トポロジー

LastUpdate: 2003.4.12

目次

1　ホモロジーとコホモロジー

[LastUpdate: 2005.12.30]

1.1　鎖複体のホモロジーとコホモロジー

1.1.1　ホモロジー

【定義 1.1 (チェイン複体の圏)**】**　次数付 R 加群 $C_* = (C_j)$ とその準同型 $\partial = (\partial_j)$,

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{j+2}} C_{j+1} \xrightarrow{\partial_{j+1}} C_j \xrightarrow{\partial_j} C_{j-1} \xrightarrow{\partial_{j-1}} \cdots$$

は $\partial^2 = 0$ を満たすとき，チェイン複体といい，$C_* = (C_j, \partial)$ と表す．２つのチェイン複体の次数付 R 加群の準同型 $\phi : C_* \to D_*$ が $\partial\phi = \phi\partial$ を満たすとき，ϕ をチェイン写像といい，対象をチェイン複体，射を複体写像とする圏をチェイン複体の圏と呼ぶ．　$\square$

【定義 1.2 (チェインホモトピー)**】**　チェイン複体 C_*, D_* の射 $f, g : C_* \to D_*$ に対して，R 線形写像の列 $\Phi_n : C_n \to C_{n+1}$ が存在して，

$$f - g = \partial_{n+1} \circ \Phi_n + \Phi_{n-1} \circ \partial_n$$

が成り立つとき，Φ_* を f と g を結ぶチェインホモトピーという．このとき，$f_* = g_* : H_*(C_*) \to H_*(D_*)$ となる．　$\square$

【定義 1.3 (ホモロジー関手)**】**　チェイン複体 C_* に対して，

$$H_*(C_*) = Z_*(C_*)/B_*(C_*); \quad Z_*(C_*) = \mathrm{Ker}\,\partial, \quad B_*(C_*) = \mathrm{Im}\,\partial$$

により，次数付き R 加群 $H_*(C_*) = (H_j(C_*)), Z_*(C_*) = (Z_j(C_*)), B_*(C_*) = (B_j(C_*))$ を定義する．$H_*(C_*)$ を C_* のホモロジー群，その元をホモロジー類，Z_* の元をサイクル，B_* の元をバウンダリーと呼ぶ．さらに，任意のチェイン写像 $\phi : C_* \to D_*$ に対して，ホモロジー写像と呼ばれる R 準同型 $\phi_* : H_*(C_*) \to H_*(D_*)$ が $\phi_*([c]) = [\phi(c)]$ により誘導される．チェイン複体にそのホモロジー群を，チェイン写像にそれから誘導されるホモロジー群の R 準同型を対応させることにより定義される，チェイン複体の圏から次数付き R 加群の圏への関手をホモロジー関手 H_* と呼ぶ．　$\square$

【命題 1.4 (連結準同型とホモロジー完全系列)**】**

1) 3つのチェイン複体 $(A,\partial'),(X,\partial),(Y,\partial'')$ の間の完全系列を

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Y \longrightarrow 0$$

とする．このとき，$y \in Z_n(Y)$ に対して，

$$\partial_*[y] = [f^{-1} \circ \partial \circ g^{-1}(y)]$$

により R-線形写像 $\partial_* : H_n(Y) \to H_{n-1}(A)$ が定まる．この写像を，連結準同型という．さらに，次の完全系列が成り立つ：

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_n(A) \xrightarrow{f_*} H_n(X) \xrightarrow{g_*} H_n(Y) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) \xrightarrow{f_*} \cdots$$

2) 2組の完全系列の間の可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

に対して，$\partial'_* \circ \psi_* = \phi_* \circ \partial_* : H_*(Y) \to H_*(A)$ が成り立つ．

□

1.1.2 コホモロジー

【定義 1.5 (コチェイン複体)**】** 次数付 R 加群 $C^* = (C^j)$ とその準同型 $\delta = (\delta^j)$,

$$\cdots \xrightarrow{\delta^{j-2}} C^{j-1} \xrightarrow{\delta^{j-1}} C^j \xrightarrow{\delta^j} C^{j+1} \xrightarrow{\delta^{j+1}} \cdots$$

は $\delta^2 = 0$ を満たすとき，コチェイン複体といい，$C^* = (C^j, \delta)$ と表す．2つのコチェイン複体の次数付 R 加群の準同型 $\phi : C^* \to D^*$ が $\delta\phi = \phi\delta$ を満たすとき，ϕ をコチェイン写像といい，対象をコチェイン複体，射をコチェイン写像とする圏をコチェイン複体の圏と呼ぶ．

□

目次へ

【定義 1.6 (コホモロジー関手)**】** コチェイン複体 C^* に対して，

$$H^*(C^*) = Z^*(C^*)/B^*(C^*); \quad Z^*(C^*) = \mathrm{Ker}\,\delta, \quad B^*(C^*) = \mathrm{Im}\,\delta$$

により，次数付き R 加群 $H^*(C^*) = (H^j(C^*)), Z^*(C^*) = (Z^j(C^*)), B^*(C^*) = (B^j(C^*))$ を定義する．$H^*(C^*)$ を C^* のコホモロジー群，その元をコホモロジー類，Z^* の元をコサイクル，B^* の元をコバウンダリーと呼ぶ．さらに，コチェイン写像 $\phi : C^* \to D^*$ は，$\phi_*[u] = [\phi(u)]$ によりコホモロジー群の間の R 準同型 $\phi^* : H^*(C^*) \to H^*(D^*)$ を誘導する．コチェイン複体にそのコホモロジー群を，コチェイン写像にそれから誘導されるコホモロジー群の R 準同型を対応させることにより定義される，コチェイン複体の圏から次数付き R 加群の圏への関手をコホモロジー関手 H^* と呼ぶ． □

【命題 1.7 (連結準同型とコホモロジー完全系列)**】**

1) 3 つのコチェイン複体 $(Y, \delta'), (X, \delta), (A, \delta'')$ の間の完全系列を

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0$$

とする．このとき，$a \in Z^n(A)$ に対して，

$$\delta_*[a] = [f^{-1} \circ \delta \circ g^{-1}(a)]$$

により R-線形写像 $\delta_* : H^n(A) \to H^{n+1}(Y)$ が定まる．この写像を，連結準同型という．さらに，次の完全系列が成り立つ：

$$\cdots \xrightarrow{\delta_*} H^n(Y) \xrightarrow{f_*} H^n(X) \xrightarrow{g_*} H^n(A) \xrightarrow{\delta_*} H^{n+1}(Y) \xrightarrow{f_*} \cdots$$

2) 2 組の完全系列の間の可換図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & X \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y' \arrow[r] & X' \arrow[r] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

に対して，$\delta'_* \circ \psi_* = \phi_* \circ \delta_* : H^*(A) \to H^*(Y)$ が成り立つ．

□

目次へ

1.2　普遍係数定理と Kunneth の定理

1.2.1　Tor と Ext

【定義 1.8 (加群のねじれ積)**】**　R を単項イデアル整域とする．

1) R-加群 A に対して，R-自由加群 F_0, F_1 と R 線形写像 $d : F_1 \to F_0, \epsilon : F_0 \to A$ が存在して，

$$0 \longrightarrow F_1 \xrightarrow{d} F_0 \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow 0$$

が完全系列となるとき，この短完全系列を A の左自由分解という．

2) R 加群 A, B および A の左自由分解 1) に対して，チェイン複体

$$0 \longrightarrow F_1 \otimes_R B \xrightarrow{d \otimes 1} F_0 \otimes_R B \longrightarrow 0$$

の 1 次ホモロジー群を A と B のねじれ積とよび，$\mathrm{Tor}^R(A, B)$ と表す:

$$\mathrm{Tor}^R(A, B) = \ker d \otimes 1$$

このとき，次の完全系列が成り立つ．

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}^R(A, B) \longrightarrow F_1 \otimes_R B \longrightarrow F_0 \otimes_R B \longrightarrow A \otimes_R B \longrightarrow 0$$

ねじれ積は自由分解の取り方によらず同型を除いて一意的である．

□

【命題 1.9 (加群のねじれ積の性質)**】**　加群のねじれ積は次の性質を持つ．

i) $\mathscr{C}$ を R 加群の圏とするとき，Tor は $\mathscr{C} \times \mathscr{C}$ から $\mathscr{C}$ への関手で，いずれの変数についても共変的である．

ii) $\mathrm{Tor}(A, B) = \mathrm{Tor}(B, A)$.

iii) $\mathrm{Tor}(A \oplus B, C) = \mathrm{Tor}(A, C) \oplus \mathrm{Tor}(B, C)$.

iv) A が自由加群の時，$\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}(A, B) = 0$.

v) K が標数 0 の体，A が有限生成加群のとき，$\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}(K, A) = 0$.

vi) $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_d$ $(m, n > 0,\ d = \mathrm{GCD}(m, n))$.

vii) K が体の時，$\mathrm{Tor}^K(A, B) = 0$.

□

【定義 1.10 (Ext)**】** R を単項イデアル整域，A, B を R 加群とする．A の左自由分解

$$0 \longrightarrow F_1 \xrightarrow{d} F_0 \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow 0$$

から誘導されるコチェイン複体

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F_0, B) \xrightarrow{d^T} \mathrm{Hom}_R(F_1, B) \longrightarrow 0$$

の１次コホモロジー群を $\mathrm{Ext}_R(A, B)$ と定義する：

$$\mathrm{Ext}_R(A, B) = \mathrm{Hom}_R(F_1, B)/\mathrm{Im}\, d^T.$$

このとき，次の完全系列が存在する．

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F_0, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F_1, B) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R(A, B).$$

$\mathrm{Ext}_R(A, B)$ は，A の自由分解の取り方によらず同型を除いて一意的に定まる． □

【命題 1.11 (Ext の性質)**】** 加群の Ext 積は次の性質をもつ．

i) $\mathscr{C}$ を R 加群の圏とするとき，Ext は $\mathscr{C} \times \mathscr{C}$ から $\mathscr{C}$ への関手を与え，第１変数について反変的，第２変数について共変的である．

ii) 任意の R 加群 A, B, C に対して，

$$\mathrm{Ext}_R(A \oplus B, C) \cong \mathrm{Ext}_R(A, C) \oplus \mathrm{Ext}_R(B, C),$$
$$\mathrm{Ext}_R(A, B \oplus C) \cong \mathrm{Ext}_R(A, B) \oplus \mathrm{Ext}_R(A, C).$$

iii) 任意の加群 A に対して，

$$\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, B) = 0, \quad \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, B) \cong B/mB\ (m > 0).$$

□

1.2.2 普遍係数定理

【定理 1.12 (普遍係数定理 (ホモロジー))**】** R を単項イデアル整域, C_* を自由 R 加群のチェイン複体, G を R 加群とするとき，自然な短完全系列が存在する：

$$0 \longrightarrow H_n(C_*) \otimes G \longrightarrow H_n(C_* \otimes G) \longrightarrow \mathrm{Tor}^R(H_{n-1}(C_*), G) \longrightarrow 0.$$

この完全系列は分解する． □

【定理 1.13 (普遍係数定理 (コホモロジー))**】** R を単項イデアル整域，C_* を自由 R 加群のチェイン複体，G を R 加群とするとき，次の短完全系列が存在する：

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathrm{Ext}_R(H_{n-1}(C_*), G) \longrightarrow H^n(\mathrm{Hom}_R(C_*, G)) \\ &\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(H_n(C_*), G) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

この短完全系列は分解する． □

1.2.3 Kunneth の定理

【定理 1.14 (Künneth の定理 (ホモロジー))**】** R は単項イデアル整域，C_* は自由 R 加群のチェイン複体，D_* は R 加群のチェイン複体とする．このとき，短完全系列

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \textstyle\sum_{p+q=n} H_p(C_*) \otimes_R H_q(D_*) \xrightarrow{\times} H_n(C_* \otimes_R D_*) \\ &\longrightarrow \textstyle\sum_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}^R(H_p(C_*), H_q(D_*)) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

が存在する．D_* も自由 R 加群のチェイン複体のときには，この間全系列は分解する． □

【定理 1.15 (Künneth の定理 (コホモロジー))**】** R は単項イデアル整域，C^* は自由 R 加群のコチェイン複体，D^* は R 加群のコチェイン複体とする．このとき，短完全系列

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \textstyle\sum_{p+q=n} H^p(C^*) \otimes_R H^q(D^*) \xrightarrow{\times} H^n(C^* \otimes_R D^*) \\ &\longrightarrow \textstyle\sum_{p+q=n+1} \mathrm{Tor}^R(H^p(C^*), H^q(D^*)) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

が存在する．D^* も自由 R 加群のコチェイン複体のときには，この間全系列は分解する． □

1.3 位相空間のホモロジーとコホモロジー

1.3.1 単体的（コ）ホモロジー

【**定義 1.16** (単体複体)】

1) 集合 K とその部分集合の属 Σ が次の 2 条件を満たすとき，組 (K, Σ) を単体複体という：

   i) $s \in \Sigma$ に対して，$s' \subset s (s' \neq \emptyset)$ なら，$s' \in \Sigma$.

   ii) 任意の $v \in K$ に対して，$\{v\} \in \Sigma$．さらに，$\emptyset \notin \Sigma$.

   $s \in \Sigma$ が K の $(n+1)$ この元からなるとき，s を n(次元) 単体，とくに 0 単体を頂点という．また，K の濃度が有限，可算，任意の頂点を含む単体が有限個，可算個のとき，それぞれ有限，可算，局所有限，局所可算単体複体という.

2) 単体複体 $(K, \Sigma), (K_0, \Sigma_0)$ に対して，$K_0 \subset K$ かつ $\Sigma_0 \subset \Sigma$ が成り立つとき，K_0 を K の部分複体という.

3) K, L を単体複体とし，$\phi : K \to L$ を頂点集合の写像とする．K の任意の単体 $s = \{v_0, \cdots, v_n\}$ に対して，$\{\phi(v_0), \cdots, \phi(v_n)\}$ から重複する頂点を取り除いたものが L の単体となるとき，ϕ を単体写像という．さらに，単体複体 K, L の間の全単射 ϕ で，ϕ と ϕ^{-1} が共に単体写像となるものが存在するとき，K と L は同型であるという.

3) K を単体複体とし，その q 単体 s とする．s の頂点の列の集合において偶置換で移り合うものは同値という同値関係を与えたとき，各同値類を s の向きという．向きの与えられた q 単体を向きのついた q 単体と呼び，σ と表す．s の頂点が $\{v_0, \cdots, v_q\}$ のとき，対応する向きのついた単体を $\sigma = [v_0, \cdots, v_q]$ と表記する.

$\square$

【**定義 1.17** (単体的ホモロジーとコホモロジー)】

1) 単体複体 K の各単体に向きを与え，向きのついた q 単体全体から生成される自由 Abel 群を $C_q(K)$ とする．さらに，線形写像 $\partial_q : C_q(K) \to C_{q-1}(K)$ を

$$\partial_q([v_0, \cdots, v_q]) = \sum_{k=0}^{q} (-1)^k [v_0, \cdots, v_{k-1}, v_{k+1}, \cdots, v_q]$$

により定義する．ただし，σ^q の向きを反転した単体は $-\sigma^q$ と同一視する．これにより定義されるチェイン複体 $C_* = (C_q, \partial_q)$ のホモロジー群を $H_q(K)$ と表し，単体複体 K の整係数ホモロジー群という．また，R 加群 G に対して，R 加群のチェイン複体 $C_* \otimes_{\mathbb{Z}} G$ から定義されるホモロジー群 $H_*(K;G)$ を K の G 係数ホモロジー群という．さらに，R 加群のコチェイン複体 $C^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*, G)$ のコホモロジー群 $H^*(K;G)$ を G 係数コホモロジー群という．

2) 単体分割可能な位相空間 X に対して，K をその単体分割とするとき，$H_*(K;G), H^*(K;G)$ は単体分割 K の取り方によらない．$H_*(K;G)$ および $H^*(K;G)$ を X の単体的ホモロジー群，単体的コホモロジー群という．

□

1.3.2 特異（コ）ホモロジー

1.3.2.1 定義

【**定義 1.18** (特異チェイン複体)】

1) 位相空間 X に対して，$\mathbb{R}^{n+1}$ の標準単体 Δ^n から X への連続写像

$$\sigma : \Delta^n \to X$$

を X の n-特異単体という．その全体から生成される自由加群を $S_n(X)$ として，その直和として定義される次数付加群を $S_*(X) = (S_n(X))$ とおく．ただし，$n < 0$ に対して $S_n(X) = 0$．$\partial_n : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$ を

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \sigma \circ \epsilon_j, \quad \sigma \in S_n(X)$$

により定義する．ここで ϵ_j は，Δ^{n-1} の頂点 $e_k(k=0,n-1)$ に Δ^n の頂点 $e_k(k \leq j)$，$e_{k+1}(k>j)$ を対応させることにより定義される，Δ^{n-1} から Δ^n へのアファイン写像である．$S_*(X) = (S_j(X), \partial)$ はチェイン複体をなし，特異チェイン複体と呼ばれる．

2) 位相空間の対 (X,A)（$A \subset X$）に対して，チェイン複体 $S_*(X)$，$S_*(A)$ から新たなチェイン複体

$$S_*(X,A) := S_*(X)/S_*(A)$$

が定義され，自然に位相空間の対の圏から $\mathbb{Z}$-チェイン複体の圏への共変関手 S_* が得られる．また，R 加群 G に対して，チェイン複体 C_* に $C_* \otimes G$ および $\mathrm{Hom}_Z(C_*, G)$ を対応させると，それぞれ自然にチェイン複体の圏から R-チェイン複体への共変関手 $\otimes G$，および R-コチェイン複体への反変関手 $\mathrm{Hom}(*,G)$ が得られる．関手の結合 $H_* \circ \otimes G \circ S_*$ で得られる共変関手を G 係数特異ホモロジー関手，それによる (X,A) の像 $H_*(X,A;G)$ を空間対 (X,A) の G 係数特異ホモロジー群と呼ぶ．同様に，$H^* \circ \mathrm{Hom}(*,G) \circ S_*$ で得られる反変関手を G 係数特異コホモロジー関手，それによる (X,A) の像 $H^*(X,A;G)$ を空間対 (X,A) の G 係数特異コホモロジー群と呼ぶ．すなわち，

$$H_*(X,A;G) = H_*((S_*(X)/S_*(A)) \otimes G),$$
$$H^*(X,A;G) = H^*(\mathrm{Hom}(S_*(X)/S_*(A), G))$$

である．以下，

$$S_*(X,A;G) = (S_*(X)/S_*(A)) \otimes G,$$
$$S^*(X,A;G) = \mathrm{Hom}(S_*(X)/S_*(A), G)$$

と略記する．また，$R = G = \mathbb{Z}$ の時，G を省略する．

$\square$

【注 1.19】

1. $c \in S_n(X)$ に対して，
   $[c] \in Z_n(X,A) \quad \Leftrightarrow \quad \partial c \in S_n(A)$,
   $[c] \in B_n(X,A) \quad \Leftrightarrow \quad \exists c' \in S_{n+1}(X) \quad \text{s.t.} \quad c - \partial c' \in S_n(A)$

2. 一般に，R加群の短完全列 $0 \to A \to B \to C$ に対して，$\mathrm{Hom}(C, G) \to \mathrm{Hom}(B, G) \to \mathrm{Hom}(A, G) \to 0$ はやはり短完全列となる．これより，$S^n(X, A; G)$ の元は $u \in \mathrm{Hom}(S_n(X), G)$ で $u|_{S_n(A)} = 0$ となるものと一対一に対応する．この対応の元で，$< \delta[u], [c] >=< u, \partial c >$.
よって，
$[u] \in Z^n(X, A; G) \quad \Leftrightarrow \quad < u, \partial c >= 0 \forall c \in S_{n+1}(X)$,
$[u] \in B^n(X, A; G) \quad \Leftrightarrow \quad \exists [u'] \in \mathrm{Hom}(S_{n-1}(X), G) \quad \text{s.t.} < u, c >=< u', \partial c > \forall c \in S_{n-1}(X)$.

□

1.3.2.2 普遍係数定理

【定理 1.20 ((コ) ホモロジーの普遍係数定理)**】** (X, A) を空間対，G を加群とする．

1) 空間対のホモロジーに対して，自然な短完全系列

$$0 \to H_n(X, A; \mathbb{Z}) \otimes G \to H_n(X, A; G) \to \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X, A; \mathbb{Z}), G) \to 0$$

が存在する．この短完全系列は分裂する．

2) 空間対のコホモロジーに対して，自然な短完全系列

$$0 \to \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X, A; \mathbb{Z}), G) \to H^n(X, A; G) \to \mathrm{Hom}(H_n(X, A; \mathbb{Z}), G) \to 0$$

が存在する．この短完全系列は分裂する．

□

1.3.2.3 空間対の（コ）ホモロジー完全系列

【定理 1.21 (空間対のホモロジー完全系列)**】**

1. 空間対 (X, A) に対して，次の完全系列が成り立つ：

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow H_{n+1}(X, A; G) &\xrightarrow{\partial_*} H_n(A; G) \xrightarrow{i_*} H_n(X; G) \\ \xrightarrow{j_*} H_n(X, A; G) &\xrightarrow{\partial_*} \cdots .\end{aligned}$$

   特に，$A \neq \emptyset$ のとき次の完全系列が成り立つ：

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow H_{n+1}(X, A; G) &\xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_n(A; G) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(X; G) \\ \xrightarrow{j_*} H_n(X, A; G) &\xrightarrow{\partial_*} \cdots .\end{aligned}$$

   これらの完全系列は，空間対の連続写像に対して共変的関手性をもつ．

2. 空間の三つ組み $B \subset A \subset X$ に対して，次の完全系列が成り立つ：

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow H_{n+1}(X, A; G) &\xrightarrow{\partial_*} H_n(A, B; G) \xrightarrow{i_*} H_n(X, B; G) \\ \xrightarrow{j_*} H_n(X, A; G) &\xrightarrow{\partial_*} \cdots .\end{aligned}$$

   この完全系列は，空間の３つ組の連続写像に対して共変的関手性をもつ．

□

【定理 1.22 (空間対のコホモロジー完全系列)**】**

1. 空間対 (X, A) に対して，次の完全系列が成り立つ：

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow H^{n-1}(A; G) &\xrightarrow{\delta^*} H^n(X, A; G) \xrightarrow{j^*} H^n(X; G) \\ \xrightarrow{i^*} H^n(A; G) &\xrightarrow{\delta^*} \cdots .\end{aligned}$$

   特に，$A \neq \emptyset$ のとき次の完全系列が成り立つ：

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow \tilde{H}^{n-1}(A; G) &\xrightarrow{\delta^*} H^n(X, A; G) \xrightarrow{j^*} \tilde{H}^n(X; G) \\ \xrightarrow{i^*} \tilde{H}^n(A; G) &\xrightarrow{\delta^*} \cdots .\end{aligned}$$

   これらの完全系列は，空間対の連続写像に対して反変的関手性をもつ．

2. 空間の三つ組み $B \subset A \subset X$ に対して，次の完全系列が成り立つ：

$$\cdots \longrightarrow H^{n-1}(A,B;G) \xrightarrow{\delta^*} H^n(X,A;G) \xrightarrow{j^*} H^n(X,B;G) \xrightarrow{i^*} H^n(A,B;G) \xrightarrow{\delta^*} \cdots.$$

この完全系列は，空間の 3 つ組の連続写像に対して反変的関手性をもつ．

□

1.3.2.4 切除定理と Mayers-Vietoris の定理

【定義 1.23 (切除的)**】** 位相空間 X の部分空間 X_1, X_2 に対し，包含写像

$$S(X_1) + S(X_2) \to S(X_1 \cup X_2)$$

がチェインホモトピー同値写像であるとき，組 $\{X_1, X_2\}$ は切除的であるという．$Y = X_1 \cup X_2$ における X_i の内部を $\mathrm{int}_Y X_i$ と書くとき，

$$Y = \mathrm{int}_Y X_1 \cup \mathrm{int}_Y X_2$$

ならば，$\{X_1, X_2\}$ は切除的である． □

【定理 1.24 (Mayers-Vietoris 完全系列)**】** X を位相空間，$\{X_1, X_2\}$ を X の切除的な空間の組とするとき，関手性をもつ次の加群の完全系列が存在する：

$$\cdots \xrightarrow{\Delta} H_n(X_1 \cap X_2;G) \xrightarrow{i_{1*}\oplus(-i_{*2})} H_n(X_1;G) \oplus H_n(X_2;G) \xrightarrow{j_{1*}+j_{2*}} H_n(X_1 \cup X_2;G) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(X_1 \cap X_2;G) \longrightarrow \cdots,$$

$$\cdots \xrightarrow{\Delta} H^n(X_1 \cup X_2;G) \xrightarrow{j_1^*\oplus(j_2^*)} H^n(X_1;G) \oplus H^n(X_2;G) \xrightarrow{i_1^*-i_2^*} H^n(X_1 \cap X_2;G) \xrightarrow{\Delta} H^{n-1}(X_1 \cup X_2;G) \longrightarrow \cdots$$

また，$X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ であるときは，$H_q(H^q)$ を簡約ホモロジー（コホモロジー）$\tilde{H}_q(\tilde{H}^q)$ で置き換えた完全系列が存在する． □

【定理 1.25 (切除定理)**】**　$U \subset A \subset X$ を位相空間 X の部分空間の列とし，部分空間 V で $\bar{V}\mathring{A}$ かつ，$X - V$ から $X - U$ への変位レトラクション r_t で $r_t(A - V) \subset A - V$ となるものが存在するなら，包含写像 $i : (X - U, A - U) \to (X, A)$ は任意の係数群 G に対してホモロジー群とコホモロジー群の同型

$$
\begin{aligned}
i_* : H_n(X - U, A - U; G) &\xrightarrow[\cong]{} H_n(X, A; G),\\
i^* : H^n(X, A; G) &\xrightarrow[\cong]{} H^n(X - U, A - U; G)
\end{aligned}
$$

を誘導する．　□

1.3.3　CW 複体の（コ）ホモロジー

【定義 1.26 (CW 複体)**】**

1) Hausdorff 空間の部分集合 e に対して，相対同相写像 $\phi : (D^n, S^{n-1}) \to (\bar{e}, \dot{e})$ が存在するとき，e を n(次元) 胞体，ϕ をその特性写像という．

2) Hausdorff 空間 X の胞体の集合 $\{e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ は，次の条件を満たすとき X の胞体分割という．

   i) $e_\mu \cap e_\nu = \emptyset (\mu \neq \nu)$.

   ii) $X = \cup_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda$.

   iii) $X^q := \cup_{\mu : \dim e_\mu \leq q} e_\mu$ とおくとき，$\dim e_\mu = q+1$ ならば $\dot{e}_\mu \subset X^q$.

3) 胞体分割の与えられた Hausdorff 空間 X を胞体複体，その 0 胞体を頂点，X^q を q 切片という．また，X の部分集合 A と交わる X の胞体 e に対して $\bar{e} \subset A$ が成り立つならば，A と交わる胞体の全体は A の胞体分割を与える．この胞体分割をもつ A を X の部分複体という．X の胞体の数が有限，可算のときそれぞれ有限複体，可算複体という．また，各点 $x \in X$ に対して，$x \in \mathrm{int}A$ となる有限（可算）部分複体 A が存在するとき，X は局所有限（可算）であるという．

4) 胞体複体 X から胞体複体 Y への連続写像 f は，$f(X^q) \subset Y^q$ を満たすとき，胞体写像という．

5) 胞体複体 X は，次の 2 条件を満たすとき CW 複体という：

   C) X の各胞体 e に対して e を胞体として持つ有限部分複体が存在する．

   W) X の集合 U は，X の各胞体 e に対して $U \cap \bar{e}$ が $\bar{e}$ の開集合のときしかもそのときに限り開集合である．

$\square$

【命題 1.27 (CW 複体の性質)**】** CW 複体は次の性質を持つ．

1) 局所有限な胞体複体は CW 複体である．(逆は成り立たない．)

2) CW 複体 X の胞体複体としての部分複体 A は閉集合であり，再び CW 複体となる．

3) CW 複体はパラコンパクトな正規空間で，局所可縮である．

4) (**胞体近似定理**) CW 複体の間の任意の連続写像に対して，それとホモトープな胞体写像が存在する．

5) CW 複体とその部分複体との対は，任意の位相空間に対してホモトピー拡張性質をもつ．

6) CW 複体は任意のファイバー空間に対して被覆ホモトピー性を持つ．

7) CW 複体 X, Y の積複体 $X \times Y$ は，X と Y のいずれかが局所有限ないし両方が局所可算ならば，CW 複体となる．

8) CW 複体 X, Y に対して，その積複体 $X \times Y$ はある CW 複体にホモトピー同値である．

9) 多面体 $|K|$ はその開単体全体の集合を胞体分割として，正則 ($\bar{e}^q \cong D^q$) な CW 複体となる．逆に，任意の CW 複体に対して，それとホモトピー同値な多面体が存在する．

$\square$

【命題 1.28】 CW 複体 X とその部分複体 A の対 (X, A) に対して，$\bar{X}^q = X^q \cup A$ とおく．任意の係数群 G に対して

$$H_q(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-1}; G) = 0 \ (q \neq n),$$
$$\sum_{\lambda \in \Lambda_n} \phi_{\lambda *} : \sum_{\lambda \in \Lambda_n} H_n(D^n_\lambda, S^{n-1}_\lambda; G) \xrightarrow{\cong} H_n(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-1}; G)$$

が成り立つ．特に，$H_n(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-1})$ は自由加群となる． □

【定義 1.29 (CW 複体のチェイン複体)**】**

1) 加群 $C_n(X, A)$ を

$$C_n(X, A) := H_n(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-1})$$

により定義する．さらに，$\partial : C_n(X, A) \to C_{n-1}(X, A)$ を空間対 $(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-1})$ に対する連結準同型 ∂_* と射影準同型 j_* を用いて

$$\partial : H_n(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(\bar{X}^{n-1}) \xrightarrow{j_*} H_{n-1}(\bar{X}^{n-1}, \bar{X}^{n-2})$$

により定義する．このとき，$(C_*(X, A), \partial)$ はチェイン複体となる．これを CW 対 (X, A) のチェイン複体という．

2) CW 対 (X, A) に対して，そのチェイン複体 $C_*(X, A)$ から定義されるホモロジー群 $H_*(C_*(X, A) \otimes G)$ およびコホモロジー群 $H^*(\mathrm{Hom}(C_*(X, A), G)$ を CW 対の胞体ホモロジー群および胞体コホモロジー群という．

□

1.3.4 Cech の (コ) ホモロジー

【定義 1.30 (Čech の（コ）ホモロジー)**】** 位相空間 X の開被覆 $\mathscr{U}$ に対して，$\mathscr{U}$ に属する各開集合を頂点，共通部分が空でない n コの開集合の組を n 単体と定義すると，$\mathscr{U}$ から単体複体 $K(\mathscr{U})$ が作られる．X とその部分空間 A に対して，このようにして得られる単体複体の対を $(K(\mathscr{U}), L(\mathscr{U}'))$ とすると，そのホモロジー群 $H_*(K(\mathscr{U}), L(\mathscr{U}'); G)$

およびコホモロジー群 $H^*(K(\mathscr{U}), L(\mathscr{U}'); G)$ が定義される．次に，X の開被覆全体の属は，細分により擬有向集合となり，これらのホモロジー群とコホモロジー群はこの擬有向集合に対して，それぞれ射影系および帰納系となる．それらの射影極限および帰納極限をそれぞれ，空間対 (X, A) に対するČech のホモロジー群およびコホモロジー群という：

$$\check{H}_*(X, A; G) = \lim_{\leftarrow} H_*(K(\mathscr{U}), L(\mathscr{U}'); G),$$
$$\check{H}^*(X, A; G) = \lim_{\rightarrow} H^*(K(\mathscr{U}), L(\mathscr{U}'); G)$$

□

1.3.5 様々な (コ) ホモロジーの関係

【**定義 1.31** (Eilenberg-Steenrod の公理)】

1) 次の 3 つの関数の集合を H^* で定義する：

   i) 各位相空間対 (X, A) と各整数 q に対して，Abel 群 $H^q(X, A)$ を対応させる関数.

   ii) 各連続写像 $f : (X, A) \to (Y, B)$ と各整数 q に対して，準同型 $f^* : H^q(Y, B) \to H^q(X, A)$ を対応させる関数.

   iii) 各位相空間対 (X, A) と各整数 q に対して，準同型 $\delta^* : H^q \to H^{q+1}(X, A)$ を対応させる関数.

   H^* が次の 7 つの公理を満たすとき，H^* を位相空間対の圏上のコホモロジー理論という.

   I) $1^* = 1$

   II) $f : (X, A) \to (Y, B)$，$g : (Y, B) \to (Z, C)$ ならば，$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

   III) (ホモトピー公理) $f \simeq g : (X, A) \to (Y, B)$ ならば，$f^* = g^*$.

IV) (完全性公理）つぎの系列は完全である：

$$\begin{aligned} \cdots \xrightarrow{\delta^*} \ H^q(X,A) \ \xrightarrow{j^*} H^q(X) \xrightarrow{i^*} H^q(A) \\ \xrightarrow{\delta^*} H^{q+1}(X,A) \xrightarrow{j^*} \ \cdots . \end{aligned}$$

ここで，$i : A \subset X$，$j : (X, \phi) \subset (X, A)$.

V) $f : (X,A) \to (Y,B)$ に対して，$f^* \circ \delta^* = \delta^* \circ (f|_A)^*$.

VI) (切除公理）X の開集合 U が $\bar{U} \subset \mathrm{int}A$ を満たすとき，

$$i^* : H^q(X,A) \cong H^q(X-U, A-U).$$

VII) (次元公理）$H^q(\mathrm{pt}) = 0$ $(q \neq 0)$.

コンパクトな Hausdorff 空間対のつくる圏上のコホモロジー理論も同様に定義される．また，双対的に，圏上のホモロジー理論が定義される．

2) CW 対の圏上の（コ）ホモロジー理論が，公理 VI) を次の切除公理に置き換えることにより定義される：X_1, X_2 がある CW 複体の部分複体ならば，

$$i^* : H^q(X_1 \cup X_2, X_2) \cong H^q(X_1, X_1 \cap X_2)$$

□

【定理 1.32】

1) 単体複体，CW 複体，多様体に対して，特異およびČeck の（コ）ホモロジー群は同型となり，単体複体および CW 複体に対しては，それぞれ単体的（コ）ホモロジー群および胞体的（コ）ホモロジー群と同型となる．

2) G を係数に持つ特異（コ）ホモロジー群は，位相空間対の圏上の（コ）ホモロジー理論となる．

3) G に係数をもつČeck コホモロジー群は，位相空間対の圏上のコホモロジー理論となる．体に係数を持つČeck ホモロジー群は，コンパクトな Hausdorff 空間の作る圏上のホモロジー理論となる．

4) G に係数をもつČeck（コ）ホモロジー理論はCW 対の圏上の (コ) ホモロジー理論となり，同じ圏上で特異（コ）ホモロジー理論と同型である．

□

1.3.6 局所系の (コ) ホモロジー

【定義 1.33 (局所系)**】**

1) X を位相空間として，X の点 x を点 y につなぐ道の空間 $\Omega(X; x, y)$ のホモトピー類を $M(y, x)$ とおく．X の点を対象，$M(y, x)$ を射とする圏を X の基本亜群とよび，$\Pi(X)$ と表す．

2) X の基本亜群 $\Pi(X)$ から圏 $\mathscr{C}$ への共変関手 $\mathscr{S}$ を $\mathscr{C}$ に値を持つ X 上の局所系という．

3) $\mathscr{C}$ に値をとる局所系 $\mathscr{S}$ に対して，$\gamma \in M(x, x)$ に $\mathscr{S}(\gamma) \in \mathrm{Aut}(\mathscr{S}_x)$ を対応させることにより定義される準同型

$$\bar{\mathscr{S}}_x : \pi_1(X, x) \to \mathrm{Aut}(\mathscr{S}_x)$$

を，$\mathscr{S}$ の x を基点とする特性準同型という．

□

【定理 1.34】

1) X を弧状連結な空間，$x_0 \in X$, $\mathscr{C}$ を圏とする．$\mathscr{C}$ に値をもつ X 上の局所系の同値類の全体と準同型 $\pi_1(X, x_0) \to \mathrm{Aut}(A)(A \in \mathscr{C})$ の共役類の全体は特性準同型をとることにより 1 対 1 に対応する．

2) X を弧状連結かつ局所弧状連結な空間とする．X の弧状連結な開集合の基に対して定義された圏 $\mathscr{C}$ に値をとる前層 $\mathscr{S}$ は，その射影が常に同型射となるならば，そのストーク $\mathscr{S}_x$ が局所系を定義する．

$\square$

【**定義 1.35** (単純な局所系)】 X 上の局所系 $\mathscr{S}$ は，特性準同型が自明となるとき単純であるという．これは，$\mathscr{S}(\gamma):\mathscr{S}(y)\to\mathscr{S}(x)$ が $\gamma\in M(y,x)$ の取り方に依らないことと同値である． $\square$

【**定義 1.36** (n 単純)】 位相空間 X が弧状連結で，その上の局所系 $\{\pi_n(X,x);x\in X\}$ が単純であるとき，X は n 単純であるという． $\square$

1.3.7 無限チェインのホモロジー

【**定義 1.37**】 X を局所コンパクトな空間，$\mathscr{S}$ を R 加群に値をもつ X 上の局所系とする．このとき，X 上の局所有限な $\mathscr{S}$ 係数特異 q チェインの全体を $\check{S}_q(X;\mathscr{S})$ とすると，$\check{S}(X;\mathscr{S})=(\check{S}_q(X;\mathscr{S}),\partial)$ はチェイン複体となる．この X の無限特異チェイン複体，そのホモロジー群を $\check{H}_*(X;\mathscr{S})$ と書き，X の無限チェインのホモロジー群という． $\square$

1.3.8 コンパクト台のコホモロジー

【**定義 1.38**】 X を局所コンパクトな空間，$\mathscr{S}$ をその上の局所系とするとき，そのコンパクト集合の全体 $\{K\}$ の帰納系 $\{S^*(X,X-K;\mathscr{S})\}$ に対して，その帰納的極限

$$\check{S}^*(X;\mathscr{S}):=\varinjlim_{K} S^*(X,X-K;\mathscr{S})$$

をコンパクトな台をもつコチェイン複体，そのコホモロジー群 $\check{H}^*(X;\mathscr{S})$ をコンパクトな台のコホモロジー群という． $\square$

【**定理 1.39**】 X を局所コンパクト空間，$\mathscr{S}$ をその上の局所系とするとき，

$$\check{H}^*(X;\mathscr{S})=\varinjlim_{K} H^*(X,X-K;\mathscr{S})$$

が成り立つ．さらに，自然な準同型

$$\check{H}^*(X;\mathscr{S}) \to H^*(X;\mathscr{S})$$

が存在し，特に X がコンパクトであるときこの準同型は同型となる．
□

1.4 (コ) ホモロジーの積演算

1.4.1 積の (コ) ホモロジー

【定義 1.40 (切除的)**】** 位相空間 X の部分空間 X_1, X_2 に対し，線形写像 $S(X_1)+S(X_2) \to S(X_1 \cup X_2)$ がチェインホモトピー同値写像となるとき，(X_1, X_2) は切除的であるという． □

【定義 1.41 (クロス積)**】**

1) $X \times Y$ の特異 n 単体 (σ, τ) に対して，

$$\rho(\sigma,\tau) = \sum_{i=0}^{n} \partial_{i+1}\cdots\partial_n\sigma \otimes \partial_0\cdots\partial_{i-1}\tau$$

で与えられる $\rho : S(X \times Y) \to S(X) \otimes S(Y)$ は，自然なホモトピー同値写像を与え，*Alexander-Whitney* 写像と呼ばれる．ρ のチェインホモトピー逆写像を $\kappa : S(X) \otimes S(Y) \to S(X \times Y)$ と表記する．

2) 空間対 $(X, A), (Y, B)$ に対して，合成写像

$$\begin{aligned}\times :\ & H_p(X,A;G_1) \otimes H_q(Y,B;G_2) \xrightarrow{\times} H_{p+q}(S(X,A;G_1) \otimes S(Y,B;G_2)) \\ & \xrightarrow{\kappa_*} H_{p+q}(S((X,A)\times(Y,B);G_1 \otimes G_2))\end{aligned}$$

を特異ホモロジー群におけるクロス積という．$\{A \times Y, X \times B\}$ が切除的であるか，または $(X, A), (Y, B)$ が CW 対でいずれか一方が局所有限ならば，κ_* は同型写像である．

3) 空間対 $(X,A),(Y,B)$ に対して，$\{A\times Y, X\times B\}$ が切除的であるか，または $(X,A),(Y,B)$ が CW 対でいずれか一方が局所有限または有限型（各 q 切片が有限）とする．このとき，合成写像

$$\begin{aligned}\times:\ & H^p(X,A;G_1)\otimes H^q(Y,B;G_2)\xrightarrow{\times} H^{p+q}(S^*(X,A;G_1)\otimes S^*(Y,B;G_2))\\ & \xrightarrow{\rho^*} H^{p+q}(S^*((X,A)\times(Y,B);G_1\otimes G_2))\end{aligned}$$

を特異コホモロジー群におけるクロス積という．

□

【定理 1.42 ((コ) ホモロジーに対する Künneth の公式)**】**　R を単項イデアル整域であるとする．

1) 位相空間対 $(X,A),(Y,B)$ に対して，$\{A\times Y, X\times B\}$ が切除的であるとする．そのとき，標準的な短完全系列

$$\begin{aligned}0 &\longrightarrow \textstyle\sum_{p+q=n} H_p(X,A;R)\otimes_R H_q(Y,B;R) \xrightarrow{\ \times\ } H_n((X,A)\times(Y,B);R)\\ &\longrightarrow \textstyle\sum_{p+q=n-1}\mathrm{Tor}^R(H_p(X,A;R),H_q(Y,B;R)) \longrightarrow 0\end{aligned}$$

が存在する．この短完全系列は分解する．

2) $(X,A),(Y,B)$ は CW 複体対で，X は有限型の CW 複体とする．そのとき，自然な短完全系列

$$\begin{aligned}0 &\longrightarrow \textstyle\sum_{p+q=n} H^p(X,A)\otimes_{\mathbb{Z}} H^q(Y,B) \xrightarrow{\ \times\ } H^n((X,A)\times(Y,B))\\ &\longrightarrow \textstyle\sum_{p+q=n+1}\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}(H^p(X,A),H^q(Y,B)) \longrightarrow 0\end{aligned}$$

が存在する．この短完全系列は分解する．

□

1.4.2　カップ積とキャップ積

【定義 1.43 (カップ積)**】**　空間 X とその部分空間 A_1, A_2 を考える．$\{A_1\times X, X\times A_2\}$ が $X\times X$ で切除的であるか，$\{A_1, A_2\}$ が X で切除的であるとする．標準対角写像 $\Delta: X\to X\times X$ とクロス積の合成

$$\begin{aligned}\smile:\ & H^p(X,A_1;G_1)\times H^q(X,A_2;G_2)\xrightarrow{\times} H^{p+q}((X,A_1)\times(X,A_2);G_1\otimes G_2)\\ & \xrightarrow{\Delta^*} H^{p+q}(X,A_1\cup A_2;G_1\otimes G_2)\end{aligned}$$

をカップ積という．$u \in S^p(X; G_1), u_2 \in S^q(X; G_2)$，$\sigma \in S_{p+q}(X)$ に対して

$$\langle \sigma, u \smile v \rangle := \langle \partial_{p+1} \cdots \partial_{p+q} \sigma, u \rangle \langle \partial_0 \cdots \partial_{p-1} \sigma, v \rangle \in G_1 \otimes G_2$$

とおくとき，

$$\delta(u \smile v) = (\delta u) \smile v + (-1)^p u \smile (\delta v),$$
$$[u] \smile [v] = [u \smile v]$$

が成り立つ． $\square$

【命題 1.44 (カップ積の性質)**】** $u \in H^p(X, A_1; R), v \in H^q(X, A_2; R), w \in H^r(X, A_3; R)$ とし，カップ積 $u \smile v$ などがすべて定義されているものとする．

1) 連続写像 $f : Y \to X$ で $f(B_i) \subset A_i (i = 1, 2)$ となるものに対して，$f^* u \smile f^v$ が定義されていれば，

$$f^*(u \smile v) = f^*(u) \smile f^*(v) \in H^{p+q}(Y, B_1 \cup B_2; R)$$

が成り立つ．

2) (結合律) $(u \smile v) \smile w = u \smile (v \smile w)$.

3) R が単位元を持つとする．そのとき，$1 \in H^0(X; R)$ に対して，

$$u \smile 1 = 1 \smile u = u \in H^0(X, A_1; R)$$

4) R は可換環であるとする．そのとき，

$$v \smile u = (-1)^{pq} u \smile v \in H^{p+q}(X, A_1 \cup A_2; R)$$

$\square$

【定義 1.45 (キャップ積)**】** G_1, G_2 を加群として，$c = \sum_i \sigma_i \otimes g_i \in S_n(X; G_1), u \in S^p(X; G_2)$ に対して，$c \frown u \in S_{n-p}(X; G_1 \otimes G_2)$ を

$$c \frown u = \sum_i \partial_0 \cdots \partial_{p-1} \sigma_i (g_i \otimes \langle \partial_{p+1} \cdots \partial_n \sigma_i, u \rangle)$$

により定義する．このとき，

$$\partial(c \frown u) = (-1)^p(\partial c \frown u - c \frown \delta u)$$

が成り立ち，A, B が X の中で切除的ならば，積演算

$$\frown : H_n(X, A \cup B; G_1) \times H^p(X, A; G_2) \to H_{n-p}(X, B; G_1 \otimes G_2)$$

が，$[c] \frown [u] = [c \frown u]$ により定義される．この積をキャップ積という． □

【命題 1.46 (キャップ積の性質)**】** R は単位元をもつ可換環，X, Y は位相空間，A, A_i は X の部分空間，B_i は Y の部分空間とする．

1) $\{A_1, A_2\}$ は X の中で切除的，$\{B_1, B_2\}$ は Y の中で切除的，$f : X \to Y$ は $f(A_i) \subset B_i (i = 1, 2)$ となる連続写像とする．そのとき，$c \in H_n(X, A_1 \cup A_2; R), v \in H^p(Y, B_1; R)$ に対して，

$$f_*(c \frown f^*v) = f_*(c) \frown v \in H_{n-p}(Y, B_2; R)$$

が成り立つ．

2) $c \in H_n(X, A_1 \cup A_2 \cup A_3; R), u \in H^p(X, A_1; R), v \in H^q(X, A_2; R)$ に対し，$c \frown u$ などのキャップ積はすべて定義されているものとする．そのとき，

$$(c \frown u) \frown v = c \frown (u \smile v) \in H_{n-p-q}(X, A_3; R)$$

3) 単位コホモロジー類 $1 \in H^0(X; R)$ と任意の $c \in H_n(X, A; R)$ に対して，

$$c \frown 1 = c.$$

4) $c \in H_n(X, A; R), u \in H^n(X, A; R)$ に対し，

$$\epsilon_*(c \frown u) = \langle c, u \rangle \in R$$

が成り立つ．ただし，ϵ_* は添加写像 $\epsilon : S_0(X) \to \mathbb{Z}$ が誘導するホモロジーの準同型 $H_0(X; R) \to R$ を表す．

□

1.5　例

1.5.1　Euler 数と Lefschetz 数

【定義 1.47 (定義)**】**　(X,A) が有限型のホモロジーをもち，十分大きい n に対して $H_n(X,A)=0$ となるとき，(X,A) は有限生成ホモロジーをもつという．このとき，$H_n(X,A)$ の捻れ部分群を T_n として，$\bar{H}_n(X,A)=H_n(X,A)/T_n$ とおくと，連続写像 $f:(X,A)\to(X,A)$ から誘導される写像 $f_*^{(n)}:\bar{H}_n(X,A)\to\bar{H}_n(X,A)$ から定義される整数

$$L(f):=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\mathrm{tr}f_*^{(0)}$$

を f の *Lefschetz* 数という．また，特に $L(1)$，すなわち

$$\chi(X,A):=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$$

を空間対 (X,A) の *Euler* 数という．　□

【定理 1.48 (Hopf)**】**　(X,A) を有限 CW 複体の対，$f:(X,A)\to(X,A)$ を胞体写像，それから誘導される $C_n(X,A)$ の準同型を $f_\sharp^{(n)}$ とするとき，

$$L(f)=\sum_{n=0}^{n}\mathrm{tr}f_\sharp^{(0)}$$

が成り立つ．特に，$f=\mathrm{id}$ に対して，X の n 胞体で A に含まれないものの個数を c_n とするとき，

$$\chi(X,A)=\sum_n(-1)^n c_n.$$

□

【定理 1.49 (和空間)**】**　X を位相空間，$\{X_1,X_2\}$ を切除的部分空間の組で X_1,X_2 および $A=X_1\cap X_2$ がすべて有限生成ホモロジーをもつとする．このとき，$X=X_1\cup X_2$ も有限生成ホモロジーをもち，連続写像 $f:X\to X$ で $f(X_i)\subset X_i$ となるものに対し，

$$L(f)+L(f|A)=L(f|X_1)+L(f|X_2)$$

が成り立つ．特に，

$$\chi(X) + \chi(A) = \chi(X_1) + \chi(X_2).$$

□

【定理 1.50 (積空間)**】** X, Y はともに有限生成ホモロジーをもつ空間とする．このとき，$X \times Y$ も有限生成ホモロジーをもち，連続写像 $f : X \times X, g : Y \times Y$ に対し，

$$L(f \times g) = L(f)L(g)$$

が成り立つ．特に，

$$\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y).$$

□

1.5.2　多様体

1.5.2.1　連結和

【命題 1.51】 任意の位相空間 X に対して

$$H_q(X \times I, X \times \partial I) \cong H_{q-1}(X),$$
$$H^q(X \times I, X \times \partial I) \cong H^{q-1}(X).$$

□

【命題 1.52 (ホモロジー群)**】** X, Y を n 次元多様体（$n \geq 3$）とするとき，

$$H_q(X \sharp Y) \cong H_q(X) \oplus H_q(Y); \quad 1 \leq q \leq n-2$$

が成り立つ．さらに，X, Y が境界を持たないコンパクト多様体の時，

$$H_{n-1}(X \sharp Y) \cong H_{n-1}(X) \oplus H_{n-1}(Y)$$

□

【定理 1.53 (Euler 数)**】**　X, Y を n 次元多様体とするとき，

$$\chi(X\sharp Y) = \begin{cases} \chi(X)+\chi(Y)-1-(-1)^n & ; X, Y \text{ compact}, \\ \chi(X)+\chi(Y)-1+(-1)^n & ; X, Y \text{ noncompact}, \\ \chi(X)+\chi(Y)-1 & ; \text{the other cases}. \end{cases}$$

□

1.5.2.2 RP^n

1 S^n の CW 分割と CW チェイン複体： 単位球体 $D^k \subset \mathbb{R}^k$ の標準の向きを

$$u_k : \Delta^k = (0, 1, \cdots, k) \to (v_1, \cdots, v_k, 0) \subset D^k$$

の定める $H_k(D^k, D^k - (v_1 + \cdots + v_k)/k) \cong H_k(D^k, D^k - 0)$ の元と定義する．ここで，v_j は j 座標軸の単位点を表すベクトル．標準の入射列

$$\cdots \subset \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \subset \cdots$$

に対して，$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ の k 胞体を

$$\bar{e}^k_{\pm} = S^n \cap \mathbb{R}^k_{\pm} \ (k = 0, 1, \cdots, n)$$

とおくと，

$$S^n = e^0_+ \cup e^0_- \cup \cdots e^n_+ \cup e^n_-.$$

$j : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}^k$ を標準射影 $j(x_1, \cdots, x_{k+1}) = (x_1, \cdots, x_k)$ として，$e^k_{\pm}$ の向きを

$$j_*[\bar{e}^k_{\pm}, \partial\bar{e}^k_{\pm}] = \pm[D^k, \partial D^k]$$

により定めると，

$$\begin{aligned} \partial D^k_{\pm} &\sim \pm\partial(v_1, \cdots, v_{k-1}, \pm v_k, 0) \\ &\sim \pm(-1)^{k-1}(v_1, \cdots, v_{k-1}, 0) \pm (-1)^k(v_1, \cdots, v_{k-1}, \pm v_k) + \cdots \end{aligned}$$

において，

$$j_*(v_1, \cdots, v_{k-1}, \pm v_k) = (v_1, \cdots, v_{k-1}, 0) \sim D^{k-1}$$

より，

$$\partial_*[D^k_\pm, \partial D^k_\pm] = \mp(-1)^k D^{k-1} + (-1)^k e^{k-1}_\pm$$

よって，

$$\partial e^k_\pm = \pm\partial[D^k, \partial D^{k-1}] = \pm(-1)^k(e^{k-1}_+ + e^{k-1}_-)\ (k = 1, \cdots, n).$$

2) $T : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ を $T(x) = -x$ により定めると，

$$\pi : S^n \to \mathbb{R}P^n = S^n / \{1, T\}.$$

$\mathbb{R}P^n$ の胞体を

$$e^k = \pi_*(e^k_+)$$

により定めると，$e^0, \cdots, e^n$ は $\mathbb{R}P^n$ の胞体分割を与える：

$$\mathbb{R}P^n = e^0 \cup e^1 \cup \cdots \cup e^n.$$

このとき，

$$\pi_*(e^k_-) = (-1)^{k+1} e^k$$

より，

$$\partial e^k = (1 + (-1)^k) e^{k-1}.$$

すなわち，

$$0 \to C_n \xrightarrow{\times(1+(-1)^n)} C_{n-1} \cdots C_2 \xrightarrow{\times 2} C_1 \xrightarrow{0} C_0 \to 0.$$

よって，

$$\begin{aligned}
&H_0(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z},\\
&H_{2k}(\mathbb{R}P^n) = 0\ (k > 0),\\
&H_{2k-1}(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2\ (2k-1 < n),\\
&H_{2k-1}(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}\ (2k-1 = n).
\end{aligned}$$

2　ホモトピー

[LastUpdate: 2005.12.30]

2.1 Lie群のホモトピー

2.1.1 コンパクトLie群

【定理 2.1 (安定ホモトピー)**】** nをkに対して十分大きく取れば，古典コンパクト単純Lie群Gのホモトピー群はnに依存しなくなる．具体的には，$k \geq 2$のとき，

$$\pi_k(\mathrm{U}) = \pi_k(\mathrm{U}(n)) \cong \pi_k(\mathrm{SU}(n)),\ n \geq (k+1)/2, \tag{1}$$

$$\pi_k(\mathrm{O}) = \pi_k(\mathrm{SO}(n)),\ n \geq k+2, \tag{2}$$

$$\pi_k(\mathrm{Sp}) = \pi_k(\mathrm{Sp}(n)),\ n \geq (k-1)/4. \tag{3}$$

□

【定理 2.2 (Bottの周期性)**】**

$$\pi_k(U) \cong \begin{cases} \infty & ; k \equiv 1(\mathrm{mod}2), \\ 0 & ; k \equiv 0(\mathrm{mod}2). \end{cases} \tag{4}$$

$$\pi_k(O) \cong \begin{cases} \infty & ; k \equiv 3, 7(\mathrm{mod}8), \\ 2 & ; k \equiv 0, 1(\mathrm{mod}8), \\ 0 & ; k \equiv 2, 4, 5, 6(\mathrm{mod}8). \end{cases} \tag{5}$$

$$\pi_k(O) \cong \begin{cases} \infty & ; k \equiv 3, 7(\mathrm{mod}8), \\ 2 & ; k \equiv 4, 5(\mathrm{mod}8), \\ 0 & ; k \equiv 0, 1, 2, 6(\mathrm{mod}8). \end{cases} \tag{6}$$

□

【定理 2.3 (低次のホモトピー群)**】** Gをコンパクト連結Lie群とする：$G = \mathrm{SO}(n)\,(n \geq 2)$, $\mathrm{Spin}(n)\,(n \geq 3)$, $\mathrm{U}(n)\,(n \geq 1)$, $\mathrm{SU}(n)\,(n \geq 2)$, $\mathrm{Sp}(n)\,(n \geq 1)$, G_2, F_4, E_2, E_6, E_8.

1) 基本群$\pi_1(G)$:

$$\pi_1(G) \cong \begin{cases} \infty & ; G = \mathrm{U}(n)\,(n \geq 1),\ \mathrm{SO}(2), \\ 2 & ; G = \mathrm{SO}(n)\,(n \geq 3), \\ 0 & ; \text{その他} \end{cases} \tag{7}$$

2) $\pi_2(G)$:

$$\pi_2(G) = 0. \tag{8}$$

3) $\pi_3(G)$:

$$\pi_3(G) \cong \begin{cases} 0 & ; G = \mathscr{U}(1) \cong \mathrm{SO}(2) \\ \infty + \infty & ; G = \mathrm{SO}(4)\,\mathrm{Spin}(4) \\ \infty & ; \text{その他} \end{cases} \tag{9}$$

4) $\pi_4(G)$:

$$\pi_4(G) \cong \begin{cases} 2+2 & ; G = \mathrm{SO}(4)\,\mathrm{Spin}(4) \\ 2 & ; G = \mathrm{Sp}(n), \mathrm{SU}(2), \mathrm{SO}(3), \mathrm{SO}(5), \mathrm{Spin}(3), \mathrm{Spin}(5) \\ 0 & ; G = \mathrm{SU}(n)\ (n \geq 3), \mathrm{SO}(n)\,(n \geq 6), G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 \end{cases} \tag{10}$$

5) $\pi_5(G)$:

$$\pi_5(G) \cong \begin{cases} 2+2 & ; G = \mathrm{SO}(4)\,\mathrm{Spin}(4), \\ 2 & ; G = \mathrm{Sp}(n), \mathrm{SU}(2), \mathrm{SO}(3), \mathrm{SO}(5), \mathrm{Spin}(3), \mathrm{Spin}(5) \\ \infty & ; G = \mathrm{SU}(n)\ (n \geq 3), \mathrm{SO}(6), \mathrm{Spin}(6) \\ 0 & ; G = \mathrm{SO}(n), \mathrm{Spin}(n)\ (n \geq 7), G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 \end{cases} \tag{11}$$

□

3 Manifolds

[LastUpdate: 2005.12.30]

3.1 位相多様体

【定義 3.1 (位相多様体)**】** n 次元 Euclide 空間 $\mathbb{R}^n$ の半空間 $\{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$ を H^n，その部分空間 $\{x \in H^n \mid x^n = 0\}$ を ∂H^n と表す.

i) Hausdorff 空間 M の各点 p が H^n の開集合と同相な近傍 $U(p)$ をもつとき，M を n 次元位相多様体という.

ii) n 次元位相多様体 M の開近傍 U と U から H^n の開集合への同相写像 ψ の組 (U,ψ) を，座標近傍という．さらに，座標近傍の族 $S = \{U_\alpha,\psi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ で $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が M の開被覆となるものを，座標近傍系という．

iii) n 次元位相多様体 M の座標近傍系 $S = \{U_\alpha,\psi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ に対して，$\partial M = \cup_{\alpha\in A}\psi_\alpha^{-1}(\partial H^n)$ を M の境界という．

□

4 微分位相幾何学

[LastUpdate: 2005.12.30]

4.1 歴史

1934 **Morse 理論** [Morse M. (1934)]

1940 **3 角形分割定理** [Cairns SS (1935), Whitehead JHC (1940)]

1944 **Whitney の埋め込み定理，Whitney トリック**: n 次元 C^∞ 多様体は，$\mathbb{R}^{2n-1}$ にはめ込み可能，$\mathbb{R}^{2n}$ に埋め込み可能 [Whitney H(1944)]

1952 **Rokhlin の定理** [Rokhlin (1952)]

1954 **同境群に対する Thom の基本定理** [Thom R (1954)]

1960 Stiefe-Whitney 数および Pontryagin 数による同境条件の完全な特徴付け [Wall CTC (1960)]

1961 コンパクト多様体上の Morse 関数の存在とハンドル体分解 [Smale S (1961), Thom R, Wallace, Morse M]

$n \geq 5$ **に対する一般 Poincare 予想の解決** [Smale S (1961)]

1962 **h-同境定理**: 5 次元以上の単連結コンパクト C^∞ 多様体に対する h-同境定理 [Smale S(1962)]

単連結コンパクト５次元スピン多様体の微分同相類の決定 [Smale S (1962)]

2 連結コンパクト C^∞ ６次元多様体の微分同相類の決定 [Smale S (1962)]

1963 $n-1$ 連結 $2n$ 次元多様体の微分同相類の決定 [Wall CTC (1962)]

- $n-1$ 連結 $2n+1$ 次元多様体の微分同相類の決定 [Tamura I(1963), Wall CTC (1963)]

  手術手法の開発 [Kervaire MA and Milnor JW (1963)]

  Atiyah-Singer の指数定理 [Atiyah and Singer (1963)]

1981 **4 次元 Poincare 予想の解決** [Freedman MH(1982)]

1982 $\mathbb{R}^4$ **の異なる微分構造の存在** [Donaldson SK (1983)]

1985 **Donaldson 多項式** [Donaldson SK]

1987 **4 次元 h 同境定理の反例** [Donaldson SK]

4.2 モース関数

【定義 4.1 (モース関数)**】** M を n 次元 C^∞ 多様体とする．

1. C^1 関数 f に対して，$df_p = 0$ となる点 $p \in M$ を f の臨界点という．
2. $p \in M$ を C^2 関数 f の臨界点とする．このとき，
$$H_{\mu\nu}(p) = (\partial_\mu \partial_\nu f)(p)$$
は p における２階の対称テンソルとなり，*Hesse* 行列と呼ばれる．
3. $p \in M$ を C^2 関数 f の臨界点とする．その点における Hesse 行列が正則であるとき，臨界点 p は非退化であるという．非退化な臨界点に対しては，Hesse 行列の負固有値の数をその指数という．
4. M 上の C^∞ 関数 f が非退化な臨界点しか持たず，かつ $\partial M \neq \emptyset$ のときには ∂M 上に臨界点をもたないとき，f を *Morse* 関数という．

□

【定理 4.2】 M を n 次元 C^∞ 多様体とするとき，M 上に Morse 関数が存在する． □

【定義 4.3 (多様体の三つ組み)**】**

1. W をコンパクトな C^∞ 多様体として（連結でなくてもよい），その境界 ∂W（空集合でもよい）を連結成分の和集合で表される 2 成分 V_0, V_1 の分解する：

$$\partial W = V_0 \cup V_1,\ V_0 \cap V_1 = \emptyset.$$

このとき，$(W; V_0, V_1)$ を C^∞ 多様体の三つ組という．

2. C^∞ 多様体の三つ組み $(W; V_0, V_1)$ 上の Morse 関数が次の条件を満たすとき，f を $(W; V_0, V_1)$ に適合する *Morse* 関数という：
   i) $f(W) = [a, b]$ $(a < b)$.
   ii) $V_0 \neq \emptyset$ のとき，$V_0 = f^{-1}(a)$．$V_1 \neq \emptyset$ のとき，$V_1 = f^{-1}(b)$.

□

【定理 4.4】 C^∞ 多様体の三つ組み $(W; V_0, V_1)$ に対して，それに適合する Morse 関数が常に存在する． □

4.3 5 次元以上の多様体

4.3.1 h 同境定理

【定理 4.5 (h 同境定理)**】** W^n をコンパクトな n 次元 C^∞ 多様体，$(W^n; V_0, V_1)$ を C^∞ 多様体の 3 つ組とするとき，この 3 つ組が次の 3 条件を満たしていれば，$W^n = V_0 \times I$ が成り立つ．特に，$V_0 = V_1$ である．

i) W^n, V_0, V_1 はすべて連結かつ単連結である．

ii) $n \geq 6$.

iii) $H_q(W^n, V_0) = 0$ $(q = 0, 1, 2, \cdots)$.

□

【定義 4.6 (h 同境)**】** n 次元閉（可微分）多様体 V, V' が同境 $V \cup V' = \partial W^{n+1}$ でかつ，包含写像 $V \to W^{n+1}$，$V' \to W^{n+1}$ が共にホモトピー同値写像となるとき，V と V' は h **同境**であるという．このとき，$H_*(W^{n+1}, V) = 0$ が成り立つ． □

【定理 4.7 (Smale:可微分多様体の h 同境定理)**】** V, V' を連結かつ単連結な閉じた n 次元 C^∞ 多様体とする．もしも，$n \geq 5$ であって V と V' が h 同境ならば，V と V' は C^∞ 同相である．[Smale, S.: On the structure of manifolds, Amer. J. Math. 8, 387-399 (1962); Smale, S.: Lectures on h-cobordism theorem,Princeton Univ. Press (1965)] [田村一郎：微分位相幾何学] □

【定理 4.8 (Kirby-Siebenmann:位相多様体の h 同境定理)**】** V, V' を連結で単連結な n 次元位相多様体とする．$n \geq 5$ で V と V' が h 同境なら，V と V' は同相である．[Kirby, R.C. and Siebenmann, L.C.: Foundational Essays on Topological Manifolds, Smoothings, and Triangulations, Ann. Math. Studies 88, Princeton (1977)] □

4.3.2 Poincare 予想

【定理 4.9 (Stallings 1960; Zeeman 1961)**】** M^n を次元 $n \geq 5$ の有限単体複体で S^n と同じホモトピー型をもち，局所的に Euclid 空間と PL 同型であるとする．このとき，M^n は S^n と同相で，１点以外では PL 同型となる同相写像が存在する．[Stallings J 1960[Sta60]; Zeeman CW 1961[?, ?]] □

【定理 4.10 (Smale 1960)**】** W^n を連結でコンパクトな n 次元 C^∞ 多様体とする．このとき，次の 3 条件が満たされれば W^n は n 次元球体 D^n と C^∞ 同相である：

i) $n \geq 6$.

ii) W^n は単連結で，$H_q(W^n) = H_q(D^n)(q = 0, 1, \cdots)$.

iii) ∂W^n は単連結.

□

【定理 4.11】 M^n を連結かつ単連結で，S^n と同じホモロジーをもつ n 次元 C^∞ 多様体とする．もし，$n = 5$ または 6 ならば，コンパクトで可縮な $n+1$ 次元 C^∞ 多様体 W^{n+1} で $\partial W^{n+1} = M^n$ となるものが存在する． □

【定理 4.12 ($n \geq 5$ に対する一般化された Poincare 予想 [Smale])**】** M^n は連結で単連結な閉じた n 次元 C^∞ 多様体で，S^n と同じホモロジー群をもつとする．もし，$n \geq 5$ なら M^n は S^n と C^0 同相である．特に，$n = 5, 6$ なら M^n は S^n と C^∞ 同相である．[Smale S 1960, 1961[Sma60, Sma61]] □

【定理 4.13】 W^5 を連結でコンパクトな 5 次元 C^∞ 多様体とする．このとき，次の 2 条件が満たされれば W^5 は 5 次元球体 D^5 と C^∞ 同相である：

i) W^5 は単連結で，$H_q(W^5) = H_q(D^5)(q = 0, 1, \cdots)$.

ii) ∂W^5 は S^4 と C^∞ 同相.

□

【定理 4.14 (Schoenflies の定理)**】** $f : S^{n-1} \to S^n$ を C^∞ 埋め込みとすと，$f(S^{n-1})$ は S^n を 2 つの連結成分に分ける：$S^n - f(S^{n-1}) = A_1 \cup A_2$. もし，$n \geq 5$ なら，$M_1 = A_1 \cup f(S^{n-1})$ と $M_2 \cup f(S^{n-1})$ は共に D^n に C^∞ 同相である． □

4.4 4次元多様体

4.4.1 基本事項

【定義 4.15 (整係数ユニモジュラー対称２次形式)**】** $Q : \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}$ を整数係数ユニモジュラー対称２次形式とする．

1) 任意の $v \in \mathbb{Z}^m$ に対して $Q(v,v) \equiv 0 (\mathrm{mod} 2)$ が成り立つとき Q は II 型，II 型でないとき I 型という．

2) Q の正固有値の数と負固有値の差を符号数 (signature) という．

□

【命題 4.16 (整係数ユニモジュラー対称２次形式の性質)**】** Q を整係数ユニモジュラー対称２次形式とするとき次の命題が成り立つ：

1) Q が II 型なら，その符号数は 8 の倍数である．

2) Q が II 型で不定値なら，Q はいくつかの (1) と (-1) の直和に同型である．

3) Q が I 型で不定値なら，Q はいくつかの E_8 と $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ の直和に同型である．

4) 正定値ないし負定値で既約な整係数ユニモジュラー対称２次形式の同型類は無限個ある．

□

4.4.2 Rokhlin の定理

【定理 4.17 (古典的 Rokhlin の定理)**】** 向きのついた 4 次元 C^∞ 閉多様体がスピン多様体であれば，その符号数は 16 で割り切れる． □

【定理 4.18】 E_8 を交点形式として持つ単連結な４次元 C^∞ 閉多様体は存在しない． □

4.4.3 ４次元位相多様体の分類

【定理 4.19 (ホモトピー類 [Milnor (1956)])**】** 単連結４次元閉多様体 M, N がホモトピー同値であることと，交点形式が同型であることは同値である． □

【定理 4.20 ([Wall(1964)])**】** 単連結４次元閉多様体 M, N がホモトピー同値なら，h 同境である．また，M と N が h 同境なら，ある自然数 k が存在して，$M\sharp^k(S^2 \times S^2) \approx N\sharp^k(S^2 \times S^2)$ となる． □

【定理 4.21 (Freedman の定理 [Freedman (1982)])**】** Casson ハンドルは $D^2 \times \mathbb{R}^2$ に同相である． □

【定理 4.22 (４次元位相 h 同境定理 [Freedman])**】** N を５次元境界付き単連結コンパクト位相多様体，$\partial N = M_+ \cup M_-$，$M_+ \cap M_- = \emptyset$，$M_\pm$ は単連結，$H_*(M_-;\mathbb{Z}) \to H_*(N;\mathbb{Z})$ が同型とすると，N は $M_- \times [0,1]$ に同相である．[Freedman, M.H.: The topology of 4-dimensional manifolds, J. Diff. Geom. 17 (1982), 357-453.] □

【定理 4.23 (固有 h 同境定理 [Freedman(1982)])**】** 単連結４次元閉 C^∞ 多様体 M, N が h 同境なら，それらは同相である． □

【定理 4.24 (４次元 Poincare 予想の解決 [Freedman (1982))**】**] S^4 にホモトピー同値な４次元位相多様体は S^4 に同相である．[Freedman, M.H.: The topology of 4-dimensional manifolds, J. Diff. Geom. 17 (1982), 357-453.] □

【注 4.25 (４次元異種球面)**】** ４次元異種球面が存在するかどうかは不明である． □

【定理 4.26 (Freedman-Quinn の定理 [Freedman (1982), Quinn (1982)])**】**
任意のユニモジュラー２次形式に対して，それを交叉形式とする単連結で閉じた４次元位相多様体が存在する．さらに，単連結閉４次元位相多様体 X に対して，$ks(X) \in H^4(X;\mathbb{Z}_2)$ をその $Kirby-Siebenmann$ 類とするとき，次が成り立つ：

i) $ks(X)$ と交叉形式で単連結閉４次元位相多様体の同相類が一意的に決まる．

ii) $ks(X) = 0$ と $X \times S^1$ が可微分構造を持つことは同値である．

iii) 交叉形式が I 型の時，与えられた交叉形式に対して，$ks(X) = 0, 1$ となる２つの位相多様体が存在する．

iv) 交叉形式が II 型の時，$ks(X)$ の値は交叉形式の符号数の 1/8 倍となり，単連結閉４次元位相多様体の同相類が交叉形式のみで一意的に決まる．

[Freedman, M.H. and Quinn, F.: Topology of 4-manifolds, Princeton Math. Ser. 39, Princeton, 1990] □

4.4.4 Donaldson 理論

【定理 4.27 (Donaldson の定理 [Donaldson(1983,1987)])**】** 閉じた４次元 C^∞ 多様体の交点形式 b が負定値ならば，$b \cong (-1) \oplus (-1) \oplus \cdots \oplus (-1)$. b が正定値の場合についても同様の結果が成り立つ． □

【定理 4.28 (Donaldson(1983), Taubes(1986))**】** $\mathbb{R}^4$ に同相であるが微分同相でない４次元 C^∞ 多様体が非可算個存在する.（４次元以外では存在しない [Kirby and Siebermann (1977), Moise(1952)] □

4.5 同境理論

【定義 4.29 (有向同境)**】**

i) 向きの与えられた２つの閉 (可微分) 多様体 M_1, M_2 に対して，($M_1 \cap M_2 = \emptyset$ として) その向きづけられた和 $M_1 \cup M_2$ を $M_1 + M_2$ で表す.

ii) 向きづけられた (可微分) 多様体 M に対して，その向きを変えた多様体を $-M$ で表す.

iii) 向きづけられた 2 つの n 次元閉（可微分）多様体 M^n, V^n に対して，向きづけられたコンパクトな $n+1$ 次元（可微分）多様体 W^{n+1} で，

$$\partial W^{n+1} = M^n + (-V^n) \text{ 向きを保って同相}$$

を満たすものが存在するとき，M^n と V^n は有向同境 (oriented cobordant) であるという．ただし，∂W^{n+1} には W^{n+1} の向きからホモロジー的に導入された向きを与えるものとする．

iv) $\mathscr{M}^n$ を向きづけられた n 次元閉（可微分）多様体全体の集合において，有向同境による同値類を有向同境類といい，有向同境類の集合を Ω^n，$\Omega^n (n = 0, 1, \cdots)$ の直和を $\Omega^* = \sum \Omega^n$ と表す．

$\square$

【命題 4.30】

i) Ω^n の元 $\{M_1^n\}, \{M_2^n\}$ に対して，和を

$$\{M_1^n\} + \{M_2^n\} := \{M_1^n + M_2^n\}$$

で定義すると，Ω^n は $\{\emptyset\}$ をゼロ元とする可換群となる．これを有向同境群という．

ii) Ω^* の元 $\{M^n\}, \{N^m\}$ の積を

$$\{M^n\} \times \{N^m\} := \{M^n \times N^m\}$$

で定義すると，Ω^* は環となる．これを有向同境環という．

$\square$

【定理 4.31 (Thom)**】**

可微分多様体のカテゴリーにおいて，有向同境群 Ω^n は,

i) $n \neq 0 \mathrm{mod} 4$ のとき，有限群である．

ii) $n=4m$ のとき，階数が n の分割数と一致する自由加群と有限群の直和である．

[田村一郎：微分位相幾何学] $\square$

【定理 4.32】 可微分多様体のカテゴリーにおいて，テンソル積 $\Omega^* \otimes \mathbb{Q}$ は偶数次元射影空間 $\mathbb{C}P^2, \mathbb{C}P^4, \cdots$ により生成される $\mathbb{Q}$ 上の多項式環である．[田村一郎：微分位相幾何学] $\square$

【定理 4.33 (Wall)**】** 向きづけられた n 次元閉可微分多様体がゼロ同境であるための必要十分条件は，すべての Pontrjagin 数およびすべての Stiefel-Whitney 数がゼロとなることである．したがって，可微分多様体のカテゴリーにおける同境群 Ω^n は Pontrjagin 数に対応する無限巡回群 $\mathbb{Z}$ と Stiefel-Whitney 数に対応する位数 2 の群 $\mathbb{Z}_2$ の直和である．[Wall, C.T.C: Determination of the cobordism ring, Ann. of Math. 72 (1960)] $\square$

5 ファイバー束

[LastUpdate: 2005.12.30]

5.1 ベクトル束

5.1.1 K 理論

【定義 5.1 (K 群)**】** 空間 X 上の F-ベクトル束の同値類全体の作る可換半群 $V_F(X)$ に対して，その Grothendieck 可換群を **K 群**といい，$K_F(X)$ と表す．$K_F(X)$ の元は**仮想束**と呼ばれる．特に，$F=\mathbb{C}$ および $F=\mathbb{R}$ のとき，$K_F(X)$ をそれぞれ $K(X)$，$KO(X)$ と表す． $\square$

【命題 5.2】 コンパクト空間 X の K 群 $K_F(X)$ について次の性質が成り立つ：

i) $K_F(X)$ は束の直和 $\oplus$ とテンソル積 $\otimes$ により可換環となり，K_F は（コンパクト）位相空間の圏から可換環の圏への反変関手となる．

ii) $K_F(X)$ の任意の元は適当なベクトル束 V と自明な N 次元ベクトル束 θ_F^N $(N \geq 0)$ を用いて，$[V] - [\theta_F^N]$ と表される．

iii) $K_F(X)$ において $[V] - [W] = 0$ となるための必要十分条件は，適当な自明ベクトル束 θ_F^N に対して $V \oplus \theta_F^N \cong W \oplus \theta_F^N$ となることである．

□

【定義 5.3 (簡約K群)**】** X を基点 pt を持つ空間として，制限写像 $K_F(X) \to K_F(\mathrm{pt}) \cong \mathbb{Z}$ の核を**簡約 K 群**と呼び，$\tilde{K}_F(X)$ と表す． □

【定義 5.4 (安定同値)**】** 位相空間 X 上の２つのベクトル束 V，W に対して，２つの自明なベクトル束 θ^m, θ^n が存在して $V \oplus \theta^m \cong W \oplus \theta^n$ となるとき，**V と W は安定同値である**という． □

【命題 5.5】 コンパクト空間 X の簡約 K 群 $\tilde{K}_F(X)$ について次の性質が成り立つ：

i) $\tilde{K}_F(X)$ は $K_F(X)$ から誘導される和と積により可換環となり，$\tilde{K}_F$ は（コンパクト）位相空間の圏から可換環の圏への反変関手となる．

ii) $\tilde{K}_F(X)$ の任意の元は，適当なベクトル束 V と V と同じ次元 N の自明なベクトル束 $\theta_F^N (N \geq 0)$ を用いて，$[V] - [\theta_F^N]$ と表される．

iii) $\tilde{K}_F(X)$ において $[V] = [W]$ となるための必要十分条件は，V と W が安定同値となることである．特に，$\tilde{K}_F(X)$ と X 上の F-ベクトル束の安定同値類全体の集合は一対一に対応する．

□

【定義 5.6 (相対 K 群)**】** 空間 X とその空でない閉部分空間 Y の組に対して，**相対 K 群** $K_F(X, Y)$ を

$$K_F(X, Y) := \tilde{K}_F(X/Y)$$

により定義する．ただし，X/Y の基点を Y とする．$Y = \emptyset$ に対しては

$$K_F(X, \emptyset) := K_F(X)$$

と定義する． □

【定義 5.7 (L 群)**】** 位相空間対 (X, A)(A は X の閉部分空間) に対して，X 上のベクトル束 V_0, V_1 とその A への制限の間の束写像 $\sigma : V_0|_A \to V_1|_A$ の組 $\boldsymbol{V} = (V_0, V_1; \sigma)$ からなる集合を $\mathscr{L}(X, A)$ とする．$\mathscr{L}(X, A)$ の 2 つの元 $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V}'$ は，束同型 $\phi_i : V_i \to V_i'$ で $\phi_1 \circ \sigma = \sigma' \circ \phi_0$ となるとき同値といい，$\boldsymbol{V} \cong \boldsymbol{V}'$ と表す．$\mathscr{L}(X, A)$ は束の直和から誘導される和により自然に可換半群となる．$\mathscr{L}(X, A)$ の元 $\boldsymbol{E} = (E_0, E_1; \sigma)$ は，$E_0 = E_1$ かつ $\sigma = \mathrm{id}$ のとき要素的であるという．さらに，$\mathscr{L}(X, A)$ の 2 つの元 $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V}'$ に対して，適当な要素的元 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}'$ が存在して

$$\boldsymbol{V} \oplus \boldsymbol{E} \cong \boldsymbol{V}' \oplus \boldsymbol{E}'$$

となるとき，同値とする．この同値関係による $\mathscr{L}(X, A)$ の同値類 $[V_0, V_1; \sigma]$ の集合を $L(X, A)$ と表す．$L(X, A)$ は可換群である． □

【命題 5.8】 $A = \emptyset$ のとき，

$$\chi([V_0, V_1]) = [V_0] - [V_1]$$

となる，関手の間の同値変換 $\chi : L(X, A) \to K(X, A)$ が一意的に存在する．具体的には，一般の $\boldsymbol{V} = [V_0, V_1; \sigma] \in L(X, A)$ に対して，$\chi(\boldsymbol{V})$ は次のように構成される．$X_0 = X \times 0, X_1 = X \times 1$ を X のコピーとして，

$$[\tilde{V}] - [\theta^N] = [V_0 \cup_\sigma V_1] - [V_1 \cup_{\mathrm{id}} V_1] \in K(X_0 \cup_A X_1)$$

を作ると，この元の $X = X_0$ への制限は $K(X)$ でゼロとなる．これより，$\tilde{V}$ は X_1 上で自明束安定同値となり，$K(X/A)$ の元 $\chi(\boldsymbol{V})$ を一意的に決定する． □

【定義 5.9】 X, Y を位相空間，$p_X : X \times Y \to X, p_Y : X \times Y \to Y$ を標準射影とする．このとき，$a \otimes b \in K(X) \otimes K(Y)$ に $p_X^*(a) p_Y^*(b) \in K(X \times Y)$ を対応させることにより定義される群準同型 $K(X) \otimes K(Y) \to K(X \times Y)$ を K **群のクロス積**という．これは，部分集合に制限することにより，$\tilde{K}$ 群のクロス積 $\tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(Y) \to \tilde{K}(X \times Y)$ を誘導する． □

【命題 5.10】 X, Y を基点付き空間とするとき，そのブーケ $X \vee Y$ およびスマッシュ積 $X \wedge Y$ に対して次が成り立つ：

i) 包含写像 $i : X \vee Y \subset X \times Y$ および射影 $p : X \times Y \to X \wedge Y$ は次の完全列を誘導する：

$$0 \to \tilde{K}(X \wedge Y) \xrightarrow{p^*} \tilde{K}(X \times Y) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}(X \vee Y) \to 0.$$

ii) クロス積と i^* の結合

$$\tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(Y) \to \tilde{K}(X \times Y) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}(X \vee Y)$$

はゼロ写像である．

□

【定義 5.11 (K 群のカップ積)**】** 上の命題より誘導される写像

$$\tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(Y) \to \tilde{K}(X \wedge Y)$$

を**簡約 K 群のカップ積**と呼ぶ．さらに，2 つの空間対 (X, A)，(Y, B) に対して $\tilde{K}$ 群のカップ積

$$\tilde{K}(X/A) \otimes \tilde{K}(Y/B) \to \tilde{K}((X/A) \wedge (Y/B)) = \tilde{K}((X \times Y)/(X \times B) \cup (A \times Y))$$

から誘導される写像

$$K(X, A) \otimes K(Y, B) \to K(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y))$$

を**相対 K 群のカップ積**という． □

【定義 5.12 (次数付き K 群)**】** i を非負整数として，基点を持つコンパクト空間 X に対して，

$$\tilde{K}^{-i}(X) := \tilde{K}(S^i \wedge X),$$

コンパクト空間対 (X, Y) に対して，

$$K^{-i}(X, Y) := \tilde{K}^{-i}(X/Y),$$

基点を持たないコンパクト空間 X に対して，$X^+ = (X, *)$($*$ は仮想基点)，pt を S^i の基点として

$$K^{-i}(X) \equiv K^{-i}(X, \emptyset) := \tilde{K}^{-i}(X^+) = K(S^i \times X, \mathrm{pt} \times X)$$

と定義する．特に，

$$K^{-i}(\mathrm{pt}) = \tilde{K}(S^i)$$

である． □

【命題 5.13】 位相空間 X, Y と非負整数 i, j に対して，簡約 K 群のカップ積

$$\tilde{K}(S^i \wedge X) \otimes \tilde{K}(S^j \wedge Y) \to \tilde{K}((S^i \wedge X) \wedge (S^j \wedge Y))$$

は次数付き簡約 K 群のカップ積

$$\tilde{K}^{-i}(X) \otimes \tilde{K}^{-j}(Y) \to \tilde{K}^{-i-j}(X \wedge Y)$$

を誘導する．この積により，$K^*(\mathrm{pt})$ は次数付き環となる．また，$K^*(X)$ は次数付き $K^*(\mathrm{pt})$-加群となる． □

【定理 5.14 (Bott の周期性定理：複素 K 群)**】**

i) 環 $K^{-*}(\mathrm{pt})$ は $\xi \in K^{-2}(\mathrm{pt}) \cong \tilde{K}(S^2)$ を生成元とする多項式環に同型である：

$$K^{-*}(\mathrm{pt}) \cong \mathbb{Z}[\xi].$$

ii) (X, A) を任意のコンパクト Hausdorff 空間対とする．このとき，ξ によるカップ積から誘導される準同型

$$\mu_\xi : K^{-i}(X, A) \to K^{-i-2}(X, A)$$

は任意の非負整数 i に対して同型となる．

□

【定理 5.15 (Bott の周期性定理：実 K 群)**】**

i) 環 $KO^{-*}(\mathrm{pt})$ は，

$$\eta \in KO^{-1}(\mathrm{pt}), \quad y \in KO^{-4}(\mathrm{pt}), \quad x \in KO^{-8}(\mathrm{pt}),$$

として，

$$KO^{-*}(\mathrm{pt}) \cong \mathbb{Z}[\eta, y, x]/ < 2\eta, \eta^3, \eta y, y^2 - 4x > .$$

ii) (X, A) を任意のコンパクト Hausdorff 空間対とする．このとき，x によるカップ積から誘導される準同型

$$\mu_x : KO^{-i}(X, A) \to KO^{-i-8}(X, A)$$

は任意の非負整数 i に対して同型となる．

$\square$

【定義 5.16 (コンパクト台の K 群)**】** 局所コンパクト空間 X に対して，X^+ を X の一点コンパクト化 $X^+ = X \cup \{\mathrm{pt}\}$ として，X の**コンパクト台の** K **群**を

$$K_{\mathrm{cpt}}(X) := \tilde{K}(X^+),$$
$$K_{\mathrm{cpt}}^{-i}(X) := K_{\mathrm{cpt}}(X \times \mathbb{R}^i)$$

で定義する．また，空間対 (X, A)(A は閉集合) に対して，コンパクト台の相対 K 群を

$$K_{\mathrm{cpt}}^{-i} := K_{\mathrm{cpt}}((X - A) \times \mathbb{R}^i)$$

により定義する． $\square$

【定理 5.17 (K_{cpt} に対する Bott の周期性定理)**】** 任意の局所コンパクト空間 X に対して，次の関係が成り立つ：

$$K_{\mathrm{cpt}}(X) \cong K_{\mathrm{cpt}}(X \times \mathbb{C}),$$
$$KO_{\mathrm{cpt}}(X) \cong KO_{\mathrm{cpt}}(X \times \mathbb{R}^8).$$

この同型は，それぞれ $\xi \in K_{\mathrm{cpt}}(\mathbb{C}) \cong \tilde{K}(S^2)$，$x \in KO_{\mathrm{cpt}}(\mathbb{R}^8) \cong \tilde{K}O(S^8)$ とのカップ積により誘導される． $\square$

【命題 5.18】 $W = W^0 \oplus W^1$ を $\mathbb{Z}_2$ 次数付き $\mathbb{C} - C\ell_n$ 加群，$E_k = D^n \times W^k$ を n 次元球体 $D^n (\subset C\ell_n)$ 上の自明なベクトル束，$\mu : E_0|_{S^{n-1}} \to E_1|_{S^{n-1}} (S^{n-1} = \partial D^n)$ を同型 $\mu(u, w) = (u, u \cdot w)(|u| = 1)$ として，

$$\phi(W) := [E_0, E_1; \mu] \in K(D^n, S^{n-1})$$

とおくと，ϕ は $\mathbb{Z}_2$ 次数付き $\mathbb{C}-\mathcal{C}\ell_n$ 加群の Grothendieck 環から K 群への準同型

$$\phi : \hat{\mathscr{M}}_n^{\mathbb{C}} \to K(D^n, S^{n-1})$$

を与える．このとき，包含写像 $i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ から誘導される Grothendieck 環の準同型 $i^* : \hat{\mathscr{M}}_{n+1}^{\mathbb{C}} \to \hat{\mathscr{M}}_n^{\mathbb{C}}$ に対して，$i^* \circ \phi = 0$ となる．よって，ϕ は準同型

$$\phi_n : \hat{\mathscr{M}}_n^{\mathbb{C}} / i^* \hat{\mathscr{M}}_{n+1}^{\mathbb{C}} \to K(D^n, S^{n-1}) \cong K^{-n}(\mathrm{pt})$$

を与える．同様に，$\mathbb{Z}_2$ 次数付き Clifford 加群の実表現環に対して

$$\phi_n : \hat{\mathscr{M}}_n / i^* \hat{\mathscr{M}}_{n+1} \to KO(D^n, S^{n-1}) \cong KO^{-n}(\mathrm{pt})$$

が定義される．ここで,

$$\hat{\mathscr{M}}_n^{\mathbb{C}} / i^* \hat{\mathscr{M}}_{n+1}^{\mathbb{C}} \cong \mathscr{M}_{n-1}^{\mathbb{C}} / i^* \mathscr{M}_n^{\mathbb{C}} \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & n : \mathrm{even} \\ 0 & n : \mathrm{odd} \end{cases}$$

および

$$\hat{\mathscr{M}}_n / i^* \hat{\mathscr{M}}_{n+1} \cong \mathscr{M}_{n-1} / i^* \mathscr{M}_n \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & n \equiv 0, 4 (\mathrm{mod} 8) \\ \mathbb{Z}_2 & n \equiv 1, 2 (\mathrm{mod} 8) \\ 0 & \text{他の場合} \end{cases}$$

が成り立つ． □

【定理 5.19 (Atiyah-Bott-Shapiro 同型)**】** 次の次数付き環としての同型が成り立つ：

$$\phi_* : \hat{\mathscr{M}}_*^{\mathbb{C}} / i^* \hat{\mathscr{M}}_{*+1}^{\mathbb{C}} \xrightarrow{\cong} K^{-*}(\mathrm{pt}),$$
$$\phi_* : \hat{\mathscr{M}}_* / i^* \hat{\mathscr{M}}_{*+1} \xrightarrow{\cong} KO^{-*}(\mathrm{pt})$$

□

5.1.2 乗法列と Chern 指標

【**命題 5.20** (Splitting Principle)】

i) E を位相空間 X 上の複素ベクトル束とする．このとき，次の性質を満たすファイバー空間 $\pi : Y \to X$ が存在する：

  a) 準同型 $\pi^* : H^*(X) \to H^*(Y)$ は単射である．

  b) ベクトル束 $\pi^* E$ は 1 次元複素ベクトル束の直和となる：

$$\pi^* E \cong \ell_1 \oplus \cdots \oplus \ell_n.$$

X が多様体ならば，Y も多様体に取れ，π はなめらかな束射影とできる．

ii) E を X 上の $2n$ 次元の向きづけられた実ベクトル束とする．このとき，次の性質を満たすファイバー空間 $\pi : Y \to X$ が存在する：

  a) 準同型 $\pi^* : H^*(X) \to H^*(Y)$ は単射である．

  b) ベクトル束 $\pi^* E$ は

$$E_k \otimes \mathbb{C} \cong \ell_k \otimes \bar{\ell}_k$$

となる向きづけられた 2 次元実ベクトル束 E_k の直和となる：

$$\pi^* E \cong E_1 \oplus \cdots \oplus E_n.$$

X が多様体ならば，Y も多様体に取れ，π はなめらかな束射影とできる．

□

【**定義 5.21** (乗法列)】 $\mathbb{Q}$ 係数の $f(0) = 1$ となる形式べき級数 $f(x) \in \mathbb{Q}[[x]]$ に対して，σ_n を $x_1, \cdots, x_n$ の n 次基本対称式とすると，

$$f(x_1) \cdots f(x_n) = 1 + F_1(\sigma_1) + F_2(\sigma_1, \sigma_2) + \cdots$$

により定義される $F_j(\sigma_1, \cdots, \sigma_j)$($x_j$ に関して j 次の同次式) は $n \to \infty$ で n に依存しない多項式となる．これを $f(x)$ **より決まる乗法列**と呼ぶ． □

【命題 5.22】 次数付き代数 $A = \{A^k\}$ の元の形式無限和 $a = 1 + a_1 + a_2 + \cdots$ の全体の作る乗法群を $\boldsymbol{A}$ とする．乗法列 $\{F_k\}$ に対して，写像 $\boldsymbol{F} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ を

$$\boldsymbol{F}(a) = 1 + F_1(a_1) + F_2(a_1, a_2) + \cdots$$

と定義すると，$\boldsymbol{F}$ は $\boldsymbol{A}$ から自分自身への群の準同型となる：

$$\boldsymbol{F}(ab) = \boldsymbol{F}(a)\boldsymbol{F}(b).$$

□

【例 5.23 (全 Todd 類)**】** 形式べき級数

$$td(x) = \frac{x}{1 - e^{-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + \cdots$$

から定義される乗法列 **Td** を **Todd 乗法列**と呼ぶ．特に，全 Chern クラス $c(E)$ から定義される類 $\mathbf{Td}_{\mathbb{C}}(E) = \mathbf{Td}(c(E))$ を**全 Todd 類**, n 次元コンパクト複素多様体に対して $\mathrm{Td}(X) := \mathrm{Td}_n(TX)[X]$ を X の **Todd 種数**という． □

【例 5.24 (全 $\hat{A}$ 類)**】** 形式べき級数

$$\hat{a}(x) = \frac{\sqrt{x}/2}{\sinh(\sqrt{x}/2)} = 1 - \frac{1}{24}x + \frac{7}{2^7 \cdot 3^2 \cdot 5}x^2 + \cdots$$

から定義される乗法列 $\hat{\mathbf{A}}$ を $\hat{A}$ **乗法列**と呼ぶ．特に，全 Pontrjagin クラス $c(E)$ から定義される類 $\hat{\mathbf{A}}(E) = \hat{\mathbf{A}}(c(E))$ を**全** $\hat{A}$ **類**という．また，$a(x) = \hat{a}(16x)$ に対応する乗法列 $A_m = 16^m \hat{A}_m$ を A **系列**という．

□

【命題 5.25】 任意の向きづけられた実ベクトル束 E に対して次の関係が成り立つ：

$$\bar{T}d_{\mathbb{C}}(E \otimes \mathbb{C}) = \hat{\mathbf{A}}(E)^2$$

□

【例 5.26 (全 L 類)**】**　形式べき級数

$$l(x) = \frac{\sqrt{x}}{\tanh(\sqrt{x})} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^2 + \cdots$$

から定義される乗法列 $\hat{\mathbf{L}}$ を **Hirzebruch**L **乗法列**と呼ぶ．特に，全 Pontrjagin クラス $c(E)$ から定義される類 $\hat{\mathbf{L}}(E) = \hat{\mathbf{L}}(c(E))$ を**全** L **類**という．また，$\hat{l}(x) = l(x/4)$ に対応する乗法列 $\hat{L}_m = 4^{-m}L_m$ を $\hat{L}$ **系列**という．□

【例 5.27 (Chern 指標)**】**　n 次元複素ベクトル束 E の全 Chern クラス $c(E)$ を，Splitting Principle に従って形式的に

$$c(E) = 1 + c_1 + \cdots + c_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + x_k)$$

と因数分解するとき（すなわち c_j は x の j 次基本対称式），

$$\mathrm{ch}(E) = e^{x_1} + \cdots + e^{x_n} = n + c_1 + (c_1^2 - c_2) + \cdots$$

で定義される $H^{2*}(X;\mathbb{Q})$ の元を E の **Chern 指標**という．□

【命題 5.28】　Chern 指標について次が成り立つ：

i) E, E' を X 上の複素ベクトル束とするとき，

$$\mathrm{ch}(E \oplus E') = \mathrm{ch}(E) + \mathrm{ch}(E'),$$
$$\mathrm{ch}(E \otimes E') = \mathrm{ch}(E)\mathrm{ch}(E').$$

ii) 任意のコンパクト Hausdorff 空間 X に対して，Chern 指標は次の環としての準同型を与える：

$$\mathrm{ch} : K(X) \to H^{2*}(X;\mathbb{Q}).$$

□

5.1.3 Clifford 束

【定義 5.29】 空間 X 上の非退化な内積を持つ n 次元ベクトル束 E に対して，そのテンソル束 $\mathscr{T}(E) = \sum_{r=0}^{\infty} \otimes^j E$ の部分ベクトル束 $\mathscr{I}(E)$ を，$v \otimes v + < v, v > (v \in E_x)$ の形の元全体で生成されるイディアルとする．このとき，商束

$$\mathcal{C}\ell(E) := \mathscr{T}(E)/\mathscr{I}(E)$$

を E **の Clifford 束**と呼ぶ．特に，X が擬 Riemann 多様体のとき，接束 $T(X)$ の Clifford 束を X **の Clifford 束**といい，$\mathcal{C}\ell(X)$ と表す．

$\square$

【命題 5.30】 E のファイバーの計量が (p, q) 型であるとする．$P_{\mathrm{O}}(E)$ を E の正規直交基底から作られる $\mathrm{O}_{p,q}$-主束，$\mathrm{cl}(\rho_{p,q})$ を $\mathrm{O}_{p,q}$ の $\mathbb{R}^{p,q}$ への標準表現 $\rho_{p,q}$ から誘導される $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q})$ への表現

$$\mathrm{cl}(\rho_{p,q}) : \mathrm{O}_{p,q} \to \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q})$$

とする．このとき，

$$\mathcal{C}\ell(E) = P_{\mathrm{O}}(E) \times_{\mathrm{cl}(\rho_{p,q})} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q}).$$

さらに，E が向き付け可能のとき，$P_{\mathrm{SO}}(E)$ を正の向きをもつ正規直交基底の作る $\mathrm{SO}_{p,q}$-主束とすると，

$$\mathcal{C}\ell(E) = P_{\mathrm{SO}}(E) \times_{\mathrm{cl}(\rho_{p,q})} \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q}).$$

$\square$

【命題 5.31】

i) Clifford 束 $\mathcal{C}\ell(E)$ は，自然に X 上の Clifford 代数の束と見なされる．すなわち，$a, b \in \mathcal{C}\ell(E_x)$ に対して，$ab \in \mathcal{C}\ell(E_x)$ が定義され，$v, w \in E_x \subset \mathcal{C}\ell(E_x)$ に対して

$$vw + wv = -2 < v, w >$$

が成り立つ．

ii) Clifford 代数の主自己同型に対応する Clifford 束の自己同型

$$\alpha : C\ell(E) \to C\ell(E)$$

が，$\alpha(v) = -v(v \in E \subset C\ell(E))$ により定義される．α は $+1$ と -1 を固有値として持ち，その固有空間により $C\ell(E)$ は

$$C\ell(E) = C\ell^0(E) \oplus C\ell^1(E)$$

と直和分解される．

iii) $e_1, \cdots, e_n$ を E_x の正規直交基底 $(< e_i, e_j >= \eta_{ij})$ とするとき，$\phi \in C\ell(E_x)$ に

$$L(\phi) = -\sum_{i,j=1}^{n} e_i \phi e_j \eta^{ij}$$

を対応させる写像は，$C\ell(E)$ の束写像

$$L : C\ell(E) \to C\ell(E)$$

を定義する．

iv) 対応

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \in \Lambda^k E_x \mapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sign}(\sigma) v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(k)}$$

により E の外積束から Clifford 束への標準ベクトル束同型

$$\lambda : \Lambda^*(E) \xrightarrow{\cong} C\ell(E)$$

が定義される．この対応に対して，

$$\lambda(\Lambda^{\mathrm{even}} E) = C\ell^0(E), \quad \lambda(\Lambda^{\mathrm{odd}} E) = C\ell^1(E),$$
$$\lambda(\Lambda^p E) = \{\phi \in C\ell(E) \mid \alpha \circ L(\phi) = (n-2p)\phi\} \quad p = 0, \cdots, n$$

が成り立つ．

□

【命題 5.32】 多様体 X 上の向きづけられた Riemann ベクトル束 E の Riemann 接続は Clifford 束 $C\ell(E)$ の Riemann 接続を一意的に誘導し，対応する共変微分 ∇ は $\Gamma(C\ell(E))$ の作る代数に対して微分作用素として作用する：

$$\nabla(\phi \cdot \psi) = (\nabla\phi) \cdot \psi + \phi \cdot (\nabla\psi).$$

したがって，∇ の具体的作用は，E の局所基底 $e_1, \cdots, e_n$ に対する作用

$$\nabla e_i = \sum_{j=1}^{n} \omega^j{}_i \otimes e_j$$

により決定される．さらに，∇ の曲率形式を線形変換

$$R(V, W) : C\ell(E_x) \to C\ell(E_x)$$

と見なすとき，$R(V, W)$ は微分作用素として働く：

$$R(V, W)(\phi \cdot \psi) = (R(V, W)\phi) \cdot \psi + \phi \cdot (R(V, W)\psi).$$

□

5.1.4 スピノール束

【定義 5.33 (ベクトル束のスピン構造)】 E を位相空間 X 上の向きづけられた Riemann ベクトル束，$P_{\mathrm{SO}}(E)$ を E に随伴する SO_n 主束とする．このとき，$P_{\mathrm{SO}}(E)$ が各ファイバー上で非自明となる 2 価の被覆空間

$$\xi : P_{\mathrm{Spin}}(E) \to P_{\mathrm{SO}}(E)$$

を持つとき，$P_{\mathrm{Spin}}(E)$ を E **のスピン構造**という．このとき，$P_{\mathrm{Spin}}(E)$ には一意的に Spin_n 主束の構造が入り，

$$\xi(ug) = u\xi_0(g) \quad \forall u \in P_{\mathrm{Spin}}(E), \forall g \in \mathrm{Spin}_n$$

が成り立つ．ここで $\xi_0 : \mathrm{Spin}_n \to \mathrm{SO}_n$ は標準被覆写像である． □

【定理 5.34 (スピン構造の存在条件)】 空間 X 上のベクトル束 E がスピン構造を持つための必要十分条件は，E の１次および２次の Stiefel-Whitney 類がゼロ，$w_1(E) = w_2(E) = 0$，となることである．この条件が満たされるとき，E のスピン構造と $H^1(X;\mathbb{Z}_2)$ の元が一対一に対応する． □

【定義 5.35 (Riemann 多様体のスピン構造)】 向きづけられた Riemann 多様体 X に対して，その接束 $T(X)$ のスピン構造を X の**スピン構造**と呼ぶ．スピン構造が与えられた Riemann 多様体を X を**スピン多様体**という． □

【例 5.36 (スピン多様体)】 Stiefel 多様体，リー群，３次元以下の向き付け可能多様体，K3 面はスピン構造を持つ． □

【定義 5.37 (スピノール束)】 E を向きづけられた Riemann ベクトル束，$\xi : P_{\mathrm{Spin}}(E) \to P_{\mathrm{SO}}(E)$ をそのスピン構造，M を左 $C\ell(\mathbb{R}^n)$ 加群とする．このとき，$\mathrm{Spin}_n \subset C\ell^0(\mathbb{R}^n) \subset C\ell(\mathbb{R}^n)$ から誘導される Spin_n の表現

$$\mu : \mathrm{Spin}_n \to \mathrm{SO}(M)$$

により定義される，M をファイバーとする $P_{\mathrm{Spin}}(E)$ の随伴ベクトル束

$$S(E) : P_{\mathrm{Spin}}(E) \times_\mu M$$

を E の**実スピノール束** (real spinor bundle) という．また，左 $C\ell(\mathbb{C}^n)$ 加群 $M_{\mathbb{C}}$ に対して同様に定義されるベクトル束

$$S_{\mathbb{C}}(E) : P_{\mathrm{Spin}}(E) \times_\mu M_{\mathbb{C}}$$

を E の**複素スピノール束** (complex spinor bundle) という． □

【命題 5.38】 向きづけられた Riemann ベクトル束 E の Clifford 束は

$$C\ell(E) = P_{\mathrm{Spin}}(E) \times_{\mathrm{Ad}} C\ell(\mathbb{R}^n)$$

と表される．これより，スピノール束 $S(E)$ は左 $C\ell(E)$ 加群となる． □

【命題 5.39 (スピノール束の Riemann 接続)】 　向きづけられた Riemann ベクトル束 E の Riemann 接続は，スピノール束 $S(E)$ の Riemann 接続を一意的に誘導する．この接続に対して，

i) E の局所基底 $[e_1, \cdots, e_n]$ の共変微分が

$$\nabla e_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ji} \otimes e_j$$

で与えられるとき，$[e_j]$ に対応する $S(E)$ の局所基底 $[\sigma_\alpha]$ の共変微分は

$$\nabla \sigma_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i<j} \omega_{ji} e_i e_j \cdot \sigma_\alpha$$

と表される．さらに，曲率形式から誘導される変換

$$R(V, W) : S(E_x) \to S(E_x)$$

は

$$R(V, W)\sigma = \frac{1}{2} \sum_{i<j} < R(V, W)e_i, e_j > e_i e_j \sigma$$

と表される．

ii) ∇ は $S(E)$ に対して，左 $\mathcal{C}\ell(E)$ 加群の微分作用素として働く：

$$\nabla(\phi \cdot \sigma) = (\nabla \phi) \cdot \sigma + \phi \cdot (\nabla \sigma).$$

$R(V, W)$ も同様に左 $\mathcal{C}\ell(E)$ 加群の微分作用素として働く．

□

5.1.5 Dirac 作用素

【定義 5.40】 　X を Riemann 多様体，S を左 $\mathcal{C}\ell(X)$ 加群となる X 上の Riemann ベクトル束とする．S の各 Riemann 接続 ∇ に対して，

$$D\sigma := \sum_{j=1}^{n} e_j \nabla_{e_j} \sigma$$

で定義される $\Gamma(S)$ 上の一階の微分作用素

$$D : \Gamma(S) \to \Gamma(S)$$

を **Dirac 作用素**と呼ぶ．ここで，$e_1, \cdots, e_n$ は $T(X)$ の局所正規直交基底であるが，D はその取り方に依らない． □

【定義 5.41】 多様体 X 上のベクトル束 E の m 階微分作用素 $D : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ が，点 x において X の局所座標系 x_k と $A_\alpha(x) : E_x \to E_x$ を用いて

$$D = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}$$

と表されるとき，各 $\xi = \sum_k \xi_k dx_k \in T_x^*(X)$ に対して定義される線形写像 $\sigma_\xi(D) : E_x \to E_x$,

$$\sigma_\xi(D) := i^m \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x) \xi^\alpha$$

を D **の主シンボル**という．特に，任意の $\xi \neq 0$ に対して $\sigma_\xi(D)$ が常に同型写像となるとき D は**楕円型**であるという． □

【定義 5.42】 Riemann 多様体 X 上の左 $C\ell(X)$-加群束 S が次の 2 条件を満たす Riemann 計量 $<, >$ と接続 ∇ を持つとき，S を X **上の Dirac 束**という：

i) $T(X)$ の任意の単位ベクトル e は S のファイバーの等長変換を引き起こす.

$$< e\sigma_1, e\sigma_2 > = < \sigma_1, \sigma_2 > \quad \forall e \in T_x(X) \text{s.t.} < e, e > = 1, \forall \sigma_1, \sigma_2 \in S_x.$$

ii) 任意の $\phi \in \Gamma(C\ell(X))$ と $\sigma \in \Gamma(S)$ に対して，

$$\nabla(\phi \cdot \sigma) = (\nabla\phi) \cdot \sigma + \phi \cdot (\nabla\sigma).$$

□

【定理 5.43】 X を完備 Riemann 多様体，D を X 上の Dirac 束 S 上の Dirac 作用素とする．このとき D は $L^2(S)$(S の 2 乗可積分断面の作るヒルベルト空間）で唯一の自己共役な拡張を持ち，

$$\text{Ker } D = \text{Ker } D^2$$

が成り立つ．さらに，X がコンパクの時，Ker D は有限次元である．

□

5.1.6 $\mathbb{R}^n$ の擬微分作用素

【定義 5.44 (シンボル)**】** $m \in \mathbb{R}$ を一つ固定し，$p(x,\xi)$ を，行列に値を取る $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上のなめらかな関数とする．各多重指数 α, α' に対して，

$$|D_x^{\alpha} D_{\xi}^{\alpha'} p(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\alpha'}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}$$

となる定数 $C_{\alpha,\alpha'}$ が存在するとき，$p(x,\xi)$ を**階数** m **のシンボル**といい，その全体を Sym^m と表す． □

【定義 5.45 (擬微分作用素)**】** $p \in \mathrm{Sym}^m$ とする．$u(x) \in \S$($\S$ は $\mathbb{R}^n$ の急減少関数の作る Frechet 空間) に対して，

$$u(x) = (2\pi) - n/2 \int e^{i<x,\xi>} \hat{u}(\xi) d\xi,$$

に

$$Pu(x) = (2\pi) - n/2 \int e^{i<x,\xi>} p(x,\xi) \hat{u}(\xi) d\xi,$$

を対応させる写像は，線形写像 $P : \S \to \S$ となる．この写像を $\mathbb{R}^n$ **上の階数** m **の擬微分作用素**といい，その全体を ΨDO_m と表す．さらに，シンボル $p \in \mathrm{Sym}^m$ を持つ擬微分作用素 $P \in \Psi DO_m$ に対して，

$$\sigma(P) = [p] \in \mathrm{Sym}^m / \mathrm{Sym}^{m-1}$$

を P の**主シンボル**と呼ぶ． □

【定理 5.46】 擬微分作用素 $P \in \Psi DO_m, Q \in \Psi DO_l$ に対して次が成り立つ：

i) P は任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して，有界作用素 $P : L_s^2 \to L_{s-m}^2$ に一意的に拡張される．

ii) 任意の開集合 $U \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$u|_U \in C^{\infty}(U) \Rightarrow \quad Pu|_U \in C^{\infty}(U).$$

iv) $Q \circ P \in \Psi DO_{m+l}$.

v) 主シンボル $\sigma(P)$ は，$\mathbb{R}^n$ の微分同相写像に対して，$T(\mathbb{R}^n)$ 上の関数として変換する．

$\square$

【定義 5.47】 K を $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合，$P \in \Psi DO_m$ とする．任意の $u \in C_0^\infty$ に対して $\mathrm{supp}(Pu) \subset K$，かつ $\mathrm{supp} u \cap K = \emptyset$ なら常に $Pu = 0$ がなりたつとき，P を K に台を持つ擬微分作用素といい，その全体を $\Psi DO_{K,m}$ と表す． $\square$

【命題 5.48】 $\phi : U \to V$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合 U, V の間の微分同相写像とする．このとき，任意のコンパクト集合 $K \subset U$ に対して，$(\phi_* P)u = P(u \circ \phi) \circ \phi^{-1}$ は線形写像

$$\phi_* : \Psi DO_{K,m} \to \Psi DO_{\phi K,m}$$

を与える． $\square$

【定義 5.49 (無限平滑作用素)**】** 線形写像 $\tau : \S \to \S$ が任意の $s, m \in \mathbb{R}$ に対して有界線形写像 $\tau : L^2_s \to L^2_{s+m}$ に拡張されるとき，**無限平滑作用素**とよぶ．また，2つの擬微分作用素 P, Q の差が無限平滑作用素のとき，P と Q は同値であるという． $\square$

【定義 5.50 (楕円型擬微分作用素)**】** $P \in \Psi DO_m$ をシンボル p を持つ擬微分作用素とする．ある定数 $c > 0$ が存在して，$|\xi| \geq c$ となる任意の ξ に対して $p(x, \xi)$ が逆行列を持ち，かつ

$$|p(x, \xi)^{-1}| \leq c(1 + |\xi|)^{-m}$$

が成り立つとき，P を**楕円型**と定義する． $\square$

【定理 5.51】 $P \in \Psi DO_m$ を楕円型擬微分作用素とする．

i) P に対して次の式を満たす $Q \in \Psi DO_{-m}$ が同値を除いて一意的に存在する：

$$PQ = \mathrm{Id} - S', \quad QP = \mathrm{Id} - S.$$

ここで S, S' は無限平滑作用素である．

ii) $u \in L^2_s$ とする．このとき，$\mathbb{R}^n$ の任意の開集合 U に対して

$$Pu|_U \in C^\infty(U) \Rightarrow \quad u|_U \in C^\infty(U).$$

特に，$m > 0$ のとき，$Pu = \lambda u$ が $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して成り立てば $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ である．

$\square$

5.1.7　ベクトル束の擬微分作用素

【定義 5.52 (擬微分作用素)**】**

i) X を n 次元コンパクト多様体，E, F を X 上のなめらかな複素ベクトル束，$\Gamma(E), \Gamma(F)$ をそれらのなめらかな断面の作る線形空間，$L^2_s(E), L^2_s(F)$ を断面の作る Sobolev 空間とする．このとき，線形写像 $P : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ が任意の $s, m \in \mathbb{R}$ に対して有界線形写像 $P : L^m_s(E) \to L^2_{s+m}(F)$ に拡張できるとき，P を無限平滑作用素という．

ii) 線形写像 $P : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ が，適当な局所座標系でコンパクトな台をもつ擬微分作用素 $P_\alpha \in \Psi DO_m$ に一致する有限個の線形作用素と無限平滑作用素の和として表されるとき，P を階数 m の擬微分作用といい，その全体を $\Psi DO_m(E, F)$ と表す．２つの擬微分作用素は差が無限平滑作用素となるとき，同値とする．

□

【定理 5.53】　E, F, G をコンパクト多様体 X 上のベクトル束とする．このとき，擬微分作用素 $P \in \Psi DO_m(E, F), Q \in \Psi DO_l(F, G)$ に対して次が成り立つ：

i) P は任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して，有界作用素 $P : L^2_s(E) \to L^2_{s-m}(F)$ に一意的に拡張される．

ii) 任意の開集合 $U \in X$ に対して

$$u|_U \in C^\infty(U) \Rightarrow \quad Pu|_U \in C^\infty(U).$$

iv) $Q \circ P \in \Psi DO_{m+l}(E, G)$.

v) $\phi : X \to X$ を微分同相写像とする．このとき，$\phi^*[(\phi_* P)u] = P(\phi^* u)$ は線形写像

$$\phi_* : \Psi DO_m(\phi^* E, \phi^* F) \to \Psi DO_m(E, F)$$

を与える．

$\square$

【定義 5.54】　$\pi : T^*(X) \to X$ により X 上のベクトル束 E, F から誘導される $T^*(X)$ 上の束を $\pi^* E, \pi^* F$，p を $T^*(X)$ 上の束 $\mathrm{Hom}(\pi^* E, \pi^* F)$ のなめらかな断面とする．p が適当な局所座標系で Sym^m の元となるとき，p を階数 m のシンボルといい，その全体の作るベクトル空間を $\mathrm{Sym}^m(E, F)$ と表す．$\square$

【定理 5.55】　各 $P \in \Psi DO_m(E, F)$ は主シンボル $\sigma(P) \in \mathrm{Sym}^m(E, F)/\mathrm{Sym}^{m-1}(E, F)$ を定める．$\square$

【定義 5.56 (楕円型擬微分作用素)**】**　$P \in \Psi DO_m(E, F)$ に対して，$\sigma(P)$ の適当な代表元が，$T^*(X)$ のコンパクト集合の外で可逆，かつ X の適当な Riemann 計量と適当な定数 C に対して $|p(\xi)^{-1}| \leq C(1 + |\xi|)^{-m}$ を満たすとき，P は楕円型という．$\square$

【定義 5.57 (Fredholm 作用素)**】**　ヒルベルト空間の間の有界線形作用素 $T : H_1 \to H_2$ は，$\mathrm{ran}\ T$ が閉集合で $\mathrm{Ker}\ T$ および $\mathrm{Coker}\ T$ が有限次元のとき，**Fredholm 作用素**といい，その指数を

$$T) = \dim(\mathrm{Ker}\ T) - \dim(\mathrm{Coker}\ T)$$

で定義する．$\square$

【定理 5.58】　$P \in \Psi DO_m(E, F)$ をコンパクト多様体 X 上の楕円型擬微分作用素とする．このとき，次が成り立つ：

i) $Q \in \Psi DO_{-m}(E, F)$ が同値を除いて一意的に存在し，

$$PQ = \mathrm{Id} - S', \quad QP = \mathrm{Id} - S$$

が成り立つ．ここで S, S' は無限平滑作用素である．

ii) $u \in L^2_s(E)$ とする．このとき，X の任意の開集合 U に対して

$$Pu|_U \in C^\infty(U) \Rightarrow \quad u|_U \in C^\infty(U).$$

iii) 任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して，P は Fredholm 作用素 $P : L^2_s(E) \to L^2_{s-m}(E)$ に拡張される．さらに，その指数は s に依らない．

$\square$

【定理 5.59】 $P : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ をコンパクト Riemann 多様体 X 上の自己共役な m 階擬微分作用素とする．

i) $\Gamma(E)$ は $L^2(E)$ に関する直交分解

$$\Gamma(E) = \mathrm{Ker}\ P \oplus \mathrm{Im}\ P$$

を持つ．

ii) $H : \Gamma(E) \to \mathrm{Ker}\ P$ を直交射影とすると，次の性質をもつ Green 作用素と呼ばれる擬微分作用素 $Q \in \Psi DO_{-m}(E)$ が存在する：

$$PG = GP = \mathrm{Id} - H.$$

iii) $m > 0$ のとき，P の固有値 λ は離散的ですべて実数である．また，各固有空間 E_λ は有限次元で，なめらかな断面からなる．

$$d(\Lambda) := \dim \left(\bigoplus_{|\lambda| \leq \Lambda} E_\lambda \right)$$

とおくと，

$$d(\Lambda) \leq c\Lambda^{n(n+2m+2)/2m}$$

を満たす定数 c が存在する．さらに，$\{E_\lambda\}$ は $L^2(E)$ の完全系となる．

$\square$

5.1.8 Atiyah-Singer 指数定理

5.1.8.1 整数型指数定理

【定理 5.60】 $\mathscr{F} = \mathscr{F}(H_1, H_2)$ をノルム位相をもつ Fredholm 作用素の空間とする．このとき，写像 $\mathscr{F} \to \mathbb{Z}$ は $\mathscr{F}$ の各連結成分で一定となり，一対一対応

$$\pi_0(\mathscr{F}) \to \mathbb{Z}$$

を与える． $\square$

【定理 5.61】 コンパクト多様体上のベクトル束に対する楕円型擬微分作用素 P の指数 $P)$ は，その主シンボル $\sigma(P)$ の正則ホモトピー類にのみ依存する． □

【定義 5.62 (位相的指数)**】** コンパクト多様体 X 上の複素ベクトル束 E から F への楕円型擬微分作用素 $P : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ を考える．接束 TX の球体部分束 DX を適当にとると，主シンボル $\sigma(P)$ は $\partial DX = SX$ 上の各点で E から F への同型写像を与える．したがって，$\sigma(P)$ は $K_{\mathrm{cpt}}(TX)$ の元を定義する：

$$\boldsymbol{\sigma}(P) := [\pi^*E, \pi^*F; \sigma(P)] \in K_{\mathrm{cpt}}(TX) \cong K(DX, SX).$$

X の適当な埋め込み $f : X \to \mathbb{R}^N$ は，X の $\mathbb{R}^N$ での管状近傍 N への埋め込み $f : X \to N$ から誘導される Thom 同型 $K_{\mathrm{cpt}}(TX) \to K_{\mathrm{cpt}}(TN)$ と自然な準同型 $i_! : K_{\mathrm{cpt}}(TN) \to K_{\mathrm{cpt}}(T\mathbb{R}^N)$ の結合により，準同型

$$f_! : K_{\mathrm{cpt}}(TX) \to K_{\mathrm{cpt}}(T\mathbb{R}^N)$$

を定める．さらに，$T\mathbb{R}^N$ を原点 pt の複素ベクトル束と見なして得られる Thom 同型を

$$q_! : K_{\mathrm{cpt}}(K\mathbb{R}^n) \to K(pt) \cong ZR$$

とする．これらを用いて，P **の位相的指数** $\mathrm{top} - \mathrm{index}(P)$ を次のように定義する：

$$\mathrm{top} - \mathrm{index}(P) := q_! f_! \boldsymbol{\sigma}(P) \in \mathbb{Z}.$$

□

【定理 5.63 (整数型 Atiyah-Singer 指数定理)**】** n 次元コンパクト多様体 X 上の楕円型作用素 P に対して，次が成り立つ：

i)

$$P) = \mathrm{top} - \mathrm{index}(P).$$

ii)

$$P = (-1)^n\{\mathrm{ch}(\boldsymbol{\sigma}(P)) \cdot \pi^* \hat{\boldsymbol{A}}(X)^2\}[TX].$$

iii) X が向きづけられているとき，

$$P = (-1)^{n(n+1)/2}\{\pi_!\mathrm{ch}(\boldsymbol{\sigma}(P)) \cdot \hat{\boldsymbol{A}}(X)^2\}[X].$$

$\square$

【例 5.64 (Euler 特性数)**】**　X をコンパクト Riemann 多様体，S をその Clifford 束とする：

$$S = C\ell(X) = C\ell^0(X) \oplus C\ell^1(X).$$

このとき，$C\ell(X)$ の Dirac 作用素は楕円型微分作用素

$$D^0 : \Gamma(C\ell^0(X)) \to \Gamma(C\ell^1(X))$$

を与え，

$$d + d^* : \Gamma(\Lambda^{\mathrm{even}}(X)) \to \Gamma(\Lambda^{\mathrm{odd}}(X))$$

と一致する．この作用素の指数は，$\boldsymbol{H}^*$ を調和微分形式の次数付き加群として，

$$D^0 = \dim \boldsymbol{H}^{\mathrm{even}} - \dim \boldsymbol{H}^{\mathrm{odd}} = \chi(X)$$

となる．$\square$

【例 5.65 (符号数作用素)**】**　X を $4k$ 次元のコンパクトで向きづけられた Riemann 多様体とし，その Clifford 束の（体積要素 $\omega_{\mathbb{C}} = (-1)^k\omega$ による）カイラル分解を

$$S = C\ell(X) = C\ell^+(X) \oplus C\ell^-(X)$$

とおく．このとき，Dirac 束 $C\ell(X)$ の Dirac 作用素は，擬微分作用素

$$D^+ : \Gamma(C\ell^+(X)) \to \Gamma(C\ell^-(X))$$

を誘導し，その指数は X の符号数（$H^{2k}(X;\mathbb{R})$ のカップ積から誘導される対称 2 次形式の符号数）と一致する：

$$D^+ = \dim(\boldsymbol{H}^{2k})^+ - \dim(\boldsymbol{H}^{2k})^- = \mathrm{sig}(X).$$

Atiyah-Singer の指数定理より，これはさらに L 種数と一致する：

$$L(X) = \mathrm{sig}(X).$$

一般に，E を $2m$ 次元の向きづけられたコンパクト多様体 X 上の勝手な複素ベクトル束とすると，楕円型作用素

$$D_E^+ : \Gamma(\mathcal{C}\ell^+(X) \otimes E) \to \Gamma(\mathcal{C}\ell^-(X) \otimes E)$$

に対して，

$$(D_E^+) = \{\mathrm{ch}_2(E) \cdot \boldsymbol{L}(X)\}[X]$$

が成り立つ．ここで，

$$\mathrm{ch}_2(E) := \sum_k 2^k \mathrm{ch}^k E.$$

□

【例 5.66 (Atiyah-Singer $\hat{A}$ 作用素)**】** X を $2m$ 次元のコンパクト Riemann スピン多様体として，その複素スピノール束 $\not{S}_{\mathbb{C}}$ とその上の Dirac 作用素 D を考える．複素体積要素による $\not{S}_{\mathbb{C}}$ のカイラル分解 $\not{S}_{\mathbb{C}} = \not{S}_{\mathbb{C}}^+ \oplus \not{S}_{\mathbb{C}}^-$ は楕円型微分作用素

$$\not{D}^+ : \Gamma(\not{S}_{\mathbb{C}}^+) \to \Gamma(\not{S}_{\mathbb{C}}^-)$$

を与える．その指数は X の $\hat{A}$ 種数と一致する：

$$(\not{D}^+) = \hat{A}(X).$$

さらに，一般に，E を X 上の勝手な複素ベクトル束とするとき，楕円型作用素

$$\not{D}_E^+ : \Gamma(\not{S}_{\mathbb{C}}^+(X) \otimes E) \to \Gamma(\not{S}_{\mathbb{C}}^-(X) \otimes E)$$

に対して，

$$(\not{D}_E^+) = \{\mathrm{ch}(E) \cdot \hat{\boldsymbol{A}}(X)\}[X].$$

□

目次へ

5.1.8.2　楕円型作用素の族

参考文献

[1] D. Husemoller: *Fibre Bundles*, 3rd edition (Springer, 1993).

[2] H.B. Lawson, Jr. and M-L. Michelsohn: *Spin Geometry* (Princeton Univ. Press, 1989).

6　特性類

[LastUpdate: 2005.12.30]

6.1　分類空間

6.1.1　実ベクトルバンドル

【**定義 6.1** (実 Grassmann 多様体)】

1) $\mathbb{R}^{n+k}$ の n 枠 (n 個の一次独立なベクトル列) 全体の集合を $V_{n,k} = V_n(\mathbb{R}^{n+k})$ とおく．$V_{n,k} \subset \mathbb{R}^{n(n+k)}$ と見なして，$V_{n,k}$ に $\mathbb{R}^{n(n+k)}$ からの誘導位相を与えた空間を *Stiefel* 多様体という．$V_{n,k}$ は C^∞ 級 $n(n+k)$ 次元開多様体である．$V_{n,k}$ と $V_{k,n}$ は C^∞ 同相である．

2) $\mathbb{R}^{n+k}$ の n 次元線形部分空間の集合を $G_{n,k} = G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ とおく．自然な射影 $\pi : V_{n,k} \to G_{n,k}$ が連続となる極大位相を $G_{n,k}$ に入れて得られる空間は，コンパクトな nk 次元多様体となる．この多様体を実 *Grassmann* 多様体という．$G_{n,k}$ と $G_{k,n}$ は C^∞ 同相である．

3) 空間
$$E(\gamma_k^n) = \left\{(P, v) \,\middle|\, P \in G_{n,k}, v \in P \subset \mathbb{R}^{n+k}\right\}$$
（位相は誘導位相）に対して，
$$\pi : E(\gamma_k^n) \ni (P, v) \mapsto P \in G_{n,k}$$
とおくと，$\gamma_k^n = (E(\gamma_k^n), G_{n,k}, \pi)$ は $G_{n,k}$ 上の n 次元実ベクトルバンドルとなる．これを $G_{n,k}$ を底空間とする n 次元標準ベクトルバンドルという．

目次へ

4) 標準的な入射 $\mathbb{R}^{n+k} \subset \mathbb{R}^{n+k+1}$ から誘導される入射 $G_{n,k} \subset G_{n,k+1}$ に関して，$(G_{n,k})_{k\geq 0}$ は帰納系をなす．この帰納的極限を $G_n = G_{n,\infty} = G_n(\mathbb{R}^\infty)$ と表し，無限次元実 *Grassmann* 多様体という．また，自然な入射 $\gamma_k^n \subset \gamma_{k+1}^n$ の帰納的極限を γ^n とおく．このとき，

$$E(\gamma^n) = \{(P, v) \mid P \in G_n, v \in P \subset \mathbb{R}^\infty\} \subset G_n \times \mathbb{R}^\infty$$

が成り立つ．

□

【定義 6.2 (有向実 Grassmann 多様体)**】**

1) $\mathbb{R}^{n+k}$ の向きづけられた n 次元線形部分空間の集合を $\tilde{G}_{n,k} = \tilde{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ とおく．自然な射影 $\pi : V_{n,k} \to \tilde{G}_{n,k}$ が連続となる極大位相を $\tilde{G}_{n,k}$ に入れて得られる空間は，コンパクトな nk 次元多様体となる．この多様体を有向実 *Grassmann* 多様体という．$\tilde{G}_{n,k}$ と $\tilde{G}_{k,n}$ は C^∞ 同相である．また，$\tilde{G}_{n,k}$ は $G_{n,k}$ の連結な 2 価の被覆空間である．

2) 空間

$$E(\tilde{\gamma}_k^n) = \left\{(P, v) \,\middle|\, P \in \tilde{G}_{n,k}, v \in P \subset \mathbb{R}^{n+k}\right\}$$

（位相は誘導位相）に対して，

$$\pi : E(\tilde{\gamma}_k^n) \ni (P, v) \mapsto P \in \tilde{G}_{n,k}$$

とおくと，$\tilde{\gamma}_k^n = (E(\tilde{\gamma}_k^n), \tilde{G}_{n,k}, \pi)$ は $\tilde{G}_{n,k}$ 上の n 次元実ベクトルバンドルとなる．これを $\tilde{G}_{n,k}$ を底空間とする n 次元標準ベクトルバンドルという．

3) $(\tilde{G}_{n,k})_{k\geq 0}$ は帰納系をなす．この帰納的極限を $\tilde{G}_n = \tilde{G}_{n,\infty} = \tilde{G}_n(\mathbb{R}^\infty)$ と表し，無限次元有向実 *Grassmann* 多様体という．また，自然な入射 $\tilde{\gamma}_k^n \subset \tilde{\gamma}_{k+1}^n$ の帰納的極限を $\tilde{\gamma}^n$ とおく．このとき，

$$E(\tilde{\gamma}^n) = \left\{(P, v) \,\middle|\, P \in \tilde{G}_n, v \in P \subset \mathbb{R}^\infty\right\} \subset \tilde{G}_n \times \mathbb{R}^\infty$$

が成り立つ．

$\square$

【**定理 6.3** (実ベクトルバンドルの分類空間)】

1) $\xi^n = (E, B, \pi)$ をパラコンパクト Hausdorff 空間 B 上の n 次元実ベクトルバンドルとする．このとき，連続写像 $f: B \to G_n$ が存在し，$\xi^n \cong f^*\gamma^n$ となる．さらに，この対応により，B 上の n 次元実ベクトルバンドルの同型類と B から G_n への連続写像のホモトピー類が１対１に対応する．したがって，G_n はパラコンパクト Hausdorff 空間上の n 次元実ベクトルバンドルに対する分類空間，γ^n は普遍バンドルとなる．

2) 全く同様に，$\tilde{G}_n$ はパラコンパクト Hausdorff 空間上の向き付けられた n 次元実ベクトルバンドルに対する分類空間，$\tilde{\gamma}^n$ はその普遍バンドルとなる．

$\square$

6.1.2 複素ベクトルバンドル

【**定義 6.4** (複素 Grassmann 多様体)】

1) $\mathbb{C}^{n+k}$ の n 枠 (n 個の複素一次独立なベクトル列) 全体の集合を $V^{\mathbb{C}}_{n,k} = V_n(\mathbb{C}^{n+k})$ とおく．$V^{\mathbb{C}}_{n,k} \subset \mathbb{C}^{n(n+k)}$ と見なして，$V^{\mathbb{C}}_{n,k}$ に $\mathbb{C}^{n(n+k)}$ からの誘導位相を与えた空間を複素 *Stiefel* 多様体という．$V^{\mathbb{C}}_{n,k}$ は C^∞ 級 $2n(n+k)$ 次元開多様体である．$V^{\mathbb{C}}_{n,k}$ と $V^{\mathbb{C}}_{k,n}$ は C^∞ 同相である．

2) $\mathbb{C}^{n+k}$ の複素 n 次元線形部分空間の集合を $G^{\mathbb{C}}_{n,k} = G_n(\mathbb{C}^{n+k})$ とおく．自然な射影 $\pi: V^{\mathbb{C}}_{n,k} \to G^{\mathbb{C}}_{n,k}$ が連続となる極大位相を $G^{\mathbb{C}}_{n,k}$ に入れて得られる空間は，コンパクトな $2nk$ 次元多様体となる．この多様体を複素 *Grassmann* 多様体という．$G^{\mathbb{C}}_{n,k}$ と $G^{\mathbb{C}}_{k,n}$ は C^∞ 同相である．

3) 空間
$$E(\gamma_k^{n,\mathbb{C}}) = \left\{(P,v) \,\middle|\, P \in G_{n,k}^{\mathbb{C}}, v \in P \subset \mathbb{C}^{n+k}\right\}$$
（位相は誘導位相）に対して，
$$\pi : E(\gamma_k^{n,\mathbb{C}}) \ni (P,v) \mapsto P \in G_{n,k}^{\mathbb{C}}$$
とおくと，$\gamma_k^{n,\mathbb{C}} = (E(\gamma_k^{n,\mathbb{C}}), G_{n,k}^{\mathbb{C}}, \pi)$ は $G_{n,k}^{\mathbb{C}}$ 上の n 次元複素ベクトルバンドルとなる．これを $G_{n,k}^{\mathbb{C}}$ を底空間とする n 次元標準複素ベクトルバンドルという．

4) 標準的な入射 $\mathbb{C}^{n+k} \subset \mathbb{C}^{n+k+1}$ から誘導される入射 $G_{n,k}^{\mathbb{C}} \subset G_{n,k+1}^{\mathbb{C}}$ に関して，$(G_{n,k}^{\mathbb{C}})_{k\geq 0}$ は帰納系をなす．この帰納的極限を $G_n^{\mathbb{C}} = G_{n,\infty}^{\mathbb{C}} = G_n(\mathbb{C}^\infty)$ と表し，無限次元複素 *Grassmann* 多様体という．また，自然な入射 $\gamma_k^{n,\mathbb{C}} \subset \gamma_{k+1}^{n,\mathbb{C}}$ の帰納的極限を $\gamma^{n,\mathbb{C}}$ とおく．このとき，
$$E(\gamma^{n,\mathbb{C}}) = \left\{(P,v) \,\middle|\, P \in G_n^{\mathbb{C}}, v \in P \subset \mathbb{C}^\infty\right\} \subset G_n^{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^\infty$$
が成り立つ．

□

【定理 6.5 (複素ベクトルバンドルの分類空間)**】** $\omega^n = (E, B, \pi)$ をパラコンパクト Hausdorff 空間 B 上の n 次元複素ベクトルバンドルとする．このとき，連続写像 $f : B \to G_n^{\mathbb{C}}$ が存在し，$\omega^n \cong f^*\gamma^{n,\mathbb{C}}$ となる．さらに，この対応により，B 上の n 次元複素ベクトルバンドルの同型類と B から $G_n^{\mathbb{C}}$ への連続写像のホモトピー類が 1 対 1 に対応する．したがって，$G_n^{\mathbb{C}}$ はパラコンパクト Hausdorff 空間上の n 次元複素ベクトルバンドルに対する分類空間，$\gamma^{n,\mathbb{C}}$ は普遍バンドルとなる． □

6.1.3 分類空間の位相

【定理 6.6 (コホモロジー環)**】**

1) $c_1, \cdots, c_n$ を無限次元複素 Grassmann 多様体 $G_n(\mathbb{C}^\infty)$ の Chern 類とするとき，

$$H^*(BU(n)) = H^*(BGL(n,\mathbb{C})) = \mathbb{Z}[c_1, \cdots, c_n], \tag{12}$$
$$H^*(BSU(n)) = H^*(BSL(n,\mathbb{C})) = \mathbb{Z}[c_2, \cdots, c_n]. \tag{13}$$

2) $q_1, \cdots, q_n$ をシンプレクティック Pontryagin 類とするとき，

$$H^*(BSp(n)) = \mathbb{Z}[q_1, \cdots, q_n]. \tag{14}$$

3) $w_1, \cdots, w_n$ を Stiefel-Whitney 類，$p_1, \cdots, p_n$ を Pontryagin 類，e を Euler 類，K_2 を標数 2 の体，K は標数が 2 でない体とするとき，

$$H^*(BO(n); K_2) = H^*(BGL(n,\mathbb{R}); \mathbb{Z}_2) = K_2[w_1, \cdots, w_n], \tag{15}$$
$$H^*(BSO(n); K_2) = H^*(BSL(n,\mathbb{R}); \mathbb{Z}_2) = K_2[w_2, \cdots, w_n], \tag{16}$$
$$H^*(BSO(2m+1); K) = K[p_1, \cdots, p_m], \tag{17}$$
$$H^*(BSO(2m); K) = K[p_1, \cdots, p_{m-1}, e]. \tag{18}$$

□

6.2 ベクトルバンドル

6.2.1 Poincaré-Hopf の定理

【定義 6.7 (ベクトル場の指数)**】** n 次元 C^∞ 多様体 M 上の C^∞ ベクトル場を X とする．

1) X が開集合 U において点 p に孤立した零点をもつとする．U におけるベクトル場の基底 $e_a = (e_1, \cdots, e_n)$ を一つ取ると，e_a は M の接バンドル $T(M)$ の U における自明化 $(\pi, \pi') : T(U) \to U \times T_p(M)$ を与える．このとき，p を含む球体 D^n と同相な領域 $V(\subset U)$ を取ると，X により定まる V 上の $T(M)$ の切断は，π' との合成により，写像 $g : (V, V-p) \to (T_p(M), T_p(M)-p)$ を定める（$p \in M$ を $T_p(M)$ のゼロベクトルと同一視する）．g から誘導される写像

$$g_* : H_n(V, V-p) \to H_n(T_p(M), T_p(M)-p)$$

は，e_a や V の取り方に依存しない．また，局所座標系を用いると，$H_n(V, V-p) \cong H_{n-1}(\partial V) \cong \mathbb{Z}$ の生成元 u_n（すなわち U の向き）は，$H_n(T_p(M), T_p(M)-p) \cong \mathbb{Z}$ の生成元 u'_n（すなわち $T_p(M)$ の向き）を定める．そこで，X の点 p における指数 $\mathrm{Ind}(X,p)$ を

$$g_* u_n = \mathrm{Ind}(X,p)\, u'_n$$

により定義する．

2) X が M 上で有限個の孤立したゼロ点 $p_1, \cdots, p_k$ を持つとき，X の指数 $\mathrm{Ind}(X)$ を

$$\mathrm{Ind}(X) = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Ind}(X, p_j)$$

により定義する．

□

【定理 6.8 (Poincaé-Hopf)**】** M をコンパクトな n 次元 C^∞ 多様体とし，X を M 上の C^∞ ベクトル場でその零点は有限個であり，$\partial M \neq \emptyset$ のときには，i) X の零点は $M - \partial M$ に含まれる，ii) X は ∂M では外向きであるという 2 条件を満たすとする．このとき，

$$\mathrm{Ind}(X) = \chi(M).$$

□

Proof. 概要 [田村一郎著「微分位相幾何学」(岩波書店，1992)]

1) M が $\mathbb{R}^n$ の n 次元部分多様体 U であるとする．∂U の外向き法ベクトル W により Gauss 写像

$$g : \partial U \ni p \to W_p/\|W_p\| \in S^{n-1}$$

を定義するとき，

$$g_* : H_{n-1}(\partial U) \to H_{n-1}(S^{n-1})$$

に対して

$$g_*[\partial U] = \mathrm{Ind}(X)[S^{n-1}]$$

が成り立つ．すなわち，$\mathrm{Ind}(X)$ は U（の形）のみで決まる．

2) 一般の M に対して，M を $\mathbb{R}^m$ に埋め込む．このとき，M の $\mathbb{R}^m$ における法近傍 $N(M)$ において，次の条件を満たすベクトル場 Y が存在する．

   i) Y は M 上で X と一致し，$N(M) - M$ に零点を持たない．

   ii) Y は $\partial N(M)$ において外向きの接ベクトルである．

   iii) X の各零点 p_j において，$\mathrm{Ind}(X, p_j) = \mathrm{Ind}(Y, p_j)$ が成り立つ．

3) ３つ組 $(M; \emptyset, \partial M)$ に適合した Morse 関数 f から（適当な Riemann 計量を用いて）定義されるベクトル場 ∇f に対して，

$$\mathrm{Ind}(\nabla f) = \chi(M)$$

が成り立つ．

4) 1) より，2) における $\mathrm{Ind}(X) = \mathrm{Ind}(Y)$ は法近傍 $N(M)$ の形態にのみ依存し，X によらない．したがって，3) より $\mathrm{Ind}(X) = \chi(X)$ となる．

□

6.2.2 Euler 類と Thom 同型

【定義 6.9】 $\xi = (E, B, \pi)$ を n 次元ベクトルバンドルとする．B を ξ のゼロ切断と同一視して，$E - B$ を ξ の部分バンドルと見なし $\xi_0 = (E_0, B, \pi)$ と表す． □

【定理 6.10 (Thom 類と Thom 同型)**】** $\xi = (E, B, \pi)$ を向きが与えられた n 次元ベクトルバンドルとし，

$$j_b : F = \mathbb{R}^n \to F_b = \pi^{-1}(b) \subset E$$

を F の標準的向きを F_b の向きに写す同型写像，$U \in H^n(F, F_0; \mathbb{Z})$ を F の標準の向きを表す $H_n(F, F_0; \mathbb{Z})$ の生成元に対する双対コホモロジー類とする．このとき，(E, E_0) の整係数コホモロジー群 $H^*(E, E_0; \mathbb{Z})$ およびカップ積 $\smile: H^*(E; \mathbb{Z}) \otimes H^*(E, E_0; \mathbb{Z}) \to H^*(E, E_0; \mathbb{Z})$ に対して，次の命題が成り立つ：

i) $H^i(E, E_0; \mathbb{Z}) = 0$ $(i < n)$.

ii) $H^n(E, E_0; \mathbb{Z})$ の元 $U(\xi)$ で，任意の $b \in B$ に対して，

$$j_b^*(U(\xi)) = U$$

を満たすものが一意的に存在する．$U(\xi)$ を ξ の *Thom* 類ないし基本コホモロジー類という．

iii) 写像

$$\phi : H^i(B; \mathbb{Z}) \ni \alpha \to \phi(\alpha) = \pi^*(\alpha) \smile U(\xi) \in H^{i+n}(E, E_0; \mathbb{Z})$$

は同型である．この同型写像を *Thom* 同型という．

iv) Thom 類はバンドル写像に対して自然性をもつ．すなわち，２つの向きの与えられた n 次元ベクトルバンドル $\xi = (E, B, \pi), \xi' = (E', B', \pi')$ の間の向きを保つバンドル写像 $\tilde{f} : \xi \to \xi'$ に対して，$f : B \to B'$ を対応する底空間の写像とするとき，

$$U(\xi) = U(f^{-1}\xi') = \tilde{f}^*(U(\xi'))$$

が成り立つ．

□

【定義 6.11 (Euler 類)**】** $\xi = (E, B, \pi)$ を向き付けられた n 次元ベクトルバンドルとする．ξ の Thom 類 $U(\xi)$ と $j : (E, \emptyset) \subset (E, E_0)$ を用いて

$$e(\xi) = (\pi^*)^{-1} \circ j^*(U(\xi)) \in H^n(B; \mathbb{Z})$$

により定義されるコホモロジー類を ξ の *Euler* 類という． □

【定理 6.12 (Gysin 完全系列)**】** $\xi = (E, B, \pi)$ を向き付けられた n 次元ベクトルバンドルとする．このとき，空間対 (E, E_0) に対するコホモロジー完全系列

$$\cdots \to H^{q-1}(E_0) \xrightarrow{\delta^*} H^q(E, E_0) \xrightarrow{j^*} H^q(E) \xrightarrow{i^*} H^q(E_0) \to \cdots$$

および Thom 同型より次の *(Thom-)Gysin* の完全系列が成り立つ：

$$\cdots \to H^{q-1}(E_0; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\phi^{-1}\delta^*} H^{q-n}(B; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\smile e(\xi)} H^q(B; \mathbb{Z}) \xrightarrow{(\pi|_{E_0})^*} H^q(E_0; \mathbb{Z}) \to \cdots .$$

□

【定理 6.13 (Euler 類の性質)**】** $\xi = (E, B, \pi), \xi' = (E', B', \pi')$ を向き付けられた n 次元ベクトルバンドルとする．このとき，次の命題が成り立つ．

i) Euler 類はバンドル写像に対して自然性をもつ．すなわち，$f : B' \to B$ を任意の連続写像，$f^{-1}\xi$ を B' 上の誘導バンドルとするとき，

$$e(f^{-1}\xi) = f^*(e(\xi)).$$

ii) $e(\xi) = \phi^{-1}(U(\xi) \smile U(\xi))$.

iii) ξ の向きを逆にしたベクトルバンドルを ξ^- とするとき，

$$e(\xi^-) = -e(\xi).$$

iv) n が奇数の時，

$$2e(\xi) = 0.$$

v) ξ が至る所ゼロでない切断をもてば，$e(\xi) = 0$.

vi) ξ と ξ' の積バンドル $\xi \times \xi' = (E \times E', B \times B', \pi \times \pi')$ の向きを $j_b \times j'_{b'} : F \times F' \to \pi^{-1}(b) \times \pi'^{-1}(b')$ が正の向きとなるように定める．このとき，

$$e(\xi \times \xi') = e(\xi) \times e(\xi'),$$
$$e(\xi \oplus \xi') = e(\xi) \smile e(\xi').$$

□

【定理 6.14 (多様体の Euler 類)**】** M^n を向きの与えられた n 次元 C^∞ 多様体とする．このとき，M^n の接バンドルの Euler 類を M^n の Euler 類という：

$$e(M^n) = e(\tau(M^n)).$$

特に，M^n が閉多様体のとき，$\chi(M^n)$ を M^n の Euler 数，$[M^n]$ を M^n の基本ホモロジー類とするとき，

$$\chi(M^n) = \langle e(M^n), [M^n] \rangle$$

が成り立つ． □

【**定理 6.15** (法バンドルのEuler類)】　向き付け可能なn次元C^∞多様体M^nが$n+k$次元Euclid空間$\mathbb{R}^{n+k}$の閉集合として埋め込まれているとき，M^nの向きの与えられた法バンドルν^kに対して$e(\nu^k)=0$が成り立つ．　□

【**定理 6.16** ($\mathbb{C}P^n$の整係数コホモロジー環)】

i) $\gamma^{1,\mathbb{C}}=(E(\gamma^{1,\mathbb{C}}),\mathbb{C}P^\infty,\pi)$のEuler類を$\alpha\in H^2(\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Z})$とするとき，

$$H^*(\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Z})=\mathbb{Z}[\alpha].$$

ii) $\gamma_k^{1,\mathbb{C}}\subset\gamma^{1,\mathbb{C}}$に対応する包含写像$\iota:\mathbb{C}P^k\subset\mathbb{C}P^\infty$に対して，

$$H^*(\mathbb{C}P^k;\mathbb{Z})=\mathbb{Z}[\iota^*(\alpha)]/(\iota^*(\alpha)^{k+1}=0).$$

□

6.2.3　$\mathbb{Z}_2$-Euler 類と Thom 同型

【**定理 6.17** (Thom類とThom同型)】　$\xi=(E,B,\pi)$をn次元ベクトルバンドルとし，

$$j_b':F=\mathbb{R}^n\to F_b=\pi^{-1}(b)\subset E$$

を同型写像，U'を$H^n(F,F_0;\mathbb{Z}_2)$の生成元とする．このとき，(E,E_0)の$\mathbb{Z}_2$係数コホモロジー群$H^*(E,E_0;\mathbb{Z}_2)$およびカップ積$\smile: H^*(E;\mathbb{Z}_2)\otimes H^*(E,E_0;\mathbb{Z}_2)\to H^*(E,E_0;\mathbb{Z}_2)$に対して，次の命題が成り立つ：

i) $H^i(E,E_0;\mathbb{Z}_2)=0\ (i<n)$.

ii) $H^n(E,E_0;\mathbb{Z}_2)$の元$U'(\xi)$で，任意の$b\in B$に対して，

$$j_b^*(U'(\xi))=U'$$

を満たすものが一意的に存在する．$U'(\xi)$をξの$\mathbb{Z}_2$-*Thom*類ないし$\mathbb{Z}_2$基本コホモロジー類という．

iii) 写像

$$\phi : H^i(B;\mathbb{Z}_2) \ni \alpha \to \phi(\alpha) = \pi^*(\alpha) \smile U'(\xi) \in H^{i+n}(E, E_0;\mathbb{Z}_2)$$

は同型である．この同型写像を $\mathbb{Z}_2$-*Thom* 同型という．

iv) $\mathbb{Z}_2$-Thom 類はバンドル写像に対して自然性をもつ．すなわち，2つ n 次元ベクトルバンドル $\xi = (E, B, \pi), \xi' = (E', B', \pi')$ の間のバンドル写像 $\tilde{f} : \xi \to \xi'$ に対して，$f : B \to B'$ を対応する底空間の写像とするとき，

$$U'(\xi) = U'(f^{-1}\xi') = \tilde{f}^*(U'(\xi'))$$

が成り立つ．

□

【定義 6.18 ($\mathbb{Z}_2$-Euler 類)**】** $\xi = (E, B, \pi)$ を n 次元ベクトルバンドルとする．ξ の $\mathbb{Z}_2$-Thom 類 $U'(\xi)$ と $j : (E, \emptyset) \subset (E, E_0)$ を用いて

$$e'(\xi) = (\pi^*)^{-1} \circ j^*(U'(\xi)) \in H^n(B;\mathbb{Z}_2)$$

により定義されるコホモロジー類を ξ の $\mathbb{Z}_2$-*Euler* 類という． □

【定理 6.19 (Gysin 完全系列)**】** $\xi = (E, B, \pi)$ を n 次元ベクトルバンドルとする．このとき，空間対 (E, E_0) に対するコホモロジー完全系列

$$\cdots \to H^{q-1}(E_0) \xrightarrow{\delta^*} H^q(E, E_0) \xrightarrow{j^*} H^q(E) \xrightarrow{i^*} H^q(E_0) \to \cdots$$

および Thom 同型より次の *(Thom-)Gysin* の完全系列が成り立つ：

$$\cdots \to H^{q-1}(E_0;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\phi^{-1}\delta^*} H^{q-n}(B;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\smile e'(\xi)} H^q(B;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{(\pi|_{E_0})^*} H^q(E_0;\mathbb{Z}_2) \to \cdots .$$

□

【定理 6.20 ($\mathbb{Z}_2$-Euler 類の性質)**】** $\xi = (E, B, \pi), \xi' = (E', B', \pi')$ を n 次元ベクトルバンドルとする．このとき，次の命題が成り立つ．

i) $\mathbb{Z}_2$-Euler 類はバンドル写像に対して自然性をもつ．すなわち，$f: B' \to B$ を任意の連続写像，$f^{-1}\xi$ を B' 上の誘導バンドルとするとき，

$$e'(f^{-1}\xi) = f^*(e'(\xi)).$$

ii) $e'(\xi) = \phi^{-1}(U'(\xi) \smile U'(\xi))$.

iii) ξ が至る所ゼロでない切断をもてば，$e'(\xi) = 0$.

iv)

$$e'(\xi \times \xi') = e'(\xi) \times e'(\xi'),$$
$$e'(\xi \oplus \xi') = e'(\xi) \smile e'(\xi').$$

$\square$

【定理 6.21 (多様体の $\mathbb{Z}_2$-Euler 類)**】** M^n を n 次元 C^∞ 多様体とする．このとき，M^n の接バンドルの $\mathbb{Z}_2$-Euler 類を M^n の $\mathbb{Z}_2$-Euler 類という：

$$e'(M^n) = e'(\tau(M^n)).$$

特に，M^n が閉多様体のとき，$\chi(M^n)$ を M^n の Euler 数，$[M^n]'$ を M^n の $\mathbb{Z}_2$ 基本ホモロジー類とするとき，

$$\chi(M^n) \equiv \langle e'(M^n), [M^n]' \rangle \ \mathrm{mod} 2$$

が成り立つ． $\square$

【定理 6.22 ($\mathbb{R}P^n$ の $\mathbb{Z}_2$ 係数コホモロジー環)**】**

i) $\gamma^1 = (E(\gamma^1), \mathbb{R}P^\infty, \pi)$ の $\mathbb{Z}_2$-Euler 類を $\hat{\alpha} \in H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2)$ とするとき，

$$H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[\hat{\alpha}].$$

ii) $\gamma^1_k \subset \gamma^1$ に対応する包含写像 $\iota: \mathbb{R}P^k \subset \mathbb{R}P^\infty$ に対して，

$$H^*(\mathbb{R}P^k; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[\iota^*(\hat{\alpha})]/(\iota^*(\hat{\alpha})^{k+1} = 0).$$

□

【**定理 6.23** (法バンドルの $\mathbb{Z}_2$-Euler 類)】 n 次元 C^∞ 多様体 M^n が $n+k$ 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^{n+k}$ の閉集合として埋め込まれているとき, M^n の法バンドル ν^k に対して $e'(\nu^k)=0$ が成り立つ. □

6.2.4 Stiefel-Whitney 類

【**定義 6.24** (Stiefel-Whitney 類の公理)】 次の５つの公理を満たす, パラコンパクト Hausdorff 空間を底空間とするベクトルバンドルに対する特性類を *Stiefel-Whitney* 類という.

(**SW I**) 各ベクトルバンドル $\xi=(E(\xi),B(\xi),\pi)$ に対して，コホモロジー類の列

$$w_i(\xi)\in H^i(B(\xi);\mathbb{Z}_2)\ (i=0,1,2,\cdots)$$

が対応する．ただし，$w_0(\xi)=1\in H^0(B(\xi);\mathbb{Z}_2)$ で，ξ が n 次元ベクトルバンドルの時，$w_i(\xi)=0(i>n)$．$w_i(\xi)$ を ξ の i 次 Stiefel-Whitney 類,

$$w(\xi)=1+w_1(\xi)+w_2(\xi)+\cdots\in H^*(B(\xi);\mathbb{Z}_2)$$

を全 Stiefel-Whitney 類という.

(**SW II**) (自然性）$\tilde{f}:\xi\to\eta$ をバンドル写像，$f:B(\xi)\to B(\eta)$ を $\tilde{f}$ が定める底空間の間の写像とするとき,

$$w(\xi)=f^*(w(\eta)).$$

(**SW III**) (Whitney 積）ξ と ξ' が同じ底空間上のベクトルバンドルの時,

$$w(\xi\oplus\xi')=w(\xi)\smile w(\xi').$$

(**SW IV**) $G_{1,1}=\mathbb{R}P^1$ を底空間とする１次元標準ベクトルバンドル γ_1^1 に対して，$\hat{\alpha}$ を $H^1(\mathbb{R}P^1;\mathbb{Z}_2)\cong\mathbb{Z}_2$ の生成元とするとき,

$$w_1(\gamma_1^1)=\hat{\alpha}\in H^1(\mathbb{R}P^1;\mathbb{Z}_2).$$

(**SW V**) ξ が n 次元ベクトルバンドルであるとき，$w_n(\xi)$ は ξ の $\mathbb{Z}_2$-Euler 類と一致する：

$$w_n(\xi) = e'(\xi).$$

□

【定理 6.25 (Stiefel-Whiney 類の存在と一意性)**】** 公理 (SW I)-(SW V) を満たす Stiefel-Whitney 類は存在し，一意的に決まる． □

【定理 6.26 (ベクトルバンドルの分類空間のコホモロジー)**】** n 次元ベクトルバンドルの分類空間 G_n の $\mathbb{Z}_2$ 係数コホモロジー環 $H^*(G_n;\mathbb{Z}_2)$ は，対応する普遍ベクトルバンドル γ^n の Stiefel-Whitney 類により生成される $\mathbb{Z}_2$ 上の多項式環である：

$$H^*(G_n;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_1(\gamma^n), \cdots, w_n(\gamma^n)]$$

□

【定理 6.27 (ベクトルバンドルの向き付け可能性)**】** ξ をパラコンパクト Hausdorff 空間上のベクトルバンドルとするとき，ξ が向き付け可能であるための必要十分条件は，$w_1(\xi) = 0$. □

【定理 6.28 (ベクトルバンドルのフレーム断面)**】** ξ をパラコンパクト Hausdorff 空間上の n 次元ベクトルバンドルとする．ξ が各点で一次独立な q 個の断面をもつならば，

$$w_n(\xi) = w_{n-1}(\xi) = \cdots = w_{n-q+1}(\xi) = 0$$

が成り立つ． □

【定理 6.29 (実射影空間の Stiefel-Whitney 類)**】** 実射影空間 $\mathbb{R}P^k$ に対して，１次元標準ベクトルバンドル γ_k^1 の $\mathbb{Z}_2$-Euler 類を $\hat{\alpha} \in H^1(\mathbb{R}P^k;\mathbb{Z}_2)$ とするとき

$$w(\mathbb{R}P^k) = (1+\hat{\alpha})^{k+1}.$$

□

6.2.5 Chern 類

【定義 6.30 (Chern 類の公理)**】** 次の５つの公理を満たす，パラコンパクト Hausdorff 空間を底空間とする複素ベクトルバンドルに対する特性類を *Chern* 類という．

(**C I**) 各ベクトルバンドル $\omega = (E(\omega), B(\omega), \pi)$ に対して，コホモロジー類の列

$$c_i(\omega) \in H^{2i}(B(\omega); \mathbb{Z}) \ (i = 0, 1, 2, \cdots)$$

が対応する．ただし，$c_0(\omega) = 1 \in H^0(B(\omega); \mathbb{Z})$ で，ω が n 次元複素ベクトルバンドルの時，$c_i(\omega) = 0 (i > n)$．$c_i(\omega)$ を ω の i 次 Chern 類，

$$c(\omega) = 1 + c_1(\omega) + c_2(\omega) + \cdots \in H^*(B(\omega); \mathbb{Z})$$

を全 Chern 類という．

(**C II**) (自然性）$\tilde{f} : \omega \to \theta$ をバンドル写像，$f : B(\omega) \to B(\theta)$ を $\tilde{f}$ が定める底空間の間の写像とするとき，

$$c(\omega) = f^*(c(\theta)).$$

(**C III**) (Whitney 積）ω と ω' が同じ底空間上のベクトルバンドルの時，

$$c(\omega \oplus \omega') = c(\omega) \smile c(\omega').$$

(**C IV**) $G^{\mathbb{C}}_{1,1} = \mathbb{C}P^1$ を底空間とする１次元標準複素ベクトルバンドル $\gamma_1^{1,\mathbb{C}}$ に対して，α を $H^2(\mathbb{C}P^1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ の生成元とするとき，

$$c_1(\gamma_1^{1,\mathbb{C}}) = \alpha \in H^2(\mathbb{C}P^1; \mathbb{Z}).$$

(**C V**) ω が n 次元複素ベクトルバンドルであるとき，$c_n(\omega)$ は ω の基礎実ベクトルバンドル $\omega_{\mathbb{R}}$ の Euler 類と一致する：

$$c_n(\omega) = e(\omega_{\mathbb{R}}).$$

□

【定理 6.31 (Chern 類の存在と一意性)**】** 公理 (C I)-(C V) を満たす Chern 類は存在し，一意的に決まる． □

【定理 6.32 (複素ベクトルバンドルの分類空間のコホモロジー)**】** n 次元複素ベクトルバンドルの分類空間 $G_n^{\mathbb{C}}$ の整係数コホモロジー環 $H^*(G_n^{\mathbb{C}};\mathbb{Z})$ は，対応する普遍複素ベクトルバンドル $\gamma^{n,\mathbb{C}}$ の Chern 類により生成される $\mathbb{Z}$ 上の多項式環である：

$$H^*(G_n^{\mathbb{C}};\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1(\gamma^{n,\mathbb{C}}),\cdots,c_n(\gamma^{n,\mathbb{C}})]$$

□

【定理 6.33 (複素ベクトルバンドルのフレーム断面)**】** ω をパラコンパクト Hausdorff 空間上の n 次元複素ベクトルバンドルとする．ω が各点で複素一次独立な q 個の断面をもつならば,

$$c_n(\omega) = c_{n-1}(\omega) = \cdots = c_{n-q+1}(\omega) = 0$$

が成り立つ． □

【定理 6.34 (複素射影空間の Chern 類)**】** 複素射影空間 $\mathbb{C}P^k$ に対して, １次元標準複素ベクトルバンドル $\gamma_k^{1,\mathbb{C}}$ の Euler 類を $\alpha \in H^2(\mathbb{C}P^k;\mathbb{Z})$ とするとき

$$c(\mathbb{C}P^k) = (1+\alpha)^{k+1}.$$

□

6.2.6 Pontrjagin 類

【定義 6.35 (Pontrjagin 類)**】** $\xi = (E,B,\pi)$ をパラコンパクト Hausdorff 空間 B 上の n 次元実ベクトルバンドルとするとき, ξ の複素化 $\xi\otimes\mathbb{C}$ の Chern 類 $c_{2j}(\xi\otimes\mathbb{C})$ により ξ の *Pontrjagin* 類 $p_j(\xi)$ を次のように定義する：

$$p_j(\xi) = (-1)^j c_{2j}(\xi\otimes\mathbb{C}) \in H^{4j}(B;\mathbb{Z}) \ (j=0,1,2,\cdots).$$

また，$H^*(B;\mathbb{Z})$ の元 $p(\xi)$ を

$$p(\xi) = 1 + p_1(\xi) + \cdots$$

で定義し，ξ の全 *Pontrjagin* 類という． □

【定理 6.36 (Pontrjagin 類の性質)**】**　Pontrjagin 類は次の性質をもつ.

(**P I**) 各ベクトルバンドル $\xi = (E(\xi), B(\xi), \pi)$ に対して，ξ の Pontjagin 類と呼ばれるコホモロジー類の列

$$P_i(\xi) \in H^{4i}(B(\xi); \mathbb{Z}) \ (i = 0, 1, 2, \cdots)$$

が対応する．ただし，$p_0(\xi) = 1 \in H^0(B(\xi); \mathbb{Z})$ で，ξ が n 次元ベクトルバンドルの時，$i > [n/2]$ に対して，$p_i(\xi) = 0$.

(**P II**) (自然性）$\tilde{f} : \xi \to \eta$ をバンドル写像，$f : B(\xi) \to B(\eta)$ を $\tilde{f}$ が定める底空間の間の写像とするとき，

$$p(\xi) = f^*(p(\eta)).$$

(**P III**) (Whitney 積）ξ と ξ' が同じ底空間上のベクトルバンドルの時，

$$p(\xi \oplus \xi') = p(\xi) \smile p(\xi') \quad \mathrm{mod} A.$$

が成り立つ．ただし，A は $H^*(B(\xi); \mathbb{Z})$ の位数 2 の元すべてからなる部分環である.

(**P IV**) ξ が向き付けられている $2n$ 次元ベクトルバンドルのとき，

$$p_n(\xi) = e(\xi)^2.$$

□

【定理 6.37 (有向ベクトルバンドルの分類空間のコホモロジー)**】**
Λ を $1/2$ を含む整域とする.

i) $2n+1$ 次元有向ベクトルバンドルの分類空間 $\tilde{G}_{2n+1}$ の Λ 係数コホモロジー環 $H^*(\tilde{G}_{2n+1}; \Lambda)$ は，対応する普遍ベクトルバンドル $\tilde{\gamma}^{2n+1}$ の Pontrjagin 類により生成される Λ 上の多項式環である：

$$H^*(\tilde{G}_{2n+1}; \Lambda) \cong \Lambda[p_1(\tilde{\gamma}^{2n+1}), \cdots, p_n(\tilde{\gamma}^{2n+1})]$$

i) $2n$ 次元有向ベクトルバンドルの分類空間 $\tilde{G}_{2n}$ の Λ 係数コホモロジー環 $H^*(\tilde{G}_{2n};\Lambda)$ は，対応する普遍ベクトルバンドル $\tilde{\gamma}^{2n}$ の Pontrjagin 類および Euler 類により生成される Λ 上の多項式環である：

$$H^*(\tilde{G}_{2n};\Lambda) \cong \Lambda[p_1(\tilde{\gamma}^{2n}), \cdots, p_{n-1}(\tilde{\gamma}^{2n}), e(\tilde{\gamma}^{2n})]$$

このとき，

$$p_n(\tilde{\gamma}^{2n}) = e(\tilde{\gamma}^{2n})^2$$

がなりたつ．

□

【定理 6.38 (Chern 類との関係)**】** n 次元複素ベクトルバンドル ω の Chern 類と $\omega_{\mathbb{R}}$ の Pontrjagin 類の間には次の関係式が成り立つ：

$$1 - p_1(\omega_{\mathbb{R}}) + p_2(\omega_{\mathbb{R}}) - \cdots + (-1)^n p_n(\omega_{\mathbb{R}}) = c(\omega)c(\bar{\omega}).$$

ここで，$\bar{\omega}$ は ω の複素共役バンドルで，

$$c(\bar{\omega}) = 1 - c_1(\omega) + c_2(\omega) - \cdots + (-1)^n c_n(\omega).$$

□

6.2.7　障害類

【定理 6.39 (Euler 類)**】** ξ が CW 複体 B を底空間とする向きの与えられた n 次元ベクトルバンドル，$\hat{\xi}$ をそれに同伴した球バンドルとする．n が偶数ならば，B の $n-1$ 切片上の $\hat{\xi}$ の切断を n 切片上に拡大するための障害類 $o(\hat{\xi}) \in H^n(B;\mathbb{Z})$ は ξ の Euler 類 $e(\xi)$ と一致する． □

【定理 6.40 (Stiefel-Whitney 類)**】** ξ が CW 複体 B を底空間とする向きの与えられた n 次元ベクトルバンドルとする．B の $q-1$ 切片上の正規直交 $n-q+1$ 枠を q 切片上に拡大するための $\mathbb{Z}_2$-障害類 $o_q(\xi) \in H^q(B;\mathbb{Z}_2)$ は ξ の Stiefel-Whitney 類 $w_q(\xi)$ と一致する． □

【定理 6.41 (Chern 類)**】** ω が CW 複体 B を底空間とする向きの与えられた複素 n 次元ベクトルバンドルとする．B の $2q-1$ 切片上の複素（正規直交）$n-q+1$ 枠を $2q$ 切片上に拡大するための障害類 $o_q(\omega) \in H^{2q}(B;\mathbb{Z})$ は ω の Chern 類 $c_q(\omega)$ と一致する． □

【定理 6.42 (構造群の簡約)**】**

1) ξ を CW 複体 B 上のベクトルバンドルとするとき，ξ が向き付け可能であるための必要十分条件は，$w_1(\xi) = 0$ である．(この定理は，B が一般にパラコンパクト Haussdorf 空間なら成り立つ．) また，向き付け可能であるとき，ξ の向きは $H^0(X;\mathbb{Z}_2)$ の元と一対一に対応する．

2) ω を CW 複体上の複素 n 次元ベクトルバンドルとする．ω の構造群が $\mathrm{SU}(n)$ に簡約できるための必要十分条件は，$c_1(\omega) = 0$ である．

□

Proof.

1) 一般に，主バンドル $P(G,B)$ の部分主バンドル $P'(H,B)$ は，$P(G,B)$ に同伴したファイバーバンドル $(P/H,B,G/H)$ の大域的切断と一対一に対応する．また，ξ が向き付け可能であるための必要十分条件は，ξ に同伴した主バンドル $P(\mathrm{O}(n),B)$ の部分主バンドル $P'(\mathrm{SO}(n),B)$ が存在すること，すなわち P の構造群 $\mathrm{O}(n)$ を $\mathrm{SO}(n)$ に簡約できることである．ところが，$\mathrm{O}(n)/\mathrm{SO}(n) \cong \mathbb{Z}_2$ で，任意の $\mathbb{Z}_2$ バンドルについて，その B^1 の切断は常に B 全体に拡張可能であるので，$B^{(1)}$ 上で ξ が向き付け可能なら，B 全体で向き付け可能となる．したがって，問題は $B^{(1)}$ 上で考えればよい．まず，ξ が向き付け可能なら，$B^{(1)}$ 上で構造群の $\mathrm{SO}(n)$ への簡約が存在する．ところが，$\mathrm{SO}(n)$ は連結なので，このとき構造群は $B^{(1)}$ 上で自明群に簡約できる．すなわち，$B^{(1)}$ 上で ξ の n 枠が存在する．逆に，$B^{(1)}$ 上で ξ の n 枠が存在すれば，明らかに $B^{(1)}$ 上で ξ は向き付け可能である．したがって，向き付けの障害は，障害類 $o(\xi) \in H^1(B;\mathrm{O}(n)/\mathrm{SO}(n)) = H^1(B;\mathbb{Z}_2)$，すなわち $w_1(\xi)$ のみとなる．次に，向き付け可能なら，B 上の $\mathbb{Z}_2$ バ

ンドルは自明となり，向きは B の各連結成分上で定数となる $\mathbb{Z}_2$ 値関数と一対一に対応する．この関数は明らかに，$H^0(B;\mathbb{Z}_2)$ の元と同一視できる．

2) $B^{(2)}$ 上で $\mathrm{SU}(n)$ への簡約が存在すれば，$\pi_j(\mathrm{U}(n)/\mathrm{SU}(n)) = \pi_j(S^1) = 0\,(j \geq 2)$ より，B 全体で簡約が存在するので，$B^{(2)}$ 上で考えればよい．さらに，$B^{(2)}$ 上で $\mathrm{SU}(n)$ への簡約が存在すれば，$\mathrm{SU}(n)$ は連結で $\pi_1(\mathrm{SU}(n)) = 0$ より ω は $B^{(2)}$ 上で自明となる．したがって，$\mathrm{SU}(n)$ への簡約可能条件は，$B^{(2)}$ 上で ω が自明となることで，$P(\mathrm{U}(n), B)$ が連結なのでその障害は，障害類 $o_1(\xi) = c_1(\xi) \in H^2(B;\mathbb{Z})$ のみとなる．

□

6.2.8 スピン構造

【定義 6.43 (スピン構造)**】** ξ を CW 複体 X 上の n 次元ベクトルバンドルとするとき，ξ のスピン構造を次のいずれかで定義する．3つの定義は同等である．

i) ϵ を X 上の自明な 1 次元ベクトルバンドル，$X^{(j)}$ を X の j 切片とするとき，ξ が向き付け可能で，適当な非負整数 k に対して $\xi \oplus \epsilon^k$ の $X^{(1)}$ 上の自明化 σ で $X^{(2)}$ 上に拡張可能なものが存在するとき，ξ はスピン構造をもつといい，σ のホモトピー類をスピン構造と呼ぶ．ただし，$n \geq 3$ のときには $k = 0$，$n = 2$ のときには $k = 1$，$n = 1$ のときには $k = 2$ ととれる．

ii) ξ の随伴 $\mathrm{O}(n)$ 主バンドルが $\mathrm{SO}(n)$ 主バンドル P に簡約可能で，P の 2 重被覆となっている $\mathrm{Spin}(n)$ 主バンドル $\tilde{P}$ が存在して次の図式が可換となるとき，ξ はスピン構造を持つといい，2 重被覆 $p : \tilde{P} \to P$ の同値類をスピン構造と呼ぶ．

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Spin}(n) & \xrightarrow{\lambda} & \mathrm{SO}(n) \\
\triangledown & & \triangledown \\
\tilde{E}(P) & \xrightarrow{p} & E(P) \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
X & \xrightarrow{=} & X
\end{array} \tag{19}$$

iii) ξ の随伴 $\mathrm{O}(n)$ 主バンドルが $\mathrm{SO}(n)$ 主バンドル P に簡約可能で，$\sigma \in H^1(E(P);\mathbb{Z}_2)$ でその各ファイバーへの制限が $H^1(\mathrm{SO}(n);\mathbb{Z}_2)$ の生成元となっているものが存在するとき，ξ はスピン構造 σ を持つという．

□

【定理 6.44 (スピン構造の存在)**】** ξ を CW 複体 X 上の n 次元ベクトルバンドルとする．

1) ξ がスピン構造をもつための必要十分条件は，$w_1(\xi) = w_2(\xi) = 0$ である．

2) ξ がスピン構造をもつとき，次の完全系列がなりたち，各スピン構造 $\sigma \in H^1(E(P);\mathbb{Z}_2)$ は $i^*(\sigma) = 1$ で特徴付けられる．また，σ は $H^1(X;\mathbb{Z}_2)$ の元と一対一に対応する．

$$0 \to H^1(X;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\pi^*} H^1(E(P);\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i^*} H^1(\mathrm{SO}(n);\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \to 0 \tag{20}$$

□

7 Knots and Links

[LastUpdate: 2001.3.31]

7.1 正則表示

7.1.1 数論的不変量

7.1.1.1 最小交点数

【定義 7.1 (最小交点数)**】**

$$c[L] \overset{\mathrm{def}}{=} \text{正則表示における交点数の最小値}$$

□

7.1.1.2　絡み数 (linking number)

【定義 7.2 (交点符号)**】**　絡み目の正則表示 D の交点 c において，上橋を下橋が右から下をくぐるとき $\mathrm{sign}(c) = +1$, 左からくぐるとき $\mathrm{sign}(c) = -1$. □

【定義 7.3 (絡み数)**】**　2 つの結び目 K_1, K_2 からなる絡み目に対して

$$\mathrm{Link}(K_1, K_2) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2} \sum_{c \in K_1 \cap K_2} \mathrm{sign}(c).$$

□

7.1.1.3　橋指数 (bridge index)

【定義 7.4 (橋指数)**】**

$$\mathrm{br} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \text{height 関数の local maximum points の最小数}$$

□

性質

$$\mathrm{br}[L_1 \sharp L_2] = \mathrm{br}[L_1] + \mathrm{br}[L_2] - 1.$$

2-橋結び目と 2-橋絡み目は Schubert 標準形 $S(\alpha, \beta)$ により完全に分類される：

$$S(\alpha, \beta): \quad \gcd(\alpha, \beta) = 1, \quad -\alpha < \beta < \alpha, \quad \beta : \text{奇数}$$

【定理 7.5】

(i) 2-橋結び目 $S(\alpha, \beta)$ と $S(\alpha', \beta')$ が同型であるための必要十分条件：

$$\alpha = \alpha', \quad \beta^{\pm 1} \equiv \beta' (\mathrm{mod} \alpha).$$

(ii) 2-橋絡み目が成分の向きを無視して同型となる条件は (i) と同じ．向きまで含めて同型となる必要十分条件は

$$\alpha = \alpha', \quad \beta^{\pm 1} \equiv \beta' (\mathrm{mod} 2\alpha).$$

□

7.1.1.4 組み紐指数 (braid index)

【定義 7.6 (組み紐指数)**】**

$$\boldsymbol{b}[L] \overset{\text{def}}{=} \text{braid 表示をするために必要なひもの最小数}.$$

□

性質 結び目に対して

$$\boldsymbol{b}[K_1 \sharp K_2] = \boldsymbol{b}[K_1] + \boldsymbol{b}[K_2] - 1.$$

7.1.1.5 結び目解消数 (unknoting number)

【定義 7.7 (結び目解消数)**】**

$$u[L] \overset{\text{def}}{=} \text{結び目を自明にするために必要な最小の交差数}$$

□

7.2 Seifert 曲面

【定義 7.8 (*Seifert* 曲面)**】** S^3 内の絡み目 L に対して，閉じた成分を含まない向きづけられたコンパクトな曲面 F で，向きまで含めて $\partial F = L$ となるものを，L の **Seifert 曲面**という． □

【定義 7.9 (*Seifert* 行列)**】** L を S^3 内の絡み目，F を L の連結な Seifert 曲面とする．$f : F \times [-1, 1] \to S^3$ を，S^3 における F のカラー（正則近傍）で向きを保つものとし，$f^+(x) = f(x, 1), f^- = f(x, -1)$ とおく．このとき，F の１次元サイクル c_1, c_2 に対して，$c_1^+ = f^+(c_1)$ と $c_2^- = f^-(c_2)$ の S^3 における絡み数 $L(c_1^+, c_2^-)$ は c_1, c_2 のホモロジー類のみで決まり，双線形形式 $\phi : H_1(F) \times H_1(F) \to \mathbb{Z}$ を与える．これを，絡み目 L の連結 Seifert 曲面 F に付随した *Seifert* 形式という．また，$H_1(F)$ の基底に関する ϕ の行列表示を **Seifert 行列**という． □

【定義 7.10 (S-同値)**】** 2 つの正方整数行列 V, W に対して,

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & u \\ 0 & v & V \end{pmatrix}$$

のとき, W は V の行拡大, V は W の行縮小, W^T は V^T の列拡大, V^T は W^T の列縮小という.

S-同値とは, ユニモジュラー合同, 行拡大, 行縮小, 列拡大, 列縮小という関係から生成される同値関係のことである. □

【定理 7.11】 絡み目 L から得られる任意の 2 つの Seifert 行列は S-同値である. □

7.2.1 数論的不変量

7.2.1.1 種数 (genus)

【定義 7.12 (種数)**】**

$$g[L] \overset{\text{def}}{=} \text{組み紐 } L \text{ に対する } Seifert \text{ 曲面の種数の最小値}$$

□

7.2.1.2 符号数 (signature) と退化次数

絡み目 L に対して, その一つの Seifert 曲面を F, F の Seifert 行列を M_F とする.

【定義 7.13 (双曲平面形式)**】** 非特異な対称双一次偶形式 $b : H \times H \to \mathbb{Z}$ で $H \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ となるもの.

$$\Leftrightarrow \quad b \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ □

【定義 7.14 (安定同型)**】** 2 つの対称双一次形式 (H, b), (H', b') に対して, それぞれにいくつかの双曲平面形式を直和により添加したものが同型となるとき, それらは安定同型であるという. □

【定理 7.15】 絡み目 L の任意の Seifert 曲面 F から得られる対称双一次偶形式 $M_F + {M_F}^T$ は互いに安定同型類である． □

【定義 7.16 (符号数)**】**

$$\sigma[L] \overset{\text{def}}{=} \operatorname{sign}(M_F + {M_F}^T).$$

□

性質

$$\sigma[L_1 \sharp L_2] = \sigma[L_1] + \sigma[L_2],$$
$$\sigma[\pm L^*] = -\sigma[L].$$

結び目 K に対して，

$$\sigma[K] \leq 2u[K]. \tag{21}$$

【定義 7.17 (退化数)**】**

$$n[L] \overset{\text{def}}{=} (\dim - \operatorname{rank})(M_F + {M_F}^T).$$

□

性質

$$n[L] \leq r - 1 \quad (r = L \text{ の成分数}).$$

7.3 絡み目群

【定義 7.18 (絡み目群)**】**

$$G[L] := \pi_1(E); \quad E := S^3 - N(L).$$

□

【定義 7.19 (普遍アーベル被覆空間)**】** Hurwitz 全射準同型

$$\gamma : G = \pi_1(E) \to H_1(E) \cong \mathbb{Z}^r \quad (r = L \text{ の成分数})$$

の kernel Ker $\gamma = [G, G]$ に対応する E の被覆空間

$$p : E_\gamma \to E.$$

□

【定義 7.20】 $H_1(E)$ の基底 $t_1, \cdots, t_r$ に対して，$\mathbb{Z}H_1(E)$ は Laurent 多項式環 $\Lambda = \mathbb{Z}[t_1, \cdots, t_r]$ と同型となる．このとき，$H_1(E) \cong \pi_1(E)/\pi_1(E_\gamma)$ は E_γ の被覆変換群となるので，$H_1(E_\gamma)$ は Λ-加群と見なせる．

(1) L の絡み目加群 $=$ Λ-加群 $H_1(E_\gamma)$.

(2) L の *Alexander* 加群 $A[L] =$ Λ-加群 $H_1(E_\gamma, p^{-1}(e))(e \in E)$.

□

7.4 不変多項式

絡み目 L の正則表示 D の交点 c において，交差を正交差に変えたものを $L_+(D, c)$，負交差に変えたものを $L_-(D, c)$，組み替えにより向きを保って交差を解消したものを $L_0(D, c)$ と表すことにする．

7.4.1 Alexander-Conway 多項式

7.4.1.1 Skein 関係による定義

【定義 7.21 (*Alexander-Conway* 多項式)**】** 有向絡み目 L の正則表示から定義される一変数多項式 $\nabla_L(z) \in \mathbb{Z}[z]$ で次の性質を満たすもの.

(AC0) L と L' が全同位ならば，$\nabla_L = \nabla_{L'}$.

(AC1) $\nabla_{\bigcirc} = 1$.

(AC2) $\nabla_{L_+} - \nabla_{L_-} = z\nabla_{L_0}$.

□

性質　: $L = L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ ならば，$\nabla_L = 0$.

7.4.1.2　構成的定義

【定義 7.22 (*1* 変数 *Alexander* 多項式)**】**　絡み目 L の Seifert 曲面を F，F の Seifert 行列を M_F とすると，

$$\Delta_L(t) \overset{\text{def}}{=} \pm t^m \det(M_F - t{M_F}^T) = a_0 + \cdots a_k t^k \quad (a_0 > 0) \tag{22}$$

で定義される多項式は，F の取り方によりず，絡み目不変量となる．これを **1 変数 Alexander 多項式**という．　□

Alexander-Conway 多項式との関係：

$$\Delta_L(t) \doteq \nabla_L(t^{1/2} - t^{-1/2}).$$

性質　M_n を絡み目 L にそう S^3 の n 重分岐被覆空間とすると，1 変数 Alexander 多項式 $\Delta_L(t)$ と 1 の原始 n 乗根 ω に対して，

$$H_1(M_n) \text{ のアーベル群としての位数} = |\prod_{k=1}^{n} \Delta_L(\omega^k)|.$$

ただし，$|\infty| = |0| = 0$ とする．

【定義 7.23】

(1) M を有限生成 Λ-加群とすると，適当な自然数 m, n に対して完全系列

$$\Lambda^m \to \Lambda^n \to M \to 0$$

が存在する．このとき，最初の写像 $\Lambda^m \to \Lambda^n$ を表す $\Lambda - (m, n)$ 行列 P を M の行列表現とよぶ.

(2) 非負整数 d に対して，P の $(n-d)$ 次の小行列全体で生成される Λ のイデアル $E_d(M)$ を M の d 番基本イデアルと呼ぶ．また，Λ の単元を法として定まる $E_d(M)$ の最大公約元 $\Delta_d(M)$ を M の d 番特性多項式と呼ぶ.

□

【**定義 7.24** (多変数 *Alexander* 多項式)】　絡み目 L の絡み目加群を $H_1(E_\gamma)$，Alexander 加群を $A(L)$ とするとき，

d 番 *Alexander* 多項式: $\Delta_L^{(d)} \overset{\text{def}}{=} \Delta_{d+1}(A(L)) = \Delta_d(H_1(E_\gamma))$,

Alexander 多項式: $\Delta_L \overset{\text{def}}{=} \Delta_L^{(0)}$

□

性質

トレース条件: r 成分絡み目 $L = K_1 \cup \cdots \cup K_r$ に対して，

i) $\Delta_L(t_1, \cdots, t_r) \doteq \Delta_L(t_1^{-1}, \cdots, t_r^{-1})$.

ii) $L = L' \cup K_r$, $\lambda_i = \mathrm{Link}(K_i, K_r)$ とするとき，$r = 2$ に対して，

$$\Delta_L(t_1, \cdots, t_{r-1}, 1) \doteq \frac{t_1^{\lambda_1} - 1}{t_1 - 1} \Delta_{L'}(t_1),$$

$r > 2$ に対して，

$$\Delta_L(t_1, \cdots, t_{r-1}, 1) \doteq (t_1^{\lambda_1} \cdots t_{r-1}^{\lambda_{r-1}} - 1)\Delta_{L'}(t_1, \cdots, t_{r-1}).$$

以上で $\doteq$ は (mod 単元) で等しいことを意味する．

1 変数 Alexander 多項式との関係：$r > 1$ のとき，

$$\Delta_L(t) = (t - 1)\Delta_L(t, \cdots, t).$$

7.4.2　Jones 多項式

7.4.2.1　Skein 関係による定義

【**定義 7.25** (*Jones* 多項式)】　有向絡み目 L の正則表示に対して定義される 1 変数式 $V_L(t) \in \mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$ で次の性質を満たすもの：

(J0) L と L' が全同位ならば，$V_L = V_{L'}$.

(J1) $V_{\bigcirc}(t) = 1$.

(J2) $t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{L_0}(t)$.

□

性質　$\sharp(L)$ で絡み目 L の成分数を，M_n で L に沿って分岐する S^3 の n 重巡回分岐多様体を表すとき，

i)　$V_L(1) = (-2)^{\sharp(L)-1}$,

ii)　$V_L(-1) = \nabla_L(2i)$,

iii)　$V_L(e^{2\pi i/3}) = 1$,

iv)　$V_L(i) = \begin{cases} 2^{(\sharp L-1)/2}(-1)^{\mathrm{Arf}(L)} & (\mathrm{Arf}(L)\text{ が定義可能の時}) \\ 0 & (\text{それ以外の時}) \end{cases}$,

v)　$V_L(e^{\pi i/3}) = \pm i^{\sharp(L)-1}(\sqrt{3}i)^{\mathrm{rank} H_1(M_2(L);\mathbb{Z}_3)}$.

絡み目 L の 1 つの成分 K の向きを変えて得られる絡み目を L' と表し，$\lambda = \mathrm{Link}(K, L-K)$ とおくと，

$$V_{L'}(t) = t^{-3\lambda} V_L(t).$$

7.4.2.2　State モデル

絡み目 L の交叉 c において c の近傍は 4 つの領域に分割される．これらのうち，上橋に対してその反時計回りの位置にある 2 つの領域を A 領域，残りを B 領域と名付ける．c において，A 領域をつなぐことにより交叉を解消する操作を $R_+(c)$，B 領域をつないで交叉を解消する操作を $R_-(c)$ と表す.

【定義 7.26 (*Kauffman* ブラケット)**】**　無向絡み目 $|L|$ に対して，A, B, d を可換な変数として，

$$\langle K\rangle = \langle K\rangle(A,B,d) = \sum_\sigma \langle K|\sigma\rangle d^{\|\sigma\|}$$

を **Kauffman ブラケット**という．ただし，σ は L の交叉点の集合から $\{+,-\}$ への写像を，$\|\sigma\|$ は全交叉の解消された絡み目 $\prod_c R_{\sigma(c)}(c)L$ のループの数 -1 を，また，$\langle K|\sigma\rangle$ は

$$\prod_c (AR_+(c) + BR_-(c)) = \sum_\sigma \langle K|\sigma\rangle \prod_c R_{\sigma(c)}(c)$$

で定義される A, B の同次多項式である．　□

【定理 7.27】 有向絡み目 L に対して，$w(L)$ をその捻り数とするとき，

$$\mathscr{L}_L(A) := (-A^3)^{-w(L)}\langle K\rangle(A, A^{-1}, -A^2 - A^{-2})$$

により定義される一変数 Laurent 多項式は，全同位に対する不変量となる．この不変量と Jones 多項式との間には次の関係がある．

$$V_L(t) = \mathscr{L}_L(t^{-1/4}).$$

□

7.4.3 Homfly 多項式

7.4.3.1 Skein 関係による定義

【定義 7.28 (*Homfly* 多項式)**】** 有向絡み目 L の正則表示から定義される 2 変数多項式 $P_L(\alpha, z) \in \mathbb{Z}[\alpha, \alpha^{-1}, z, z^{-1}]$ で次の性質を満たすもの．

(H0) L と L' が全同位ならば，$P_L = P_{L'}$.

(H1) $P_{\bigcirc} = 1$.

(H2) $\alpha P_{L_+} - \alpha^{-1} P_{L_-} = z P_{L_0}$.

□

特殊化

$$\begin{aligned}\nabla_L(z) &= P_L(1, z),\\ V_L(t) &= P_L(t, t^{1/2} - t^{-1/2}).\end{aligned}$$

性質　$\sharp L$ と $M_n(L)$ は Jones 多項式の場合と同じもの表すとして，

$$
\begin{array}{rl}
\text{i)} & P_{-L}(a,z) = P_L(a,z), \\
\text{ii)} & P_{L^*}(a,z) = P_L(-a^{-1},z), \\
\text{iii)} & P_{L_1\sharp L_2}(a,z) = P_{L_1}(a,z)P_{L_2}(a,z), \\
\text{iv)} & P_{L_1+L_2}(a,z) = \dfrac{a^{-1}-a}{z}P_{L_1}(a,z)P_{L_2}(a,z), \\
\text{v)} & P_L(a,a^{-1}-a) = 1, \\
\text{vi)} & P_L(-a,-z) = P_L(a,z), \\
\text{vii)} & P_L(a,-z) = P_L(-a,z) = (-1)^{\sharp(L)-1}P_L(a,z), \\
\text{viii)} & P_L(i,i) = (\sqrt{2}i)^{\mathrm{rank} H_1(M_3(L);\mathbb{Z}_2)}.
\end{array}
$$

7.4.4　Q-多項式

7.4.4.1　Skein 関係による定義

向きのついていない絡み目 $|L|$ に対して，$|L|_\pm$ は $L_\pm$ と同様に定義し，組み替えにより交差を解消して得られる 2 通りの絡み目を $|L|_0$，$|L|_1$ と表す.

【定義 7.29 (Q-多項式)**】**　無向絡み目 $|L|$ に対する 1 変数多項式 $Q_{|L|}(x) \in \mathbb{Z}[x,x^{-1}]$ で次の性質をもつもの：

(Q0) L と L' が全同位ならば，$Q_L = Q_{L'}$.

(QI) $Q_{\bigcirc}(x) = 1$.

(QII) $Q_{|L|_+}(x) + Q_{|L|_-}(x) = x\{Q_{|L|_0}(x) + Q_{|L|_1}(x)\}$.

□

性質

$$
\begin{array}{rl}
\text{i)} & Q_{|L|}(1) = 1, \\
\text{ii)} & Q_{|L|}(-1) = (-3)^{\mathrm{rank} H_1(M_2(L);\mathbb{Z}_3)}, \\
\text{iii)} & Q_{|L|}(2) = |\nabla_L(2i)|^2, \\
\text{iv)} & Q_{|L|}(-2) = (-2)^{\sharp(L)-1}.
\end{array}
$$

7.4.5 Kauffman 多項式

7.4.5.1 Skein 関係による定義

【定義 7.30 (*Kauffman* 多項式)**】** 無向絡み目 $|L|$ に対する 2 変数多項式 $\Lambda_{|L|}(a,x) \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$ で次の性質を満たすものを Λ_L とする：

(K0) Λ と Λ' が正則同位ならば，$\Lambda_L = \Lambda_{L'}$.

(K1) $\Lambda_{\bigcirc}(\alpha, z) = 1$.

(K2) $\Lambda_{|L|_+}(\alpha, z) + \Lambda_{|L|_-}(\alpha, z) = z\{\Lambda_{|L|_0}(\alpha, z) + \Lambda_{|L|_1}(\alpha, z)\}$.

(K3) $\Lambda_{T_+} = \alpha\Lambda_D,\ \Lambda_{T_-} = \alpha^{-1}\Lambda_D$.

ただし，$T_\pm$ は L 内の符号正（負）のねじりを，D はそのねじりを解消した絡み目を表す．有向絡み目 L に対して，$w(L)$ を L の捻り数とするとき，

$$F_L(\alpha, z) := \alpha^{-w(L)}\Lambda_L(\alpha, z)$$

で定義される 2 変数多項式 F_L は，有向絡み目に対する全同位不変量となり **Kauffman 多項式**という． □

特殊化

$$Q_L(z) = F_L(1, z),$$
$$V_L(t) = F_L(-t^{-3/4}, t^{1/4} + t^{-1/4}).$$

7.5 抽象テンソルと Yang-Baxter 方程式

7.5.1 抽象テンソル表示

【定義 7.31 (無向抽象テンソル表示)**】** ある一定の次数をもつ各テンソルに対して次のような規則でダイアグラムブロックを対応させる：

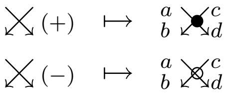
$$\delta^i_j \quad \mapsto \quad \begin{array}{c} i \\ | \\ j \end{array}$$

$$T^{i\cdots j}_{k\cdots l} \quad \mapsto \quad \begin{array}{c} i\cdots j \\ |\cdots| \\ \boxed{\mathrm{T}} \\ |\cdots| \\ k\cdots l \end{array}$$

この規則により，テンソルの積の各要素にダイアグラムブロックを対応させ，和を取る（縮約する）添え字の対を曲線で結ぶことにより，縮約を含むテンソル積とダイアグラムが対応する．このダイアグラムを**無向抽象テンソル表示**という．この表示では，上添え字と下添え字を区別するために，テンソルブロックの向きは上（下）添え字に対応する線が常に上（下）向きに出るように固定する． □

【定義 7.32 (有向抽象テンソル表示)**】** テンソル積に無向テンソル表示と同様に抽象テンソル図式を対応させる．この図式の各部ロックを結ぶ曲線に下添え字から上添え字に向かうように向きを付けたものを**有向抽象テンソル表示**という．この表示では，テンソルブロックの向きや各添え字に対応する線の出る向きは任意でよいが，線の順序は固定する． □

【定義 7.33】 有向絡み目 L の各交叉に対して，それが正交叉の時  (+)，負交叉の時  (−) とあらわす．この記法のもとで，L の各交叉に次のような抽象テンソルブロックを対応させることにより，有向絡み目に対する抽象テンソル表示が得られる：



$$= R^{ab}_{cd},$$
$$= \bar{R}^{ab}_{cd}.$$

□

【定理 7.34】 有向絡み目 L に対して，その抽象テンソル表示に対応する値を $T(L)$ と表すと，$T(L)$ が正則同位の不変量となるための必要十分条件は，R 行列が次の 3 つの条件を満たすことである：

i) (channel unitarity) $\bar{R}^{ab}_{ij} R^{ij}_{cd} = \delta^a_c \delta^b_d$.

ii) (cross-channel unitarity) $R^{ia}_{jb} \bar{R}^{jd}_{ic} = \delta^a_c \delta^d_b$.

iii) (*Yang-Baxter* 方程式)

$$R^{ab}_{ij} R^{jc}_{kf} R^{ik}_{de} = R^{bc}_{ij} R^{ai}_{dk} R^{kj}_{ef},$$
$$\bar{R}^{ab}_{ij} \bar{R}^{jc}_{kf} \bar{R}^{ik}_{de} = \bar{R}^{bc}_{ij} \bar{R}^{ai}_{dk} \bar{R}^{kj}_{ef}.$$

$\square$

【例 7.35】 R 行列

$$R^{ab}_{cd} = A\delta^a_c\delta^b_d + A^{-1}\delta^{ab}\delta_{cd},$$
$$\bar{R}^{ab}_{cd} = A^{-1}\delta^a_c\delta^b_d + A\delta^{ab}\delta_{cd}$$

は上の 3 条件を満たし，テンソルの次元 n と A が

$$n = -A^2 - A^{-2}$$

を満たすとき，$T(L)$ は A の特殊値に対する Kauffman ブラケット $\langle K\rangle$ と一致する． $\square$

【定義 7.36】 無向絡み目 L の正則表示において，平面に時間とよぶ単調レベル関数を定義する．この時間に関する極大点と極小点を含む線分に対して次の抽象テンソルを対応させる：

$$\begin{array}{lcl} \text{極大点} & \mapsto & M_{ab}, \\ \text{極小点} & \mapsto & M^{ab}. \end{array}$$

さらに，各交叉に対して，その近傍で時間の向きにそって交叉弧に向きを与えるとき，抽象テンソルを次のように対応させる：

$$\begin{array}{lcl} \text{正交叉} & \mapsto & R^{ab}_{cd}, \\ \text{負交叉} & \mapsto & \bar{R}^{ab}_{cd}. \end{array}$$

また，時間に関して単調な鉛直方向の弧には δ^a_b を対応させる．これにより，無向絡み目に対する抽象テンソル表示が得られる． $\square$

【定理 7.37】 無向絡み目 $|L|$ に対して，その抽象テンソル表示の値を $\tau(|L|)$ と表す．行列 $M_{ab}, M^{ab}, R, \bar{R}$ が次の条件を満たすとき，$\tau(|L|)$ は正則同位不変量となる：

i) (位相的移動不変性）$M^{ai}M_{ib} = \delta^a_b$.

ii) （捻り不変性）$\bar{R}^{ab}_{cd} = M_{ci}R^{ia}_{dj}M^{jb}$.

iii) （II 型移動）$\bar{R}^{ab}_{ij} R^{ij}_{cd} = \delta^a_c \delta^b_d$.

iv) $R, \bar{R}$ に対する Yang-Baxter 方程式.

$\square$

【例 7.38】 　行列 $M = (M_{ab}), R$ を

$$M = -A\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & iA \\ -iA & 0 \end{pmatrix},$$
$$R = AM^{-1} \otimes M + A^{-1} I$$

と選ぶと，

$$d = \mathrm{Tr} M (M^T)^{-1} = -A^2 - A^{-2}$$

より，$\tau(L)$ は Kauffman ブラケットに比例する：

$$\tau(L) = d\langle K \rangle.$$

これは，Kauffman ブラケットに対する Yang-Baxter モデルと呼ばれる．特に，$A = -1 (d = -2)$ のとき，$\tau(L)$ は全同位不変量となり，Penrose のバイノールと一致する． $\square$

参考文献

[Sma60] Smale, S.: *Bull. Amer. Math. Soc.* **66**, 373–406 (1960).

[Sma61] Smale, S.: Generalized Poincaré conjecture in dimensions greater than four, *Ann. Math.* **74**, 391–406 (1961).

[Sta60] Stallings, J.: Polyhedral homotopy spheres, *Bull. Amer. Math. Soc.* **66**, 485–8 (1960).