

# 群と弦理論

溝口 俊 弥

## 1. はじめに

弦理論 (string theory) を一言で言うと、「非常に短い「ひも」の振動によってこの世のすべての素粒子を記述しようとする理論」ということになります。現在までに見つかっている素粒子は、標準模型 (standard model) によって非常に精度で記述されています。しかし、様々な理由<sup>\*1)</sup>から標準模型は拡張され、超対称標準模型や大統一理論が考案されました。そして、多くの研究者が、その背後に超対称性をもつ弦理論—超弦 (super-string) 理論—が究極理論として存在していると期待し、あるいはその存在を暗黙に仮定して研究してきました。

弦理論が自然界を支配している直接的な実験的証拠や観測的事実は—あえて挙げるとするなら「自然界には重力が存在し、弦理論はそれを量子化できる」という事実はありますが、それ以外—現在までのところ何一つありません。それでもなお、弦理論がこれほどまでに精力的に研究され、存在が信じられている一つの理由は、その奇跡的とも言える整合性と理論的内容の美しさにあります。

\*1) 例えば、「ダークマターがない」などのように実験・観測的に決定的なもの、「パラメータが多すぎる」「構造が複雑すぎる」などのように審美的なもの、あるいは「巨大な数の引き算で非常に小さな答えが出るのは不自然」のようにそれが「問題」なのか最近やや微妙になっているものなどです。また、「重力を量子化できない」という場の理論では解決困難な問題もあります。

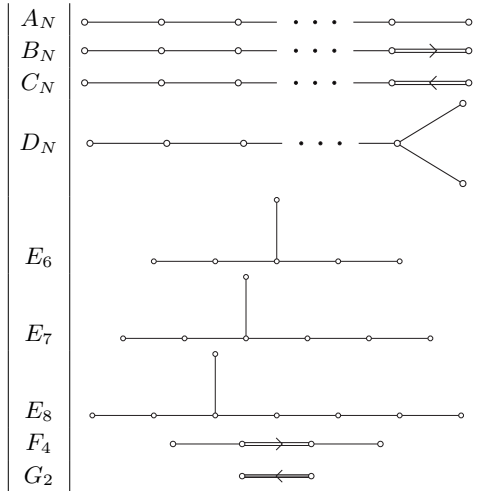
本稿では、そのような弦理論の美しさの中でも群に関するもの、特にゲージ対称性や双対対称性に現れる最大の例外群、 $E_8$  にまつわる不思議な数々の事実について紹介したいと思います。

## 2. 線形リー群とディンキン図形

はじめに、 $E_8$  とはどんな群なのか説明しましょう。 $E_8$  は、単純な線形リー群の分類の中で、例外群と呼ばれるもののうちで最大のものです。ちょっと長くなりますのであらすじだけをはじめに言うと、「リー群」(すぐ説明します)の無限小変換形に相当する「リー代数」が表1のような図形で分類できて、その特別な場合が  $E_8$  です。その図形から無限小変換形を構成できて、それを  $\exp$  の肩に乗せたのが  $E_8$  群になります。

リー群とは、大ざっぱに言って群自体が滑らかな多様体になっているもの、つまりその群の要素が連続的ないくつかのパラメータを持っていて、それらが局所的に座標と見なせるようになっているようなもののことです。そして、線形リー群とは、単に行列式が0でない行列の群  $GL(N, \mathbb{C})$  ( $= N$  次一般線形群)の部分群のことを言います。行列式が1の  $N$  次ユニタリ行列の群である  $SU(N)$  や、行列式が1ですべての要素が実数の  $N \times N$  行列の群  $SL(N, \mathbb{R})$ 、あるいは実直交行列の群である  $SO(N)$  などがその例です。「単純」というのは群で言えば正規部分群がないということで、それで

表 1 デインキン図形



もいいのですが、細かいことを言うと正確でなくなるときもあるので、下で述べるような「リー代数」が「単純」なものとしておきます。

次に、 $G$  をある線形リー群として、ある行列  $X$  と実数  $t$  とで  $e^{tX}$  が  $G$  に入るようなものを考えましょう。行列の指数関数は無限級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (tX)^n$  で定義しますから、 $e^{tX} = 1 + tX + \dots$  です。したがって、量子力学とかでもやると思いますが、 $X$  は  $G$  の単位元  $1$  からの無限小変換に対応します。このような  $X$  をすべて集めてできた集合を  $\mathfrak{g}$  とすると、 $\mathfrak{g}$  は線形空間になり、 $\mathfrak{g}$  の 2 つの元  $a, b$  の交換関係  $[a, b] \equiv ab - ba$  はまた  $\mathfrak{g}$  に属する、つまり交換関係に関して閉じるものになります。また、 $X, Y, Z$  を  $\mathfrak{g}$  の元とすると、ヤコビ則

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 \quad (1)$$

が成り立ちます。この  $\mathfrak{g}$  を群  $G$  のリー環、あるいはリー代数と呼びます。例えば、量子力学でスピンを習うとでてくる 3 つのパウリ行列  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  の  $(2i)^{-1}$  倍をそれぞれ  $T_a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) とすると、 $[T_1, T_2] = T_3$  およびそれらをサイクリックに置換した関係式が成り立ちますから確かに閉じていますし、行列ですからもちろんヤコビ則も満たされます。 $T_a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) の張る

実ベクトル空間は  $SU(2)$  のリー代数であり、また複素ベクトル空間に拡張すれば  $SL(2, \mathbb{C})$  のリー代数になります\*2)。さて、線形リー群のリー代数は、図のようなデインキン図形と呼ばれる、小さな丸とそれらを結ぶ線からなるグラフによって分類されることが古くから知られています。もっと正確に言えば、単純な (=イデアルが 0 とそれ自身以外にない) 複素リー代数がデインキン図形と 1 対 1 に対応します。\*3)

それぞれのデインキン図形には表 1 のように名前がついていて、上から 4 本は  $N$  がいくらでも大きくなれる無限系列なのに対して\*4)、下の 5 つは例外的に存在が許されるもので、対応するリー群は例外群と呼ばれます。特に、その中でも一番長いもの、 $E_8$  は特別な性質を持っていて、超弦理論ととても縁が深いのです\*5)。ちなみに、このようなデインキン図形による分類、あるいは白丸たち—それをノード (node) と言います—が 1 本線だけで結ばれている\*6)図形による分類 (ADE 分類) は、超弦理論やそれ以外の数理論理学でもいろんな所に顔を出すとても不思議な性質です。もし地球外にある程度の知的水準に達している高等生物がいたとして、地球から来た宇宙船の中からデインキン図形を発見したら、きっと私たち人類の知的水準の高さを知ることでしょう\*7)。

さて、これらのデインキン図形がどのようにリー代数と関連するのかを見ましょう。まず、これらの図形に、ある正方行列で対角成分にそのノードと同じ数だけ 2 がならんだものを、次のようなルー

\*2) それぞれ実リー代数、複素リー代数の例になっています。  
 \*3) また、実リー代数を複素化してある複素リー代数が得られるとき、それをできた複素リー代数の実形と言いますが、それらも (多対 1 ですが) デインキン図形と対応することになります。  
 \*4) 上から (実形で言うと)  $SU(N+1)$  や  $SL(N+1, \mathbb{R})$  の系列、 $SO(2N+1)$  の系列、 $Sp(2N)$  の系列、 $SO(2N)$  の系列に対応します。  
 \*5) 超弦を含めた素粒子の文献では、リー群もそのリー代数も同じ記号で表すことが多く、本稿もそれに従います。  
 \*6) 靴ひもを英語で shoelace と言いますが、それに見立ててそのようなグラフを simply-laced と言います。  
 \*7) この半分 (以上?) 冗談のような話は、昔、山田泰彦さん (神戸大自然) に聞いたもので、この場を借りて感謝致します。

ルで対応させます。すなわち、各ノードに番号をつけておいて、ノード  $k$  とノード  $l$  とが結ばれていたら、その行列の非対角  $(k, l)$  成分と  $(l, k)$  成分に  $-1$  をいれなさい、というルールです。ただし、2本線だったら  $<$  の向きに応じてどちらかを  $-2$  に、3本線だったらどちらかを  $-3$  にします。それ以外の成分はすべて  $0$  にします。こうしてできた行列がカルタン行列 (Cartan matrix) です。例えば  $A_1 (= SL(2, \mathbb{C}))$  のカルタン行列はただの (2) だけ、 $A_2 (= SL(3, \mathbb{C}))$  なら  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  となります。

次に、カルタン行列の各成分によって、リー代数の基本的な生成子の間の交換関係を次のように定めます。まず、 $SL(2, \mathbb{C})$  と同型な3つの生成子のセット  $(h_k, e_k, f_k)$  ( $k = 1, \dots, N$ ) をノードの数だけ用意します。次にカルタン行列を  $K_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, N$ ) ( $N$  はノードの数) として、それらの間の交換関係を

$$\begin{aligned} [h_i, e_j] &= K_{ij} e_j, & [h_i, f_j] &= -K_{ij} f_j, \\ [e_i, f_j] &= \delta_{ij} h_j, & [h_i, h_j] &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

と定めます\*8)。各  $k$  ごとに、 $h_k, e_k, f_k$  が3つの行列  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  に対応し、 $SL(2, \mathbb{C})$  と同型になっています。さらに、関係式

$$(\text{ade}_i)^{1-K_{ij}} e_j = 0, (\text{adf}_i)^{1-K_{ij}} f_j = 0 \quad (3)$$

を要請します。ただし  $(\text{ad} X)Y = [X, Y]$  のことです。関係式 (3) は Serre 関係式 と呼ばれます。これらのルールに基づいて、はじめに用意した  $3N$  個の基本的な元から自由に多重交換関係をとって新しい元をつくっていったら、それら全体が生成するリー代数がディンキン図形に対応するリー代数になります。

$A_2$  の例で考えますと、まずノードが2個なので  $(h_1, e_1, f_1)$  と  $(h_2, e_2, f_2)$  を用意すると、(3) の上で述べたようにそれぞれは  $SL(2, \mathbb{C})$  と同型です。さらに  $A_2$  のカルタン行列の  $(1, 2)$  成分

と  $(2, 1)$  成分が  $-1$  なので  $(\text{ade}_1)e_2 = [e_1, e_2]$ ,  $(\text{adf}_1)f_2 = [f_1, f_2]$  は何かあっていいですが、それ以上  $\text{ade}_i$  や  $\text{adf}_i$  をやると  $0$  としなければならないことが Serre 関係式によって要請されています。結局はじめの6個に  $[e_1, e_2]$  と  $[f_1, f_2]$  を加えた8個がそれぞれ  $3 \times 3$  行列

$$\begin{aligned} h_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ e_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ f_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ [e_1, e_2] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ [f_1, f_2] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

に対応して (2) と (3) を満たすことが確かめられます。

これと全く同様にして、図1の  $E_8$  型のディンキン図形に対応するカルタン行列からつくったリー代数が  $E_8$  で、それを  $e$  の指数に乗せたものが  $E_8$  群です\*9)。

実は、一般の無限次元 Kac-Moody 代数も同様にして定義されるのですが、有限次元で閉じるのは図1の図形に対応するカルタン行列からつくったときだけなのです。

さて、互いに交換する  $h_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) で生成されるリー代数の部分代数をカルタン部分代数といい、 $\mathfrak{h}$  で表すことにします。すると、(2) を見てわかることは、 $e_j$  たちおよび  $f_j$  たちは、任意の  $h_i \in \mathfrak{h}$  に対して  $\text{adh}_i$  の同時固有状態になっている、ということです。これは、 $\mathfrak{h}$  が可換だからそういうものが許されわけですが、何か  $e_j$  なり、 $f_j$  なりを1つ固定して、 $h_1, \dots, h_N$  の  $\text{ad}$  に関する固有値をならべたとします。例えば  $A_2$  なら、 $e_1$  をとったとして

$$(\text{adh}_1)e_1 = [h_1, e_1] = 2e_1,$$

\*9) 超弦や超重力理論で  $E_8$  などの例外群を表すときには、その適当な部分群の表現の直和で表すのが実用的なのですが、紙面の制限で省略します。

\*8) 繰り返し添字に関して和をとらないことに注意。

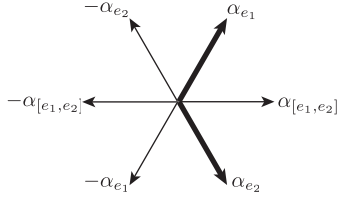


図 1  $A_2$  のルート系

$$(\text{adh}_2)e_1 = [h_2, e_1] = -e_1 \quad (5)$$

ですから  $(2, -1)$  となります。これを  $e_1$  に対応するルートといいます。すると、任意の  $\mathfrak{h}$  の元  $ah_1 + bh_2$  ( $a, b \in \mathbb{C}$ ) に対して固有値  $2a - b$  がきまりますから、ルートは  $\mathfrak{h}$  の双対空間  $\mathfrak{h}^*$  の元、つまり  $\mathfrak{h}$  の関数です。このように、一般にはじめに用意した  $e_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  の、 $\text{adh}$  に関する固有値できまる  $\mathfrak{h}$  の関数を単純ルートといって、 $\alpha_{e_j}$  で表すことにします。 $[e_1, e_2]$  などのように交換関係をとったものも  $\text{adh}$  の固有状態になるのでルート  $\alpha_{[e_1, e_2]}$  が考えられて、この場合には  $e_1$  と  $e_2$  の単純ルートの和  $\alpha_{e_1} + \alpha_{e_2}$  になります。

さて、カルタン行列のもう一つの性質は、ルートベクトル間の内積を  $\cdot$  で表したとき、その  $(i, j)$  成分が  $\frac{2\alpha_{e_i} \cdot \alpha_{e_j}}{\alpha_{e_j} \cdot \alpha_{e_j}}$  になる、ということです。ADE 型のときにはすべてのルートの長さが等しいので 2 に正規化できて、その場合には内積そのものになります。この内積は、 $\mathfrak{h}$  の  $\mathfrak{g}$  不変な内積  $h_i, h_j \in \mathfrak{h}$ ,  $\langle h_i, h_j \rangle \equiv \text{Tr}(\text{adh}_i)(\text{adh}_j)$  が今の場合非退化な (2 乗が 0 にならない) ので、それを  $\mathfrak{h}^*$  の内積に焼き直したものです。例えば、再び  $A_2$  なら、2 つのルートベクトル  $\alpha_{e_1}, \alpha_{e_2}$  の内積行列  $\begin{pmatrix} \alpha_{e_1} \cdot \alpha_{e_1} & \alpha_{e_1} \cdot \alpha_{e_2} \\ \alpha_{e_2} \cdot \alpha_{e_1} & \alpha_{e_2} \cdot \alpha_{e_2} \end{pmatrix}$  が  $A_2$  のカルタン行列  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  と等しいということです。すると、容易にわかりますように、単純ルート  $\alpha_{e_1}$  と  $\alpha_{e_2}$  は図 1 のような位置関係にあります。これが  $A_2$  のルート系です。<sup>\*10)</sup>

ちょっとルート系について長々と説明してしまいましたが、 $A_2$  ( $SU(3)$  や  $SL(3, \mathbb{R})$  の複素化)

\*10) ここでは紙面の関係と取っ付き易さを優先してこのように説明しました。本格的に学びたい方は<sup>1)</sup> や<sup>2)</sup> を見てください。

の例で一々説明したのは、これと同じことを  $E_8$  でもイメージしていただきたかったからです。 $E_8$  の場合にも、ディンキン図形に対応する図 1 のような単純ルートが 8 次元空間を張って、それから格子ができます。この格子が後で見ますように著しい性質をもっているのです。

### 3. 超弦の奇跡 その 1 : $E_8$ 格子と頂点作用素

さて、いよいよ超弦です。超弦研究の歴史は、奇跡の発見の歴史です。そして、超弦理論を勉強し研究することは、感動体験の連続そのものです。しかし、... そこにたどり着くまでにはかなり長くて退屈な下準備が必要になります。ここでは紙面の制約上、その概略だけをご紹介します<sup>3)</sup>。

超弦理論は 10 次元時空でのみ無矛盾に構成できます。「超」のない、つまり超対称性がない弦理論では 26 次元です。これは、どんなやり方をしても一弦を量子化する方法にはいろいろあるのですが—こういう結論になってしまうので、動かしがたい事実です。一方、我々の世界は 4 次元時空で、そこにある素粒子の標準模型につながるものを作りたいわけです。標準模型は  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  のゲージ対称性を持っていますので、弦の方でも 10 次元で非可換 (non-abelian) ゲージ対称性を持つものを考えます<sup>\*11)</sup>。

非可換ゲージ対称性を弦理論で (摂動論的に) 実現するには、2 つの方法があります。一つ目は、開いた弦 (open string) の両端に—その昔クォークをおいたように—フレーバー、というよりカラーと言った方がいいかもしれませんが、群の基本表現<sup>\*12)</sup>の自由度を付与する方法です。この自由度

\*11) 歴史的には、この考え方は 30 年ほど前からある伝統的なもので、90 年代にかけてヘテロティック弦全盛期を迎えました。90 年代半ばに D-ブレーンが発見され、「ゲージ対称性は 10 次元になくてもよい」という考え方が主流となり、標準模型ライクな模型が数多く作られました。が、こちらも (特定の湯川結合が非摂動論的にしか実現できないなど) —筋縄ではいかないことが判明し、現在に至っています。

\*12) 異なるサイズの行列で同じ代数関係を実現できるとき、それらは「表現が異なる」と言います。例えば、 $SO(3)$  のリー代数は  $SU(2)$  のそれと交換関係は同じですが、前者は 3 表現、後者は 2 表現の表現行列です。

は Chan-Paton 因子と呼ばれ、タイプ I 超弦の  $SO(32)$  ゲージ対称性を実現しています。また、D-ブレーンが  $N$  枚重なったときの  $U(N)$  ゲージ対称性の起源とも言えます。これは一見大域的対称性の拡大に過ぎないように見えて、実はゲージ対称性をも拡大するのが非自明な所です。

もう一つは、これから説明しますように、閉じた弦 (closed string) の頂点演算子 (vertex operator) を使う方法です。「頂点演算子」というのは、ファインマン図形の頂点のように、弦理論においてそれぞれの振動モードに対応する粒子を放出・吸収を表す演算子のことです。

少し具体的に説明するために、ここで唐突ですが、次のような作用積分を考えます。

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_0^{2\pi} d\sigma \left( (\partial_\tau X)^2 + (\partial_\sigma X)^2 \right). \quad (6)$$

これは、弦理論の教科書のはじめに必ず登場するポゾニック弦の作用で、詳細は参考文献をご覧ください。ここで  $(\partial X)^2$  というのは  $\eta_{\mu\nu} \partial X^\mu \partial X^\nu$  のことで、 $X^\mu(\tau, \sigma)$ ,  $\mu = 0, 1, \dots, 25$  は弦の掃く 2 次元世界面の座標が  $(\tau, \sigma)$  の部分が 25 次元時空のどこにいるかを表し、 $\eta_{\mu\nu}$  は時空の計量  $\text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$  です。-1 があるので、 $X^0$  の運動項が逆符号になってしまうので何とかしないといけませんが、いろいろ何とかする方法があるので<sup>\*13)</sup>ここでは気にしないことにし、 $\mu$  は 0 でない、空間方向成分だとします。そうすると、やることは、 $X^\mu(\tau, \sigma)$  の運動方程式を適当な境界条件で解いてモード展開し、 $X^\mu(\tau, \sigma)$  の共役運動量を求めてそれらの交換関係が  $i$  倍の  $\delta$  関数になるようにモードの係数を演算子に「昇格」させればいいのです。 $\eta_{\mu\nu}$  が対角なので各  $\mu$  ごとに行なえて、結果は閉じた弦の場合には

\*13) (6) はもっと一般的な作用をゲージ固定したもので、もとのゲージ自由度を使って負ノルム状態があらわに出ないようにしたり、あるいは BRS 形式でそれらが効かないことが示せたりできます。これらが矛盾なくできる次元が 26 次元だったり 10 次元だったりするわけです。

$$\begin{aligned} X^\mu(\tau, \sigma) &= x^\mu - i\alpha' p^\mu \tau \\ &+ i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \left( \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-n(\tau+i\sigma)} + \frac{\tilde{\alpha}_n^\mu}{n} e^{-n(\tau-i\sigma)} \right), \\ [x^\mu, p^\nu] &= i\eta^{\mu\nu}, \quad [\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu] = n\eta^{\mu\nu} \delta_{n,-m}, \\ [\tilde{\alpha}_n^\mu, \tilde{\alpha}_m^\nu] &= n\eta^{\mu\nu} \delta_{n,-m}, \quad \text{その他} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$\tau + i\sigma$  に依存するモードを左向きモード、 $\tau - i\sigma$  に依存するモードを右向きモードと呼んでいます。開いた弦の場合には、自由端 (Neumann) 条件か固定端 (Dirichlet) 条件によって異なりますが、大体似たような定在波による展開式で、振動励起モード演算子が 1 種類のものになります。

超弦の場合には、 $X^\mu(\tau, \sigma)$  の数を 10 個にするとともに、2 次元面のフェルミオン  $\psi^\mu(\tau, \sigma)$  も 10 個導入して、同じように適当な境界条件で展開を行ない量子化します。

さらに、26 個の  $X^\mu$  のうちの 16 個の  $X^j$ , ( $j = 10, \dots, 25$ ) がある 16 次元トラスにコンパクト化されていたとします。すると、今度は閉じた弦が巻き付くことが許されるので (7) には  $\sigma$  (弦の座標、 $0 \leq \sigma \leq 2\pi$ ) について 1 次の項も加わります。また、運動量  $p^j$  も量子化されるので、(7) は  $p^j \tau \rightarrow p_L^j(\tau + i\sigma) + p_R^j(\tau - i\sigma)$  に置き換わります。ここで、 $p_L^j$  と  $p_R^j$  はそれぞれ運動量と巻き付き数の 1 次結合で、別の 16 次元格子を走ります。この量子化された  $X^\mu$  にある波数  $k_\mu$  の  $i$  倍をかけて  $\exp$  にのせて正規順序 (normal-ordering) し、たものを (スカラー) 頂点演算子といい、大変数学的に良い性質をもつことが知られています。

さて、このように閉じた弦の場合、 $X^\mu(\tau, \sigma)$  は左向きモードと右向きモードの和に完全に分かれてしまいます (超弦の場合には  $\psi^\mu$  も)。これは共形不変性の反映なのですが、これらは基本的に独立なので、右向きモードは超弦なのに左向きモードは超対称性のないポゾニック弦になっているようなもの考えることが可能です。ところがポゾニック弦だと  $X^\mu$  が 26 個ありますから左向きだけ  $26 - 10 = 16$  個分空間次元が余計です。そこからゲージ対称性が出るという理論がヘテロティック弦理論です。具体的には、先ほどの  $X^j$  ( $j = 10, \dots, 25$ ) の  $\tau + i\sigma$

に依存する部分をヘテロティック弦の余分な 16 個の左向き空間次元とします。一方、10 次元部分については、左向きは (7) の  $\tau + i\sigma$  部分、右向きは (7) の  $\tau - i\sigma$  部分にフェルミオン  $\psi^\mu(\tau, \sigma)$  の展開を加えた超弦のモード展開とします。

ところが、このように左と右を非対称に組んでしまうと、大抵は整合的でなくなってしまう。モジュラー不変でなくなってしまうのです。閉じた弦の真空 1-ループ振幅は、2 次元トーラス形状の世界面の複素構造モジュラス  $\tau$  (上の  $\tau$  とは別) の関数ですが、 $ad - bc = 1$  をみたす 4 つの整数  $a, b, c, d$  で  $\tau \mapsto \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$  (モジュラー変換) としても、座標を取り替えただけの同じトーラスを表すので、不変になっていないとおかしいのです。

左向きの 16 次元部分には、右向きの相棒がいまないので、それからの寄与はそれだけでモジュラー不変になっていないといけません。振幅をモジュラー変換すると、ある格子の状態和はその双対格子<sup>\*14)</sup>の状態和に置き換わるので、左向きの 16 次元部分の運動量格子は自己双対 (selfdual)、つまり双対格子がそれ自身と一致するものでなければなりません。また、位相因子を打ち消してくれる相棒がないので、位相因子は常に 1 になっていなければなりません。これから格子の長さの 2 乗はすべて偶数 (even) になっていることが要求されます。

ユークリッド 16 次元には、偶数自己双対格子がただ 2 つだけ存在します<sup>4)</sup>。一つは  $SO(32)$  のルート格子、もう一つは  $E_8$  ルート格子の直和です。これらのリー代数のルートの 1 つを  $\alpha_j$  とする時、頂点演算子  $e^{i\alpha_j X^j}$  ( $\alpha_j$  は  $\alpha$  の直交座標成分 ( $\alpha' = 2$ )) の共形ウェイトは 1 となり、ゲージ粒子 (の左向き部分) に対応します。このようにしてゲージ対称性を実現するのがそれぞれ  $SO(32)$  ヘテロティック弦理論と  $E_8 \times E_8$  ヘテロティック弦理論です。

このような格子が存在するだけでも奇跡的ですが、もっとすごいことに、これら二つの群をゲージ

\*14) 格子を張る基底ベクトルのセットが与えられたとき、その双対ベクトルたちによって張られる格子のこと。

群とした時のみ、10 次元のアノマリーがすべて「奇跡的」に相殺できることが Green と Schwarz によって示されていたのです。これが有名な Green-Schwarz 機構で、もう詳しくは述べられませんが、それまでは Alvarez-Gaume, Witten らによって、10 次元でカイラルな超弦理論は「ダメ出し」を食らっていたのです。 $SO(32)$  は開弦で実現できていましたが、例外群は開弦ではできません。その最大のものだけが整合的に実現できるなんて、なんて不思議なことではありませんか！

#### 4. 超弦の奇跡 その 2 : K3 曲面と特異点

前節では 10 次元で超対称性の数が  $N = 1$  の理論についてお話しましたが、左右のモードをどちらも超弦にすれば  $N = 2$  の超弦ができます。その二つの超対称荷電のスピンが逆を向いているか同じかによって、それぞれタイプ IIA 弦、タイプ IIB 弦と呼ばれます。これらは 10 次元で非可換ゲージ対称性をもたないので、ヘテロティック理論とかなり違うように見えます。ところが、IIA 弦を K3 という多様体にコンパクト化すると、それが実はヘテロティック弦を 4 次元トーラス ( $T^4$ ) にコンパクト化した理論の別の記述であると考えられているのです。

K3 というのは、 $T^4$  以外で唯一のコンパクトなハイパーケーラー多様体<sup>\*15)</sup>です。2 つの超重力理論が一致することは古くから知られていたのですが、1994 年に Witten は、 $E_8 \times E_8$  ヘテロティック弦の  $T^4$  コンパクト化においてヒッグズ機構が起らずに非可換ゲージ対称性が残る状況は、IIA 弦がコンパクト化される K3 多様体の特異点になるような状況と対応する、ということを初めて提唱しました。K3 の特異点は前節でたような ADE 分類に従うのですが、ここでは特異点がどのよう

\*15) 複素多様体で複素構造と計量でつくった二次形式の外微分が消えるときケーラーといい、そのような複素構造が 3 つあって  $SU(2)$  代数を満たす時ハイパーケーラーといいます。4 次元の場合ホロノミーが  $SU(2)$  になって超対称性が半分になるので、もとはタイプ II でもヘテロティックと超対称性の数が同じになります。

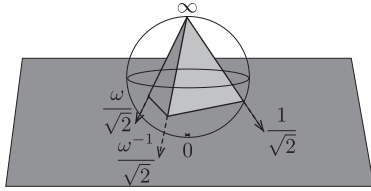


図 2 正四面体群

に分類されるのか、簡単にお話ししましょう。

図 2 のように、南極が複素平面の原点で接するように置かれた直径 1 の球、に内接する正四面体を考えましょう。一つの頂点が北極に、もう一つの頂点が北極と実軸を含む平面内にくるようにしました。すると、立体射影により正四面体群  $\mathcal{T}$  は、 $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1$  (複素 1 次元射影空間) に作用します。その座標を  $(z_1 : z_2)$  としたとき、それらの斉次多項式でその作用で不変なものを考えます (不変式)。すると、すぐわかることは、その多項式=0 の解に、頂点や辺の中点、面の重心等、ある群作用で動かないものの投影先が含まれるとき、その多項式は一般の場合よりも低次になります。例えば、図 2 のように各頂点の投影先をすべて解にもつ多項式  $z_2(z_1 - \frac{z_2}{\sqrt{2}})(z_1 - \frac{\omega z_2}{\sqrt{2}})(z_1 - \frac{\omega^{-1} z_2}{\sqrt{2}})$  ( $\omega$  は 1 の 3 乗根) は ( $\mathcal{T}$  が 12 種類の操作からなる群にもかかわらず) 4 次の不変式です。これを  $F_v$  とし、辺の中点、面の重心についても同様にして得られた不変式を  $F_e, F_f$  とすると、 $x = F_e, y = F_v F_f, z = F_v^3 - F_f^3$  は  $\mathbb{C}^2 / \tilde{\mathcal{T}}$  (\*16) の座標と見なせることが示せます<sup>2)</sup>。ただし  $x, y, z$  には  $x^4 + y^3 + z^2 = 0$  という関係式があるので、これは  $\mathbb{C}^3$  のある曲面です。この原点にある特異点がクライン特異点で、この場合は  $E_6$  に分類されるのです。

この特異点の何が  $E_6$  なのかというと、特異点をブローアップして出てきた 6 本の直線の交わり方が  $E_6$  のディンキン図と対応するのです。「ブローアップ」というのは特異点をスムーズにする方法で、 $\mathbb{C}^3$  の 1 点ブローアップの定義は  $\{(x_1, x_2, x_3), (\zeta_1 : \zeta_2 : \zeta_3) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{P}^2 | x_i \zeta_j = x_j \zeta_i (i, j = 1, 2, 3)\}$  ですが、これを  $\mathbb{R}^2$  で説明すると、例えば野球の守

備練習でノックされた打球をキャッチしたらバックホームしなければいけないとすると、キャッチャーは 1 人ですべての方向の送球を処理しないといけませんから忙しい (特異点) ので、ノックの方向ごとに別のキャッチャーをホームベース上に用意しよう、ということです。野球なら 3 方向 3 人ですみませんが、打球の方向は連続的に変化するので、原点に直線が現れます。正四面体群  $\mathcal{T}$  の場合には 6 回ブローアップが必要で、その 6 本の直線のうち直線  $k$  と  $l$  が交わっていたら  $(k, l)$  成分は 1 (自分自身とはある定義で計算すると -2 となる) という行列をつくると、 $E_6$  のカルタン行列の符号を変えたものにちょうど一致するのです。また、他の (二項) 正多面体群  $\Gamma$  でも同じようなことができ、これが特異点の ADE 分類です。

さて、これらの特異点では  $\mathbb{C}^2$  の無限遠が  $\Gamma$  で同一視されているわけですが、このような同一視があるにもかかわらず、原点でもスムーズな (非コンパクト) ハイパーケーラー多様体が 70 年代後半からすでに知られていました。これが有名な江口-ハンソン空間です。これは  $A_1$  ( $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ ) の場合に相当するのですが、ほどなく Gibbons と Hawking によって一般の  $A_N$  に拡張されました。そして、他の simply-laced の場合にも 1989 年に Kronheimer によって実現されました。これが ALE 空間 (\*17) の ADE 分類です。つまり、ハイパーケーラー多様体の特異極限が ADE 分類されるのです。

Witten の指摘の後、間もなく Polchinski によって D-ブレーンが発見され、サイクル (ブローアップで出てきた直線) に巻き付いた D-ブレーンが、サイクルがつぶれるとともに軽くなって新しいゲージ粒子に対応する、と考えられるようになりました。このような「非摂動的な超対称性の拡大」という考え方は、その後の超弦理論研究の発展に大きな影響を与えたのです。 (\*18)

\*17) Asymptotically Locally Euclidean の頭文字をとったもの。ちなみに ALF 空間は Asymptotically Locally Flat ですが、ALG 空間、ALH 空間というのもあって、こちらはシャレで名付けられたものです。

\*18) タイプ IIB 理論でも、楕円 K3 を利用してヘテロティック理論と双対な理論を構成でき、F 理論と呼ばれています。

\*16)  $\tilde{\mathcal{T}}$  は、 $\mathcal{T}$  に -1 倍も許した  $\mathcal{T}$  の  $SU(2)$  版。

## 5. おわりに

本稿では、超弦理論にしばしば現れる  $E_8$  群や ADE 分類について、主にゲージ対称性に関して駆け足でお話をしました。超弦理論とそれらの不思議な関係はまだまだたくさんあって、特に「群と弦理論」と表題を掲げる以上、M/タイプ II 理論の U 双対性 (U-duality) に触れないわけにはいかない、と最初は思いましたが、ページ数の関係でできませんでした。

もし本稿をお読みになった読者の皆さんに「超弦は面白そうだ」と思っただけで、それが皆さんご自分で本格的に勉強や研究を始めるきっかけとなりましたら、それは私のこの上ない喜びです。

### 参考文献

- 1) 竹内外史「リー代数と素粒子論」(裳華房)
- 2) 松澤淳一「特異点とルート系(すうがくの風景)」(朝倉書店)
- 3) 弦理論については伊藤克司さんの解説記事: 数理学 (サイエンス社) 2012 年 12 月号「運動する弦と振動-弦理論」p.54 およびその引用文献を参考にしてください。
- 4) P.Goddard and D.Olive, in: "Vertex operators in Mathematics and Physics" (Springer)

(みぞぐち・しゅんや, 高エネルギー加速器研究機構)

---

その際には特異ファイバーの小平分類が同様の役割を果たします。