。

随伴公式 *(Adjunction formula)*

$D$ を多様体 $X$ 上の divisor とします。$D$ は $X$ 内の部分多様体を定義します。すると、

$$\begin{matrix} K_D & = & (K_X + D)|_D \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{部分多様体 } D \text{ の} & & X \text{ の} & & D \text{ 上} \\ \text{カノニカル} & & \text{カノニカル} & & \\ \text{divisor} & & \text{divisor} & & \end{matrix} \tag{188}$$

☆ より一般には

$$\begin{aligned} c(D) &= \left. \frac{\prod_i^{\text{all}}(1+D_i)}{1+D} \right|_D \\ &= 1 + \underbrace{(\sum_i D_i - D))}_{c_1(D)} + \cdots \end{aligned} \tag{189}$$

$$\Rightarrow \quad c_1(D) = c_1(X) - D. \tag{190}$$

が成り立ちます。

☆ したがって、第 1 チャーン類 $c_1(X)$ $(= -K_X$、$K_X$ は標準類（divisor）) を持つトーリック多様体 $X$ において、divisor $D = -K_X$ によって定義される超曲面はカラビ・ヤウになります。

例：$\mathbb{P}^2$ の *3* 次式

$$\begin{array}{cccc} & x & y & z \\ Q^{(1)} & 1 & 1 & 1 \\ \\ \text{fan} & 1 & -1 & 0 \\ & 1 & 0 & -1 \\ & D_x = D_y = D_z & & \end{array} \tag{191}$$

$$\Rightarrow \quad -K_{\mathbb{P}^2} = D_x + D_y + D_z \;=\; 3D_z. \tag{192}$$

したがって、$Q^{(1)} = 3$ の式は、（複素）1 次元カラビ・ヤウ、すなわちトーラスです！例えば

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dx^2y + \cdots = 0 \tag{193}$$

のような式です。

☆ 随伴公式は、曲面（＝ヒルツェブルフ曲面のような複素 2 次元多様体）上の曲線の種数を計算する際にも有用です。上で述べたように、$-K - D$ は $D$ の第 1 チャーン類です。$D$ が（複素）1 次元の場合

$$\begin{aligned} \int_D (-K - D) &= \text{top Chern number} \\ &= \text{Euler number} \\ \Rightarrow \quad (-K - D)\cdot D &= 2 - 2g \\ \Rightarrow \quad (K + D)\cdot D &= 2g - 2. \end{aligned} \tag{194}$$

例：$\mathbb{P}^1$ 上の楕円ファイブレーション：楕円 *K3* 曲面

トーリックチャージ

$$\begin{array}{ccccccc} & u & v & x & y & w \\ Q^{(1)} & 1 & 1 & a & b & c \\ Q^{(2)} & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{array} \tag{195}$$

と方程式

$$Z: \quad -y^2 + x^3 + f(u,v)xw^4 + g(u,v)w^6 = 0. \tag{196}$$

によって定義されるトーリック多様体 $X$ を考えましょう。もし $c \neq 0$ の場合

$$Q^{(1)} - cQ^{(2)} \equiv Q^{(1)\prime}, \tag{197}$$

なので最初から $c = 0$ と設定できます。すると

$$\begin{array}{ccccccc} & u & v & x & y & w & \\ Q^{(1)} & 1 & 1 & a & b & 0 & \Rightarrow \quad -K_X = \begin{pmatrix} 2+a+b \\ 6 \end{pmatrix}. \\ Q^{(2)} & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & \end{array} \tag{198}$$

したがって、もし $Z$ も同じチャージ $[Z] = \begin{pmatrix} 2+a+b \\ 6 \end{pmatrix}$ （divisor のチャージを括弧で表している）をもつなら

$$-K_Z = -K_X - [Z] \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{199}$$

となって $Z$ は複素 2 次元のカラビ・ヤウ、すなわち K3 曲面です。

$$[y^2] = \begin{pmatrix} 2b \\ 6 \end{pmatrix}, \quad [x^3] = \begin{pmatrix} 3a \\ 6 \end{pmatrix}, \tag{200}$$

であり、$Z$ (**??**) のすべての項は同じチャージをもたなければならないので

$$\begin{aligned} & 2b \;=\; 3a \;=\; 2+a+b \\ & \Rightarrow \quad a = 4, \quad b = 6 \\ \Rightarrow \quad & [f(u,v)] \;=\; [x^2] \;=\; \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \\ & [g(u,v)] \;=\; [x^3] \;=\; \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad (201) \\ \Rightarrow \quad & [\Delta] \;=\; [4f^3 + 27g^2] \;=\; \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \end{pmatrix}. \qquad (202) \end{aligned}$$

となります。したがって、$\Delta$ は $\mathbb{P}^1$ 上の 24 個の点でゼロになります。

# 3　6 次元 F-theory (Morrison-Vafa)

## 3.1　ヒルツェブルフ曲面 (Hirzebruch surface) 上の楕円ファイブレーション

*Hirzebruch surface* $\mathbb{F}_n$

"ヒルツェブルフ曲面 (Hirzebruch surface)" は、トーリックチャージ

$$\begin{array}{cccccc} & u' & v' & u & v & \\ Q^{(1)} & 1 & 1 & n & 0 & . \\ Q^{(2)} & 0 & 0 & 1 & 1 & \end{array} \tag{203}$$

によって定義されるトーリック多様体です。n は非負整数と仮定します。これらチャージを以前と同様に 2 つの 4 成分ベクトルとみなすと、そのファンは直交補空間のベクトル

$$\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -n & 0 & 1 & -1 \end{array}, \tag{204}$$

$$D_{u'}\, D_{v'}\, D_u\, D_v$$

によって決定されます。これから divisor 間の線形関係式

$$\begin{aligned} D_{u'} &= D_{v'}, \\ D_u &= D_v + nD_{u'}. \end{aligned} \tag{205}$$

が得られます。拘束条件は

$$|u'|^2 + |v'|^2 + n|u|^2 = \xi^{(1)} > 0, \tag{206}$$

$$|u|^2 + |v|^2 = \xi^{(2)} > 0. \tag{207}$$

です。任意の 2 つの約数間の交点数を求めるには、$Q^{(1)}$ 電荷を次のように再定義すると便利です。

$$Q^{(1)\prime} \equiv Q^{(1)} - nQ^{(2)}, \tag{208}$$

すると拘束条件は

$$|u'|^2 + |v'|^2 - n|u|^2 = \xi^{(1)\prime} > 0, \tag{209}$$

$$|u|^2 + |v|^2 = \xi^{(2)} > 0, \tag{210}$$

となります。ここで $\xi^{(1)\prime} = \xi^{(1)} - n\xi^{(2)}$ としています[1] 。

[1] ここで、$\xi^{(1)\prime} > 0$ が必要であることに注意してください。ただし、これは (**??**) (**??**) からは導かれません。いずれにしても以下の議論によって $\mathbb{F}_n$ の divisor の既知の正しい交点数を決定できます。

- $D_{u'}D_{v'}$
  両者が交差する場合、$u' = v' = 0$ となりますが、(**??**) ではこれは許されないため、$D_{u'}D_{v'} = 0$ となります。

$$\Rightarrow \quad D_{v'}^2 = 0. \tag{211}$$

- $D_u D_v$
  同様に $u = v = 0$ は (**??**) では許されません。したがって、$D_u D_v = 0$ です。

$$\Rightarrow \quad (D_v + nD_{v'})D_v = 0. \tag{212}$$

- $D_{v'}D_v$
  最後に、$v' = v = 0$ は（**??**）と（**??**）の両方を満たすため、$D_{v'}D_v = 1$ となります。

したがって

$$D_{v'}^2 = 0, \quad D_v^2 = -n, \quad D_{v'}D_v = 1, \tag{213}$$

および

$$D_u^2 = n. \tag{214}$$

がわかりました。

$\mathbb{F}_n$ 上の楕円ファイブレーション

$$\begin{array}{cccccccc} & u' & v' & u & v & x & y & w \\ Q^{(1)} & 1 & 1 & n & 0 & a & b & c \\ Q^{(2)} & 0 & 0 & 1 & 1 & p & q & r \\ Q^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{array} . \tag{215}$$

を考えます。これまでのように $c$ と $r$ は $Q^{(1)}$ と $Q^{(2)}$ を再定義することで 0 にでき、既にこう実行済みとします。

$$Z: \quad -y^2 + x^3 + f(u', v'; u, v)xw^4 + g(u', v'; u, v)w^6 = 0. \tag{216}$$

とすると、全空間 (**??**) の $c_1$ は $(c = r = 0)$

$$\begin{pmatrix} 2 + n + a + b \\ 2 + p + q \\ 6 \end{pmatrix}. \tag{217}$$

です。したがって、$Z$ (**??**) は

$$\begin{aligned} 2+n+a+b &= 2b = 3a \\ 2+p+q &= 2q = 3p. \end{aligned} \tag{218}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & a = 2n+4, \quad b = 3n+6, \\ & p = 4, \quad q = 6. \end{aligned} \tag{219}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad [x] &= \begin{pmatrix} 2n+4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad [y] = \begin{pmatrix} 3n+6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \\ [f] &= \begin{pmatrix} 4n+8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [g] = \begin{pmatrix} 6n+12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{220}$$

ならカラビ・ヤウです。

☆

$$-K_{\mathbb{F}_n} = \begin{pmatrix} n+2 \\ 2 \end{pmatrix}, \tag{221}$$

なので、$f$ と $g$ は、それぞれ直線束 $\mathcal{O}(-4K_{\mathbb{F}_n})$ と $\mathcal{O}(-6K_{\mathbb{F}_n})$ の "セクション (section)" であることがわかります。これは、楕円カラビ・ヤウ多様体を記述するワイエルシュトラス方程式において一般に成り立ちます。

$w \neq 0$ のチャートでは

$$(x,y,w) \sim \left(\frac{x}{w^2}, \frac{y}{w^3}, 1\right) \equiv (x', y', 1). \tag{222}$$

再び $x', y'$ を $x, y$ に名前を変更すると、それは単に $w$ を 1 に設定することに相当し、

$$-y^2 + x^3 + f(u', v'; u, v)x + g(u', v'; u, v) = 0. \tag{223}$$

となります。

$f$ と $g$ はチャージ（**??**）をもつので、これらは次のように書くことができます：

$$\begin{aligned} f(u', v'; u, v) &= f_{4n+8}(u', v')v^8 + f_{3n+8}(u', v')uv^7 + \cdots + f_{-4n+8}(u', v')u^8, \\ g(u', v'; u, v) &= g_{6n+12}(u', v')v^{12} + g_{5n+12}(u', v')uv^{11} + \cdots + g_{-6n+12}(u', v')u^{12}, \end{aligned} \tag{224}$$

ただしここで $f_{an+8}(u',v')$ および $g_{bn+12}(u',v')$ は、それぞれ $u'$ および $v'$ に関する $(an+8)$ 次および $(bn+12)$ 次多項式です。

$v\neq 0$、$v'\neq 0$ のチャートで計算を考えましょう。(**??**) を $v^{12}v'^{6n+12}$ で割ると、次の式が得られます：

$$-\left(\frac{y}{v^6v'^{3n+6}}\right)^2+\left(\frac{x}{v^4v'^{2n+4}}\right)^3+f\left(\frac{u'}{v'},1;\frac{u}{v},1\right)\frac{x}{v^4v'^{2n+4}}+g\left(\frac{u'}{v'},1;\frac{u}{v},1\right)=0. \tag{225}$$

$$\frac{u'}{v'}\equiv z',\quad \frac{u}{vv'^n}\equiv z, \tag{226}$$

を使うと

$$\begin{aligned} f\left(\frac{u'}{v'},1;\frac{u}{v},1\right)&=f_{4n+8}(z')+f_{3n+8}(z')z+f_{2n+8}(z')z^2+\cdots+f_{-4n+8}(z')z^8,\\ &\equiv f(z';z), \end{aligned} \tag{227}$$

$$\begin{aligned} g\left(\frac{u'}{v'},1;\frac{u}{v},1\right)&=g_{6n+12}(z')+g_{5n+12}(z')z+g_{4n+12}(z')z^2+\cdots+g_{-6n+12}(z')z^{12},\\ &\equiv g(z';z). \end{aligned} \tag{228}$$

です。したがって

$$\frac{y}{v^6v'^{3n+6}}\to y,\quad \frac{x}{v^4v'^{2n+4}}\to x, \tag{229}$$

と名前を変更すると、

$$\boxed{-y^2+x^3+f(z';z)x+g(z';z)=0}, \tag{230}$$

が得られます。ここで、$f(z';z)$ および $g(z';z)$ は、(**??**) および (**??**) で与えられるものです。

☆ 第 2 節の最後の例で見たように、$-y^2+x^3+f(z)x+g(z)=0$（$f(z)$、$g(z)$ はそれぞれ z に関する 8 次および 12 次多項式）は K3 曲面を表します。したがって、(**??**) は、アファイン座標を $z'$ とする $\mathbb{P}^1$ 上の K3 ファイブレーションと見なすこともできます。

### 3.2 ヘテロティック弦理論との双対性：安定退化 (stable degeneration) 極限

- 前節では、ワイエルシュトラス方程式の判別式がゼロとなる点トーラスファイバーが退化し、その上の特異点の解消によって小平の分類に従う様々な例外曲線が生じることを見ました。そして、これらのサイクルから例外型を含むゲージ対称性が生じることを議論しました。

- 小平の分類によれば、ファイバー型は、$f$、$g$ ならびにワイエルシュトラス方程式の判別式の z の次数によって決定されました。

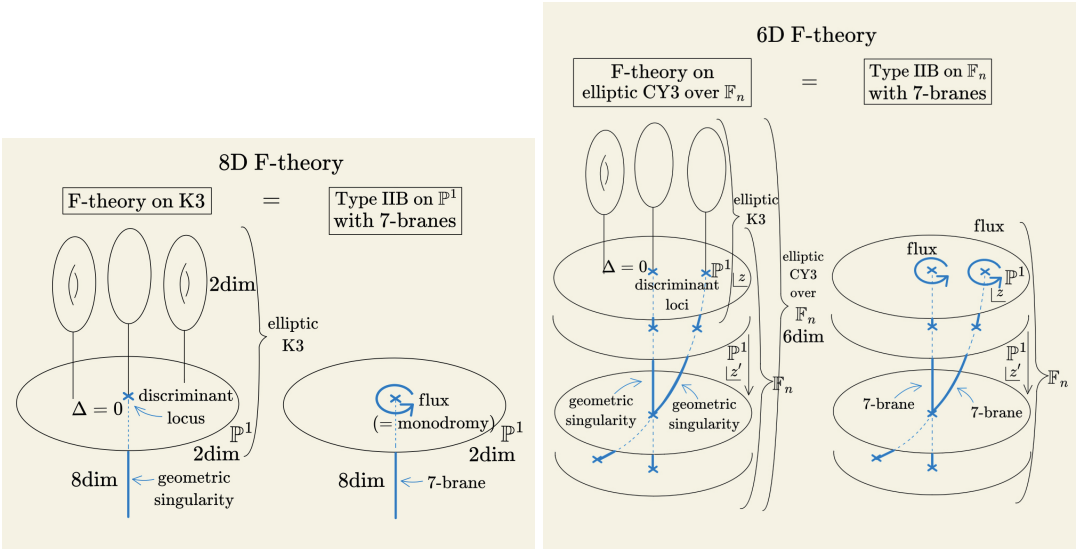



Figure 28: 8 次元 F 理論と 6 次元 F 理論。

- そこでは、$E_8$ のケースが最高次数で 4、5、10 でした。それを超えると、特異点はこの分類に属さず「悪い」特異点となります。
- 一方、楕円カラビ・ヤウ 3 次元多様体のワイエルシュトラス方程式は（**??**）で与えられ、したがって、$f(z';z)$（**??**）と $g(z';z)$（**??**）の展開の最初の半分のみを使用することで、$z=0$ において $E_8$ までのゲージ対称性を達成できます。
- 同様に、展開の後半部分 (**??**)、(**??**) を使って、$z=\infty$ において退化したファイバーの集合を考えることにより、別の $E_8$ までのゲージ対称性を実現できます。

$X$ において $\begin{pmatrix}12\\6\end{pmatrix}$ の方程式

$$Z: \quad -y^2+x^3+f(u,v)xw^4+g(u,v)w^6=0 \tag{231}$$

$[f]=\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$, $[g]=\begin{pmatrix}12\\6\end{pmatrix}$ は

$$\begin{array}{cccccc} & u & v & x & y & w \\ Q^{(1)} & 1 & 1 & 4 & 6 & 0 \\ Q^{(2)} & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad -K_X=\begin{pmatrix}12\\6\end{pmatrix} \tag{232}$$

なので CY2-フォルド、つまり K3 を記述します。$Z:\ [Z]=\begin{pmatrix}12\\6\end{pmatrix}$ が反カノニカルクラス $-K_X=$

$\begin{pmatrix}12\\6\end{pmatrix}$ と等しいからです。

一方、その代わりにチャージ $\begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix}$ の方程式

$$Z': \quad -y^2+x^3+f(u,v)xw^4+g(u,v)w^6=0 \tag{233}$$

$[f]=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$, $[g]=\begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix}$ を、下のトーリックチャージの $X'$ で考えたとします。すると

$$\begin{array}{ccccccc} & u & v & x & y & w & \\ Q^{(1)} & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & \Rightarrow \quad -K_{X'}=\begin{pmatrix}7\\6\end{pmatrix}. \\ Q^{(2)} & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & \end{array} \tag{234}$$

です。$Z'$ はカラビ・ヤウではありません。なぜなら、$[Z'] \neq -K_{X'}$ だからです。この場合、$v \neq 0$ かつ $z \equiv \frac{u}{v}$ となるチャートにおいて、$f(z)$ と $g(z)$ は $z$ に関する 4 次および 6 次の多項式となります。このような代数多様体は、“有理楕円曲面 (Rational elliptic surface)”、“$\frac{1}{2}$K3”、または “$dP_9$” と呼ばれます。

- 有理楕円曲面は注目すべき特徴を持つ幾何学的対象です。
- その 2 次コホモロジー格子は、$E_8$ ルート格子と 2 次元ローレンツ格子の直和です。
- その特異点から生じた例外ファイバーとグローバルセクションは、おおまかに言って $E_8$ 格子において互いに直交補空間を構成する、という関係にあります。
- これらのセクションの（加）群は、モーデル・ヴェイユ群 (Mordell-Weil group) と呼ばれています。
- 有理楕円曲面と $E_8$ の間のこの関係は、F 理論とヘテロティック理論の双対性において非常に重要な役割を果たしています。
- 有理楕円曲面は、パンルヴェ方程式の対称性の起源を解明する上でも重要な役割を果たしました。[H. Sakai, Commun. Math. Phys. 220 (2001)165] Rational elliptic surfaces also played an important role in revealing the origin of the symmetry of the Painlevé equations [H. Sakai, Commun. Math. Phys. 220 (2001)165].

セクション **??** では、楕円ファイブレーションのベース $\mathbb{P}^1$ 上の計量を計算し。有理楕円曲面のベースの $z=0$ では無限シリンダーの計量になることを見ました（図 **??**）。

*Horava-Witten と K3 の安定縮退 [Morrison-Vafa II]*

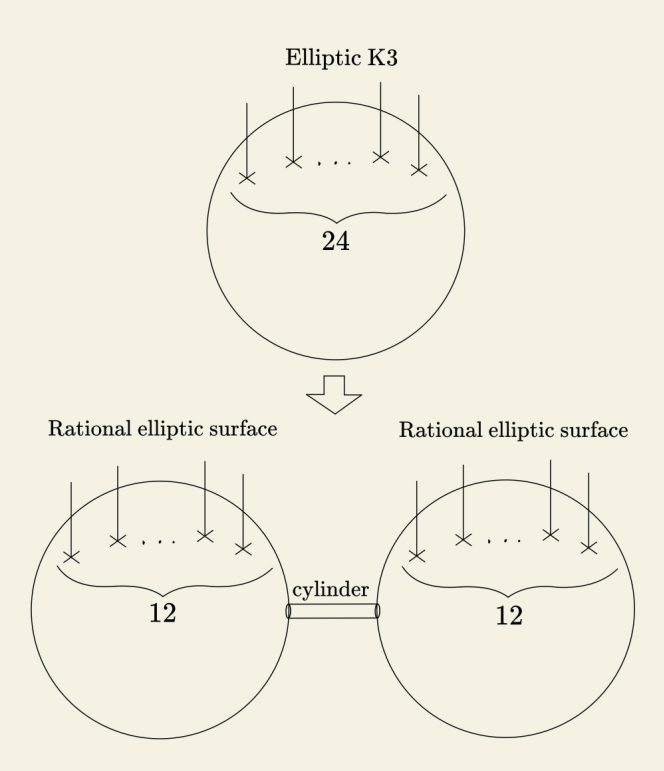



Figure 29: 安定縮退 (stable degeneration)。

2 つの $E_8$ 特異点を持つ楕円 K3 では、基底 $\mathbb{P}^1$ は円筒形になり、区間 $I$ 上に定数トーラスファイバーをもち、区間 $I$ の両端上に $\mathbb{P}^1$ ファイバーをもつ、というものになります。この K3 上で F 理論を考えると、それは IIB を $S^1 \times I$ 上にコンパクト化したものになります。これは 8 次元理論であり、M 理論を $T^2 \times I$ 上にコンパクト化したものと双対になります。一方、これは $T^2$ 上の 8 次元 $E_8 \times E_8$ ヘテロティック弦理論とも双対なので、それぞれを $T^2$ で「割る」と、$I$ 上の M 理論が $E_8 \times E_8$ ヘテロティック弦理論と等価であることが示されます。より詳しい議論については、Aspinwall 著「ヘテロティック弦の M 理論と F 理論による描像」(9707014) を参照してください。

例：*Unbroken SU(5)* ゲージ対称性

$E8$ の $SU(5)$ が破れていない場合を考えてみましょう。$dP_9$ ファイブレーションで考えます：

$$-y^2 + x^3 + f(z';z)x + g(z';z) = 0 \tag{235}$$

$$\begin{aligned} f(z';z) &= f_{4n+8}(z') + f_{3n+8}(z')z + f_{2n+8}(z')z^2 + \cdots + f_8(z')z^4, \\ g(z';z) &= g_{6n+12}(z') + g_{5n+12}(z')z + g_{4n+12}(z')z^2 + \cdots + g_{12}(z')z^6. \end{aligned} \tag{236}$$

Tate's form は

$$-y^2 + x^3 - a_1xy + a_2x^2 - a_3y + a_4x + a_6 = 0 \tag{237}$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_{1,0}(z') + \cdots = h_{n+2}(z') + \cdots \\
a_2 &= a_{2,1}(z')z + \cdots = H_{n+4}(z')z + \cdots \\
a_3 &= a_{3,2}(z')z^2 + \cdots = q_{n+6}(z')z^2 + \cdots \\
a_4 &= a_{4,3}(z')z^3 + \cdots = f_{n+8}(z')z^3 + \cdots \\
a_6 &= a_{6,5}(z')z^5 + \cdots = g_{n+12}(z')z^5 + \cdots.
\end{aligned} \tag{238}$$

です。

$$\begin{aligned}
b_2 &\equiv a_1^2 + 4a_2 \\
b_4 &\equiv a_1a_3 + 2a_4 \\
b_6 &\equiv a_3^2 + 4a_6,
\end{aligned} \tag{239}$$

と定義すると ($x$ と $y$ の再定義して)

$$\begin{aligned}
f &= -\frac{1}{48}(b_2^2 - 24b_4) \\
g &= \frac{1}{864}(b_2^3 - 36b_2b_4 + 216b_6).
\end{aligned} \tag{240}$$

となります。

テイトのアルゴリズム *(Tate's algorithm)*：$SU(5)$ からの特異点のエンハンスメント

図**??**によると

| fiber type\ord | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_6$ | $f$ | $g$ | $\Delta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_5(SU(5))$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 | 0 | 0 | 5 |
| $I_1^*(SO(10))$ | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 2 | ≥3 | 7 |
| $I_6(SU(6))$ | 0 | 1 | 3 | 3 | 6 | 0 | 0 | 6 |

(241)

なので $f$,$g$,$\Delta$ は次のようになります：

$$
\begin{aligned}
f &= -\frac{1}{48}a_{1,0}^4 - \frac{1}{6}a_{1,0}^2 a_{2,1} z + \left(-\frac{1}{3}a_{2,1}^2 + \frac{1}{2}a_{1,0}a_{3,2}\right) z^2 + \cdots \\
g &= \frac{1}{864}a_{1,0}^6 + \frac{1}{72}a_{1,0}^4 a_{2,1} z + \frac{1}{72}(4a_{1,0}^2 a_{2,1}^2 - 3a_{1,0}^3 a_{3,2}) z^2 \\
&\quad + \frac{1}{108}(8a_{2,1}^3 - 18 a_{1,0}a_{2,1}a_{3,2} - 9a_{1,0}^2 a_{4,3}) z^3 + \cdots \\
\Delta &= \frac{1}{16}a_{1,0}^4 (a_{2,1}a_{3,2}^2 - a_{1,0}a_{3,2}a_{4,3} + a_{1,0}^2 a_{6,5}) z^5 \\
&\quad + \frac{1}{16}a_{1,0}^2 \left(8a_{2,1}^2 a_{3,2}^2 - a_{1,0}(a_{3,2}^3 + a_{1,0}a_{4,3}^2) + 4a_{1,0}a_{2,1}(-2a_{3,2}a_{4,3} + 3a_{1,0}a_{6,5})\right) z^6 \\
&\quad + \left(a_{2,1}^3 a_{3,2}^2, + a_{1,0}(\cdots)\right) z^7 + \cdots
\end{aligned}
\tag{242}
$$

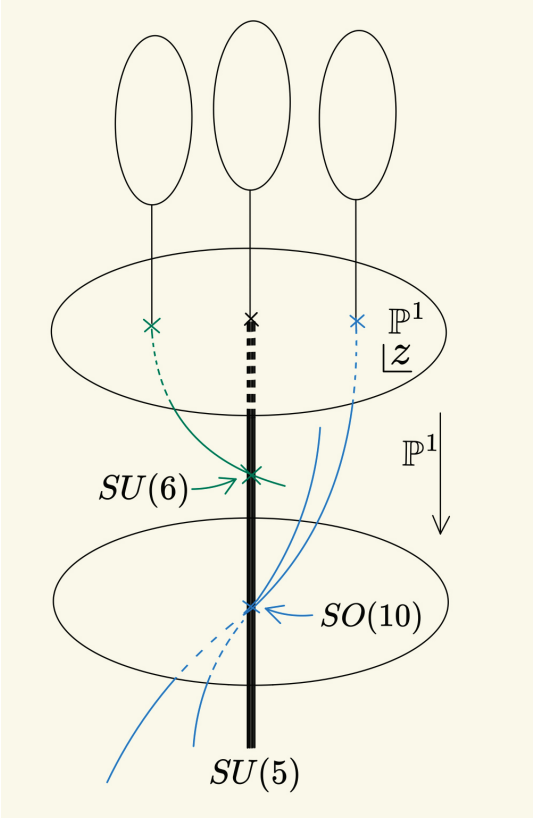



Figure 30: SU(5)“ゲージ divisor” に沿った物質生成。

- $$
\begin{aligned}
\Delta &= \frac{1}{16}a_{1,0}^4 (a_{2,1}a_{3,2}^2 - a_{1,0}a_{3,2}a_{4,3} + a_{1,0}^2 a_{6,5}) z^5 + \cdots \\
&\equiv a_{1,0}(z')^4 P_{8,5}(z') z^5 + \cdots.
\end{aligned}
\tag{243}
$$

とするとき、$a_{1,0}$ は $z'$ に関する $(n+2)$ 次多項式であり、$P_{8,5}$ は $(3n+16)$ 次多項式です。もし $a_{1,0}$ がゼロの場合、$SU(5)$ 特異点は $SO(10)$ に "エンハンス (enhanced)" します。$a_{1,0}=0$ は $(n+2)$ 個の根を持つので、"$SU(5)$ gange divisor" 上には、そのような点が $n+2$ 個存在します。これは 7-ブレインが重なり合うところです。

- ベース上の特異点における特異ファイバーでも、特に特異点エンハンスメントが発生する箇所ではその点の周囲に発生するファイバーよりも多くの例外ファイバーが発生します。これは、双対 M 理論における M2 ブレインが巻き付くことができる 2 サイクルがより多く存在することを意味し、その結果余分な質量ゼロ状態がそこに発生することになります。

- 判別式の次数が周囲の判別式の次数よりも高いということは、別の 7-ブレインがその場所で交差していることを意味します。つまり、これは交差するブレインのシステムです。

- D-ブレインの場合、このような交点においてハイパー多重項が生じることが具体的に確認できます。

- $N$ 枚の D-ブレインが積み重なったものが別の D-ブレインと交差する場合、特異点は $U(N)$ から $U(N+1)$ にエンハンスし、そこに $\mathbf{N}$ 表現に属する質量ゼロのハイパーマルチプレットが生じます。

- $U(N+1)$ の随伴 $(\mathbf{N+1})^{\mathbf{2}}$ は、$U(N)$ の表現

$$(\mathbf{N+1})^{\mathbf{2}} \;=\; \mathbf{N^2} \oplus \mathbf{N} \oplus \overline{\mathbf{N}} \oplus \mathbf{1}, \tag{244}$$

  のように分解され、物質場の表現は 等質 (homogeneous) Kähler 多様体 $U(N+1)/(U(N)\times U(1))$ に対応します。

- 同様に特異点が $G$ から 1 ランク上の群 $G'$ にエンハンスされた場合、ゲージ対称性 $G$ の $G'/(G\times U(1))$ に質量ゼロのハイパー多重項が現れると予想され、実際多くの場合これは正しく、アノマリー解析によって検証できます。これが

"Katz-Vafa rule"

です。

例：$G = SU(5)$, $G' = SO(10)$

この場合には

$$G'/(G\times U(1)) \;=\; \mathbf{10} \tag{245}$$

（$SU(5)$ の）です。これは分解

$$\begin{array}{ccccc} SO(10) & \supset & SU(5) & & \\ \underbrace{\mathbf{45}}_{SO(10)\text{adjoint}} & = & \underbrace{\mathbf{24}}_{SU(5)\text{adjoint}} & \oplus \mathbf{10} \oplus \overline{\mathbf{10}} \oplus \mathbf{1}. & \end{array} \tag{246}$$

からわかります。

例：$G = SU(5)$, $G' = SU(6)$

この場合には

$$G'/(G \times U(1)) = \mathbf{5} \tag{247}$$

（$SU(5)$ の）です。このときの分解が

$$\begin{array}{ccccc} SU(6) & \supset & SU(5) & & \\ \underbrace{\mathbf{35}}_{SO(10)\text{adjoint}} & = & \underbrace{\mathbf{24}}_{SU(5)\text{adjoint}} & \oplus \mathbf{5} \oplus \overline{\mathbf{5}} \oplus \mathbf{1}. & \end{array} \tag{248}$$

だからです。

☆ 6 次元では、荷電共役がカイラリティを変えないため $\mathbf{N}$ と $\overline{\mathbf{N}}$ の間には区別がありません。

- したがって、余次元 1 の SU(5) 特異点を持つ $\mathbb{F}_n$ 上の楕円ファイブレーションは、unbroken $SU(5)$ ゲージ対称性をもち $SU(5)$ の
  - $n+2$ hypermultiplets in $\mathbf{10}$
  - $3n+16$ hypermultiplets in $\overline{\mathbf{5}}(=\mathbf{5})$

  をもつ理論を記述します。
- 実際、これらはまさに $E_8 \times E_8$ ヘテロティック弦の K3 コンパクト化で、1 つの $E_8$ のインスタントン数 $12+n$ で unbroken $SU(5)$ 対称性をもつ場合の荷電物質場にちょうどなっています！

☆ これらは、$dP_9$ の $z=0$ 特異ファイバーに局在する物質場であり、K3 面の安定縮退に由来するものと見ることができます。

### 3.3 ヘテロティック弦理論での指数計算

ヘテロティック弦理論におけるアノマラスなビアンキ恒等式を思い出します：

$$dH = \mathrm{Tr}R\wedge R - \frac{1}{30}\mathrm{Tr}_{\mathbf{248}\oplus\mathbf{248}}F\wedge F \tag{249}$$

これはグリーン・シュワルツ機構のためです。よって

$$\int_{\mathrm{K3}}\mathrm{Tr}R\wedge R = \frac{1}{30}\int_{\mathrm{K3}}\mathrm{Tr}_{\mathbf{248}\oplus\mathbf{248}}F\wedge F. \tag{250}$$

です。

$$\int_{\mathrm{K3}}p_1 \equiv -\frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathrm{K3}}\mathrm{Tr}R\wedge R = -48, \tag{251}$$

なので

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathrm{K3}}\mathrm{Tr}_{\mathbf{248}\oplus\mathbf{248}}F\wedge F = 48.\\
\Rightarrow\quad &\frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathrm{K3}}\mathrm{Tr}_{\mathbf{248}}F\wedge F = 2(12+n) \quad \text{for the 1st } E_8\\
&\frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathrm{K3}}\mathrm{Tr}_{\mathbf{248}}F\wedge F = 2(12-n) \quad \text{for the 2nd } E_8.
\end{aligned} \tag{252}$$

となります。

ディラック指数 *(Dirac index)*

複素 2 次元多様体（ここでは K3）のディラック指数は

$$\frac{1}{2}\hat{A}(E)\mathrm{ch}(V)\Big|_{2\ \leftarrow \mathrm{K3}}, \tag{253}$$

で与えられます。ただしここで、$E = TM$、$M = \mathrm{K3}$、$V$ は $M$ 上のベクター束です。

$$\begin{aligned}
\hat{A}(E) &= \sum_{j=1}^{n}\frac{\frac{x_j}{2}}{\sinh\frac{x_j}{2}} = 1 - \frac{1}{24}(x_1^2+\ldots+x_n^2)+\cdots\\
&= 1-\frac{1}{24}p_1(E), \qquad (254)\\
\mathrm{ch}(V) &= \mathrm{Tr}\,e^x\\
&= \dim V + c_1(V) + \frac{1}{2}(c_1(V)^2 - 2c_2(V)) + \cdots. \qquad (255)
\end{aligned}$$

ですから

$$\Rightarrow\quad \hat{A}(E)\mathrm{ch}(V) = 1 + c_1(V) - \frac{1}{24}p_1(E)\cdot\dim V + \frac{1}{2}(c_1(V)^2 - 2c_2(V)) + \cdots. \tag{256}$$

です。

☆ $V$ が $U(1)$ ゲージ因子を持たない非可換ベクター束の場合は $\int_M c_1(V) = 0$ となります。これはトレースだからです。

よって

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \text{index} &= \frac{1}{2}\hat{A}(E)\text{ch}(V)\Big|_2 \\ &= \frac{1}{2}\text{dim}V \cdot \left(-\frac{1}{24}\right) \underbrace{\int_M p_1(E)}_{=-48} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(-2)\int_M c_2(V) \\ &= \text{dim}V - \frac{1}{2}\int_M c_2(V). \end{aligned} \tag{257}$$

したがって表現 $C_i$ に属するハイパー多重項の数は次のように与えられます：

$$\Rightarrow \quad \boxed{-n_H^i = \text{dim}C_i - \frac{1}{2}\frac{1}{8\pi^2}\int_M \text{tr}_{C_i}F^2}\,. \tag{258}$$

☆ 一方、10 次元グラビティーノから生じる中性ハイパー多重項の数は、スピン $\frac{3}{2}$ 演算子に対する指数定理によって与えられます：

$$\frac{1}{2}\text{index}\Big|_2 = \frac{7}{16}\underbrace{\int_{K3} p_1}_{=-48} = -21. \tag{259}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{-n_H^0 = -21}\,. \tag{260}$$

- 6 次元 $E_8 \times E_8$ ヘテロティック弦コンパクト化において、$E_8$ の **248** が、破れていないゲージ対称性のゲージ群 $G$ とインスタントン群 $H$ の積部分群 $G \times H$ の表現として

$$\mathbf{248} = \oplus_i (L_i,\ C_i)\,. \tag{261}$$

のように分解される場合、$G$ の表現 $L_i$ に属するハイパー多重項は、$H$ の表現 $C_i$ におけるゼロモードから生じます。

- $G = SU(5)$ の場合、$H$ も $SU(5)$ なので、

$$\mathbf{248} = (\mathbf{24},\mathbf{1}) \oplus (\mathbf{10},\overline{\mathbf{5}}) \oplus (\mathbf{5},\overline{\mathbf{10}}) \oplus (\overline{\mathbf{10}},\mathbf{5}) \oplus (\overline{\mathbf{5}},\mathbf{10}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{24}). \tag{262}$$

となります。したがって、$\mathbf{10}(\overline{\mathbf{10}})$ は $\overline{\mathbf{5}}(\mathbf{5})$ のゼロモードから生じ、$\overline{\mathbf{5}}(\mathbf{5})$ は $\mathbf{10}(\overline{\mathbf{10}})$ から生じます。よって（**??**）を使うと

$$
\begin{aligned}
(n_H^{\overline{\mathbf{10}}} =) n_H^{\mathbf{10}} &= \frac{1}{2}\underbrace{\frac{1}{8\pi^2}\int \mathrm{tr}_{\overline{\mathbf{5}}} F^2}_{=n+12} - \mathrm{dim}\overline{\mathbf{5}} \\
\Rightarrow \quad n_H^{\mathbf{10}} + n_H^{\overline{\mathbf{10}}} &= n + 12 - 10 \quad = \underline{\underline{n+2}}, \qquad (263) \\
(n_H^{\mathbf{5}} =) n_H^{\overline{\mathbf{5}}} &= \frac{1}{2}\underbrace{\frac{1}{8\pi^2}\int \mathrm{tr}_{\mathbf{10}} F^2}_{=3(n+12)} - \mathrm{dim}\mathbf{10} \\
\Rightarrow \quad n_H^{\overline{\mathbf{5}}} + n_H^{\mathbf{5}} &= 3n + 36 - 20 \quad = \underline{\underline{3n+16}}, \qquad (264)
\end{aligned}
$$

となり、これは、$\mathbb{F}_n$ 上の CY3 における F 理論の多重度と一致します！

☆ 一方、

$$
\begin{aligned}
n_H^{\mathbf{1}} &= \frac{1}{2}\underbrace{\frac{1}{8\pi^2}\int \mathrm{tr}_{\mathbf{24}} F^2}_{=10(n+12)} - \mathrm{dim}\mathbf{24} \\
&= 5n + 36. \qquad (265)
\end{aligned}
$$

です。F 理論では、中性ハイパー多重項は、複素構造モジュライ、すなわち Tate's form の CY3 の方程式の $z'$ の多項式の独立係数の数から生じます。今の場合には

$$
\begin{aligned}
h_{n+2} &\rightarrow n+3 \\
H_{n+4} &\rightarrow n+5 \\
q_{n+6} &\rightarrow n+7 \\
f_{n+8} &\rightarrow n+9 \\
g_{n+12} &\rightarrow n+13, \qquad (266)
\end{aligned}
$$

なので全体の自由度を 1 を差し引くと

$$
n+3+n+5+n+7+n+9+n+13-1 \quad = \quad \underline{\underline{5n+36}}, \qquad (267)
$$

となります。これもインデックスの計算結果と一致します。

アノマリー相殺

アノマリー多項式 $Y_4$ が消滅するための条件は

$$
273 \quad = \quad H + 20 + 29T - V, \qquad (268)
$$

でした。ここでここで、$H$、$T$、$V$ はそれぞれハイパー多重項、テンサー多重項、ベクター多重項の数です。ヘテロティック弦コンパクト化では $T = 1$ なので、

$$H - V \;=\; 253 - 29T \;=\; 224 \tag{269}$$

がみたされなければなりません。今の場合には

$$\begin{aligned} H &= 10(n+2) + 5(3n+16) + 5n + 36 \;=\; 30n + 136, \\ V &= 24, \end{aligned} \tag{270}$$

なので

$$H - V \;=\; 30n + 112 \tag{271}$$

がみたされています。これはすべての unbroken ゲージ対称性の場合に常に成立します。また、もう一方の $E_8$ セクターが $-30n + 112$ を与えるため、（**??**）はみたされます。

# 4 Dessin on the base

これまでのセクションでは、例外群ゲージ対称性や直交群のスピナー表現に属するような物質場が F 理論によってどのように実現されるかを見てきました。基本的に、F 理論では IIB 理論の複素スカラー場の配位を、その値がモジュラスになっているような実２次元トーラスの配位で置き換えることが議論の出発点になっていました。しかし、このように置き換えをしただけではもとの理論以上のものが得られるはずはありません。なぜ、オリエンティフォルドコンパクト化のような普通の摂動的な IIB 理論とは異なる物理を F 理論が実現することができるのでしょうか？この最後のセクションではこの問題について明らかにします。

## 4.1 “Elliptic-point planes” と dessin on the base

$\mathbb{P}^1$ 上の elliptic fibration を表す Weierstrass equation

$$y^2 + x^3 + f(z)x + g(z) = 0 \tag{272}$$

を考えます。ここで $z$ は $\mathbb{P}^1$ の affine coordinate で、$f(z)$, $g(z)$ をそれぞれ $z$ の４次、６次にとれば rational elliptic surface (RES) になり、８次、１２次にとれば K3 になります。RES の場合、$x$, $y$ は それぞれ $O(2)$ bundle, $O(3)$ bundle のセクション、すなわち affine coordinate が $z$ の patch から $w = z^{-1}$ の patch に移ったとき、それらは $x \to \frac{x}{w^2}$, $y \to \frac{y}{w^3}$ と変換するものとします。K3 の場合にはそれぞれ $O(4)$ bundle, $O(6)$ bundle のセクションです。

よく知られているように、(**??**) が表す elliptic fiber の modulus $\tau$ は

$$J(\tau) = \frac{4f^3}{4f^3 + 27g^2} \tag{273}$$

をみたす $\tau$ として与えられます。特に右辺の分母

$$\Delta \equiv 4f^3 + 27g^2 \tag{274}$$

は discriminant と呼ばれ、generic な （すなわち 0 でない）$f$, $g$ に対してその locus (= zero 点) $z = z_i$ では $\tau$ が（標準的な基本領域で）$\mathrm{Im}\tau \to \infty$ となり、そこでの $J(\tau)$ の振る舞いより

$$\tau(z) = \frac{1}{2\pi i}\log(z - z_i)\,(const. + O(z - z_i)) \tag{275}$$

となることがわかるので、そこに D7-brane が存在することがわかります。

一方、$f(z)$ や $g(z)$ の locus はそれら単独では $\Delta = 0$ とならないので D-brane ではないでが、それらが存在するとすぐ後で示すように D-brane の monodromy に SL(2,Z) 共役変換を引き起こして $(p,q)$-7 brane を生成したり、orientifold plane の構成要素となったりして、重要な役割を果たします。したがって、この論文では、このような $f(z)$ や $g(z)$ の locus を (orientifold plane の analogue として) *elliptic-point plane* と呼ぶことにします。

"Elliptic-point plane" には $f$ の locus からなるものと $g$ の locus からなるものの２種類あり、それぞれ性質が異なります。ここでは $f(z)$ の locus の方を $f$-locus plane、あるいは短く $f$-plane、また $g(z)$ の方を $g$-locus plane、あるいは $g$-plane と言うことにします[2]。

$f$-locus plane では $J$ function の値が

$$J(\tau) = \frac{4f^3}{4f^3 + 27g^2} \;=\; 0 \tag{276}$$

なので $\tau = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ に対応し、また $g$-locus plane では

$$J(\tau) = \frac{4f^3}{4f^3 + 27g^2} \;=\; 1 \tag{277}$$

なので $\tau = i$ に対応します。それらの近傍で

$$J(\tau) = \frac{1}{3!}J'''(e^{\frac{2\pi i}{3}})(\tau - e^{\frac{2\pi i}{3}})^3 + O\left((\tau - e^{\frac{2\pi i}{3}})^4\right), \tag{278}$$

$$J(\tau) = 1 - \frac{12K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4}{\pi^2}(\tau - i)^2 + O\left((\tau - i)^3\right) \tag{279}$$

ですから [3]、$\tau = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ は $J(\tau)$ の３重ゼロ点、$\tau = i$ は $J(\tau) - 1$ の２重ゼロ点になっています。

一方、$z = 0$ が $f$ の locus だとすると

$$J(\tau(z)) = \frac{4f(z)^3}{4f(z)^3 + 27g(z)^2} \tag{280}$$

より $z = 0$ において $J(\tau(z))$ は $O(z^3)$ ですから (**??**) より $\tau - e^{\frac{2\pi i}{3}}$ は $O(z)$ となり、よってそのまわりのモノドロミーは自明です。また、同様に $z = 0$ が $g$ の locus だとすると、再び (**??**) より今度はそこで $J(\tau(z)) - 1$ が $O(z^2)$ となりますから (**??**) より $\tau(z) - i$ も $O(z)$ となり、そのまわりのモノドロミーもありません。

ところが、$\tau$ が属する基本領域とそれが $J$ 関数によって map された複素平面の関係は Fig のようになっており、この図からわかるように Teichmüller 空間（＝上半平面）において $\tau = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ の周りを一周すると、もとにもどるまでに６つの異なる基本領域を通過します。同様に、$\tau = i$ の周りをまわったときには２つの異なる基本領域を通過します。すなわち $f$-locus plane は６つの、$g$-locus plane は２つの異なる基本領域が出会う complex codimension 1 の submanifold であり、

[2] あるいは、 $g_2$-locus plane, $g_3$-local plane という呼び方もより内在的な意味を暗示する名前として提案してもいいかもしれないですが、この論文では $f$-locus plane、$g$-locus plane と呼ぶことにします。それらは orientifold plane (O-plane) の類似物であり、より正確にはあとで見るように O-plane の構成要素です。ただし、"plane" という名前にもかかわらず、もしこの $\mathbb{P}^1$ 上の楕円ファイブレーションがさらに別の多様体にファイバーされたときにはそれらは一般には rigid な平面的なものではなく、D-brane のように滑らかな部分多様体となります。

[3] Mathematica では $K(\underline{k}^2)$ を $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$ と定義している。したがって Mathematica で $K(\frac{1}{2})$ とでるものは、通常の $K(k)$ の定義では $K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ となります。

異なる基本領域に対応する $z$ 平面の領域は $J$ 関数の imaginary part が 0 になる locus からなる real codimension 1 の domain wall で仕切られています。さらに、それぞれの基本領域は

$$\{\tau|\ \mathrm{Im}J(\tau) = 0,\ \mathrm{Re}J(\tau) > 1\} \tag{281}$$

である domain wall （薄緑破線）を境に $\mathrm{Im}J(\tau) > 0$ と $\mathrm{Im}J(\tau) < 0$ の 2 つの領域に分けられます。一方、D-brane は discriminant locus $\Delta = 0$ にあり、そこからも 2 つの domain wall : $\{\tau|\ \mathrm{Im}J(\tau) = 0,\ \mathrm{Re}J(\tau) < 0\}$ と $\{\tau|\ \mathrm{Im}J(\tau) = 0,\ \mathrm{Re}J(\tau) > 1\}$ が伸びています（Fig)。

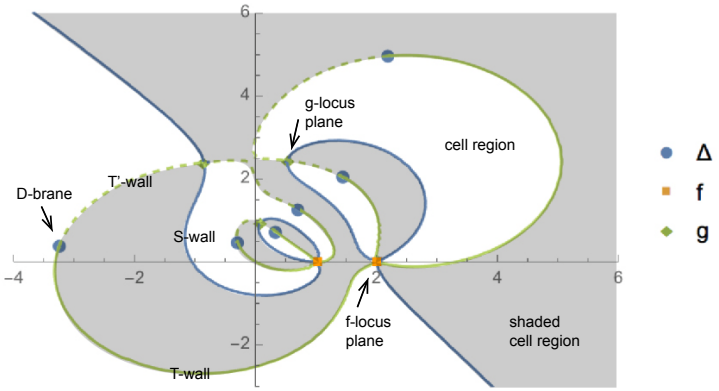



Figure 31: D-brane と elliptic-point plane から伸びる domain wall とそれらで分割された cell 領域の例。$\Delta$ の locus に D-brane が、$f$ と $g$ の locus に elliptic-point plane が存在します。この場合 $z = 1, 2$ に 2 つ $f$-locus plane が、$z = i, 2i, 3i$ に 3 つ $g$-locus plane が配置されている。

Discriminant locus では $J = \infty$ なので、定義によりそれらは別の domain wall と接触したりそれを通過したりすることはありません。Domain wall では $\mathrm{Im}J(\tau) = 0$ だからです。

このように、$z$ 平面は elliptic-point plane （$f$-locus plane や $g$-locus plane）と D-brane から伸びる domain wall によって、異なる基本領域に対応する “cell 領域” に分割されます。特に、$f$-locus plane や $g$-locus plane からは

$$\{\tau|\ \mathrm{Im}J(\tau) = 0,\ 0 < \mathrm{Re}J(\tau) < 1\} \tag{282}$$

の domain wall（青い太線） が伸びるので、そこを渡ることは（標準的な基本領域から出発した場合）S-dual された理論に移ることに対応します。すると、例えばある domain wall で囲まれた cell 領域内で D-brane の周りを回るのと、 domain wall を一旦越えてから D-brane を回ってまた domain wall を越えて戻るのとでは、一般にはモノドロミーが SL(2, Z) conjugate された分異なります。これが string junction の議論における B-brane や C-brane と呼ばれるものの実態で

す。すなわち、local には 出発点の cell 領域に対応する基本領域を標準的な基本領域にとる限り D-brane のモノドロミー行列は 常に $T$ になるのに対し、どこかに基点をきめて domain wall を渡ってモノドロミーを測ることによって D-brane でない $(p,q)$–brane が生じるのです。

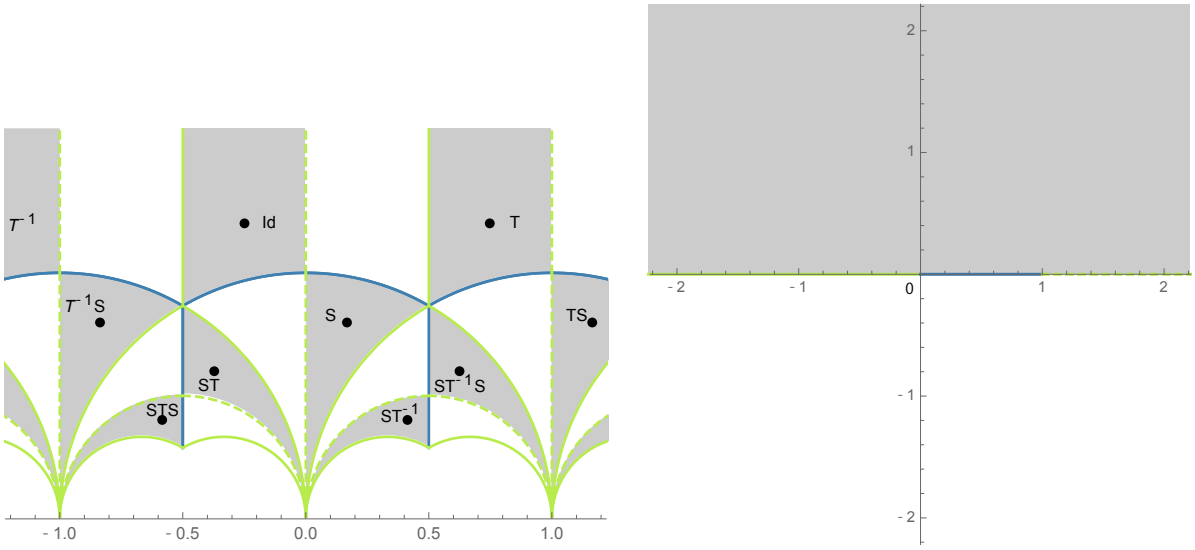



Figure 32: Left: Teichmüller 空間（＝上半平面）といろいろな基本領域。Shaded region は各基本領域のうち $J$ 関数による像の imaginary part が $>0$ となる領域。各領域内の記号は、標準的な基本領域の任意の点をそのモジュラー同値な点へ変換する $SL(2,\mathbb{Z})$ 群要素を表す。Right: 各基本領域の $J$ 関数による像（＝複素平面）。緑線、青線、緑破線の各境界がそれぞれ対応している。

ここで、elliptic-point plane（$f$-locus plane や $g$-locus plane）があってはじめてこのような非摂動論的現象が生ずることに注意してください。Elliptic-point plane がなく、D-brane しかなければ、そこから伸びる domain wall は

$$\{\tau|\ \mathrm{Im}J(\tau)=0,\ \mathrm{Re}J(\tau)<0\} \tag{283}$$

（細い薄緑線）と

$$\{\tau|\ \mathrm{Im}J(\tau)=0,\ \mathrm{Re}J(\tau)>1\} \tag{284}$$

（薄緑破線）しかないので、それらを越えても $T$ 変換しかされず、モノドロミーと交換するからです。

以下、このような domain wall (**??**)（細い薄緑線）を *T-wall*, (**??**)（薄緑破線）を *T'-wall* と呼び、また (**??**) のような domain wall（青い太線）を *S-wall* と呼んで区別することにします。

To conclude this section we summarize the definitions of the new objects and notions introduced in this section as a mini-glossary.

*Mini-glossary*

**$f$-locus plane(= $g_2$-locus plane)** Weierstrass form の $f$ の zero locus である（複素）余次元１のオブジェクト。小さな正方形で表されている。

**$g$-locus plane(= $g_3$-locus plane)** Weierstrass form の $g$ の zero locus である（複素）余次元１のオブジェクト。45° 回転した正方形で表されている。

**elliptic-point plane** $f$-locus plane と $g$-locus plane の総称。

**T-wall** D-brane や $f$-locus plane からでる、Im$J$ の zero locus で Re$J < 0$ であるような（実）余次元１のオブジェクト（ドメインウォール)。薄緑線で表されている。

**T'-wall** D-brane や $g$-locus plane からでる、Im$J$ の zero locus で Re$J > 1$ であるような（実）余次元１のオブジェクト（ドメインウォール)。薄緑破線で表されている。

**S-wall** $f$-locus plane や $g$-locus plane からでる、Im$J$ の zero locus で $0 <$ Re$J < 1$ であるような（実）余次元１のオブジェクト（ドメインウォール)。青線で表されている。

**cell region** 楕円ファイブレーションの $\mathbb{P}^1$ base である $z$ 平面上 $T, T', S$-wall などのドメインウォールによって囲まれた閉じた領域。ファイバーモジュラスの１つの基本領域の半分（Im$J > 0$ または Im$J < 0$）に対応する。（Figure **??**参照。）

**shaded cell region** cell region のうち、ファイバーモジュラスが Im$J > 0$ となっている方。（FIG.**??**参照。）

## 4.2 $(p, q)$-branes from elliptic-point planes

前述のように、elliptic-point plane があると、elliptic fibration の base manifold が（実）余次元１のドメインウォールによって異なる基本領域に対応する cell 領域に分割されるので、7-ブレインの周りのモノドロミーは SL(2,Z) 共役変換を受けます。そのことを詳しく見るために、ここでは最も簡単な 非 $I_n(A_{n-1})$ 型の singularity である $II$ 型の singularity において通常の D-ブレイン（ストリングジャンクションのコンベンションで **A** ブレイン）が monodromifold の存在によって **C** （$(p, q) = (1, 1)$）ブレインになることを見てみましょう。この議論は [**?**] でもなされました。ストリングジャンクションのコンベンションについては [**?**] を参照してください。

$II$ 型の singularity は $f, g, \Delta$ の $z$ のオーダーが $(\mathrm{ord}(f), \mathrm{ord}(g), \mathrm{ord}(\Delta)) = (\geq 1, 1, 2)$ のときに $z = 0$ に実現されます。$f$ と $g$ が $z$ １次なら自動的に $\Delta$ は generic には２次となって $II$ 型が実現します。よって １つの $f$-locus plane と１つの $g$-locus plane が近づけば、自然に２つの D-ブレインも近づいてきます。この様子を示したのが FIG.**??** です。

これを見ると、２つの D-ブレインが $g$-locus plane をはさんで非常に接近しており、そこから少し離れたところに $f$-locus plane があるという配置になっています。遠方から見るとこれら４つの 集まりから $S$-wall （青線）と $T$-wall （薄緑線）が反対方向に出ているように見えます。この場合、これらの wall をはさんで下側が shaded cell region (Im$J > 0$) になっていることがわかるので、そこからこれら４つの集まりを反時計回りに一周すると、 $T$-wall （薄緑線)、$S$-wall （青線）の順番で横切って元に戻ります。よって FIG.**??** よりそのモノドロミーは $T^{-1}S$ と読み取れます。

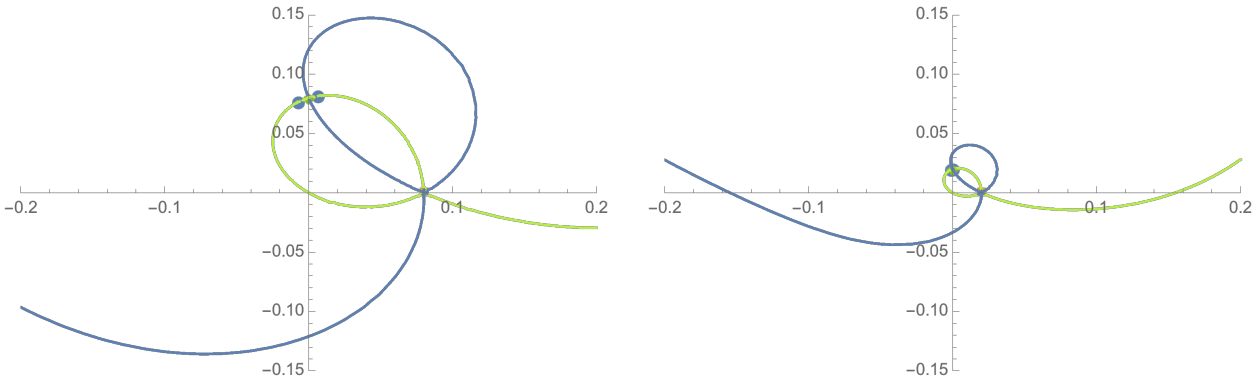



Figure 33: $II$ 型に対応した monodoromifold plane と D-brane 配置の例。$f=(z-\epsilon)(z-2)$, $g=(z-\epsilon i)(z-2i)(z-3i)$ で Left：$\epsilon=0.08$, Right： $\epsilon=0.02$ とした場合。

一方、$II$ 型に対応する 7-brane 配置は **AC** あるいは **CA** であり、**C** brane、**A** brane のモノドロミー行列は

$$\begin{aligned}\mathbf{C}&=\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}\\&=-ST^{-2},\end{aligned}\tag{285}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}&=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\\&=T\end{aligned}\tag{286}$$

ですから

$$\begin{aligned}\mathbf{CA}&=-ST^{-1}\\&=-T(T^{-1}S)T^{-1}\end{aligned}\tag{287}$$

となり、確かに $T^{-1}S$ と共役になっています。

ここで、$II$ 型 singularity の constituent である $f$-locus plane, $g$-locus plane および 2 つの D-brane は、限られた領域に任意の配置をとるのではなく、$f$-locus plane 以外の 3 つが非常に近いところに位置することに注意してください。これは次のように一般的に示すことができます。

有理楕円曲面において $g$-locus plane が $z=0$ にあり、$f$-locus plane が $z=\epsilon^2$ にあって、$\epsilon\to 0$

として $f$-locus plane が $g$-locus plane に近づいていくという状況を考えます[4]。そのために

$$f = a(z-\epsilon^2)\prod_{j=1}^{3}(z-a_j), \tag{288}$$

$$g = bz\prod_{j=1}^{5}(z-b_j) \tag{289}$$

とすると、$\Delta = 0$ の $z = 0$ の近傍の解は $z = \pm\frac{2i}{3\sqrt{3}}\frac{(a\prod_{j=1}^{3}a_j)^{\frac{3}{2}}}{b\prod_{j=1}^{5}b_j}\epsilon^3 + O(\epsilon^4)$ に存在することがわかります。したがって、２つの D-brane の方が $f$-locus plane より早く $z = 0$ に近づいていくのです。

前の section で述べたように、$f$ や $g$ が一般の（すなわち０でない）値をとるときには、$\Delta = 0$ は $J = \infty$ を意味するので D-brane は $\mathrm{Im}J = 0$ である $T$-,$T'$- および $S$-wall 上で $\mathrm{Re}J$ が有限な点に到達したり、それを越えたりすることはできません[5]。しかし上で見たように、$f = 0$ あるいは $g = 0$ となる $f$-locus plane や $g$-locus plane になら、D-brane は限りなく近づくことができます。しかし、それでもそれらを越えていくことはできません。なぜなら、例えば上の例では $g$-locus plane と D-brane を結ぶ共通の $T'$-wall に沿って接近していきますが、もし、D-brane が $g$-locus plane を越えたとすると、残された $g$-locus plane からは D-brane がもっていた $T$-wall が伸びることになるからです。$f$-locus plane についても同様です。

このような、$g$-locus plane をはさんだ２つの D-brane が接近した配置は一般的な複素構造パラメータ領域で広く見られます。３つがこのように接近した配置は $g$-locus plane と ２つの D-brane にある種の引力が働いた結果生じた bound state であるとも考えられる。

### 4.3 オリエンティフォルドプレインのサブ構造

次に、**B** brane がどのように elliptic-point plane から生じるのかを見るために $I_0^*$ (= $D_4$) singularity を考えましょう。$I_0^*$ 型の brane 配置は **AAAABC** です。これはまた、orientifold において、４枚の D-brane と １枚の orientifold plane の合流とも見ることができます [**?**]。

小平分類により $I_0^*$ singularity は $(\mathrm{ord}(f), \mathrm{ord}(g), \mathrm{ord}(\Delta)) = (2,3,6)$ で実現されますから、６枚の D-brane の他に $f$-locus plane 2 枚と $g$-locus plane 3 枚が必要になります。このうち **BC** branes、あるいは orientifold plane の配置を identify するために、それらのうち４枚の D-brane だけを $z = 0$ に合流させた様子を Figure **??** に示しました。ここでは２つの $f$-locus planes を $z = 1$ と 2 に固定し、原点に４枚の D-brane が集まるようにしました。これから明らかなように、こんどは２つの $f$-locus plane それぞれに D-brane と $g$-locus plane １つずつが、D-brane をはさむ形で３つずつ集まっており、その間に 残りの $g$-locus plane がそれらとはやや離れて位置するという配置になっています。ここでも、７この 構成要素がばらばらに位置したままで近くに集ま

[4] $z = \epsilon$ でなく $z = \epsilon^2$ とする理由は、$z = \epsilon$ とすると $z = 0$ のまわりの $\epsilon$ の整数べき展開による $\Delta = 0$ の解が存在しないからです。

[5] $\mathrm{Re}J = \infty$ なら $\mathrm{Im}J = 0$ になりえますが、それは別の D-brane があるところに他なりません。

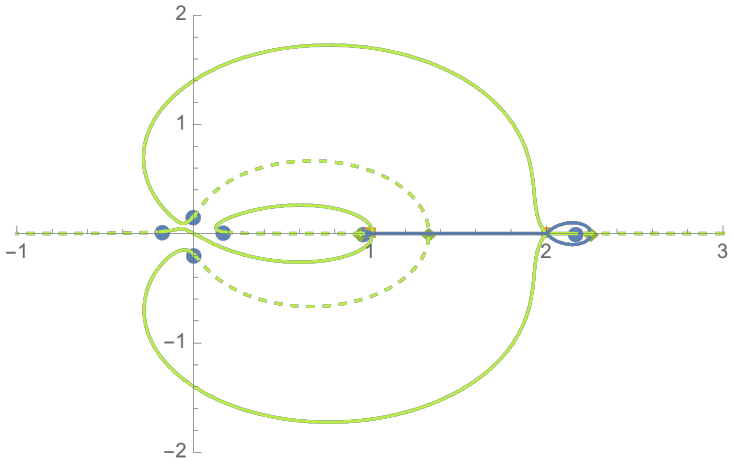



Figure 34:

るのではなく、３つ、３つ、１つが組みになってお互いに接近してくることがわかります。これが orientifold plane の実際の substructure です。

Figure **??** において、左側の４枚の D-brane をまわる contour に沿ったモノドロミーは、どこか近くの shaded cell region ($\mathrm{Im}J > 0$ に対応) する点から始めて一周すると、 $T'$-wall （破線）を渡ったのち、$T$-wall（実線）→ $T'$-wall → $T$-wall → ··· を４回繰り返すから $T^4$ であるのに対し、右側の contour では最初に $T$-wall（実線）をわたってから → $T'$-wall → $T$-wall → ··· を４回繰り返すので、確かにモノドロミーは $T^{-4}$ になっています[6]。

Figure **??** あるいは Figure **??** より明らかなように、$f$-locus plane と $g$-locus plane から出る $S$-wall （青線）はそれら同士で互いにつながって “confine” されてしまい、遠方へは出てきません。これは、orientifold 極限が摂動論的に実現できることと対応しています。

## 謝辞

今回このような講義をする機会を与えていただいた茨城大・東科大合宿オーガナイザーの皆様、ならびに講義を聞いていただいたすべての参加者の皆様に心から感謝申し上げます。

## References

[1] B. R. Greene, A. D. Shapere, C. Vafa and S. T. Yau, Nucl. Phys. B **337** (1990) 1.

[6] $J(\tau)$ plane での軌跡によるモノドロミーの解析は Tani [**?**] によってなされました。ここでの新しい点は、（基本領域（の閉包）の境界に対応しない）$T'$-wall （破線）を導入することにより、逆行列のモノドロミーが区別できるようになった点です。

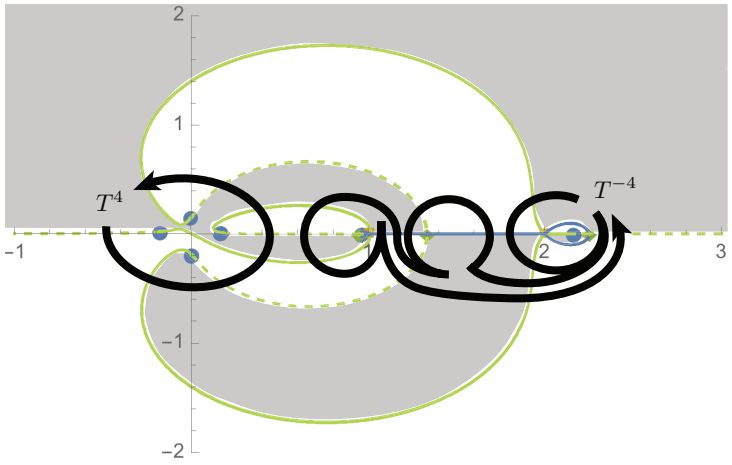



Figure 35:

[2] S. Mizoguchi and T. Tani, PTEP **2016** (2016) no.7, 073B05 [arXiv:1508.07423 [hep-th]].

[3] M. Bershadsky, K. A. Intriligator, S. Kachru, D. R. Morrison, V. Sadov and C. Vafa, Nucl. Phys. B **481** (1996) 215 [hep-th/9605200].

[4] A. Sen, Nucl. Phys. B **475** (1996) 562 [hep-th/9605150].

[5] N. Seiberg and E. Witten, Nucl. Phys. B **431** (1994) 484 [hep-th/9408099].

[6] T. Tani, Nucl. Phys. B **602**, 434 (2001).

[7] O. DeWolfe, T. Hauer, A. Iqbal and B. Zwiebach, Adv. Theor. Math. Phys. **3**, 1785 (1999) [hep-th/9812028].

[8] C. Vafa, Nucl. Phys. B **469**, 403 (1996) [hep-th/9602022].