

# Lattice QCD simulation with exact chiral symmetry

松古 栄夫 (hideo.matsufuru@kek.jp)  
高エネルギー加速器研究機構 (KEK)

基研研究会「熱場の量子論とその応用」 2008 年 9 月 3-5 日

## Abstract

格子 QCD におけるフェルミオンの扱いについて概説し、格子上の厳密なカイラル対称性を持つオーバーラップ・フェルミオンと、JLQCD コラボレーションが行っているその大規模動的シミュレーションを紹介する。オーバーラップ・フェルミオンを用いた有限温度相転移の研究に向けての課題について考察する。

## 1 はじめに

格子 QCD のシミュレーションは、計算科学において最も大きな計算力を必要とするアプリケーションのひとつである。これまで、QCDPAX, CP-PACS などの開発の動機となり、また QCDOC の技術が IBM Blue Gene に継承されるなど、計算機の発展に与えた影響も大きい。計算機の発展と相俟って、格子 QCD シミュレーションも新しい時代へと移り変わってきた。90 年代はクエンチ近似 (クォークの真空偏極の効果を無視する近似) での本格的なシミュレーションが可能となり、ハドロンスペクトルなどの計算を通して格子 QCD の有効性が認識されるとともに、クエンチ近似の限界も分かってきた。2000 年代にはクォークの自由度を動的に扱ったシミュレーションが幅広く行われるに至っている。

計算機の発展は、これまで 10 年でおおよそ 1000 倍という速さで進んでいる [1]。日本の進める次世代スーパーコンピュータプロジェクトは、2011 年に 10PFlops の計算機を稼働させることを目標にしている。米国でも同時期に同程度の計算力を達成する計画が進んでいる。従って 2010 年代には、トップレベルで 10PFlops 級、大学等のスーパーコンピュータとして 1PFlops クラスの計算機を利用可能になるだろう。これにより、ハドロン行列要素などの精密計算に加え、核力や有限温度・密度系の定量的研究が進展すると考えられる。以下に述べるように、格子フェルミオンの取扱いはユニークではなくいくつかの定式化があるが、これらが連続極限で一致すること、格子理論が健全であり、その結果が信頼できるものであることが最終的に確認出来るだろう。

以下では、格子フェルミオンについての状況をまとめ、最近動的シミュレーションが現実的になった、厳密なカイラル対称性を持つオーバーラップ作用について紹介する。この作用を用いて大規模な動的シミュレーションを進めている、JLQCD コラボレーションのプロジェクトの現状を述べ、有限温度でのシミュレーションに向けての課題について考察する。

## 2 格子フェルミオン作用

この章では、格子上のフェルミオン作用について、それぞれの特徴を概観する。詳細については文献 [2] を参照されたい。

格子 QCD は、4 次元 Euclid 空間上に定義された場の理論であり、経路積分法を用いて量子化される。これによって Monte Carlo 法による数値シミュレーションが可能となり、場の理論の非摂動的な計算手法を与える。時空間を 4 次元の有限格子で近似し、各格子点 (サイト) に Grassmann 数としてクォーク場を、サイトとサイトを結ぶリンク上にゲージ場 (グルーオン場) を表すリンク変数

( $\in SU(3)$ ) を配する。Grassmann 数を直接計算機上で扱うのは難しいため、クォーク場を手で積分すると、オブザーバブル  $O$  の期待値は次のように表される。

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}U \det(D[U]) \exp(-S_G[U]) \quad (1)$$

ここで  $S_G[U]$  はゲージ場の作用であり、 $D[U]$  は格子上の Dirac 演算子である。ゲージ場とフェルミオン場の作用は、格子間隔  $a \rightarrow 0$  の連続極限で QCD と一致するものであればよい。

格子上でナイーブに微分を差分化してフェルミオン作用を定義すると、 $p^2 \sim m^2$  の物理的モードに加えて、15 個の非物理的なモード (ダブラー) が現れる。Nielsen-Ninomiya の定理によれば、質量ゼロの場合にカイラル対称性

$$D\gamma_5 + \gamma_5 D = 0 \quad (2)$$

をみたしつつ、ダブラーを消去することはできない。従って、これまでに用いられてきた作用ではそれぞれ、カイラル対称性とダブラーに関する何らかの妥協を行ってきた。

**Wilson 作用** Wilson フェルミオンでは、カイラル対称性を陽に破る項 (Wilson 項) を加えることによって、ダブラーを消去する。Wilson 項は 2 次の差分を含み、これによって  $p^2 \sim m^2$  以外の極を除去する。質量ゼロの Wilson フェルミオン作用は、次のように表される。

$$S_F = \sum_x \left\{ \sum_\mu \bar{\psi}(x) \frac{\gamma_\mu}{2} [U_\mu(x)\psi(x+\hat{\mu}) - U_\mu^\dagger(x-\hat{\mu})\psi(x-\hat{\mu})] - \frac{r}{2} \bar{\psi}(x)\Delta^{(2)}\psi(x) \right\} \quad (3)$$

ここで  $\Delta^{(2)}f(x) = \sum_\mu [U_\mu(x)f(x+\hat{\mu}) + U_\mu^\dagger(x-\hat{\mu})f(x-\hat{\mu}) - 2f(x)]$  は格子上の 2 階差分、 $\hat{\mu}$  は  $\mu$  方向の単位ベクトルであり、格子定数  $a = 1$  とおいた。Wilson 定数  $r$  は 1 に取ることが多い。このため、質量に対する加法的な繰り込みが存在することや、カイラル対称性によって禁止される演算子混合が起こるといような、解析上の複雑さが伴う。フレーバーの構造がシンプルなこともあり、 $O(a)$ -改良されたものや、質量行列でフレーバーについてツイストしたバージョン ('twisted mass') を含め、多くのシミュレーションに用いられている。

**Staggered 作用** Wilson 作用と並んでこれまで広く用いられてきたのが、staggered 作用 (Kogut-Susskind 作用とも呼ばれる) である。この作用は、 $2^4$  のハイパーキューブを単位としてフェルミオン自由度を定義する。4 成分スピノールは、ハイパーキューブに配置された 1 成分スピノールの場から構成され、これによって元の 16 個のダブラーの自由度を、4 つのスピノール成分と 4 つの「フレーバー」に分配することができる。後者の自由度を、最近では「テイスト (taste)」と呼ぶことも多い。

Staggered フェルミオンは、カイラル対称性の名残である  $U(1)$  対称性を持つ。このため加法的な繰り込みを受けないなどの利点を持ち、特にカイラル対称性が重要な役割を果たすような計算において用いられてきた。また計算に要するコストが Wilson フェルミオンに比べて小さく、ダイナミカルな計算の最初の適用例となることが多い。有限密度計算などでは、これまでの計算のほとんどが staggered フェルミオンを採用している。Staggered フェルミオンではフレーバーは 4 の倍数で導入されることになるが、実際には  $2+1$  のフレーバーで計算を行いたい。このため、「4-th root trick」と呼ばれる手法が用いられてきた。これは元々 4 フレーバーを含む staggered フェルミオンから 1 フレーバー分を抜き出すために、 $(\det D)^{1/4}$  とするものである。これによって、1 フレーバー分のフェルミオン作用は非局所的なものとなるため、この操作の正当性については現在でも議論が続いている。

Action	Chiral symmetry	flavor structure	cost	Collaboration
Wilson-type	explicitly broken	simple	modest	PACS-CS, etc.
Twisted mass	explicitly broken	simple	modest	ETM
Staggered	remnant U(1)	complex	low	MILC, etc.
Domain-wall	good	simple	high	RBC, UKQCD
Overlap	exact	simple	very high	JLQCD

Table 1: フェルミオン作用の特徴とコストの比較。

**Domain-wall 作用** ドメインウォールフェルミオンは、時空間を5次元に拡張することによって軽いモードを扱う方法である。この方法の出現によって、格子上のカイラル対称性の理解は大きく進んだ。軽いモードは5次元方向の端の部分に現れ、これを4次元のカイラルモードとして扱うことによってカイラル対称性を持つフェルミオンを実現する。この時カイラル対称性の破れの大きさは、5次元方向に指数関数的に減衰する左右のカイラリティのモードの間のオーバーラップによって表される。作用は、

$$S_F = \frac{1}{2} \sum_{x,s} \bar{\psi}(x,s) [D_W(x,s; -M_0)\psi(x,s) + (1 + \gamma_5)\psi(x,s+1) + (1 - \gamma_5)\psi(x,s-1) - 2\psi(x,s)] \quad (4)$$

のように表される。ここで  $s$  が5次元方向の格子の自由度、 $D_W$  は Eq. (3) の Wilson 演算子である。5次元方向へ空間が拡張されているため、Wilson 作用の数十倍のコストがかかる。

**Ginsparg-Wilson 関係式とオーバーラップ作用** Ginsparg と Wilson は、繰り込み変換の議論に基づいて、格子上で最大限にカイラル対称性を保つ場合に、関係式

$$\gamma_5 D + D \gamma_5 = a R D \gamma_5 D \quad (5)$$

が成り立つことを導いた。ここで  $R$  はある局所的演算子である。この関係式は1998年にLüscherによって、次のような変換に関する、格子上の厳密なカイラル対称性を表すことが認識された。

$$\delta\psi = \gamma_5 \left(1 - \frac{aR}{2} D\right) \psi, \quad \delta\bar{\psi} = \bar{\psi} \left(1 - D \frac{aR}{2}\right) \gamma_5. \quad (6)$$

従って Ginsparg-Wilson 関係式を満たすフェルミオン作用は、格子上の厳密なカイラル対称性を持つことになる。このような作用としては、オーバーラップ作用、固定点作用が知られている。質量ゼロのオーバーラップ演算子は、次のように表される。

$$D = \frac{1}{Ra} [1 + \gamma_5 \text{sign}(H_W(-M_0))]. \quad (7)$$

ここで  $H_W = \gamma_5 D_W$  はエルミート化した Wilson-Dirac 演算子であり、 $M_0$  はドメインウォールフェルミオンの  $M_0$  に相当する。オーバーラップ作用は、ドメインウォール作用の  $N_s \rightarrow \infty$  極限に対応する ( $N_s$  は5次元方向のサイズ)。

ここまで紹介したフェルミオン作用の特徴とコストについて、表2にまとめる。‘Collaboration’ は、その作用を用いて大規模な動的シミュレーションを行っているグループである。

### 3 オーバーラップ・フェルミオンのシミュレーション

この章では次章で紹介するオーバーラップフェルミオンを用いたシミュレーションのための準備を行う。詳細は文献 [3] とそこに引用されている文献を参照。

**符号関数の扱い** 質量  $m$  のオーバーラップ作用は、次のように表される。

$$D(m) = \left(M_0 + \frac{m}{2}\right) + \left(M_0 - \frac{m}{2}\right) \gamma_5 \text{sign}(H_W) \quad (8)$$

sign 関数は、 $H_W$  の固有値  $\lambda$  と固有関数  $\psi_\lambda$  を用いて、

$$\text{sign} H_W \cdot v = \sum_{\lambda} \text{sign}(\lambda) (\psi_{\lambda}, v) \psi_{\lambda} \quad (9)$$

と表される。しかし  $H_W$  のすべての固有値と固有関数を求めることは現実的ではないため、ある  $\lambda = \lambda_{thrs}$  以下の周波数の固有値のみ求め、 $|\lambda| > \lambda_{thrs}$  に対しては何らかの近似を用いるのが現実的である。この近似としては Chebychev 多項式、部分分数展開などが考えられるが、ここでは後者の一つである Zolotarev の表式を用いる。

$$\text{sign}(H_W) = \frac{H_W}{\sqrt{H_W^2}} = H_W \left( p_0 + \sum_{l=1}^N \frac{p_l}{H_W^2 + q_l} \right) \quad (10)$$

ここで  $p_0, p_l, q_l$  は  $\lambda_{thrs}$  や  $N$  によって決まるパラメーターである。この表式は、 $\lambda_{thrs} < |\lambda| < \lambda_{max}$  で sign 関数を近似する。上式の分母に  $H_W^2$  が現れるため、線形方程式の解法が  $N$  回必要となるが、多重シフト解法によってこれらは同時に解くことができるため、コストの  $N$  依存性は比較的緩やかである。一方で、ローモードが多く現れるとその処理が必要なため、計算コストはローモードの密度に大きく依存する。また、sign 関数は  $\lambda = 0$  で不連続なので、Hybrid Monte Carlo を行う際に特別な処理が必要となる。次章に紹介する計算では、 $\lambda_{thrs} = 0.045$ ,  $N = 10$  を用いている。

**局所性** フェルミオン演算子は局所的である必要があるが、オーバーラップ演算子の場合これは必ずしも明らかではない。 $H_W$  の固有モードについて、ゼロ近傍のローモードが無い場合 (ギャップがある場合) には、オーバーラップ演算子は指数関数的に局所的であることが示される [4]。ゼロ近傍のモードが存在する場合にも、そのモードの固有関数が指数関数的に局所的であれば、オーバーラップ演算子の局所的が成り立つ [5]。このためには Wilson 核について、青木相 (パリティの破れた相) に入っていないという条件が必要であることが文献 [5] で主張された。これは  $H_W$  の固有値について  $\lambda = 0$  まで固有関数が局所的でない、ということが青木相を定義することを意味する。

JLQCD によるオーバーラップ演算子の局所性の様子を、図 1 に示す ( $N_f = 2, a \simeq 0.12$  fm)。左図は  $H_W$  の固有関数の局所化長の逆数をモード毎に示したもので、ローモードが局所的であることがわかる。右図はオーバーラップ演算子の局所性を表したもので、指数関数的に局所的であり、局所化長は 0.25 fm ( $\sim 2a$ ) であることがわかる。

**トポロジー固定項**  $H_W$  のローモードを抑制することは、オーバーラップ演算子の局所性を保証するとともに、シミュレーションコストの軽減に大きく寄与する。これは、ローモードの計算にかかるコストを減らすという点に加え、 $\lambda = 0$  でオーバーラップ演算子が持つ不連続性を処理するために必要な、オーバーラップ演算子の逆を求める計算を不要にすることによる。このためには、次のような因子を分配関数に導入すればよい [6]。

$$\det \left( \frac{H_W^2}{H_W^2 + \mu^2} \right) = \int \mathcal{D}\chi^\dagger \mathcal{D}\chi \exp[-S_E] \quad (11)$$

分子によって  $H_W$  のゼロ近くのモードは抑制され、分母は分子のハイモードでの効果を相殺する。この項の導入によって、ゼロ近傍のモードの密度は実際に抑えられることが確かめられた [6, 7]。図 1 は、このトポロジー固定項を導入して行った動的シミュレーションの結果 [7] である。

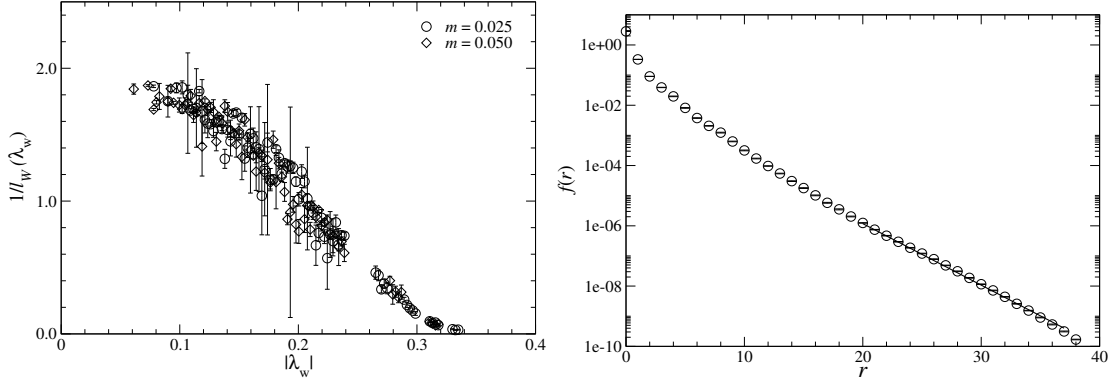


Figure 1:  $H_W$  のローモード及びオーバーラップ演算子の局所性 (本文参照) [7]。

**固定トポロジカルチャージでのシミュレーション**  $H_W$  のゼロモードを禁止することは、トポロジを固定することと等しい。これによって、物理量が受ける影響を考える [8]。分配関数には、

$$Z_Q = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Z(\theta) \exp(i\theta Q) \Leftrightarrow Z(\theta) = \sum_Q Z_Q \exp(-i\theta Q) \quad (12)$$

という関係がある。 $Q \ll \chi_t V$  の  $Q$  に対しては、その分布は Gaussian になる。この時、観測量は鞍点近似を用いて、

$$\langle O \rangle_\theta = \langle O \rangle_Q + (\text{finite } V \text{ correction}) \quad (13)$$

となる。例えばパイオンの質量に対しては、

$$m_\pi^Q = m_\pi(\theta = 0) + \frac{1}{2V\chi_t} \left( 1 - \frac{Q^2}{V\chi_t} \right) \left. \frac{\partial^2 m_\pi(\theta)}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=0} + O(V^{-2}). \quad (14)$$

従って、トポロジカル感受率  $\chi_t$  と  $\partial^2 m_\pi(\theta)/\partial \theta^2$  を求めることができれば、トポロジを固定した計算結果から、 $\theta$  真空での物理量の値を求めることが可能である。 $\partial^2 m_\pi(\theta)/\partial \theta^2$  はカイラル摂動論を用いて計算できる。一方  $\chi_t$  は、相関関数を用いてシミュレーションで求めることができる。この際、局所的なトポロジカル・チャージの揺らぎが十分大きいこと、即ち系の体積が十分大きいことが条件となる。

## 4 JLQCD のプロジェクト

JLQCD コラボレーション<sup>1</sup> は、オーバーラップフェルミオンを動的に扱ったシミュレーションを行っている [3, 9]。QCD のカイラルダイナミクスに迫り、フレーバー物理に必要なハドロン行列要素などを精密に決定することを目指している。特に、軽いクォーク質量ゼロへのカイラル外挿の不定性をコントロールすることが重要である。このプロジェクトは、2006 年の KEK への新スーパーコンピュータシステム導入を機に始められた。KEK システムは、日立 SR11000(理論演算性能 2.15 TFlops) 及び IBM Blue Gene/L (同 57.3TFlops) から成る [10]。後者の上での動的シミュレーションの実効率は、ピーク性能の 10-15% となっている。以下ではこれまでの結果と現状について簡単に紹介する。

<sup>1</sup>JLQCD Collaboration: S. Aoki, H. Fukaya, S. Hashimoto, H. Ikeda, K-I. Ishikawa, K. Kanaya, T. Kaneko, K. Kuramashi, H. M., J. Noaki, H. Ohki, M. Okawa, T. Onogi, E. Shintani, K. Takeda, Y. Taniguchi, A. Ukawa, N. Yamada, T. Yamazaki, T. Yoshie; TWQCD Collaboration: T-W. Chiu, T-H. Hsieh, K. Ogawa.

**$\epsilon$ -領域のシミュレーション** オーバーラップ・フェルミオンが最も効果的な対象の一つは、 $\epsilon$ -領域である。これは、 $1/\Lambda_{QCD} \ll L \ll 1/m_\pi$  の条件が成り立つような空間サイズ  $L$  の系である。この時、低エネルギー有効理論ではトポロジカル・チャージを固定した場合の期待値が直接計算でき、シミュレーションとの比較に適している。また Dirac 演算子のスペクトルは、カイラルランダム行列理論による記述が可能である。Banks-Casher 関係式を通して Dirac 演算子のスペクトルからカイラル凝縮の値などを精密に計算することが可能である。

シミュレーションは  $N_f = 2$ 、 $m \sim 3$  MeV、 $16^3 \times 32$  ( $a \simeq 0.11$  fm) の格子上で行われた。Dirac 演算子の低周波数領域のスペクトルの振舞いは、ランダム行列理論とよく一致し、フレイバー-トポロジー双対性もよく成り立っていることが示された。これらの結果より、カイラル凝縮の値として  $\Sigma^{\overline{MS}}(2\text{GeV}) = (251 \pm 7 \pm 11 \text{MeV})^3$  を得た。

**$N_f = 2$  のシミュレーション** 軽い  $u, d$  クォークをダイナミカルな自由度として含むシミュレーションは、格子サイズ  $16^3 \times 32$ 、格子定数  $a \simeq 0.12$  fm で行われた。クォーク質量は  $(1/6-1)m_s^{phys}$  の領域の 6 点、トポロジカルチャージ  $Q = 0$  のセクターを取ったが、 $m \simeq m_s^{phys}/2$  の点では  $Q = -2, -4$  での計算も行った。

まず確認すべきことは、トポロジカル・チャージの局所的揺らぎが十分強く、トポロジカル感受率  $\chi_t$  を引き出すに足るサイズであることである。 $\chi_t$  は擬スカラー演算子の相関関数から求めることができる。その結果、 $\chi_t$  はカイラル摂動論による予言と矛盾しない、クォーク質量に比例する振舞いを示し、その傾きから得られるカイラル凝縮の値は独立に求められた  $\epsilon$  領域での結果とよく一致していることが確認された。

メソンスペクトルはその他のハドロンスペクトルや行列要素の解析の試金石である。厳密なカイラル対称性の存在によって、カイラル外挿には連続理論のカイラル摂動論と同じ表式が適用できる。シミュレーションによって求められたメソン質量に対しては、まず有限体積効果の補正が必要であり、これには通常の有限体積効果と、トポロジーを固定したことによるものがあるが、どちらもカイラル摂動論によって求めることができる。補正後のパイオン質量に対してカイラル摂動論のフィットを行うと、クォーク質量の小さいところでは NLO の公式でも記述できるが、低エネルギー定数を引き出すためには NNLO の効果を採用入れることが必要であることなどがわかった。

その他にも、 $\pi^+ - \pi^0$  質量差、QCD 結合定数、K メソンのバグ定数 ( $B_K$ )、核子のシグマ項、S-パラメーター、パイオンの形状因子などが測られている [9]。また生成された配位は、ハドロンの散乱長の計算などにも利用されている。

**$N_f = 2 + 1$  のシミュレーション** 現実の QCD では、 $u, d$  クォークに加えてストレンジ・クォークを動的自由度として含む。このようなシミュレーションは、格子サイズ  $16^3 \times 48$ 、格子定数  $a \simeq 0.12$  fm で行なっている。 $m_s$  として  $m_s^{phys}$  近傍の 2 点を取り、それぞれに対して  $(1/6-1)m_s^{phys}$  をカバーする 5 点ずつの  $u, d$  クォーク質量で計算を行った。トポロジカルチャージは  $Q = 0$  としたが、現在  $Q \neq 0$  の配位を生成している。ゲージ配位の生成は一段落し、現在  $N_f = 2$  と同様の解析が行われている。また、格子サイズ  $24^3 \times 48$  での計算を始めたところである。

## 5 有限温度のシミュレーションに向けて

これまで見てきたように、オーバーラップ・フェルミオンの計算コストは Wilson 作用やスタaggered 作用に比べてはるかに大きい。従って、その最大の特長である、厳密なカイラル対称性が本質的な役割を果たすような問題に適用することが望ましい。厳密なカイラル対称性はトポロジカル・チャー

ジの定義にも適しているなど、オブザーバブルとしての役割も重要であるが、ダイナミカルに扱う必要とは別の問題のため、以下では扱わない。

動的フェルミオン自由度のカイラル対称性が最も大きな役割を果たすと考えられるものの一つは、相転移の次数である。特に  $N_f = 2$  では、staggered フェルミオンでは予想される  $O(4)$  スケーリングを示さないなど、QCD の相図を理解する上で大きな不定性となっている [11]。一方 Wilson フェルミオンでは  $O(4)$  スケーリングと矛盾しない結果が得られているが、質量が比較的大きいなど、信頼性の点では不満が残る。そこで一つの例として、 $N_f = 2$  で相転移の次数の決定をオーバーラップフェルミオンで行うことを想定して、どれくらいの計算量になるかを推定してみる。

**$N_f = 2$  での有限サイズスケールリング** 参照する仕事として、 $N_f = 2$  の staggered フェルミオンに有限サイズスケールリングを適用した、文献 [12] を考える。この論文では、 $L_s^3 \times 4$  という格子で、 $L_s = 12-32$  を用いて有限サイズスケールリングを行っている。基本的な方針として、2次相転移を仮定し、 $O(4)$  (あるいは staggered フェルミオンの自由度を考慮して  $O(2)$ ) のユニバーサリティ・クラスにおける臨界指数を用いたスケールリング解析を行う。もし正しくスケールリングが成り立てば、異なる温度・体積で計算した比熱や感受率は、同一の曲線上に乗るはずである。文献 [12] ではこのような解析の結果、 $O(4)$ 、 $O(2)$  いずれのスケールリングも支持しない結果を得た。比熱に関してはむしろ1次転移と矛盾しない結果だが、感受率についての結果は明瞭ではなく、共存相を示すふるまいも得られなかったため、確定的な結論は得られていない。

**オーバーラップフェルミオンの場合** 最近接相互作用のフェルミオン作用と異なり、オーバーラップ演算子では局所性に注意する必要がある。虚時間定式化では時間方向のサイズ  $N_t$  が温度と  $T = 1/aN_t$  と関係するため、オーバーラップ演算子の局所化長  $l_{ov}$  が  $l_{ov} \ll aN_t$  でなければならない。このため小さい  $N_t$  では計算が難しいと考えられ、相転移近傍を調べるためには比較的小さな格子定数を採用することになる。

以下では(楽観的に) $N_t = 6$  での計算が可能だとして、有限サイズスケールリングを行うのに必要な計算量を概算する。 $L_s = 32$  までの格子は必要だと考えられる。 $32^3 \times 6$  の格子サイズは  $16^3 \times 48$  と同じであり、格子定数の違いによるコストの差を無視すると、JLQCD の  $N_f = 2$ 、 $T = 0$  の場合と同程度と考えられる。 $O(10000)$  trajectory  $\times O(20)$  のパラメータセットでの計算を考えると、KEK の現有機を占有して約2年となる。 $N_f = 2$  の相転移温度  $\sim 170$  MeV より、転移点近傍では  $a \sim 0.2$  fm となり、これは JLQCD で用いられた  $a \sim 0.12$  fm よりかなり粗い。このため計算コストは更に大きくなると考えられ、現在の計算資源では現実的ではない。しかし計算機の発展速度を考えると、数年以内に着手できる可能性は大きいので、格子定数に対する局所化長の振舞い調べておくなどの準備を進めておくことが望ましい。

## 6 まとめと展望

格子上での厳密なカイラル対称性を持つことによって、オーバーラップフェルミオンはカイラルダイナミクスに迫るためのアプローチとして重要な役割を持っている。他のフェルミオンの定式化に比べて大きな計算コストがかかるが、アルゴリズムと計算機の発展によって、動的なシミュレーションが可能となった。JLQCD コラボレーションの結果を鑑みれば、これから行われる本格的な計算によって、QCD のダイナミクスの研究やハドロン行列要素の精密計算に対する更に大きな寄与が期待される。有限温度・密度で相転移の構造を調べるために必要な計算力は、数年以内に達成されると考えら

れるため、本格的な計算にむけての準備的研究が必要であろう。また、 $\epsilon$ -領域での計算などに適していることから、QCDに限らず様々な場の理論の構造を調べるにも有効だと期待される。

## References

- [1] <http://www.top500.org/>.
- [2] 青木慎也「格子上の場の理論」(シュプリンガー・フェアラーク東京, 2005).
- [3] H. Matsufuru [JLQCD Collaboration and TWQCD Collaboration], PoS **LAT2007** (2007) 018 [arXiv:0710.4225 [hep-lat]]; S. Hashimoto, Proceedings of Lattice 2008.
- [4] P. Hernandez, K. Jansen and M. Luscher, Nucl. Phys. B **552** (1999) 363 [arXiv:hep-lat/9808010].
- [5] M. Golterman and Y. Shamir, Phys. Rev. D **68** (2003) 074501 [arXiv:hep-lat/0306002]; M. Golterman, Y. Shamir and B. Svetitsky, Phys. Rev. D **71** (2005) 071502 [arXiv:hep-lat/0407021]; Phys. Rev. D **72** (2005) 034501 [arXiv:hep-lat/0503037].
- [6] P. M. Vranas, arXiv:hep-lat/0001006; H. Fukaya, arXiv:hep-lat/0603008; H. Fukaya *et al.* [JLQCD Collaboration], Phys. Rev. D **74** (2006) 094505 [arXiv:hep-lat/0607020].
- [7] S. Aoki *et al.* [JLQCD Collaboration], Phys. Rev. D **78** (2008) 014508 [arXiv:0803.3197 [hep-lat]].
- [8] R. Brower, S. Chandrasekharan, J. W. Negele and U. J. Wiese, Phys. Lett. B **560** (2003) 64 [arXiv:hep-lat/0302005]; S. Aoki, H. Fukaya, S. Hashimoto and T. Onogi, Phys. Rev. D **76** (2007) 054508 [arXiv:0707.0396 [hep-lat]].
- [9] <http://jlqcd.kek.jp/>.
- [10] <http://scwww.kek.jp/>.
- [11] See, *e.g.*, O. Philipsen, Eur. Phys. J. ST **152** (2007) 29 [arXiv:0708.1293 [hep-lat]].
- [12] M. D'Elia, A. Di Giacomo and C. Pica, Phys. Rev. D **72** (2005) 114510 [arXiv:hep-lat/0503030]; G. Cossu, M. D'Elia, A. Di Giacomo and C. Pica, arXiv:0706.4470 [hep-lat].