力学A 試験問題　解答

平成２７年度前期課程Ｓセメスター

溝口　俊弥

【問題１】次の各問いに答えよ。
(1) ３次元空間内の３つのベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ に対して、関係式

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \quad = \quad (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$$

を示せ。

(2) ３次元空間内の位置ベクトル $\mathbf{r}$ の点にある質量 m の質点に働く力のポテンシャル $V(\mathbf{r})$ が

$$V(\mathbf{r}) \quad = \quad G\frac{e^{-\frac{|\mathbf{r}|}{l}}}{|\mathbf{r}|} \quad (G \text{ と } l \text{ は定数})$$

で与えられるとき、質点の運動方程式を書け。

【解答】
(1) $\mathbf{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\mathbf{b}=(b_x,b_y,b_z)$, $\mathbf{c}=(c_x,c_y,c_z)$ とすると、左辺の x 成分は

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}))_x &= a_y(\mathbf{b}\times\mathbf{c})_z-a_z(\mathbf{b}\times\mathbf{c})_y\\ &= a_y(b_xc_y-b_yc_x)-a_z(b_zc_x-b_xc_z)\\ &= b_x(a_yc_y+a_zc_z)-c_x(a_yb_y+a_zb_z)\\ &= b_x(a_xc_x+a_yc_y+a_zc_z)-c_x(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z)\\ &= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}_x-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}_x.\end{aligned}$$

y,z 成分も同様。よって示された。□

(2) $|\mathbf{r}|=r$ とおくと、ポテンシャルによる力 $\mathbf{F}$ は

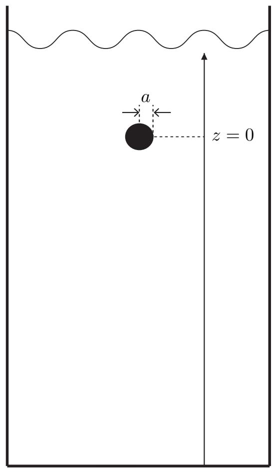
$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= -\nabla V(\mathbf{r})\\ &= -\frac{\partial}{\partial r}\left(G\frac{e^{-\frac{r}{l}}}{r}\right)\cdot\nabla r\\ &= -G\left(-\frac{e^{-\frac{r}{l}}}{r^2}+\frac{1}{r}\left(-\frac{1}{l}\right)e^{-\frac{r}{l}}\right)\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}.\end{aligned}$$

よって $\dot{}$ で時間微分を表すと運動方程式は

$$m\ddot{\mathbf{r}} \quad = \quad G\frac{(r+l)e^{-\frac{r}{l}}}{r^2l}\hat{\mathbf{r}}.\cdots\text{答え}$$

ただし $\hat{\mathbf{r}}$ は $\mathbf{r}$ 方向の単位ベクトル $\frac{\mathbf{r}}{r}$ である。

【問題２】図のように、容器に入った粘性係数 η、密度 ρ_0 の粘性流体が重力加速度 g の一様重力場内にあり、その流体中を質量 m、半径 a の球体が運動を行う。



鉛直上向きを正の向きに z 軸をとり、時刻 $t=0$ で球体はその中心が原点 $z=0$ の位置で静止しているものとして、以後球体が重力、浮力、粘性抵抗力の 3 種類の力のみを受けて行う鉛直方向の運動について次の問いに答えよ。ただし $m > \frac{4}{3}\pi\rho_0 a^3$、すなわち球体はこの流体中沈むものとし、またあらゆる時刻において球体全体が粘性流体に浸っているとする。

(1) 鉛直方向の運動方程式を書け。ただし、粘性抵抗力の大きさは速度に比例しその比例定数は $6\pi a\eta$ であることを用いよ。

(2) 終端速度を求めよ。また、球体の速度が終端速度の $\frac{1}{10}$ に達する時刻を求めよ。

(3)(1) の運動方程式にしたがって球体が運動するとき、時刻 t における球体の中心位置の z 座標を t の関数として求めよ。ただし、t は球体が容器の底に衝突する時刻より前とする。

【解答】

(1) $\dot{}$ で時間微分を表して

$$m\ddot{z} \quad = \quad -mg + \frac{4}{3}\pi\rho_0 a^3 g - 6\pi a\eta\dot{z} \cdots \text{答え}$$

(2) $\dot{z} \equiv v$ とおけば、

$$m\dot{v} \quad = \quad -mg + \frac{4}{3}\pi\rho_0 a^3 g - 6\pi a\eta v \cdots (*)$$

終端速度 v_f は $\dot{v}=0$ となる v の値だから $(*)$ の左辺を0とおいて、

$$v_f \quad = \quad -\frac{\left(m-\frac{4}{3}\pi\rho_0 a^3\right)g}{6\pi a\eta}\cdots 答え$$

　また $(*)$ で

$$1-\frac{4}{3m}\pi\rho_0 a^3 \equiv \alpha, \quad \frac{6\pi a\eta}{m} \equiv \frac{1}{\tau}$$

とおくと、

$$\dot{v} \quad = \quad -\alpha g - \frac{v}{\tau}$$

となるから時間 t で積分して

$$\int_0^t dt \quad = \quad \int_0^v \frac{dv}{-\frac{v}{\tau}-\alpha g},$$

ただし初期条件 ($t=0$ で $v=0$) を考慮した。これを解くと、v_f は今の書き方で $v_f=-\tau\alpha g$ だから

$$t \quad = \quad \tau\log\frac{-v_f}{-v_f+v}.$$

ゆえに $v=\frac{v_f}{10}$ となる時刻 $t_{\frac{1}{10}}$ は

$$\begin{aligned} t_{\frac{1}{10}} &= \tau\log\frac{10}{9} \\ &= \frac{m}{6\pi a\eta}\log\frac{10}{9}\cdots 答え \end{aligned}$$

(3) (2) より

$$\begin{aligned} -\frac{t}{\tau} &= \log\frac{v_f-v}{v_f} \\ \frac{v_f-v}{v_f} &= e^{-\frac{t}{\tau}} \\ \frac{v}{v_f} &= 1-e^{-\frac{t}{\tau}} \\ \dot{z} &= v_f(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \end{aligned}$$

したがって初期条件を考慮すると

$$\begin{aligned} z &= v_f(t+\tau(e^{-\frac{t}{\tau}}-1)) \\ &= -\frac{\left(m-\frac{4}{3}\pi\rho_0 a^3\right)g}{6\pi a\eta}\left(t+\frac{m}{6\pi a\eta}\left(e^{-\frac{6\pi a\eta}{m}t}-1\right)\right)\cdots 答え \end{aligned}$$

【問題３】質量 m の質点が x 軸上を弾性力 $-kx$、抵抗力 $-\kappa\dot{x}$、および角速度 ω の周期的外力 $F\cos\omega t$ を受けて運動する時、運動方程式より質点の位置座標 $x(t)$ の時間 t に関する微分方程式は、

$$\ddot{x}(t) + 2\lambda\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = f\cos\omega t \qquad \cdots(*)$$

で与えられる。ただし、$\dot{}$, $\ddot{}$ は t に関する微分 $\frac{d}{dt}$, $\frac{d^2}{dt^2}$ をそれぞれ表し、また $\lambda = \frac{\kappa}{2m}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $f = \frac{F}{m}$, および ω はすべて正の定数とする。この t の微分方程式 $(*)$ について次の問いに答えよ。ただし、パラメータは λ, ω_0, f, ω を用いてよい。

(1) 特解、すなわち $(*)$ をみたす t の関数 $x(t)$ を何か１つ求めよ。

(2) 斉次方程式（すなわち $(*)$ の右辺を 0 とおいた微分方程式）の一般解（すなわち２つの任意定数を含む解）を求めよ。ただし抵抗力は弱く $\kappa^2 < 4mk$ をみたすものとする。

(3) 十分に時間が経過した後、質点は一定の振幅で外力の角速度 ω で振動するようになり、その振幅は ω に依存する。その振幅が極大となるような ω の値を求めよ。

【解答】

(1)

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \quad (A, B \text{ は定数})$$

とおくと

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t,\\ \ddot{x}(t) &= -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t.\end{aligned}$$

これを $(*)$ に代入して $\cos\omega t$,$\sin\omega t$ のそれぞれの係数を比較すると

$$(-\omega^2 + \omega_0^2)A + 2\lambda\omega B = f, \qquad (1)$$

$$(-\omega^2 + \omega_0^2)B - 2\lambda\omega A = 0. \qquad (2)$$

これを解いて

$$\begin{aligned}A &= \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)f}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2},\\ B &= \frac{2\lambda\omega f}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}.\end{aligned}$$

よって

$$x(t) = \frac{(\omega_0^2-\omega^2)f\cos\omega t + 2\lambda\omega f\sin\omega t}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\lambda^2\omega^2} \cdots 答え$$

(2)

$$\ddot{x}(t)+2\lambda\dot{x}(t)+\omega_0^2 x(t)=0$$

ただし $\kappa^2 < 4mk$ より $\frac{\kappa^2}{4m^2} < \frac{k}{m} \Rightarrow \lambda^2 < \omega_0^2$ である。このとき $x(t)=Ce^{\gamma t}$ とおくと

$$\begin{aligned} \gamma^2+2\lambda\gamma+\omega_0^2 &= 0 \\ \gamma &= -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2-\omega_0^2} \\ &= -\lambda \pm i\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2} \end{aligned}$$

よって

$$x(t) = C_+ e^{(-\lambda+i\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2})t} + C_- e^{(-\lambda-i\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2})t} \tag{3}$$

$x(t)$ は実だから

$$x(t) = Ce^{(-\lambda+i\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2})t} + C^* e^{(-\lambda-i\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2})t} \quad （C \text{ は任意の複素定数}）\cdots 答え \tag{4}$$

(3) (1) より

$$\begin{aligned} \text{振幅} &= \frac{f\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\lambda^2\omega^2}}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\lambda^2\omega^2} \\ &= \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\lambda^2\omega^2}} \\ \omega^2 \equiv u \text{ とおくと} \quad &= \frac{f}{\sqrt{(u-\omega_0^2)^2+4\lambda^2 u}} \\ &= \frac{f}{\sqrt{(u-(\omega_0^2-2\lambda^2))^2+\omega_0^4-(\omega_0^2-2\lambda^2)^2}} \end{aligned}$$

よって 振幅は $\omega^2=\omega_0^2-2\lambda^2$ のとき極大となる。$\cdots$ 答え

(注)　問題で仮定したように $\kappa^2<4mk$ でも $2mk<\kappa^2<4mk$ だとルートの中の u の 2 次関数のグラフの軸が負になってしまい、振幅の最大は $u=0$ となり極大をもたないが、「抵抗力は弱く」と書いたので採点のときには上のような解答で全員正答とした。

【問題４】北緯 α(鉛直方向が赤道面となす角) の地上に固定された、地球の自転とともに回転する座標系における、重力と自転によるみかけの力のみを受けて運動する質点の運動方程式は、南方を x 軸、東方を y 軸、鉛直上方を z 軸にとったとき、近似的に

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= 2\omega\sin\alpha\frac{dy}{dt},\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -2\omega(\sin\alpha\frac{dx}{dt}+\cos\alpha\frac{dz}{dt}),\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -g+2\omega\cos\alpha\frac{dy}{dt}\end{aligned}$$

で与えられる。ただし、g は重力加速度、ω は地球の自転の角速度を表す定数である。この質点が鉛直上方に速度 v_0 で地上から投射され、再び地上に落下した時、質点が投射した点からどちらの方角にどれだけ異なった位置に落ちるか求めよ。ただし、投射した点と落ちた点の z 座標は等しいとしてよい。また $\frac{dz}{dt}$ に比べて $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ は無視してよく、ω の１次まで求めればよい。（ヒント：系統的にやるなら

$$\begin{aligned}x=x(t,\omega) &= x_0(t)+\omega x_1(t)+\cdots,\\ y=y(t,\omega) &= y_0(t)+\omega y_1(t)+\cdots,\\ z=z(t,\omega) &= z_0(t)+\omega z_1(t)+\cdots,\end{aligned}$$

と展開し、運動方程式に代入して ω^0 次、ω^1 次 . . . と順に係数を比較して解を決定していけばよい。あるいは、こうしないでも、きちんと理由を述べて近似してもよい。）

【解答】

$$\begin{aligned}x=x(t,\omega) &= x_0(t)+\omega x_1(t)+\cdots,\\ y=y(t,\omega) &= y_0(t)+\omega y_1(t)+\cdots,\\ z=z(t,\omega) &= z_0(t)+\omega z_1(t)+\cdots,\end{aligned}$$

とし、$t=0$ で $\dot{x}=\dot{y}=0$, $\dot{z}=v_0$, $x=y=z=0$ とすると、ω^0 次の方程式は

$$\begin{aligned}\ddot{x}_0 &= 0\\ \ddot{y}_0 &= 0\\ \ddot{z}_0 &= -g\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{aligned}&x_0(t)=y_0(t)=0\\ &z_0(t)=v_0t-\frac{1}{2}gt^2\end{aligned}$$

ω^1 次の方程式は

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= 2\sin\alpha\ \dot{y}_0 = 0 \\
\ddot{y}_1 &= -2(\sin\alpha\ \dot{x}_0 + \cos\alpha\ \dot{z}_0) \\
&= -2\cos\alpha\ (v_0 - gt) \\
\ddot{z}_1 &= 2\cos\alpha\ \dot{y}_0 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad \dot{y}_1 &= -2\cos\alpha\left(v_0 t - \frac{1}{2}gt^2\right) \\
\Rightarrow\quad y_1 &= -\cos\alpha\ t^2\left(v_0 - \frac{g}{3}t\right)
\end{aligned}$$

ゆえに ω^1 次までで

$$\begin{aligned}
x(t) &= 0 + \cdots \\
y(t) &= -\omega\cos\alpha\ t^2\left(v_0 - \frac{g}{3}t\right) + \cdots \\
z(t) &= v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + \cdots
\end{aligned}$$

となる。この近似で再び $z = 0$ となるとき $t = \frac{2v_0}{g}$ で、そのとき

$$y = -\frac{4}{3}\omega\cos\alpha\ \frac{v_0^3}{g^2}$$

よって西に $\dfrac{4}{3}\omega\cos\alpha\ \dfrac{v_0^3}{g^2}$ ずれる。$\cdots$ 答え