力学A 試験問題

令和元年度前期課程Sセメスター

溝口　俊弥

【問題１】次の各問いに答えよ。

(1) ３次元空間内の２つのベクトル $\mathbf{r}$, $\boldsymbol{\omega}$ が、直交座標系に関する成分で

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (x,\ y,\ z+R), \\ \boldsymbol{\omega} &= (-\omega\cos\alpha,\ 0,\ \omega\sin\alpha) \end{aligned}$$

のようにそれぞれ与えられているとき、

$$\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$$

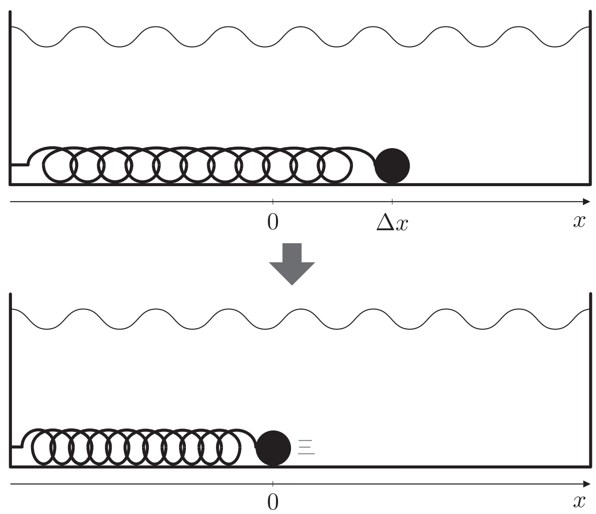
を成分で表せ。

(2) ３次元空間内の位置ベクトル $\mathbf{r}$ の点において、ある保存力のポテンシャル $V(\mathbf{r})$ が

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{kMm}{|\mathbf{r}|}e^{-\frac{|\mathbf{r}|}{\lambda}}$$

で与えられているとする。ただし M,m は質量の次元、k は万有引力定数の次元、λ は長さの次元をそれぞれ持った定数である。直交座標系における $\mathbf{r}$ の座標を (x,y,z) とし、そこでのポテンシャル $V(\mathbf{r})$ による力を $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ とするとき、$\mathbf{F}(\mathbf{r})$ を成分で表せ。

【問題２】図のように、底が滑らかで水平な容器が粘性流体で満たされており、その上に弾性定数 k の軽いバネがあって、その左端が容器の壁面に固定されている。バネの右端には質量 m の金属球が付いている。バネが Δx 引き伸ばされた状態で金属球を何らかの外力によって（つまり手などでおさえて）静止させる。時間変数を t とし、時刻 $t=0$ で外力を解いた（つまり手をはなした）後の金属球の１次元的な運動について次の問いに答えよ。

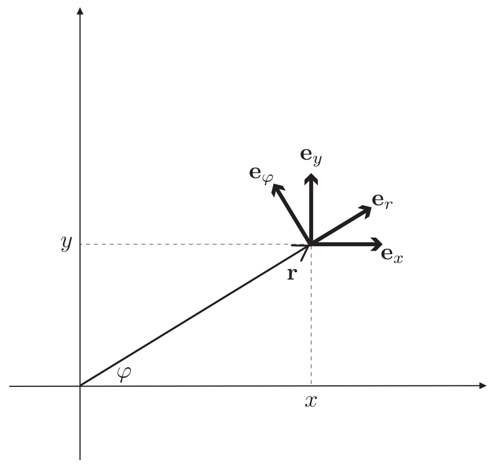


(1) 水平右向きを正の向きに x 軸をとり、バネがつりあいの位置にあるときの金属球の中心位置を $x=0$ とすると、上の仮定により時刻 $t=0$ において金属球の中心は $x=\Delta x$ にある。外力を解いた（手をはなした）後の金属球の中心の x 座標 $x(t)$ に関する運動方程式を書き下せ。ただし、金属球はバネの弾性力と粘性抵抗力のみを受けて運動するものとし、また粘性抵抗力の大きさは速度に比例しその比例定数は κ であるとせよ。

(2) 粘性抵抗力の比例定数 κ が $\kappa=\sqrt{mk}$ をみたすとき、(1) の運動方程式を解いて、初期条件 $x(0)=\Delta x, \dot{x}(0)=0$ をみたす $x(t)$ を求めよ。（ヒント：一般解を $c_+e^{*t}+c_-e^{*t}$ の形でなく $Ae^{-*t}\cos(*t+\alpha)$ の形にしておくと計算が楽になる。）

(3)(2) のとき、金属球の中心の位置が初めて $x=0$ となるときの時刻と、そのときの速度を求めよ。

【問題３】



図のように、２次元平面上において質量 m の質点の時刻 t における位置ベクトルを

$$\mathbf{r}(t) \quad = \quad x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y$$

とするとき、原点からのその点までの距離 $r(t) = |\mathbf{r}(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$ および $\mathbf{r}(t)$ と x 軸とのなす角 $\varphi(t) = \tan^{-1}\frac{y(t)}{x(t)}$ を用いると、$\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$ をそれぞれ動径方向および角度方向の互いに直交する大きさ１のベクトルとして 位置ベクトルは

$$\mathbf{r}(t) \quad = \quad r(t)\mathbf{e}_r,$$

速度ベクトル $\mathbf{v}(t) \equiv \dot{\mathbf{r}}(t)$ は

$$\mathbf{v}(t) \quad = \quad \dot{r}(t)\mathbf{e}_r + r(t)\dot{\varphi}(t)\mathbf{e}_\varphi,$$

加速度ベクトル $\mathbf{a}(t) \equiv \ddot{\mathbf{r}}(t)$ は

$$\mathbf{a}(t) \quad = \quad \left(\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\varphi}(t)^2\right)\mathbf{e}_r + \left(2\dot{r}(t)\dot{\varphi}(t) + r(t)\ddot{\varphi}(t)\right)\mathbf{e}_\varphi$$

と表される。

(1) この質点が、原点に固定された別の質点 M による万有引力を受けて運動するときの運動方程式を書き下し、質点の原点のまわりの角運動量が保存することを示せ。ただし、万有引力定数を G とせよ。

(2) 角運動量が保存するから $\dot{\varphi}$ は r の関数として表され、したがってこの質点の２次元平面内の運動のエネルギー保存則は、質量 m の質点が別の１次元ポテンシャル $U(r)$ の中で運動するときの１次元的な運動のエネルギー保存則

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U(r) = E \quad (E \text{ は全エネルギーを表す定数})$$

と同じになる。保存する角運動量の大きさを mh とするとき、この１次元ポテンシャル $U(r)$ を求めよ。

(3)$U(r)$ を最小とする r の値 r_c と、そのときの $U(r)$ の最小値 U_{min} を求めよ。

(4) この１次元ポテンシャル $U(r)$ 中 $r = r_c$ 近傍でこの質点が微小振動するとき、その周期を求めよ。（ヒント：$r = r_c$ はポテンシャルの底だから $U'(r_c)$ は０。そこでの $U''(r_c)$ を求め、$U(r)$ を $r - r_c$ の２次まで展開して単振動として近似すればよい。）

【問題４】北緯 α(鉛直方向が赤道面となす角) の地上のある点を原点とし、南方を x 軸、東方を y 軸、鉛直上方を z 軸とする、地球の自転とともに回転する座標系での質点の運動方程式は、質点が重力および自転によるみかけの力のみを受けて運動するとき、近似的に

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= 2\omega\sin\alpha\cdot\frac{dy}{dt}, \\
\frac{d^2y}{dt^2} &= -2\omega\left(\sin\alpha\cdot\frac{dx}{dt}+\cos\alpha\cdot\frac{dz}{dt}\right), \\
\frac{d^2z}{dt^2} &= -g+2\omega\cos\alpha\cdot\frac{dy}{dt}
\end{aligned}$$

で与えられる。ただし、g は重力加速度、ω は地球の自転の角速度を表す定数である。この質点が地上から鉛直上方に速度 v_0 で投射され、再び地上に落下した時、質点が投射した点からどちらの方角にどれだけ異なった位置に落ちるか求めよ。ただし、投射した点と落ちた点の z 座標は等しいとしてよい。また $\frac{dz}{dt}$ に比べて $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ は無視してよく、ω の１次まで求めればよい。（ヒント：系統的にやるなら

$$\begin{aligned}
x = x(t,\omega) &= x_0(t)+\omega x_1(t)+\cdots, \\
y = y(t,\omega) &= y_0(t)+\omega y_1(t)+\cdots, \\
z = z(t,\omega) &= z_0(t)+\omega z_1(t)+\cdots,
\end{aligned}$$

と展開し、運動方程式に代入して ω^0 次、ω^1 次 . . . と順に係数を比較して解を決定していけばよい。あるいは、こうしないでも、きちんと理由を述べて近似してもよい。）