力学A 試験問題

令和５年度前期課程Ｓセメスター

溝口　俊弥

【問題１】次の各問いに答えよ。

(1) ３次元空間内の１次独立な３つのベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ に対して、$\times$ を外積とするとき

$$\mathbf{v} \quad = \quad \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) - (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$$

で定義される $\mathbf{v}$ もまたベクトルとなる。$\mathbf{v}$ を $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ の線形結合で表せ。

(2) ３次元空間内の位置ベクトル $\mathbf{r}$ の点において、ある保存力のポテンシャル $V(\mathbf{r})$ が

$$V(\mathbf{r}) \quad = \quad k\frac{e^{-\frac{|\mathbf{r}|}{\lambda}}}{|\mathbf{r}|} \tag{1}$$

で与えられるとき、これを湯川ポテンシャルという。ただし k と λ はそれぞれの次元を持った定数である。直交座標系における $\mathbf{r}$ の座標を (x, y, z) とするとき、そこでの力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ の各成分を求めよ。

(3) 直交座標系において、次のような (x, y, z) 成分を持つ４つの力のベクトル場

$$\begin{array}{lll}
\text{(a)} & \mathbf{F} = & (x,\, x,\, 0) \\
\text{(b)} & \mathbf{F} = & (y,\, 2y - x,\, 0) \\
\text{(c)} & \mathbf{F} = & (x - y,\, 2y - x,\, 0) \\
\text{(d)} & \mathbf{F} = & (y - x,\, 2x,\, 0)
\end{array}$$

のうち、ポテンシャルをもつものが１つある。それはどれか。また、そのポテンシャル $U(x, y, z)$ を求めよ。ただし、原点 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ において $U(0, 0, 0) = 0$ となるようにポテンシャルの基準点を設定せよ。

【問題２】図のように容器に粘性流体が入っており、その容器の側壁に弾性定数 k のばねの一方の端が固定され、そのもう一方の端につながれた質量 m の質点が行う、水平で滑らかな容器の底における１次元的な運動を考える。時間変数を t、運動方向の座標を x、質点の座標を $x(t)$ とし、質点は弾性力 $-kx(t)$ および粘性抵抗力 $-\kappa\dot{x}(t)$ $(\kappa > 0)$ のみを受けて運動するものとするとき、次の各問いに答えよ。

(1) 質点の運動方程式を書き下せ。

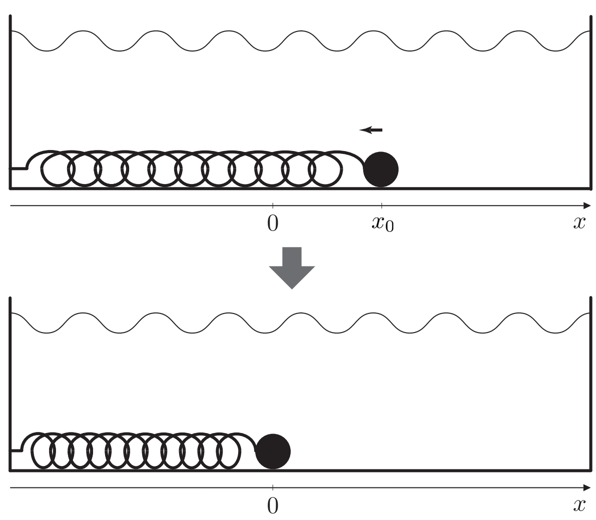
(2) 質点の $t = 0$ における位置 $x(0)$ を x_0 (> 0)、初速度 $\dot{x}(0)$ を v_0 (< 0) として (1) の解を求めよ。ただし、$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$ が $\omega_0^2 < \frac{\kappa^2}{4m^2}$ をみたす場合のみ求めればよく、必要ならば

$$\gamma_\pm \equiv -\frac{\kappa}{2m} \pm \sqrt{\frac{\kappa^2}{4m^2} - \omega_0^2}$$

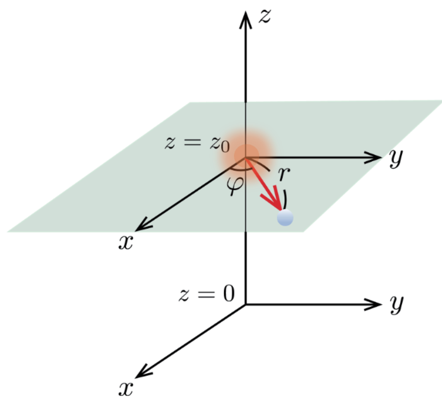
を使って解答してもよい。

(3) ある有限時間経過後に質点が原点 $x = 0$ に到達するための初速度 v_0 の条件を求めよ。

(4) (3) の条件がみたされるとき、質点が原点を通過して速度がはじめて 0 になる時刻 t を求めよ。



【問題３】



図のように、3 次元直交座標系において、点 $(x, y, z) = (0, 0, z_0)$ にある太陽から万有引力のみを受けて運動する惑星の運動を考える。時間変数を t とし、ある時刻 $t = 0$ においてその惑星が $z = z_0$ 平面内にあって、なおかつ z 方向の速度成分ももたないとすると、惑星が受ける万有引力も z 方向成分をもたないため、惑星は未来永劫 $z = z_0$ 平面内にあることになる。したがって z 方向の運動は以後考えない。

時刻 t における惑星の座標 $(x(t), y(t))$ を図のように極座標 $(r(t), \varphi(t))$ で表すと

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t)\cos\varphi(t), \\ y(t) &= r(t)\sin\varphi(t) \end{aligned}$$

となる。惑星、太陽をそれぞれ質量 m、M の質点とするとき、

(1) 惑星の運動の運動方程式を極座標を用いて（つまり r, $\dot{r}$, $\ddot{r}$, φ, $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$ などを用いて）書き下せ。ただし、万有引力定数 (Newton's constant) を G とせよ。

(2) 質点 m の、z 軸 $((x, y) = (0, 0))$ まわりの角運動量 $mr^2\dot{\varphi}$ が保存することを示せ。

(3) 万有引力のポテンシャルを $U(r)$ とするとき、その具体的な表式を書け。ただし（いつものように）無限遠で $U(r) = 0$ となるようにポテンシャルの基準をとるものとする。

(4) 角運動量が保存するから $\dot{\varphi}$ は r の関数として表され、したがってこの質点の 2 次元平面内の運動のエネルギー保存則は、ある 1 次元ポテンシャル $V(r)$ の中を質量 m の質点が運動するときの 1 次元的な運動のエネルギー保存則

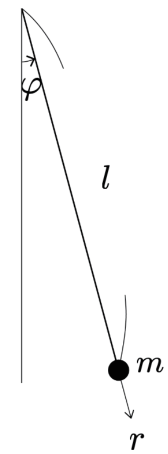
$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V(r) = E \quad (E \text{ は全エネルギーを表す定数})$$

と同じになる。保存する角運動量の大きさを mh とするとき、この 1 次元ポテンシャル $V(r)$ を求めよ。

(5) (4) の $V(r)$ を最小とする r の値 r_c と、そのときの $V(r)$ の最小値 V_{min} を、G,M,m,h を用いてそれぞれ表せ。

(6) この質点 m の全エネルギー E が V_{min} に等しいとき、その質点の運動の軌道の形はどうなるか。その形とそうなる理由を簡潔に答えよ。

【問題４】図のように、重力加速度 g の一様重力場中において、長さ l の軽い糸とその先につけられた質量 m の質点からなる振り子の運動を考える。



(1) 振り子の糸が固定されている点を原点とする極座標 (r, φ) を用いて、この系の運動方程式を書き下せ。ただし振り子の最下点（鉛直下向き方向）を $\varphi = 0$ とせよ。

(2) この振り子を最下点で一旦静止させたのち、φ 方向に初速度 v_0 を与えて振り子を振動させる。そのときこの系の力学的エネルギー保存を表す方程式を書け。ただし、糸がたるむことはないとする。

(3) v_0 が十分大きければ、糸はたるまずに最高点 $\varphi = \pi$ を通過して円運動を行う。そのようになるために必要な v_0 の最小値を求めよ。

(4) 振動が微小でないとき、その振動の周期 T は最大振れ角を φ_A として $k = \sin\frac{\varphi_A}{2}$ とする完全楕円積分

$$T \;=\; 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

で与えられることを授業で説明した。$\varphi_A = 30^\circ$ のとき、周期 T は微小振動の周期 $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ と比べてどれだけ大きいか。被積分関数 $\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$ を $k^2 = 0$ のまわりで k^2 について１次までテイラー展開し、項別に積分して（微小振動の周期との比）$-\,1$ $(= \frac{T}{T_0} - 1)$ を有効数字２けたまで求めよ。