力学A 試験問題

平成３０年度前期課程Ｓセメスター

溝口　俊弥

【問題１】次の各問いに答えよ。

(1) ３次元空間内の１次独立な３つのベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ に対して、$\times$ を外積とするとき

$$\mathbf{v} \quad = \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$$

で定義される $\mathbf{v}$ もまたベクトルとなる。$\mathbf{v}$ を $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ の線形結合で表せ。

(2) ３次元空間内の位置ベクトル $\mathbf{r}$ の点において、ある保存力のポテンシャル $V(\mathbf{r})$ が

$$V(\mathbf{r}) \quad = \quad k\frac{e^{-\frac{|\mathbf{r}|}{\lambda}}}{|\mathbf{r}|} \tag{1}$$

で与えられるとき、これを湯川ポテンシャルという。ただし k と λ はそれぞれの次元を持った定数である。直交座標系における $\mathbf{r}$ の座標を (x, y, z) とするとき、そこでの力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ の各成分を求めよ。

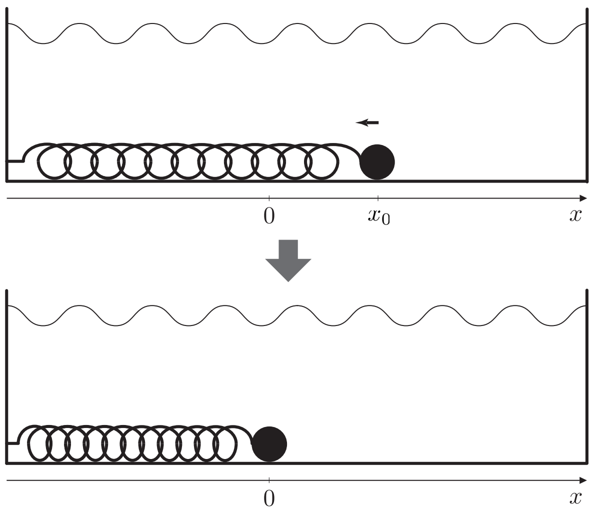
【問題２】図のように容器に粘性流体が入っており、その容器の側壁に弾性定数 k のばねの一方の端が固定され、そのもう一方の端につながれた質量 m の質点が行う、水平で滑らかな容器の底における１次元的な運動を考える。時間変数を t、運動方向の座標を x、質点の座標を $x(t)$ とし、質点は弾性力 $-kx(t)$ および粘性抵抗力 $-\kappa\dot{x}(t)$ $(\kappa > 0)$ のみを受けて運動するものとするとき、次の各問いに答えよ。

(1) 質点の運動方程式を書き下せ。

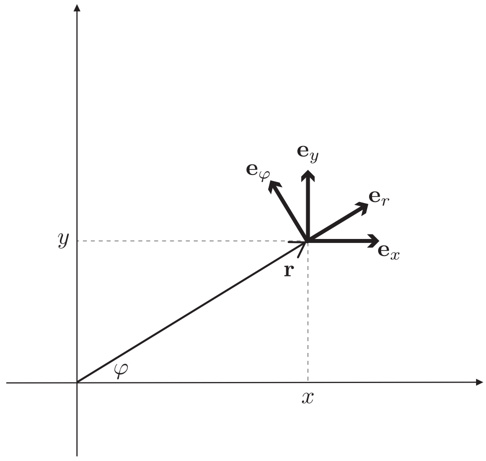
(2) 質点の $t = 0$ における位置 $x(0)$ を x_0 (> 0)、初速度 $\dot{x}(0)$ を v_0 として (1) の解を求めよ。ただし、$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$ が $\omega_0^2 < \frac{\kappa^2}{4m^2}$ をみたす場合のみ求めればよい。

(3) ある有限時間経過後に質点が原点 $x = 0$ に到達するための初速度 v_0 の条件を求めよ。

(4) (3) の条件がみたされるとき、質点が原点を通過して再び静止する時刻 t を求めよ。



【問題３】



図のように、２次元平面上において質量 m の質点の時刻 t における位置ベクトルを

$$\mathbf{r}(t) \quad = \quad x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y$$

とするとき、原点からのその点までの距離 $r(t) = |\mathbf{r}(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$ および $\mathbf{r}(t)$ と x 軸とのなす角 $\varphi(t) = \tan^{-1}\frac{y(t)}{x(t)}$ を用いると、$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$ をそれぞれ動径方向および角度方向の互いに直交する大きさ１のベクトルとして 位置ベクトルは

$$\mathbf{r}(t) \quad = \quad r(t)\mathbf{e}_r,$$

速度ベクトル $\mathbf{v}(t) \equiv \dot{\mathbf{r}}(t)$ は

$$\mathbf{v}(t) \quad = \quad \dot{r}(t)\mathbf{e}_r + r(t)\dot{\varphi}(t)\mathbf{e}_\varphi,$$

加速度ベクトル $\mathbf{a}(t) \equiv \ddot{\mathbf{r}}(t)$ は

$$\mathbf{a}(t) \quad = \quad \left(\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\varphi}(t)^2\right)\mathbf{e}_r + \left(2\dot{r}(t)\dot{\varphi}(t) + r(t)\ddot{\varphi}(t)\right)\mathbf{e}_\varphi$$

と表される。

(1) この質点が、原点に固定された別の質点 M による万有引力を受けて運動するときの運動方程式を書き下し、質点の原点のまわりの角運動量が保存することを示せ。ただし、万有引力定数 (Newton’s constant) を G とせよ。

(2) 角運動量が保存するから $\dot{\varphi}$ は r の関数として表され、したがってこの質点の２次元平面内の運動のエネルギー保存則は、質量 m の質点が別の１次元ポテンシャル $U(r)$ の中で運動するときの１次元的な運動のエネルギー保存則

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U(r) = E \quad (E \text{ は全エネルギーを表す定数})$$

と同じになる。保存する角運動量の大きさを mh とするとき、この１次元ポテンシャル $U(r)$ を求めよ。

(3)$U(r)$ を最小とする r の値 r_c と、そのときの $U(r)$ の最小値 U_{min} を、G,M,m,h を用いてそれぞれ表せ。

(4) この１次元ポテンシャル $U(r)$ 中 $r = r_c$ 近傍でこの質点が微小振動するとき、その周期を求めよ。（ヒント：$r = r_c$ はポテンシャルの底だから $U'(r_c)$ は０。そこでの $U''(r_c)$ を求め、$U(r)$ を $r - r_c$ の２次まで展開して単振動として近似すればよい。）また、この周期は質点の２次元的な円運動の周期とどのような関係にあるか。

【問題４】北緯 α(鉛直方向が赤道面となす角) の地上に固定された、地上のある点を原点として南方を x 軸、東方を y 軸、鉛直上方を z 軸にとった、地球の自転とともに回転する座標系での質点の運動方程式は、質点が重力および自転によるみかけの力のみを受けて運動するとき、近似的に

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= 2\omega\sin\alpha\frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -2\omega(\sin\alpha\frac{dx}{dt}+\cos\alpha\frac{dz}{dt}), \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -g+2\omega\cos\alpha\frac{dy}{dt}\end{aligned}$$

で与えられる。ただし、g は重力加速度、ω は地球の自転の角速度を表す定数である。この質点を、$x=y=0,\ z=h\ (>0)$ の点から初速度 0 で地上へ落下させた時、質点が原点からどちらの方角にどれだけ異なった位置に落ちるか求めよ。ただし、落下した点の z 座標は 0 としてよい。また ω は小さいとして ω の１次まで求めればよい。（ヒント：系統的にやるなら

$$\begin{aligned}x=x(t,\omega) &= x_0(t)+\omega x_1(t)+\cdots, \\ y=y(t,\omega) &= y_0(t)+\omega y_1(t)+\cdots, \\ z=z(t,\omega) &= z_0(t)+\omega z_1(t)+\cdots,\end{aligned}$$

と展開し、運動方程式に代入して ω^0 次、ω^1 次 $\ldots$ と順に係数を比較して解を決定していけばよい。あるいは（こうすればわかることだが）こうしないでも理由を述べて $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ を無視する近似をしてもよい。）