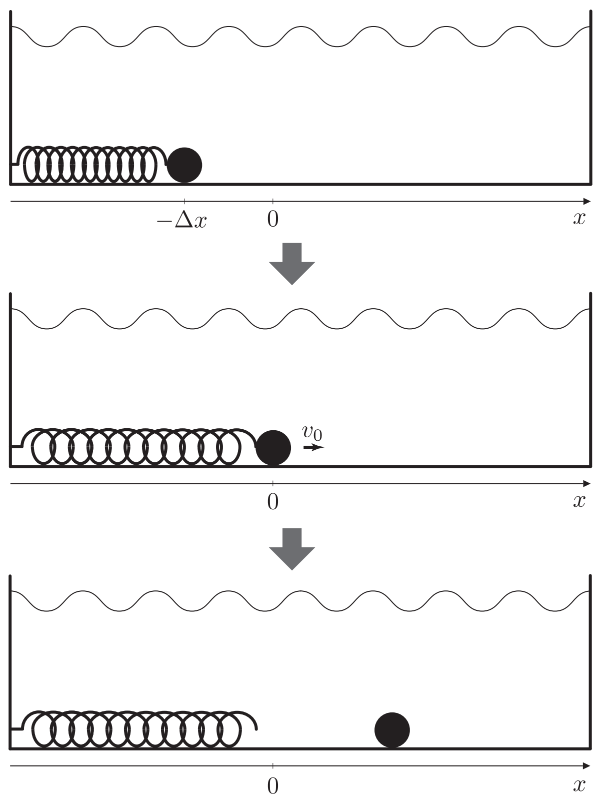
力学A 試験問題

令和４年度前期課程Ｓセメスター

溝口　俊弥

【問題１】図のように、底が滑らかで水平な容器が粘性流体で満たされており、その上に弾性定数 k の軽いバネがあって、その左端が容器の壁面に固定されている。バネをそのつりあいの位置より Δx 縮め、そのバネの右端に質量 m の金属球を置いて外力で静止させておく（つまり手などで押さえておく）。時間変数を t とし、時刻 $t = 0$ で外力を解き（つまり手をはなして）金属球をバネの弾性力によって（ピンボールのように）右方向に運動させる。金属球の運動やバネの伸び縮みは１次元的なものとし、また金属球はバネがつりあいの位置にまで戻った以後はバネから弾性力を受けないものとするとき、次の問いに答えよ。



(1) 水平右向きを正の向きに x 軸をとり、バネがつりあいの位置にあるときの金属球の中心位置を $x = 0$ とすると、上の仮定により時刻 $t = 0$ において金属球の中心は $x = -\Delta x$ にある。外力を解いた（手をはなした）後、バネがつりあいの位置に戻るまでの金属球の中心の x 座標 $x(t)$ に関する運動方程式を書き下せ。ただし、金属球はバネの弾性力と粘性抵抗力のみを受けて運動するものとし、また粘性抵抗力の大きさは速度に比例しその比例定数は κ であるとせよ。

(2) 粘性抵抗力の比例定数 κ が

$$\kappa = \sqrt{mk}$$

をみたすとき、(1) の運動方程式を解いて、初期条件 $x(0) = -\Delta x$, $\dot{x}(0) = 0$ をみたす $x(t)$ を求めよ。

(3)(2) のとき、金属球の中心が $x = 0$ にきたときの時刻 $t = t_0$ を求めよ。また、そのときの金属球の速度 v_0 を求めよ。

(4)(3) の時刻 $t = t_0$ 以後、金属球は粘性抵抗力のみを受けて運動する。金属球が止まる位置を求めよ。ただし v_0 を用いた式で解答してもよい。（止まるまでに無限の時間を要するが、極限値を答えればよい。）

【問題２】２次元平面上において、時刻 t における質量 m の質点の位置を、原点からのその点までの距離 $r(t)$ と、 原点を通るある決められた直線（例えば「x 軸」）とその位置ベクトルがなす角 $\varphi(t)$ で表す。位置ベクトルが $\mathbf{r}(t)$ の位置における、動径方向および動径と垂直反時計回り方向を向く大きさ１のベクトル（「基本ベクトル」）$\mathbf{e}_r(\mathbf{r}(t)), \mathbf{e}_\varphi(\mathbf{r}(t))$ をそれぞれ単に $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$ と書くと、位置ベクトル $\mathbf{r}(t)$ 自身は

$$\mathbf{r}(t) = r(t)\mathbf{e}_r,$$

速度ベクトル $\mathbf{v}(t) \equiv \dot{\mathbf{r}}(t)$ は

$$\mathbf{v}(t) = \dot{r}(t)\mathbf{e}_r + r(t)\dot{\varphi}(t)\mathbf{e}_\varphi,$$

加速度ベクトル $\mathbf{a}(t) \equiv \ddot{\mathbf{r}}(t)$ は

$$\mathbf{a}(t) = \left(\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\varphi}(t)^2\right)\mathbf{e}_r + \left(2\dot{r}(t)\dot{\varphi}(t) + r(t)\ddot{\varphi}(t)\right)\mathbf{e}_\varphi$$

である。（以下、t の関数であることを示す $\cdots(t)$ を省略する。）

(1) この質点が、原点に固定された別の質点 M による万有引力を受けてこの平面内を運動するときの運動方程式を、$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$ それぞれの成分の方程式として（つまり２本）書き下せ。また、原点のまわりの質点の角運動量 $mr^2\dot{\varphi}$ が保存することを示せ。ただし、万有引力定数を G とせよ。

(2) 角運動量が保存するから $\dot{\varphi}$ は r の関数として表され、したがってこの質点の２次元平面内の運動のエネルギー保存則は、質量 m の質点が別の１次元ポテンシャル $V(r)$ の中で運動するときの１次元的な運動のエネルギー保存則

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V(r) = E \quad (E \text{ は全エネルギーを表す定数})$$

と同じになる。保存する角運動量の大きさの $\frac{1}{m}$ である $r^2\dot{\varphi}$ の値を h として、この１次元ポテンシャル $V(r)$ を表せ。

(3)$V(r)$ を最小とする r の値 r_c と、そのときの $V(r)$ の最小値 V_{min} を求めよ。

(4) この１次元ポテンシャル $V(r)$ 中 $r = r_c$ 近傍でこの質点が微小振動するとき、その周期を求めよ。

【問題３】北緯 α のところで、質点を南に向かって水平から仰角 θ で初速度 V_0 で射出する。地球の重力加速度を $g = 9.8[\mathrm{m\ s^{-2}}]$、自転の角速度を $\omega = 7.3 \times 10^{-5}[\mathrm{s^{-1}}]$, $\theta = \alpha = 45[°]$, $V_0 = 500[\mathrm{m\,s^{-1}}]$ として落下地点を求めよ。ただし、自転の影響は遠心力は無視してコリオリの力のみ考慮するものとし、ω １次までの近似で求めればよい。また空気による抵抗力は無視する。

【問題４】

(1) 半径 a、質量 M の中空の球の、 中心を通る直線のまわりの慣性モーメントを求めよ。（注意：一様な球ではありません！ピンポンの球のように、薄い球殻表面にのみ質量が分布しているものを考えます。）

(2) 表面がゴムでできた、水平方向と角度 θ をなす斜面を、(1) の球が滑らずに初速 0 で転がるとき、斜面方向長さ x だけ転がるまでの時間を求めよ。