

宿題 解答

溝口 俊弥

June 7, 2018

問題

容器に入ったはちみつの中に、球状のビー玉が静止しており、初速度 0 ms^{-1} で落下させる。ビー玉の半径 a を 8.5 mm 、質量 m を 6.6 g とし、はちみつの粘性係数 η を 5.0 Pa s 、密度 ρ_0 を 1.4 gcm^{-3} とする。また、重力加速度 g を 9.8 ms^{-2} とする。ビー玉は重力、浮力、粘性抵抗のみを受けて鉛直方向に運動するものとし、慣性抵抗は無視するとして、次の問いに答えよ。

1. ビー玉が最初の位置から 20 cm 沈むまでの時間を有効数字 2 けたで求めよ。
2. ビー玉が終端速度の 90% に達するまでの時間を有効数字 2 けたで求めよ。

という問題でした。

解答

1. 運動方程式は、

$$m\ddot{z} = -mg + \rho_0 V g + f_V$$

ただし

$$f_V = -6\pi\eta a \dot{z}$$
$$V = \frac{4}{3}\pi a^3$$

両辺を m でわると

$$\ddot{z} = -\alpha g - \frac{\kappa}{m} \dot{z} \tag{1}$$

$$\alpha = 1 - \frac{\rho_0 V}{m}$$
$$\kappa = 6\pi\eta a$$

与えられた数値を代入すると、MKSA 単位系で

$$\alpha = 0.454331,$$
$$\kappa = 0.801106$$

ゆえに

$$\alpha g = 4.45244,$$
$$\frac{\kappa}{m} = 121.38$$

これらを (1) の解:

$$z = -\frac{\alpha m g}{\kappa} t + \frac{\alpha m^2 g}{\kappa^2} (1 - e^{-\frac{\kappa}{m} t})$$

に $z = -0.2$ とともに代入するのだが、この t の方程式は解析的に解けないので、右辺に $t = 5.4, 5.5$ をそれぞれ代入してみると、

$$z = -\frac{4.45244}{121.38} \times 5.4 + \frac{4.45244}{121.38^2} \times (1 - e^{-121.38 \times 5.4})$$
$$= -0.19778,$$
$$z = -\frac{4.45244}{121.38} \times 5.5 + \frac{4.45244}{121.38^2} \times (1 - e^{-121.38 \times 5.5})$$
$$= -0.201448$$

となって $t = 5.5$ の方が $z = -0.2$ に近くなる。よって $5.5[\text{s}]$ … 答え

2. \dot{z} は、

$$\dot{z} = -\frac{\alpha m g}{\kappa} (1 - e^{-\frac{\kappa}{m} t})$$

であるから

$$1 - e^{-\frac{\kappa}{m} t} = 0.9$$

となればよい。したがって

$$t = -\frac{m}{\kappa} \log_e 0.1$$
$$= 0.0189701$$
$$= 1.9 \times 10^{-2}[\text{s}] \quad \dots \quad \text{答え}$$

★ 2. より、この場合ほとんど一瞬で終端速度に非常に近くなるのがわかるので、すべての時間において終端速度で等速で沈んだとして計算すると、

$$v_{term}^{(v)} = -\frac{\alpha m g}{\kappa} = -0.0366819$$

より

$$\frac{0.2}{v_{term}^{(v)}} = 5.45228$$
$$= 5.5[\text{s}]$$

となって 1. と変わらない結果が得られます。