

答案用紙 A4 1冊 (A4 両面で4ページ分) 計算用紙 B4 1枚

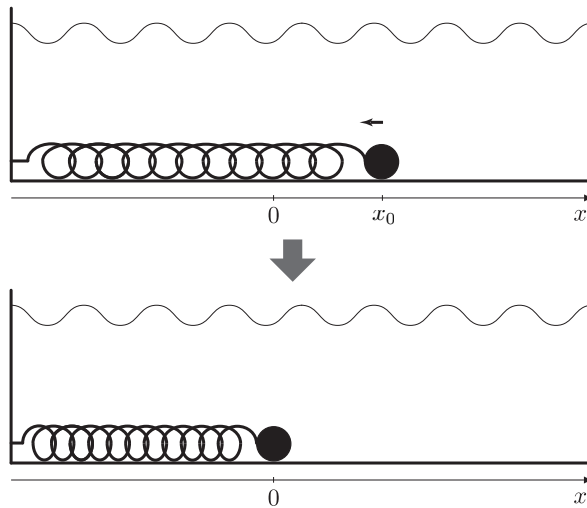
力学 A 試験問題

令和7年度前期課程S Semester
溝口 俊弥

【問題1】 図のように容器に粘性流体が入っており、その容器の側壁に弾性定数 k のばねの一方の端が固定され、そのもう一方の端につながれた質量 m の質点が行う、水平で滑らかな容器の底における1次元的な運動を考える。時間変数を t 、運動方向の座標を x 、質点の座標を $x(t)$ とし、質点は弾性力 $-kx(t)$ および粘性抵抗力 $-\kappa\dot{x}(t)$ のみを受けて運動するものとする。ただし κ は正の定数である。

(1) 質点の x 座標 $x(t)$ に関する運動方程式を書き下せ。

(2) $\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$ が $\omega_0^2 < \frac{\kappa^2}{4m^2}$ をみたすとする。質点の $t=0$ における位置 $x(0)$ を $x_0 (> 0)$ とするとき、ある有限時間経過後に質点が原点 $x=0$ に到達するための初速 $v_0 \equiv \dot{x}(0)$ の条件を求めよ。



【問題2】 xy 平面上において、4つの力のベクトル場 $\mathbf{F}(x, y)$ が次のように与えられている。

(a) $\mathbf{F}(x, y) = (x - y, x - y)$

(b) $\mathbf{F}(x, y) = (x + y, y - x)$

(c) $\mathbf{F}(x, y) = (x + y, x - y)$

(d) $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$

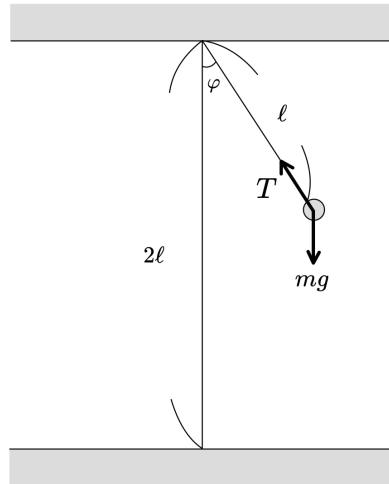
(1) $\mathbf{F}(x, y) = (F_x, F_y)$ とするとき、力 $\mathbf{F}(x, y)$ が保存力ならば

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

となっていなければならない。それはなぜか。その理由を簡単に述べよ。ただし $\mathbf{F}(x, y)$ は十分滑らかであるとする。

(2) 上の (a) から (d) までのうち、保存力であるもののポテンシャルをすべて求めよ。ただし、ポテンシャルの基準点は原点 $(x, y) = (0, 0)$ に設定せよ。

【問題3】 図のように、重力加速度 g の一様重力中において、長さ l の軽い糸とその先につけられた質量 m の質点からなる振り子の運動を考える。



振り子の糸の一方の端は、水平な地面から高さ $2l$ の位置で固定されている。質点には重力および糸からの張力のみが働き、それ以外の力（抵抗力や摩擦力など）は働かないものとして、次の問いに答えよ。

(1) 振り子の糸が固定されている点を原点とする極座標 (r, φ) を用いて、この糸の運動方程式を書き下せ。ただし、時間変数を t 、糸の張力の大きさを T とし、鉛直下向き方向を $\varphi = 0$ とせよ。また、ここでは動径座標 r が糸の長さ l と等しく一定になることを使わず、 r の時間微分を含む項も残した形で（つまり授業でやったような、極座標による一般的な加速度の表式を用いて）運動方程式を表せ。

(2) この振り子の質点を振れ角 φ_A で糸がピンと張った状態で静止させ、その後 (1) の運動方程式に従って運動させる。糸の張力の大きさ T を、質点の角度座標 φ ($0 \leq |\varphi| \leq |\varphi_A|$) の関数として求めよ。ただし、 $0 \leq \varphi_A \leq 90^\circ$ とし、糸はたるんだり伸びたりしないものとする。

(3) 振れ角 $\varphi_A = 60^\circ$ からこの振り子の質点を (2) のように運動させ、張力の大きさ T が $2mg$ に等しくなった瞬間、糸は荷重に耐えられなくなって固定点からはずれ、その後質点は一様重力中自由落下するとする。そのとき質点が地面に落ちる位置を求めよ。（次のページにつづく）

(4) 一般に、振り子の振動の周期 $\tau_{\text{周期}}$ は最大振れ角を φ_A として $k = \sin \frac{\varphi_A}{2}$ とする完全楕円積分

$$\tau_{\text{周期}} = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

で与えられることを授業で説明した。(3) で振り子が $\varphi_A = 60^\circ$ で静止した状態から運動を始めて糸が外れるまでの時間を τ とするとき、 $\frac{\tau}{\sqrt{\frac{l}{g}}} - 1$ の値を有効数字 1 けたまで、 $\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$ を $k^2 = 0$ のまわりで k^2 について 1 次までテイラー展開し項別に積分して求めよ。

【問題 4】

(1) 半径 a 、質量 M の中空の球の、中心を通る直線のまわりの慣性モーメントを求めよ。(注意：一様な球ではありません！ピンポンの球のように、薄い球殻表面にのみ質量が分布しているものを考えます。)

(2) 水平方向と角度 θ をなす斜面を、(1) の球が滑らずに初速 0 で転がるとき、斜面方向長さ x だけ転がるまでの時間を求めよ。ただし重力加速度を g とする。