力学A 試験問題

令和３年度前期課程Ｓセメスター

溝口　俊弥

【問題１】次の各問いに答えよ。

(1) ３次元空間内の３つのベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ に対して、$\times$ を外積とするとき

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a}))$$

で定義されるベクトルは

a.	$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{a})$	b.	$(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$	c.	$(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$
d.	$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{a}\times\mathbf{c})$	e.	$(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$	f.	$(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{c}\times\mathbf{b})$

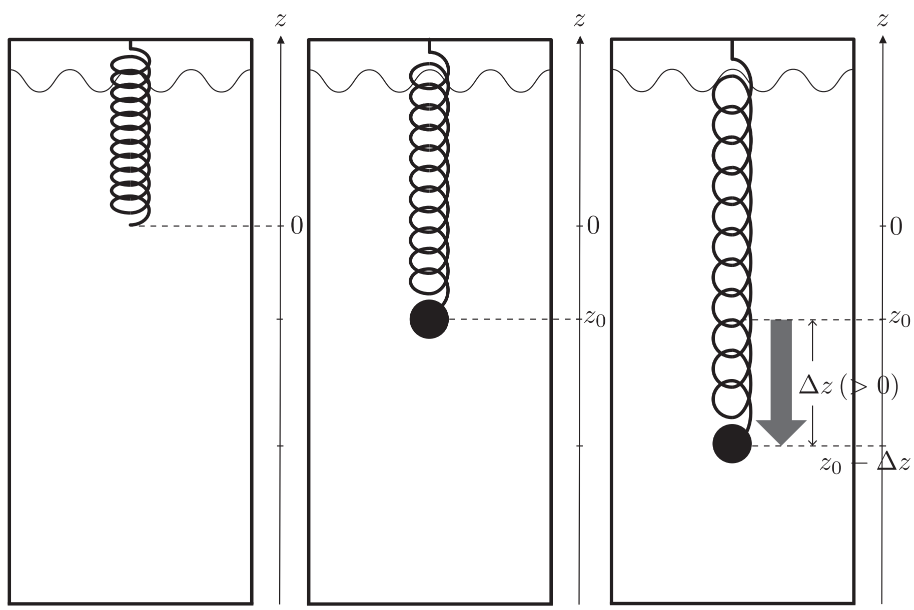
のいずれかに等しい。等しいものの記号を答え、それを証明せよ。

(2) ３次元空間内の位置ベクトル $\mathbf{r}$ の点において、ある保存力のポテンシャル $V(\mathbf{r})$ が

$$V(\mathbf{r}) \quad = \quad k\frac{e^{-\frac{|\mathbf{r}|}{\lambda}}}{|\mathbf{r}|} \tag{1}$$

で与えられるとき、これを湯川ポテンシャルという。ただし k と λ はそれぞれの次元を持った定数である。直交座標系における $\mathbf{r}$ の座標を (x, y, z) とするとき、そこでの力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ の各成分を求めよ。

【問題２】図のように、重力加速度 g の一様重力場中に置かれた容器に密度 ρ_0 の粘性流体が入っており、その容器の上端から弾性定数 k の軽いバネがつるされている。このバネの先端につながれた質量 m、体積 V の球体が行う鉛直方向の１次元的な運動に関して次の問いに答えよ。ただし、鉛直方向の座標を z、時間変数を t とし、また z 座標は鉛直上向きを正にとり、１番左の図のようにバネに球体をつながないときのバネの先端位置を $z = 0$ とする。



(1) 真ん中の図のように、球体をバネの先端につなぎ、重力、浮力、弾性力がつりあう位置で静止させる。このときのつりあい位置 z_0 を求めよ。ただし $m > \rho_0 V$（すなわちバネがなければ球体はこの流体中沈む）とする。

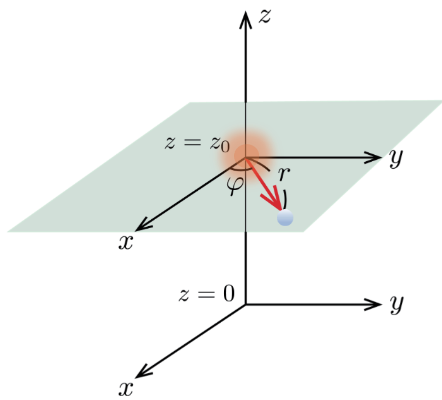
(2) 次に、一番右の図のように球体をさらに $z = z_0 - \Delta z$ の位置にまで引き下げ（$\Delta z > 0$）、そこから初速 0 で重力、浮力、弾性力および粘性抵抗力によって運動させる。時刻 t における球体の座標を $z(t)$ とするとき、球体の運動方程式を書き下せ。ただし、粘性抵抗力は $-\kappa\dot{z}(t)$ (κ は正の定数) とせよ。

(3) 粘性抵抗力の大きさを決めている定数 κ が $\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$ として $\omega_0^2 > \frac{\kappa^2}{4m^2}$ をみたす（すなわち周期的な減衰振動解になる）とき、初期条件 $z(0) = z_0 - \Delta z$, $\dot{z}(0) = 0$ をみたす $z(t)$ を求めよ。ただし

$$\omega_1 \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\kappa^2}{4m^2}}$$

を使って表してもよい。

【問題３】



図のように、3 次元直交座標系において、点 $(x, y, z) = (0, 0, z_0)$ にある太陽から万有引力のみを受けて運動する惑星の運動を考える。時間変数を t とし、ある時刻 $t = 0$ においてその惑星が $z = z_0$ 平面内にあって、なおかつ z 方向の速度成分ももたないとすると、惑星が受ける万有引力も z 方向成分をもたないため、惑星は未来永劫 $z = z_0$ 平面内にあることになる。したがって z 方向の運動は以後考えない。

時刻 t における惑星の座標 $(x(t), y(t))$ を図のように極座標 $(r(t), \varphi(t))$ で表すと

$$
\begin{aligned}
x(t) &= r(t)\cos\varphi(t), \\
y(t) &= r(t)\sin\varphi(t)
\end{aligned}
$$

となる。惑星、太陽をそれぞれ質量 m、M の質点とするとき、

(1) 惑星の運動の運動方程式を極座標を用いて（つまり r, $\dot{r}$, $\ddot{r}$, φ, $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$ などを用いて）書き下せ。ただし、万有引力定数 (Newton's constant) を G とせよ。

(2) 質点 m の、z 軸 $((x, y) = (0, 0))$ まわりの角運動量 $mr^2\dot{\varphi}$ が保存することを示せ。

(3) 万有引力のポテンシャルを $U(r)$ とするとき、その具体的な表式を書け。ただし（いつものように）無限遠で $U(r) = 0$ となるようにポテンシャルの基準をとるものとする。

(4) 角運動量が保存するから $\dot{\varphi}$ は r の関数として表され、したがってこの質点の 2 次元平面内の運動のエネルギー保存則は、ある 1 次元ポテンシャル $V(r)$ の中を質量 m の質点が運動するときの 1 次元的な運動のエネルギー保存則

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V(r) = E \quad (E \text{ は全エネルギーを表す定数})$$

と同じになる。保存する角運動量の大きさを mh とするとき、この 1 次元ポテンシャル $V(r)$ を求めよ。

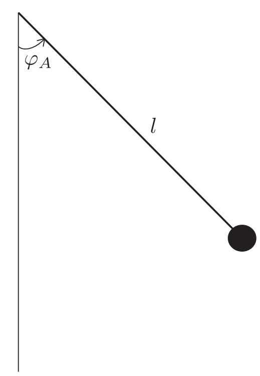
(5) (4) の $V(r)$ を最小とする r の値 r_c と、そのときの $V(r)$ の最小値 V_{min} を、G,M,m,h を用いてそれぞれ表せ。

(6) この質点 m の全エネルギー E が V_{min} に等しいとき、その質点の運動の軌道の形はどうなるか。その形とそうなる理由を簡潔に答えよ。

【問題４】重力加速度 g の一様重力場中における、糸の長さ l の振り子の周期 T は、振幅が微小でない場合、最大振れ角を φ_A として $k = \sin\frac{\varphi_A}{2}$ とするとき

$$T \;=\; 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

で与えられる。



最大振れ角 φ_A が 30° のとき、周期 T は微小振動の周期 $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ と比べてどれだけ大きいか。被積分関数 $\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$ を $k^2 = 0$ のまわりで k^2 について１次までのテイラー展開で近似し、項別に積分して（微小振動の周期との比）-1 $(= \frac{T}{T_0} - 1)$ を有効数字２けたまで求めよ。
(ヒント：$f(x)$ を $x = 0$ のまわりで１次までテイラー展開するということは

$$f(x) \;=\; f(0) + f'(0)x + O(x^2)$$

とすることだった。 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x\sin^2\theta}}$ として計算すればよい。)