

力学 A 試験問題

令和 6 年度前期課程 S セメスター

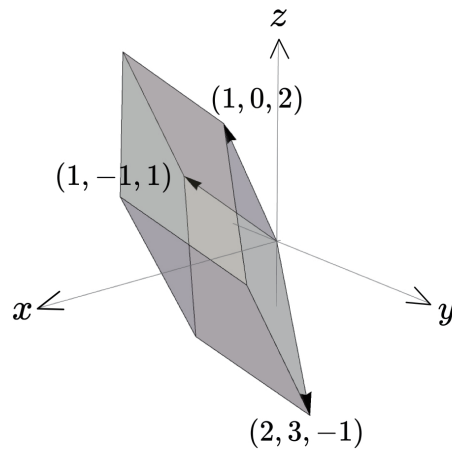
溝口 俊弥

【問題1】 次の各問いに答えよ。

(1) 図のように、3次元空間内の1次独立な3つのベクトル \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} に対して、 \mathbf{a} と \mathbf{b} 、 \mathbf{b} と \mathbf{c} 、 \mathbf{c} と \mathbf{a} それぞれのベクトルの組でできる3つの平行四辺形の2つずつの組を平行な面としてもつ六面体を平行六面体といい、その体積は

$$|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$$

で与えられる。ここで \times はベクトルの外積、 \cdot はベクトルの内積である。 $\mathbf{a} = (2, 3, -1)$, $\mathbf{b} = (1, 0, 2)$, $\mathbf{c} = (1, -1, 1)$ のとき、それらがきめる平行六面体の体積を求めよ。

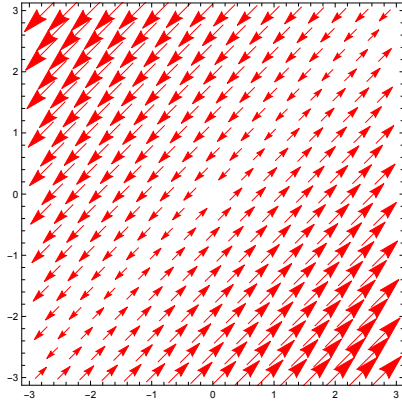


(2) 3次元空間内の位置ベクトル \mathbf{r} の点において、保存力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ のポテンシャル $V(\mathbf{r})$ が

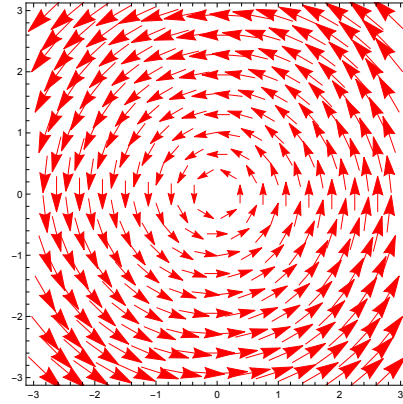
$$V(\mathbf{r}) = V_0 \frac{e^{-\mu|\mathbf{r}|}}{\mu|\mathbf{r}|}$$

で与えられるとする。ただし V_0 、 μ はそれぞれエネルギーおよび(長さ) $^{-1}$ 次元を持った定数である。直交座標系における \mathbf{r} の座標を (x, y, z) とするとき、そこでの力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ の各成分を求めよ。

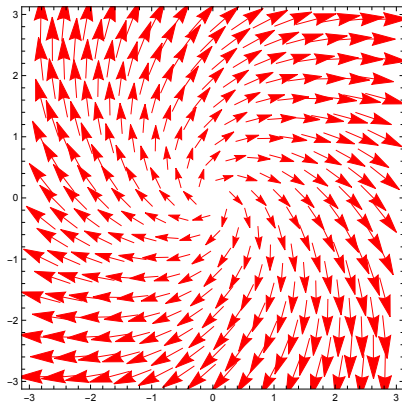
【問題2】 図のように、 xy 平面上においてある力 $\mathbf{F}(x, y)$ のベクトル場が4つ与えられている。そのうち、保存力であるものがただ一つある。



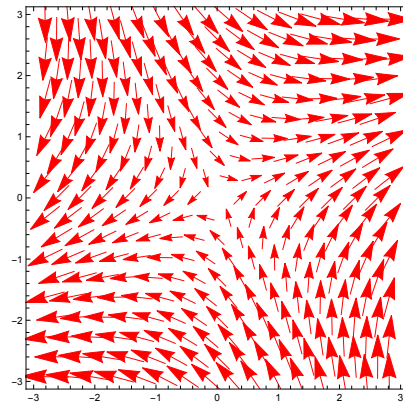
(a) $\mathbf{F}(x, y) = (x - y, x - y)$



(b) $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$



(c) $\mathbf{F}(x, y) = (x + y, y - x)$

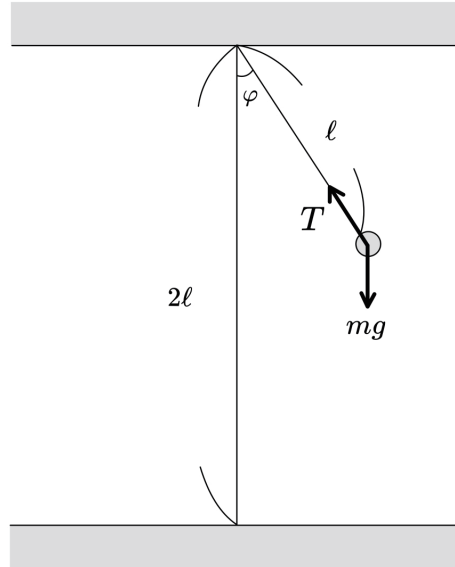


(d) $\mathbf{F}(x, y) = (x + y, x - y)$

(1) それはどれか、簡単な理由とともに答えよ。

(2) (1) の $\mathbf{F}(x, y)$ のポテンシャル $U(x, y)$ を求めよ。ただし、ポテンシャルの基準点は原点 $(x, y) = (0, 0)$ に (すなわち $U(0, 0) = 0$ となるように) 設定せよ。

【問題3】 図のように、重力加速度 g の一様重力中において、長さ ℓ の軽い糸とその先につけられた質量 m の質点からなる振り子の運動を考える。



振り子の糸の一方の端は、水平な地面から高さ 2ℓ の位置で固定されている。質点には重力および糸からの張力のみが働き、それ以外の力（抵抗力や摩擦力など）は働かないものとして、次の問いに答えよ。

(1) 振り子の糸が固定されている点を原点とする極座標 (r, φ) を用いて、この系の運動方程式を書き下せ。ただし、時間変数を t 、糸の張力の大きさを T とし、鉛直下向き方向を $\varphi = 0$ とせよ。また、ここでは動径座標 r が糸の長さ ℓ と等しく一定になることを使わず、 r の時間微分を含む項も残した形で（つまり授業でやったような、極座標による一般的な加速度の表式を用いて）運動方程式を表せ。

(2) この振り子の質点を振れ角 φ_A で糸がピンと張った状態で静止させ、その後 (1) の運動方程式に従って運動させる。糸の張力の大きさ T を、質点の角度座標 φ ($0 \leq |\varphi| \leq |\varphi_A|$) の関数として求めよ。ただし、 $0 \leq \varphi_A \leq 90^\circ$ とし、糸はたるんだり伸びたりしないものとする。

(3) 振れ角 $\varphi_A = 90^\circ$ からこの振り子の質点を (2) のように運動させ、張力の大きさ T が $3mg$ に等しくなった瞬間、糸は荷重に耐えられなくなって固定点からはずれ、その後質点は一様重力中自由落下するとする。そのとき質点が地面に落ちる位置を求めよ。

【問題 4】

(1) 半径が a で密度が一様な質量 M の球の、中心を通る直線のまわりの慣性モーメント I を求めよ。

(2) (1) の球が、水平方向と角度 θ をなす斜面を滑らずに初速 0 で転がるとする。斜面方向長さ x だけ転がるのに要する時間を求めよ。ただし、重力加速度を g とする。また慣性モーメントを I のままにして答えてよい ((1) で正解できなかった人にも得点をあげるため)。