発泡スチロール球の落下運動について

溝口　俊弥

May 16, 2016

直径７ cm と３ cm の発泡スチロール球を、空気中で床から 230cm の高さから初速０ m/s で落下させたとき、床に到達するまでの時間の差を評価しよう [1]。

一般に、速度 v で運動する半径 a の球体が、粘性係数 η の流体中において受ける粘性抵抗 f_V は、ストークス (Stokes) の法則 [2] によれば

$$|f_V| = 6\pi\eta a|v| \tag{1}$$

で与えられる。一方、慣性抵抗は、流体の密度を ρ_0、抵抗係数を C_D として

$$|f_I| = \frac{1}{2}C_D\pi\rho_0 a^2|v|^2 \tag{2}$$

である。ここでは $C_D = 0.44$ とする。

運動方程式は、球体の質量を m、体積を V とすると、鉛直上向きを z 軸正の向きとして

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg + \rho_0 Vg + f_V + f_I, \tag{3}$$

よって

$$\frac{dv}{dt} = -\alpha g - \frac{\kappa}{m}v + \frac{\lambda}{m}v^2 \tag{4}$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned}
v &\equiv \frac{dz}{dt}, \\
\alpha &\equiv 1 - \frac{\rho_0}{\rho}, \\
\kappa &\equiv 6\pi\eta a, \\
\lambda &\equiv \frac{1}{2}C_D\pi\rho_0 a^2
\end{aligned} \tag{5}$$

とおいた。

1　粘性抵抗のみを考慮した場合

　粘性抵抗 f_V が速度 v に比例するのに対し、慣性抵抗 f_I は速度の 2 乗 v^2 に比例するので、速度 v が十分小さければ f_V の方が支配的となり、f_I は無視できる。そのような v は

$$f_I << f_V, \tag{6}$$

すなわち $f_I = f_V$ となる速度を v_c として

$$v << v_c \tag{7}$$

の領域にある。v_c を求めると、$f_I = f_V$ より

$$\kappa v_c = \lambda v_c^2. \tag{8}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} v_c &= \frac{\kappa}{\lambda} \\ &= \frac{6\pi\eta a}{\frac{1}{2}C_D \pi \rho_0 a^2}. \end{aligned} \tag{9}$$

ここで

$$\begin{gathered} \text{空気の粘性係数 } \eta = 18.2 \times 10^{-6} \text{ Pa s}, \\ \text{空気の密度 } \rho_0 = 1.2 \text{ kg } m^{-3}, \\ C_D = 0.44 \end{gathered} \tag{10}$$

などを代入すると、

$$v_c = \frac{4.1}{a/\text{cm}} \times 10^{-2} \text{m/s} \tag{11}$$

が得られる。

　一方、(4) で最後の慣性項を落とした方程式：

$$\frac{dv}{dt} = -\alpha g - \frac{\kappa}{m} v \tag{12}$$

を初期条件 $t = 0, v = 0$ で解くと、

$$\begin{aligned} v &= -\frac{m\alpha g}{\kappa}(1 - e^{-\frac{\kappa}{m}t}) \\ &\xrightarrow{t\to\infty} -v_f^{\text{vis}}. \end{aligned} \tag{13}$$

ここで v_f^{vis} は終端速度 (terminal velocity) で、$m = \rho V = \frac{4}{3}\pi\rho a^3$ より今の場合発泡スチロールの密度 ρ を

$$\rho = 48.3 \text{ kgm}^{-3} \tag{14}$$

と仮定すると

$$\begin{aligned} v_f^{\mathrm{vis}} &= \frac{m\alpha g}{\kappa} \\ &= 5.6(a/\mathrm{cm})^2 \times 10^1 \ \mathrm{m/s} \end{aligned} \tag{15}$$

であり、v_c (11) をはるかに超えてしまう。したがって、粘性抵抗のみを考えて議論するのは consistent でない (図 1) [1]。

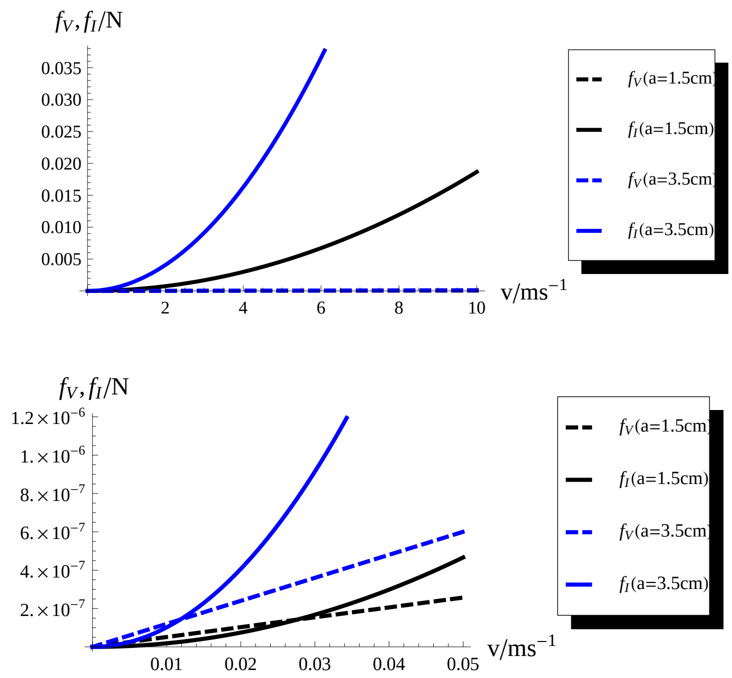

図 1: 粘性抵抗 f_V と慣性抵抗 f_I 上図：発泡スチロール球の速度が数 ms^{-1} のとき粘性抵抗（破線）は慣性抵抗（実線）に対してほとんど無視できる。下図：速度が秒速数 cm の低速領域で粘性抵抗は慣性抵抗と同程度になる。

2　慣性抵抗のみを考慮した場合

したがって、次に (4) において右辺第 2 項を落とした方程式を考えよう：

$$\frac{dv}{dt} = -\alpha g + \frac{\lambda}{m} v^2. \tag{16}$$

両辺に $\frac{\lambda}{m}$ をかけて

$$\frac{\lambda}{m} v \equiv y, \quad \frac{\lambda\alpha g}{m} \equiv b^2 \tag{17}$$

[1]速さが v_c を超えない非常に短い時間内の運動を議論する場合には適用できるが、今の場合そうでないことがすぐわかる。

とおくと、(16) は

$$\frac{dy}{dt} = y^2 - b^2 \tag{18}$$

と簡単になる。これを初期条件 $t = 0$, $y = 0$ のもとで解くと、

$$\begin{aligned} y &= -b\frac{e^{2bt} - 1}{e^{2bt} + 1} \\ &= -b\tanh bt \end{aligned} \tag{19}$$

となるから、結局

$$v = -\sqrt{\frac{m\alpha g}{\lambda}}\tanh\sqrt{\frac{\lambda\alpha g}{m}}t, \tag{20}$$

$$z = -\frac{m}{\lambda}\log\cosh\sqrt{\frac{\lambda\alpha g}{m}}t \tag{21}$$

となる。この z が $z = -2.3$ となる t を数値的に求めると

$$\begin{aligned} &\text{直径 } 2a = 7\text{cm のとき} \qquad t = 0.725s \\ &\text{直径 } 2a = 3\text{cm のとき} \qquad t = 0.768s \end{aligned} \tag{22}$$

が得られる。(有効数字２桁で、３桁目は信用できない。）したがって、直径７ cm の球の方が約 0.04 秒早く床に到達するという結果になる。

3　粘性・慣性抵抗両方考慮した場合

(4) は、$\frac{\lambda}{m}\left(v - \frac{\kappa}{2\lambda}\right) \equiv y$, $\frac{\lambda}{m}\left(\alpha g + \frac{\kappa^2}{4m\lambda}\right) \equiv b^2$ とおけば再び $\frac{dy}{dt} = y^2 - b^2$ の形となる。ただし $b = \sqrt{\frac{\lambda}{m}\left(\alpha g + \frac{\kappa^2}{4m\lambda}\right)}$ で、また初期条件は $t = 0$ で $v = 0$ となるために $y = -\frac{\kappa}{2m}$ となる必要がある。これをみたすように任意定数を定めると、結果は

$$v = \frac{\kappa}{2\lambda} - \frac{mb}{\lambda}\tanh\left(bt + \frac{1}{2}\log\frac{b + \frac{\kappa}{2m}}{b - \frac{\kappa}{2m}}\right), \tag{23}$$

$$z = \frac{\kappa t}{2\lambda} - \frac{m}{\lambda}\left(\log\cosh\left(bt + \frac{1}{2}\log\frac{b + \frac{\kappa}{2m}}{b - \frac{\kappa}{2m}}\right) - \log\cosh\left(\frac{1}{2}\log\frac{b + \frac{\kappa}{2m}}{b - \frac{\kappa}{2m}}\right)\right). \tag{24}$$

この z に対して $z = -2.3$ となる t を数値的に求めると、結果は (22) と誤差の範囲の違いしかないことがわかる。

参考文献

[1] S618K 氏による実験動画： https://www.youtube.com/watch?v=OkfNkdfcfEQ&spfreload=10 に動機づけられた問題設定。ただし発泡スチロールの密度 ρ などの示されていないデータは仮定した。

[2] 非圧縮性流体に対するナビエ-ストークス (Navier-Stokes) 方程式で v^2 に比例する項を落とした近似で得られる。詳しくは [3] 参照。

[3] 「流体力学 (物理テキストシリーズ 9) 」今井功, 岩波書店