力学A 試験問題

平成２９年度前期課程Ｓセメスター

溝口　俊弥

【問題１】次の各問いに答えよ。

(1) ３次元空間内の３つのベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ に対して、関係式

$$(\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})) \times \mathbf{c} \quad = \quad (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

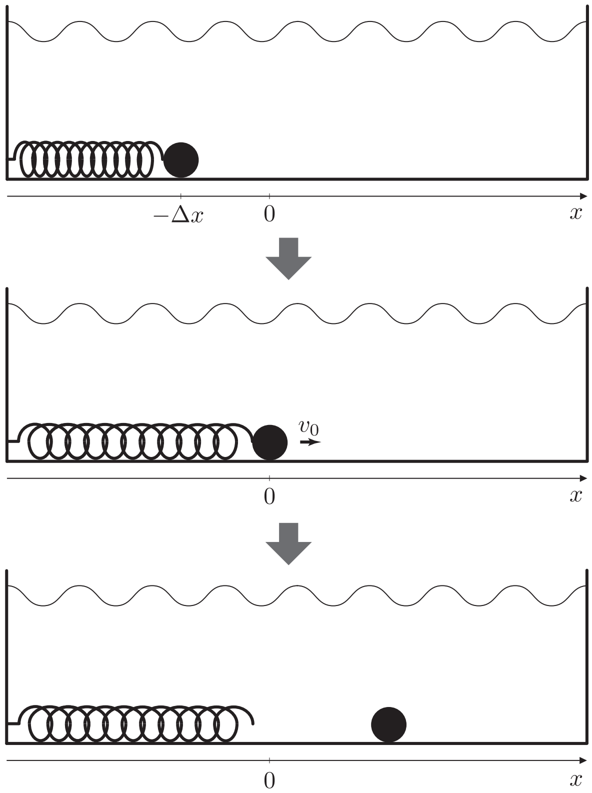
を証明せよ。

(2) ３次元空間内の位置ベクトル $\mathbf{r}$ の点におけるある保存力のポテンシャル $V(\mathbf{r})$ が

$$V(\mathbf{r}) \quad = \quad k\frac{e^{-\frac{|\mathbf{r}|}{d}}}{|\mathbf{r}|} \quad （k \text{ と } d \text{ は定数}）$$

で与えられるとき、その点におけるその力のベクトル $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ を求めよ。

【問題２】図のように、底が滑らかで水平な容器が粘性流体で満たされており、その上に弾性定数 k の軽いバネがあって、その左端が容器の壁面に固定されている。バネをそのつりあいの位置より Δx 縮め、そのバネの右端に質量 m の金属球を置いて外力で静止させておく（つまり手などで押さえておく）。時間変数を t とし、時刻 $t = 0$ で外力を解き（つまり手をはなして）金属球をバネの弾性力によって（ピンボールのように）右方向に運動させる。金属球の運動やバネの伸び縮みは１次元的なものとし、また金属球はバネがつりあいの位置にまで戻った以後はバネから弾性力を受けないものとするとき、次の問いに答えよ。



(1) 水平右向きを正の向きに x 軸をとり、バネがつりあいの位置にあるときの金属球の中心位置を $x = 0$ とすると、上の仮定により時刻 $t = 0$ において金属球の中心は $x = -\Delta x$ にある。外力を解いた（手をはなした）後、バネがつりあいの位置に戻るまでの金属球の中心の x 座標 $x(t)$ に関する運動方程式を書き下せ。ただし、金属球はバネの弾性力と粘性抵抗力のみを受けて運動するものとし、また粘性抵抗力の大きさは速度に比例しその比例定数は κ であるとせよ。

(2) 粘性抵抗力の比例定数 κ が

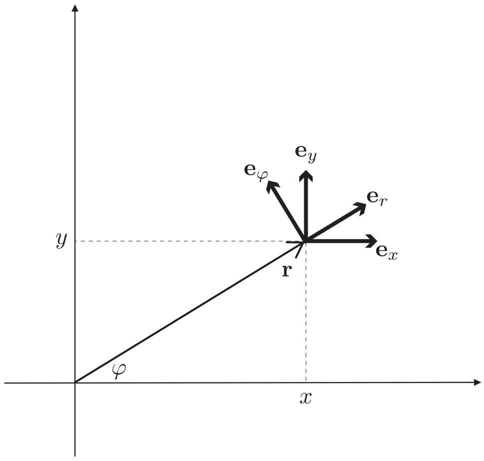
$$\kappa = \sqrt{mk}$$

をみたすとき、(1) の運動方程式を解いて、初期条件 $x(0) = -\Delta x,\ \dot{x}(0) = 0$ をみたす $x(t)$ を求めよ。

(3)(2) のとき、金属球の中心が $x = 0$ にきたときの時刻 $t = t_0$ を求めよ。また、そのときの金属球の速度 v_0 を求めよ。

(4)(3) の時刻 $t = t_0$ 以後、金属球は粘性抵抗力のみを受けて運動する。金属球が止まる位置を求めよ。ただし v_0 を用いた式で解答してもよい。（止まるまでに無限の時間を要するが、極限値を答えればよい。）

【問題３】図のように、２次元平面上において直交座標が (x, y) であるような位置ベクトル $\mathbf{r}$ の点に対し、その点の位置を極座標 (r, φ)（すなわちその点の原点からの距離 $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ および $\mathbf{r}$ と x 軸とのなす角 $\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ との組）で表すとき、次の問いに答えよ。



(1) ある質点 m がこの平面内を運動するとする。その点の任意の時刻 t における位置ベクトルを $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ とするとき、その質点の速度ベクトル $\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ および加速度ベクトル $\mathbf{a}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t))$ の r 方向成分と φ 方向成分 $(v_r(t), v_\varphi(t))$, $(a_r(t), a_\varphi(t))$ を r, $\dot{r}$, $\ddot{r}$, φ, $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$ を使って表せ。ただし、一般にあるベクトル $\mathbf{A}$ の r 方向成分と φ 方向成分とは、$\mathbf{A}$ を r 方向と φ 方向の基本ベクトル（その点における r のみ、φ のみのそれぞれの変化に対応する大きさ１の基底ベクトル）$\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$ の１次結合 $\mathbf{A} = A_r\mathbf{e}_r + A_\varphi\mathbf{e}_\varphi$ として表したときの係数 A_r, A_φ のことである（いつもの普通の定義）。

(2) この質点 m が、原点に固定された別の質点 M による万有引力を受けて運動するときの運動方程式を書き下し、質点 m の原点のまわりの角運動量が保存することを示せ。ただし、万有引力定数 (Newton's constant) を G とせよ。

(3) 角運動量が保存するから $\dot{\varphi}$ は r の関数として表され、したがってこの質点 m の２次元平面内の運動のエネルギー保存則は、質点 m が別の１次元ポテンシャル $U(r)$ の中で運動するときの１次元的な運動のエネルギー保存則

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U(r) = E \quad (E \text{ は全エネルギーを表す定数})$$

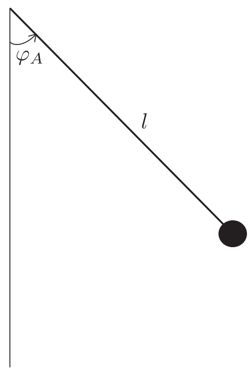
と同じになる。保存する角運動量の大きさを mh とするとき、この等価な１次元ポテンシャル $U(r)$ を求めよ。

(4)$U(r)$ を最小とする r の値と、そのときの $U(r)$ の最小値 U_{min} を、G,M,m,h を用いてそれぞれ表せ。また、$E = U_{min}$ のとき質点 m の軌道の形は何か、理由とともに答えよ。

【問題４】重力加速度 g の一様重力場中における、糸の長さ l の振り子の周期 T は、振幅が微小でない場合、最大振れ角を φ_A として $k=\sin\frac{\varphi_A}{2}$ とするとき

$$T \;=\; 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

で与えられる。



最大振れ角 φ_A が 30° のとき、周期 T は微小振動の周期 $T_0=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ と比べてどれだけ大きいか。被積分関数 $\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$ を $k^2=0$ のまわりで k^2 について１次までのテイラー展開で近似し、項別に積分して（微小振動の周期との比）-1 $(=\frac{T}{T_0}-1)$ を有効数字 2 けたまで求めよ。
(ヒント：$f(x)$ を $x=0$ のまわりで１次までテイラー展開するということは

$$f(x) \;=\; f(0)+f'(0)x+O(x^2)$$

とすることだった。 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x\sin^2\theta}}$ として計算すればよい。)