

力学 A 試験問題

平成 27 年度前期課程 S セメスター

溝口 俊弥

【問題 1】 次の各問いに答えよ。

(1) 3次元空間内の3つのベクトル \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} に対して、関係式

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

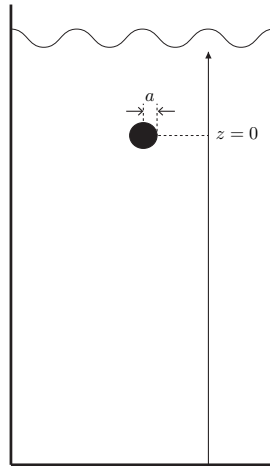
を示せ。

(2) 3次元空間内の位置ベクトル \mathbf{r} の点にある質量 m の質点に働く力のポテンシャル $V(\mathbf{r})$ が

$$V(\mathbf{r}) = G \frac{e^{-\frac{|\mathbf{r}|}{l}}}{|\mathbf{r}|} \quad (G \text{ と } l \text{ は定数}) \quad (1)$$

で与えられるとき、質点の運動方程式を書け。

【問題 2】図のように、容器に入った粘性係数 η 、密度 ρ_0 の粘性流体が重力加速度 g の一様重力場内にあり、その流体中を質量 m 、半径 a の球体が運動を行う。



鉛直上向きを正の向きに z 軸をとり、時刻 $t = 0$ で球体はその中心が原点 $z = 0$ の位置で静止しているものとして、以後球体が重力、浮力、粘性抵抗力の 3 種類の力のみを受けて行う鉛直方向の運動について次の問いに答えよ。ただし $m > \frac{4}{3}\pi\rho_0 a^3$ 、すなわち球体はこの流体中沈むものとし、またあらゆる時刻において球体全体が粘性流体に浸っているとす。

- (1) 鉛直方向の運動方程式を書け。ただし、粘性抵抗力の大きさは速度に比例しその比例定数は $6\pi a\eta$ であることを用いよ。
- (2) 終端速度を求めよ。また、球体の速度が終端速度の $\frac{1}{10}$ に達する時刻を求めよ。
- (3)(1) の運動方程式にしたがって球体が運動するとき、時刻 t における球体の中心位置の z 座標を t の関数として求めよ。ただし、 t は球体が容器の底に衝突する時刻より前とする。

【問題3】質量 m の質点が x 軸上を弾性力 $-kx$ 、抵抗力 $-\kappa\dot{x}$ 、および角速度 ω の周期的外力 $F \cos \omega t$ を受けて運動する時、運動方程式より質点の位置座標 $x(t)$ の時間 t に関する微分方程式は、

$$\ddot{x}(t) + 2\lambda \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f \cos \omega t \quad \dots (*)$$

で与えられる。ただし、 $\dot{}$, $\ddot{}$ は t に関する微分 $\frac{d}{dt}$, $\frac{d^2}{dt^2}$ をそれぞれ表し、また $\lambda = \frac{\kappa}{2m}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $f = \frac{F}{m}$, および ω はすべて正の定数とする。この t の微分方程式 (*) について次の問いに答えよ。ただし、パラメータは λ , ω_0 , f , ω を用いてよい。

- (1) 特解、すなわち (*) をみたす t の関数 $x(t)$ を何か1つ求めよ。
- (2) 斉次方程式 (すなわち (*) の右辺を0とおいた微分方程式) の一般解 (すなわち2つの任意定数を含む解) を求めよ。ただし抵抗力は弱く $\kappa^2 < 4mk$ をみたすものとする。
- (3) 十分に時間が経過した後、質点は一定の振幅で外力の角速度 ω で振動するようになり、その振幅は ω に依存する。その振幅が極大となるような ω の値を求めよ。

【問題4】北緯 α (鉛直方向が赤道面となす角) の地上に固定された、地球の自転とともに回転する座標系における、重力と自転によるみかけの力のみを受けて運動する質点の運動方程式は、南方を x 軸、東方を y 軸、鉛直上方を z 軸にとったとき、近似的に

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= 2\omega \sin \alpha \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -2\omega \left(\sin \alpha \frac{dx}{dt} + \cos \alpha \frac{dz}{dt} \right), \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -g + 2\omega \cos \alpha \frac{dy}{dt}\end{aligned}$$

で与えられる。ただし、 g は重力加速度、 ω は地球の自転の角速度を表す定数である。この質点が鉛直上方に速度 v_0 で地上から投射され、再び地上に落下した時、質点が投射した点からどちらの方角にどれだけ異なった位置に落ちるか求めよ。ただし、投射した点と落ちた点の z 座標は等しいとしてよい。また $\frac{dz}{dt}$ に比べて $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ は無視してよく、 ω の1次まで求めればよい。(ヒント：系統的にやるなら

$$\begin{aligned}x &= x(t, \omega) = x_0(t) + \omega x_1(t) + \dots, \\ y &= y(t, \omega) = y_0(t) + \omega y_1(t) + \dots, \\ z &= z(t, \omega) = z_0(t) + \omega z_1(t) + \dots,\end{aligned}$$

と展開し、運動方程式に代入して ω^0 次、 ω^1 次... と順に係数を比較して解を決定していけばよい。あるいは、こうしないでも、きちんと理由を述べて近似してもよい。)