力学A 期末試験問題　解答と解説

令和２年度前期課程Ｓセメスター

溝口　俊弥

【問題１】空気中を落下する雨の速度を考える。空気は水よりかなり軽いので浮力は無視する。雨の水滴は球状としてその半径を a、水滴の速度を v とするとき、粘性抵抗力の大きさは空気の粘性係数を η として $6\pi a\eta v$ で与えられ、また慣性抵抗力の大きさは空気の密度を ρ_0、抗力係数を C_D として $\frac{1}{2}\pi C_D \rho_0 a^2 v^2$ で与えられるものとする。

$a = 2.0[\mathrm{mm}]$、$\eta = 1.8 \times 10^{-5}[\mathrm{Pa\ s}]$、$\rho_0 = 1.2[\mathrm{kg\ m^{-3}}]$、$C_D = 0.45$ とするとき、粘性抵抗力と慣性抵抗力それぞれの大きさが等しくなるような速度 v_c を有効数字１けたで数値的に求めると

$$v_c = \boxed{(\text{あ})} \times 10^{\boxed{(\text{い})}}[\mathrm{m\,s^{-1}}]$$

である。$\boxed{(\text{あ})}$、$\boxed{(\text{い})}$ に当てはまる数を解答欄にそれぞれ記入せよ。（半角で記入してください。）

また、この v_c は実際にふだん体感する雨の速度と比較してかなり小さい。このことは、実際の雨ではどちらの抵抗力がどうだ、ということを意味しているか。解答欄$\boxed{(\text{う})}$に１文で簡潔に答えよ。

解答

$$6\pi a\eta v_c = \frac{1}{2}\pi C_D \rho_0 a^2 v_c^2$$

に与えられた数値を代入して計算すると

$$v_c = 2 \times 10^{-1}[\mathrm{m\,s^{-1}}]$$

となる。よって

$$\boxed{(\text{あ})} = 2, \quad \boxed{(\text{い})} = -1$$

また、$\boxed{(\text{う})}$は
「慣性抵抗の方が主に抵抗力として寄与する。」（あるいは「慣性抵抗の方が大きい。」「慣性抵抗が支配的になる。」「粘性抵抗は弱い。」などすべて正解。）

解説

$\boxed{(\text{あ})}$、$\boxed{(\text{い})}$は中学でもできる問題でしたね。$\boxed{(\text{う})}$は２割ぐらいの人が逆を書いていました。秒速２０ cm というと雪よりも遅いので、それより実際には速い、ということは、速度の２乗で効いてくる慣性抵抗が主に重力とつりあって終端速度で落下している、ということになります。「慣性抵抗が大きい／強い」「粘性抵抗が小さい／弱い」という意味のことを書いた人はすべてマルにしました。

【問題２】直交座標系において、次のような (x, y, z) 成分を持つ４つの力のベクトル場

$$
\begin{array}{lll}
\text{(a)} & \mathbf{F} = & (2x - y,\ x,\ 0) \\
\text{(b)} & \mathbf{F} = & (2y,\ x - y,\ 0) \\
\text{(c)} & \mathbf{F} = & (y,\ y,\ 0) \\
\text{(d)} & \mathbf{F} = & (2x - y,\ y - x,\ 0)
\end{array}
$$

のうち、ポテンシャルをもつものは$\boxed{(\text{あ})}$のみであり、またそのポテンシャルは

$$
(\boxed{(\text{い})})x^{\boxed{(\text{う})}} + (\boxed{(\text{え})})x^{\boxed{(\text{お})}}y^{\boxed{(\text{か})}} + (\boxed{(\text{き})})y^{\boxed{(\text{く})}}
$$

ととれる。$\boxed{(\text{あ})}$に当てはまるものを (a) から (d) から選べ。また$\boxed{(\text{い})}$から$\boxed{(\text{く})}$ に当てはまる数を解答欄にそれぞれ記入せよ。(半角で記入してください。分数は、例えば $\frac{1}{2}$ なら 1/2、$-\frac{1}{2}$ なら $-1/2$ のように記入してください。$\boxed{(\text{い})}$、$\boxed{(\text{え})}$、$\boxed{(\text{き})}$が ( ) にはいっているのは係数が負の数になるかもしれないからで、また逆に ( ) があっても負とは限りません。1 を +1 と書いていいかとか、-1 の 1 を省いていいかとかは質問しないでください。)

解答

$\boxed{\text{(あ)}}$(d) $\boxed{\text{(い)}}$から$\boxed{\text{(く)}}$は順に　$-1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1/2,\ 2$

解説

$\mathbf{F}$ がある $U(x,y)$ で $(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, 0)$ とかけるためには $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$ でなければならないから、これをみたすのは (d) のみです。そしてそのような U は

$$U \quad = \quad -x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2$$

です。$\boxed{\text{(あ)}}$はほとんどの人ができていました。$\mathbf{F} = -\nabla U$ の $-$ を忘れている人が結構いました。

【問題３】３次元空間内において、原点に固定された質量 M の質点から生ずる万有引力による、質量 m の質点が行う運動を考える。時刻 t におけるその質点の位置ベクトルを $\mathbf{r}(t)$ とし、原点からの距離 $r(t) \equiv |\mathbf{r}(t)|$ とするとき、次の問いに答えよ。ただし万有引力定数を G とする。（以下、いつものように時間の関数であることを表す引数 “(t)” を省略することがある。）

(1) 運動方程式は、 $\dot{}$ を時間変数 t に関する微分として

$$m\,\ddot{\mathbf{r}} \quad = \quad \boxed{\text{(あ)}}$$

である。$\boxed{\text{(あ)}}$ に当てはまるものを次の中から記号で答えよ。

(a) $+\frac{GmM}{r^2}\,\mathbf{r}$　(b) $-\frac{GmM}{r^2}\,\mathbf{r}$　(c) $+\frac{GmM}{r^3}\,\mathbf{r}$　(d) $-\frac{GmM}{r^3}\,\mathbf{r}$

(2) 万有引力のポテンシャル U は $r \equiv |\mathbf{r}|$ のみによってきまる関数であり、無限遠で $U = 0$ となるようにポテンシャルの基準をとったとき

$$U(r) \quad = \quad \boxed{\text{(い)}}$$

である。$\boxed{(い)}$ に当てはまるものを次の中から記号で答えよ。

(a) $+\frac{GmM}{r}$ (b) $-\frac{GmM}{r}$ (c) $+\frac{GmM}{r^2}$ (d) $-\frac{GmM}{r^2}$

解答

$\boxed{(あ)}$ (d) $\boxed{(い)}$ (b)

解説

公式そのままの問題でした。$\boxed{(あ)}$ は逆 2 乗則ですが、$\mathbf{r}$ がかかっているので分母は 3 乗になります。

(3) この系では角運動量が保存するから、質点は初期条件できまる 2 次元平面内を永遠に運動する。その平面内の任意の原点を通るある直線と $\mathbf{r}(t)$ とのなす角を $\varphi(t)$ とすると、力学的エネルギー保存則は全エネルギーを E としたとき

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \boxed{(う)}) + U(r) \quad = \quad E$$

と表せる。また、面積速度が一定なので

$$\boxed{(え)}) \quad = \quad 一定$$

と書ける。$\boxed{(う)}$、$\boxed{(え)}$ に当てはまるものを次の中からそれぞれ記号で答えよ。

(a) $r\dot{\varphi}$ (b) $r^2\dot{\varphi}$ (c) $r\dot{\varphi}^2$ (d) $r^2\dot{\varphi}^2$

解答

$\boxed{(う)}$ (d) $\boxed{(え)}$ (b)

解説

これも公式そのままでした。

(4) (3) の $\boxed{(え)}$ の値を h とする。h を使って $\boxed{(う)}$ から $\dot{\varphi}$ を消去することにより、(3) の 2 次元運動のエネルギー保存則は、別の 1 次元ポテンシャル $V(r)$ の中を質量 m の質点が 1 次元的な運動をするときのエネルギー保存則

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V(r) = E$$

と同じになる。ただし $V(r)$ は万有引力のポテンシャル $U(r)$ と遠心力による有効ポテンシャル $U_{cen}(r)$ の和

$$V(r) = U(r) + U_{cen}(r)$$

で与えられ

$$U_{cen}(r) = \frac{m^{\boxed{(お)}}h^{\boxed{(か)}}}{\boxed{(き)}r^{\boxed{(く)}}}$$

である。$\boxed{(お)}$、$\boxed{(か)}$、$\boxed{(き)}$、$\boxed{(く)}$ に当てはまる数を解答欄にそれぞれ記入せよ。(半角で記入してください。)

解答

$\boxed{\text{(お)}}$ 1　$\boxed{\text{(か)}}$ 2　$\boxed{\text{(き)}}$ 2　$\boxed{\text{(く)}}$ 2

解説

スライドにあったとおりですね。全員（！）正解でした。（全角で書いていた人が２人いましたけどその人たちもまるにしました。）

(5) ポテンシャルが $U_{cen}(r)$ で与えられる力は $\boxed{\text{(け)}}$ である。また、$r \to 0$ のとき $\boxed{\text{(こ)}}$ の方が支配的（つまりそちらの方がよりきいてくるということ）になる。$\boxed{\text{(け)}}$、$\boxed{\text{(こ)}}$ に当てはまるものを次の中からそれぞれ記号で答えよ。

(a) 引力　(b) 斥力
(c) $U_{cen}(r)$ に比べて $U(r)$　(d) $U(r)$ に比べて $U_{cen}(r)$

解答

$\boxed{\text{(け)}}$ (b)　$\boxed{\text{(こ)}}$ (d)

解説

遠心力はもちろん斥力で、$1/r^2$ だからそちらの方が万有引力よりきくわけです。

(6) さて、ここまでは授業でやったことそのままである。次に、質量 M の質点を太陽、質量 m の質点をその周りを公転する惑星とし、万有引力への一般相対論的補正を考えよう。と言っても今の場合は、単に１次元ポテンシャル $V(r)$ に新たな微小項 $\frac{mh^2a}{2r^3}$ が付け加わって、(4) が変更されて $V(r)$ の代わりに

$$\begin{aligned}\widetilde{V}(r) &\equiv V(r) - \frac{mh^2a}{2r^3} \\ &= U(r) + U_{cen}(r) - \frac{mh^2a}{2r^3}\end{aligned}$$

をポテンシャルとするだけでいい。ここで a は長さの次元をもち

$$a = \frac{2GM}{c^2} \quad \text{（}c\text{ は光速）}$$

で与えられる「シュバルツシルト半径」と呼ばれる量であるが、名前は今の場合どうでもいい。

授業では、$V(r)$ を最小とする r の値

$$r = \frac{h^2}{GM} \equiv l$$

と、そのときの $V(r)$ の 2 階の微分係数

$$V''(l) = \frac{G^4M^4m}{h^6}$$

を求め、１次元系の $r = l$ 近傍での微小振動の周期が円運動の周期と一致することを確かめた。一方、ポテンシャルが $V(r)$ から $\widetilde{V}(r)$ になったとき、それが最小となる r の値は l から変化するが、太陽系の惑星では a が l に比べて非常に小さい（例えば太陽の a は約 3[km]、水星と太陽の l は約 6×10^7[km]）ため、その違いはわずかである。$\widetilde{V}(r)$ を最小とする r の値を a で展開して１次までの近似で求めると

$$r = l \boxed{(さ)} \boxed{(し)} a$$

となる。$\boxed{(さ)}$、$\boxed{(し)}$ に当てはまるものを次の中から記号で答えよ。

(a) $+$　　(b) $-$
(c) $\frac{1}{3}$　　(d) $\frac{1}{2}$　　(e) $\frac{2}{3}$　　(f) 1　　(g) $\frac{3}{2}$　　(h) 2　　(i) 3

（これがわかると、$h = \boxed{(え)}$ であるから、面積速度が同じであるという条件のもとで、$O(\frac{a}{l})$ までの近似で円運動の周期はポテンシャルが $V(r)$ のときの

$$\left(1 \boxed{(さ)} \boxed{(し)} \times 2 \times \frac{a}{l}\right) \text{倍}$$

になる。）

解答

$\boxed{(さ)}$ (b)　$\boxed{(し)}$ (g)

解説

$\widetilde{V}'(r)$ となる r を求めると、

$$\begin{aligned} \widetilde{V}'(r) &= +\frac{GMm}{r^2} - \frac{mh^2}{r^3} + \frac{3mh^2a}{2r^4} \\ &= \frac{mh^2}{r^4}\left(\frac{r^2}{l} - r + \frac{3}{2}a\right) \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} & \frac{r^2}{l} - r + \frac{3}{2}a = 0 \\ \Rightarrow \quad & r = \frac{l}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - 6\frac{a}{l}}\right) \end{aligned}$$

今 r の l からのずれを見ているから $+$ の枝をとり、

$$\sqrt{1 - 6\frac{a}{l}} = 1 - 3\frac{a}{l} + O((\tfrac{a}{l})^2)$$

を使うと

$$\begin{aligned} r &= \frac{l}{2}\left(1+1-3\frac{a}{l}+O((\tfrac{a}{l})^2)\right) \\ &= l-\frac{3}{2}a+O((\tfrac{a}{l})^2) \end{aligned}$$

となります。

(7) $\widetilde{V}(r)$ が最小になる点 $r = l\boxed{(さ)}\boxed{(し)}a$ を $\equiv \tilde{l}$ とおくとき、そこでの $\widetilde{V}''(r)$ の値を同様に a 1次までの近似で求めると

$$\widetilde{V}''(\tilde{l}) = \left(1\boxed{(す)}\boxed{(せ)}\frac{a}{l}\right)\frac{G^4M^4m}{h^6}$$

となる。$\boxed{(す)}$、$\boxed{(せ)}$ に当てはまるものを次の中から記号で答えよ。

(a) $+$ (b) $-$
(c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{2}$ (e) $\frac{2}{3}$ (f) 1 (g) $\frac{3}{2}$ (h) 2 (i) 3

（すると、微小振動の周期はポテンシャルが $V(r)$ のときの

$$\left(1\boxed{(す)}\boxed{(せ)}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{a}{l}\right)\text{倍}$$

になる。）

これらの結果は円運動の周期と微小振動の周期が $O(\frac{a}{l})$ で異なることを示し、φ 方向に 2π より微小に余計に回転しないと r 方向に元に戻らないことを意味する。このようにして、近日点移動をこの近似で実際正しく出すことができる。

<u>解答</u>

$\boxed{(す)}$ (a) $\boxed{(せ)}$ (i)

解説

$$
\begin{aligned}
\widetilde{V}''(r) &= -\frac{2GMm}{r^3} + \frac{3mh^2}{r^4} - \frac{6mh^2a}{r^5} \\
&= \frac{mh^2}{r^5}\left(-2\frac{r^2}{l} + 3r - 6a\right)
\end{aligned}
$$

である。$r = \tilde{l} = l - \frac{3}{2}a$ のとき $O(\frac{a}{l})$ までで

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r^5} &= \frac{1}{(l-\frac{3}{2}a)^5} = \frac{1}{l^5}\left(1 - 5\cdot\left(-\frac{3a}{2l}\right)\right) = \frac{1}{l^5}\left(1 + \frac{15a}{2l}\right) \\
r^2 &= (l - \frac{3}{2}a)^2 = l^2\left(1 + 2\cdot\left(-\frac{3a}{2l}\right)\right) \ = l^2\left(1 - \frac{3a}{l}\right).
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
\widetilde{V}''(\tilde{l}) &= \frac{mh^2}{l^5}\left(1 + \frac{15a}{2l}\right)\left(-2l\left(1 - \frac{3a}{l}\right) + 3l\left(1 - \frac{3a}{2l}\right) - 6a\right) \\
&= \frac{mh^2}{l^4}\left(1 + 3\frac{a}{l}\right).
\end{aligned}
$$

****

問題文で説明したように円運動の周期は $1 - \frac{3}{2} \times 2 \times \frac{a}{l} = 1 - 3\frac{a}{l}$ 倍、微小振動の周期は $1 + 3 \times (-\frac{1}{2}) \times \frac{a}{l} \ = \ 1 - \frac{3a}{2l}$ 倍になるので、$O(\frac{a}{l})$ で $2\pi \times \frac{1-\frac{3a}{2l}}{1-3\frac{a}{l}} = 2\pi(1 + \frac{3a}{2l})$ 回転しないと r 方向元に戻りません。すなわち、回転方向の角速度が動径方向の角速度に比べて $1 + \frac{3a}{2l}$ 倍に微小に大きくなることがこのような計算からわかります。ここでは軌道が限りなく円に近い場合を考えましたが、一般の楕円軌道の場合には近日点が移動することを意味し、知られた結果（例えば R. M. Wald“ *General Relativity* ”p.142 (6.3.26) 式、そこでの $2M$ が a、R_+ が l に相当、この式は > 0 で、ルートに注意）と一致します。