力学A 試験問題 解答

平成２８年度前期課程Ｓセメスター

溝口　俊弥

【問題１】次の各問いに答えよ。

(1) ３次元空間内の３つのベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ に対して、関係式

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \;=\; (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$$

を示せ。

(2) ３次元空間内の位置ベクトル $\mathbf{r}$ の点でにおけるある保存力のポテンシャル $V(\mathbf{r})$ が

$$V(\mathbf{r}) \;=\; k\frac{e^{-\frac{|\mathbf{r}|}{d}}}{|\mathbf{r}|} \quad \text{（}k\text{ と }d\text{ は定数）}$$

で与えられるとき、その点におけるその力のベクトル $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ を求めよ。

【解答】

(1)

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}))_i &= \epsilon_{ijk}a_j(\mathbf{b}\times\mathbf{c})_k \\
&= \epsilon_{ijk}a_j\epsilon_{klm}b_lc_m \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})a_jb_lc_m \\
&= a_j(b_ic_j-b_jc_i) \\
&= ((\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c})_i
\end{aligned}$$

よって示された。

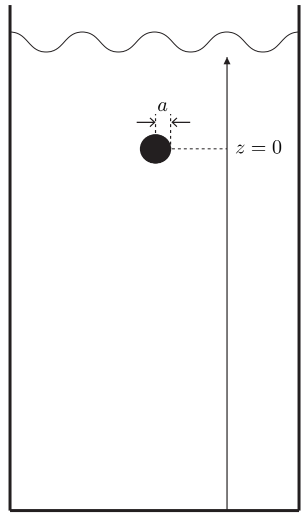
(2) $|\mathbf{r}|=r$ とすると

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= -\nabla V \\
&= -k\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-\frac{r}{d}}}{r}\right)\nabla r \\
&\quad \text{を計算して} \\
&= k\frac{(r+d)e^{-\frac{r}{d}}}{r^3d}\mathbf{r} \quad \cdots\text{答え}
\end{aligned}$$

【解説】

(1) はこういう風にやらなくても、定義に従って両辺の x 成分を地道に計算して等しいことを示し、他も同様、としても結構です。

【問題２】図のように、容器に入った粘性係数 η、密度 ρ_0 の粘性流体が重力加速度 g の一様重力場内にあり、その流体中を質量 m、半径 a の球体が運動を行う。



鉛直上向きを正の向きに z 軸をとり、時刻 $t=0$ で球体はその中心が原点 $z=0$ の位置で静止しているものとして、以後球体が重力、浮力、粘性抵抗力の 3 種類の力のみを受けて行う鉛直方向の運動について次の問いに答えよ。ただし $m > \frac{4}{3}\pi\rho_0 a^3$、すなわち球体はこの流体中沈むものとし、またあらゆる時刻において球体全体が粘性流体に浸っているとする。

(1) 鉛直方向の運動方程式を書け。ただし、粘性抵抗力の大きさは速度に比例しその比例定数は $6\pi a\eta$ であることを用いよ。

(2) 終端速度を求めよ。また、球体の速度が終端速度の $\frac{1}{4}$ に達する時刻を求めよ。

(3)(1) の運動方程式にしたがって球体が運動するとき、時刻 t における球体の中心位置の z 座標を t の関数として求めよ。ただし、t は球体が容器の底に衝突する時刻より前とする。

【解答】

(1)

$$m\ddot{z} \;=\; -mg + \frac{4}{3}\pi\rho_0 a^3 g - 6\pi a\eta\dot{z} \quad \cdots \text{答え}$$

(2) $\dot{z} \equiv v$ とおくと

$$m\dot{v} \;=\; -mg + \frac{4}{3}\pi\rho_0 a^3 g - 6\pi a\eta v \quad \cdots (*)$$

終端速度は $\dot{v} = 0$ となるときの v だからそれを v_{term} とすると

$$v_{term} \;=\; -\frac{g}{6\pi a\eta}\left(m - \frac{4}{3}\pi\rho_0 a^3\right) \quad \cdots \text{答え}$$

また $(*)$ より

$$\frac{dv}{dt} \;=\; -\frac{6\pi a\eta}{m}v - \left(1 - \frac{4}{3m}\pi\rho_0 a^3\right)g$$

$\frac{6\pi a\eta}{m} \equiv k$, $\left(1 - \frac{4}{3m}\pi\rho_0 a^3\right)g \equiv g'$ とおけば

$$\frac{dv}{dt} \;=\; -kv - g'$$

$t = 0$ で $v = 0$ だから

$$\int_0^t dt \;=\; \int_0^v \frac{dv}{-kv - g'}$$

$$\Rightarrow \quad t \;=\; -\frac{1}{k}\log\left(\frac{kv + g'}{g'}\right)$$

ここで $v_{term} = -\frac{g'}{k}$ であるから　$v = \frac{v_{term}}{4} = -\frac{g'}{4k}$ のとき

$$\begin{aligned} t &= -\frac{1}{k}\log\frac{k \cdot (-\frac{g'}{4k}) + g'}{g'} \\ &= -\frac{1}{k}\log\frac{3}{4} \\ &= \frac{m}{6\pi a\eta}\log\frac{4}{3} \quad \cdots \text{答え} \end{aligned}$$

(3) (2) より

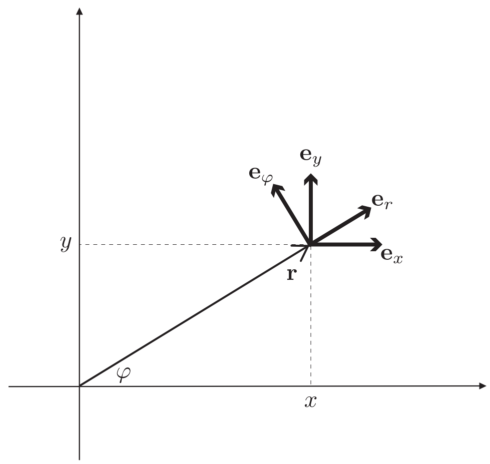
$$\frac{kv + g'}{g'} \;=\; e^{-kt}$$

$$\int_0^t \frac{kv + g'}{g'}dt \;=\; \int_0^t e^{-kt}dt$$

$z(t=0)=0$ だから

$$
\begin{aligned}
\frac{kz+g't}{g'} &= -\frac{1}{k}(e^{-kt}-1) \\
\Rightarrow \quad z &= -\frac{g'}{k}t+\frac{g'}{k^2}(1-e^{-kt}) \\
&= -\frac{(m-\frac{4}{3}\pi\rho_0 a^3)g}{6\pi a\eta}\left(t-\frac{m}{6\pi a\eta}(1-e^{-\frac{6\pi a\eta}{m}t})\right) \quad \cdots \text{答え}
\end{aligned}
$$

【問題３】図のように、２次元平面上において直交座標が (x, y) であるような位置ベクトル $\mathbf{r}$ の点に対し、その点の位置を極座標 (r, φ)（すなわちその点の原点からの距離 $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ および $\mathbf{r}$ と x 軸とのなす角 $\varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ との組） で表すとき、次の問いに答えよ。



(1) ある質点 m がこの平面内を運動するとする。その点の任意の時刻 t における位置ベクトルを $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ とするとき、その質点の速度ベクトル $\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ および加速度ベクトル $\mathbf{a}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t))$ の r 方向成分と φ 方向成分 $(v_r(t), v_\varphi(t))$, $(a_r(t), a_\varphi(t))$ を r, $\dot{r}$, $\ddot{r}$, φ, $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$ を使って表せ。ただし、一般にあるベクトル $\mathbf{A}$ の r 方向成分と φ 方向成分とは、$\mathbf{A}$ を r 方向と φ 方向の基本ベクトル（その点における r のみ、φ のみのそれぞれの変化に対応する大きさ１の基底ベクトル）$\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$ の１次結合 $\mathbf{A} = A_r\mathbf{e}_r + A_\varphi\mathbf{e}_\varphi$ として表したときの係数 A_r, A_φ のことである（いつもの普通の定義）。

(2) この質点 m が、原点に固定された別の質点 M による万有引力を受けて運動するときの運動方程式を書き下し、質点 m の原点のまわりの角運動量が保存することを示せ。ただし、万有引力定数 (Newton’s constant) を G とせよ。

(3) 角運動量が保存するから $\dot{\varphi}$ は r の関数として表され、したがってこの質点 m の２次元平面内の運動のエネルギー保存則は、質点 m が別の１次元ポテンシャル $U(r)$ の中で運動するときの１次元的な運動のエネルギー保存則

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U(r) = E \quad (E \text{ は全エネルギーを表す定数})$$

と同じになる。保存する角運動量の大きさを mh とするとき、この等価な１次元ポテンシャル $U(r)$ を求めよ。

(4)$U(r)$ を最小とする r の値と、そのときの $U(r)$ の最小値 U_{min} を、G,M,m,h を用いてそれぞれ表せ。また、$E=U_{min}$ のとき質点 m の軌道の形は何か、理由とともに答えよ。

【解答】

(1)

$$\begin{aligned}(v_r(t),\ v_\varphi(t)) &= (\dot{r},\ r\dot{\varphi}),\\ (a_r(t),\ a_\varphi(t)) &= (\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2,\ 2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi}) \quad \cdots \text{答え}\end{aligned}$$

(2) 運動方程式は

$$\begin{aligned}m(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2) &= -G\frac{Mm}{r^2},\\ m(2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi}) &= 0 \qquad \cdots \text{答え}\end{aligned}$$

また φ 方向の運動方程式より

$$m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0 \quad \Rightarrow \quad mr^2\dot{\varphi} = \text{一定}$$

ゆえに角運動量は保存することが示された。

(3) $mr^2\dot{\varphi}=m\,h$ より $\quad \dot{\varphi}=\frac{h}{r^2}$ よって

$$\begin{aligned}m\left(\ddot{r}-r\frac{h^2}{r^4}\right) &= -G\frac{Mm}{r^2}\\ \dot{r}\times \quad \Rightarrow \quad m\left(\dot{r}\ddot{r}-\dot{r}\frac{h^2}{r^3}\right) &= -G\frac{Mm}{r^2}\dot{r}\end{aligned}$$

$$\int dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{mh^2}{2r^2}-\frac{GMm}{r}=E$$

よって

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}+\frac{mh^2}{2r^2} \quad \cdots \text{答え}$$

(4)

$$U'(r) = -\frac{mh^2}{r^3}+\frac{GMm}{r^2} \quad \text{より}$$

$U'(r) = 0$ となる r は

$$r = \frac{h^2}{GM} \quad \cdots 答え$$

このとき

$$\begin{aligned} U_{min} &= U(\tfrac{h^2}{GM}) \\ &= -\frac{G^2M^2m}{2h^2} \quad \cdots 答え \end{aligned}$$

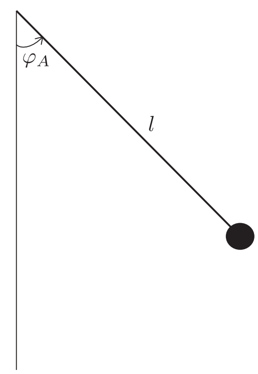
さらにこのときは $\dot{r} = 0$ だから

$$円 \qquad \cdots 答え$$

【問題４】重力加速度 g の一様重力場中における、糸の長さ l の振り子の周期 T は、振幅が微小でない場合、最大振れ角を φ_A として $k = \sin\frac{\varphi_A}{2}$ とするとき

$$T \ = \ 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

で与えられる。



最大振れ角 φ_A が 45° のとき、周期 T は微小振動の周期 $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ と比べてどれだけ大きいか。被積分関数 $\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$ を $k^2 = 0$ のまわりで k^2 について１次までのテーラー展開で近似し、項別に積分して（微小振動の周期との比）-1 $(= \frac{T}{T_0} - 1)$ を有効数字２けたまで求めよ。

(ヒント：$f(x)$ を $x = 0$ のまわりで１次までテーラー展開するということは

$$f(x) \ = \ f(0) + f'(0)x + O(x^2)$$

とすることだった。 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x\sin^2\theta}}$ として計算すればよい。)

【解答】

$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ として

$$T \ = \ \frac{2\pi}{\omega_0}\left(1 + \frac{k^2}{4} + \cdots\right)$$

となる。$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ だから $\frac{T}{T_0} - 1 = \frac{k^2}{4}$ で

$$k = \sin\frac{45^\circ}{2} \quad \Rightarrow \quad k^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad \frac{k^2}{4} &= \frac{2-\sqrt{2}}{16} \\ &= 0.037 \qquad \cdots 答え\end{aligned}$$