レポート問題　解説

溝口　俊弥

July 7, 2017

問題

　容器に入った粘性係数 $\eta = 0.80$ Pa s, 密度 $\rho_0 = 1.36$ g cm^{-3} のガムシロップが重力加速度 $g = 9.8$ m s^{-2} の一様重力場内にあるとする。その中で半径 $a = 8.5$ mm (または 6.5 mm), 質量 $m = 6.6$g の球状のビー玉が時刻 $t = 0$ で静止しており、その後ビー玉は重力、浮力、粘性抵抗力 および 慣性抵抗力 を受けて運動するものとする。ビー玉が最初の位置から 20 cm 沈んだときのビー玉の速度を有効数字 2 けたで求めよ。ただし、$C_D = 0.44$ とし、理由を述べた上で粘性抵抗力 まはた 慣性抵抗力のどちらかのみが作用しているとして計算してもよい。また、あらゆる時刻においてビー玉全体がガムシロップに浸っているとし、また容器は底まで 20 cm 以上あるものとする。

という問題でした。

1　粘性抵抗のみを考える計算

　運動方程式は

$$m\ddot{z} = -mg + \rho_0 V g + f_I + f_V$$

ただし

$$\begin{aligned} f_I &= \frac{1}{2} C_D \pi \rho_0 a^2 \dot{z}^2 \\ f_V &= -6\pi\eta a \dot{z} \\ V &= \frac{4}{3}\pi a^3 \end{aligned}$$

です。両辺を m でわると

$$\ddot{z} = -\alpha g - \frac{\kappa}{m}\dot{z} + \frac{\lambda}{m}\dot{z}^2 \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \frac{\rho_0 V}{m} \\ \kappa &= 6\pi\eta a \\ \lambda &= \frac{1}{2} C_D \pi \rho_0 a^2 \end{aligned}$$

終端速度は、(1) で $\ddot{z}$ を 0 として得られるので、粘性抵抗のみ ($\lambda = 0$) のとき

$$v_{term}^{(V)} = -\frac{\alpha mg}{\kappa}$$

慣性抵抗のみ ($\kappa = 0$) のとき

$$v_{term}^{(I)} = -\sqrt{\frac{\alpha mg}{\lambda}}$$

です。[1]

1.1 $a = 8.5$ mm のとき

以下 MKSA 単位系で単位を省略することにすると、

$$|v_{term}^{(V)}| = 0.237$$
$$|v_{term}^{(I)}| = 0.669$$

となり、$v_{term}^{(I)}$ の方がかなり大きいことがわかります。終端速度というのは重力 – 浮力がその抵抗力とつりあう速度ですから、速度が $v_{term}^{(V)}$ ぐらいになったとき、慣性抵抗が重力 – 浮力とつりあう速度の約 3 分の 1 にしかなっていない、ということは、慣性抵抗は速度の 2 乗に比例するのでつりあったときの約 9 分の 1、10 %ぐらいしかきいていない、ということになります。したがって慣性抵抗の効果は小さいと考えられる[2]ので、これを無視して (1) で $\lambda = 0$ とすると、これは 2 階の線形非斉次微分方程式なので、初期条件

$$z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = 0 \tag{2}$$

をみたすように任意定数を決定すると、解は

$$z(t) = -\alpha g\tau^2 \left(\frac{t}{\tau} - (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\right) \tag{3}$$

となります。ここで $\tau \equiv \frac{m}{\kappa}$ です。

$a = 8.5 \times 10^{-3}$ のとき、

$$\alpha = 0.470$$
$$\text{また} \quad \kappa = 0.128$$
$$\Rightarrow \quad \tau = 0.0515$$

を (3) から得られる式

$$-\frac{z}{\alpha g\tau^2} = \frac{t}{\tau} - (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \tag{4}$$

に代入すると、左辺は $z = -0.2$ のとき 16.38 になるのでそのときの t を $t_{z=-0.2}$ とすると

$$\frac{t_{z=-0.2}}{\tau} \sim 17 \Rightarrow e^{\frac{t_{z=-0.2}}{\tau}} \sim e^{-17} \sim 10^{-8}$$

[1] 終端速度を比べただけではどちらが効くかわからないときもありますが、粘性抵抗は v 1 乗、慣性抵抗は v 2 乗なので、先に（v が小さいとき）効く粘性抵抗の終端速度が慣性抵抗の終端速度より先に来る今のような場合にはこれでわかることになります。もちろん f_I と f_V が等しくなる速度－臨界速度－を出して、どちらか一方が効くとして解いた答えとの妥当性を見ても結構です。

[2] 有効数字 2 けたなので、10 %は無視できないですが、問題にはどちらかを考える近似をとっていいとしたので粘性抵抗のみを考えることにします。あとで両方を考えたとき、この近似がどのくらいよかったのかがわかります。

なので　$e^{\frac{t_{z=-0.2}}{\tau}}$ は無視できます。つまり $t_{z=-0.2}$ は 単に 20 cm を終端速度で等速で走った時間です。
　またこの $t_{z=-0.2}$ を $\dot{z}(t)$ に入れると再び $e^{\frac{t_{z=-0.2}}{\tau}}$ は無視できて、結局 $\dot{z}(t_{z=-0.2})$ は終端速度 $v_{term}^{(V)}$ で与えられることになり、答えは

$$\dot{z}(t_{z=-0.2}) = v_{term}^{(V)} = -0.24[\ \mathrm{ms}^{-1}] \cdots \text{答え}$$

となります。

1.2　$a = 6.5$ mm のとき

　このときも同様に値を代入すると、

$$\begin{aligned} & \alpha = 0.763 \\ \text{また} \quad & \kappa = 0.0980 \\ \Rightarrow \quad & \tau = 0.0673 \end{aligned}$$

となります。このとき終端速度は

$$\begin{aligned} |v_{term}^{(V)}| &= 0.503 \\ |v_{term}^{(I)}| &= 1.115 \end{aligned}$$

となり、このときも $v_{term}^{(I)}$ の方が大きいので[3]慣性抵抗を無視する近似をとります。すると (4) の左辺は今度は $z = -0.2$ のとき

$$-\frac{z}{\alpha g \tau^2} = 5.90$$

となりますので

$$\frac{t_{z=-0.2}}{\tau} \sim 7 \Rightarrow e^{\frac{t_{z=-0.2}}{\tau}} \sim e^{-7} \sim 10^{-3}$$

となってさっきよりも大きいですがこの方程式を有効数字 2 けたで解くのには $e^{\frac{t_{z=-0.2}}{\tau}}$ は無視できます。すると $\dot{z}(t_{z=-0.2})$ は再び終端速度 $v_{term}^{(V)}$ で与えられて、結局

$$\dot{z}(t_{z=-0.2}) = v_{term}^{(V)} = -0.50[\ \mathrm{ms}^{-1}] \cdots \text{答え}$$

となります。

2　粘性抵抗と慣性抵抗両方を取り扱う計算

　運動方程式 (1) は $\dot{z} \equiv v$ とおくと

$$\dot{v} = -\alpha g - \frac{\kappa}{m} v + \frac{\lambda}{m} v^2 \tag{5}$$

[3]今度は $v_{term}^{(V)}$ が $v_{term}^{(I)}$ の半分近くもあるので 2 乗して 4 分の 1、重力 − 浮力の 25 %ぐらいは慣性抵抗がでていることになります。これを無視するのでこの近似は 8.5mm のときよりも悪いことがあとでわかります。

となって v の一階の微分方程式に帰着するので解くことができ、結果は

$$
\begin{aligned}
z(t) &= -\frac{m}{\lambda}\log\frac{y_+ e^{-y_- t} - y_- e^{-y_+ t}}{y_+ - y_-} \\
y_\pm &\equiv \frac{\frac{\kappa}{m} \pm \sqrt{\frac{\kappa^2}{m^2} + 4\frac{\alpha g \lambda}{m}}}{2}
\end{aligned} \tag{6}
$$

となります。

このグラフを描くと、$a = 8.5$ mm のときは

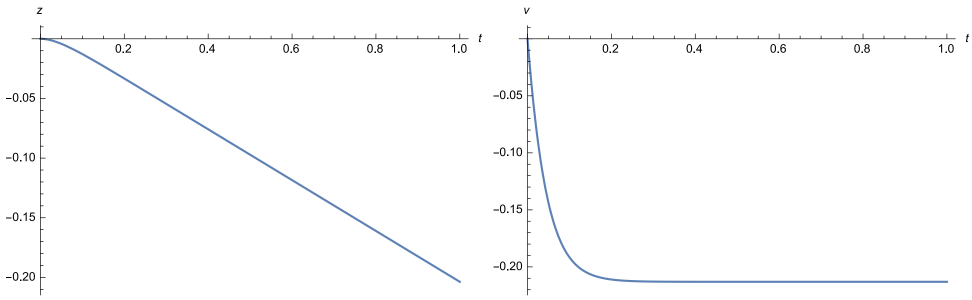

図 1: $a = 8.5$ mm のときの z-t グラフ (左) と v-t グラフ (右)

となり、また $a = 6.5$ mm のときは

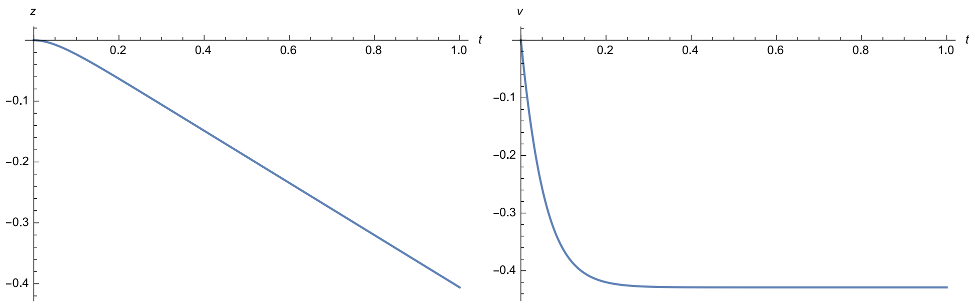

図 2: $a = 6.5$ mm のときの z-t グラフ (左) と v-t グラフ (右)

となります。どちらの場合も、左のグラフで $z = -0.2$（縦軸）ぐらいになる時間（横軸）を読んで、そのときの v を右のグラフで見ると、ほとんど終端速度に達していることがわかります。

(6) で $z = -0.2$ となる t を数値的に求めると、$a = 8.5$ mm のときは

$$
t_{z=-0.2} = 0.983 \Rightarrow \dot{z}(t_{z=-0.2}) = -0.21[\ \mathrm{ms}^{-1}] \tag{7}
$$

$a = 6.5$ mm のときは

$$
t_{z=-0.2} = 0.520 \Rightarrow \dot{z}(t_{z=-0.2}) = -0.43[\ \mathrm{ms}^{-1}] \tag{8}
$$

となって、$a = 8.5$ mm のときは粘性抵抗のみを考えて評価したの値 $-0.24[\ \mathrm{ms}^{-1}]$ とまあ近いですが、$a = 6.5$ mm のときは $-0.50[\ \mathrm{ms}^{-1}]$ だったので、慣性抵抗を考えないと誤差がかなり大きいことを示しています。