代数

LastUpdate: 2006.10.20

目 次

1　加群

1.1　基本事項

1.1.1　自由加群

【定義 1.1】　M を環 R 上の加群とする．

1. $x \in M$ について，任意の $a \in R$ に対して $a \neq 0$ なら $ax \neq 0$ となるとき，x を**自由元** (free element) という．また，自由元でない元を**捩れ元** (torsion element) という．

2. M の元の系 $\{x_i\}_{i \in I}$ が M を生成し，かつ線形独立であるとき，$\{x_i\}_{i \in I}$ を M の**基底** (basis) という．

3. 基底が存在する R 加群を**自由加群** (free module) という．

$\square$

【例 1.2 (自由加群)】　R を環として，有限個の直和 R^n，行列環 $M_n(R)$，多項式環 $R[X_1, \cdots, X_n]$（R は可換環）は自由 R 加群である．$\square$

【定理 1.3 (自由加群の構造)】　M を右 (左)R 自由加群，$(x_i)_{i \in I}$ をその基底とする．$R\langle I \rangle$ を I から R への写像 v で有限個の $i \in I$ を除いて $v(i) = 0$ となるものの全体とすると，$R\langle I \rangle$ は（両側）R 自由加群となる．さらに，対応

$$f : R\langle I \rangle \to M; \quad v \to \sum_i x_i v(i) \ \left(\sum_i v(i) x_i \right)$$

は，右 (左)R 加群としての同型射を与える．$\square$

1.1.2　移入的加群

【定義 1.4 (移入的加群)】　R 加群 Q が**移入的**あるいは**単射的** (injective) であるとは，任意の単射準同型 $u : M' \to M$ と準同型

$h' : M' \to Q$ に対して，$h \circ u = h'$ となる準同型 $h : M \to Q$ が存在す

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "h'"'] & M \arrow[dl, dashed, "h"] \\
 & Q &
\end{tikzcd}$$

ることである． $\square$

【定理 1.5 (移入的加群の特徴付け)】 R 加群 Q について，次の 2 条件は同値である．

i) Q は移入的である．

ii) 任意の単射 $u : Q \to M$ は左分裂する，すなわち $u(Q)$ は M の直和因子となる．

$\square$

【例 1.6 (移入的加群)】

1. 整域 R の分数体 K は，R 加群とみて移入的である．
2. R が主イデアル整域のとき，K をその分数体として，剰余加群 K/R は移入的である．
3. 有理数の加法群 $\mathbb{Q}$，1 の累乗根全体の群 W $(\cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ は，$\mathbb{Z}$ 加群として移入的である．

$\square$

1.1.3 射影的加群

【定義 1.7 (射影的加群)】 R 加群 P が**射影的** (projective) あるいは**全射的**であるとは，任意の全射準同型 $v : N \to N'$ と準同型 $h' : P \to N'$ に対して，$v \circ h = h'$ となる準同型 $h : P \to N$ が存在することであ

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "h'"] & \\
N \arrow[r, "v"'] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

る． $\square$

【定理 1.8 (射影的加群の特徴付け)】 環 R 上の加群 P について，次の３条件は互いに同値である．

i) P は射影的である．

ii) 任意の全射 $v : N \to P$ は右分裂する，すなわち Ker (v) は N の直和因子となる．

iii) P は自由加群の直和因子に同型である．

□

【例 1.9 (射影的加群)】

1. 主イデアル整域上の射影的加群は，すべて自由加群である．
2. Dedekind 環のイデアルはすべて射影的加群である．ただし，それらのうち単項でないものは自由加群でない．

□

1.2 半単純加群

【定義 1.10 (単純加群)**】** 環 R の上の加群 M は，$M \neq 0$ で真の部分加群を持たないとき，**単純**ないし**既約**と呼ぶ． □

【定理 1.11 (単純加群の同型類)**】** 環 R の極大左イデアルの集合に次の同値関係を入れる：

$$L \sim L' \quad \Leftrightarrow \quad R/L \cong R/L'(\text{左 R 加群として}).$$

このとき，次の１対１対応がある：

$$\text{左単純 } R \text{ 加群の同型類 } [M] \quad \Leftrightarrow \quad R \text{ の左極大イデアルの同値類 } [L].$$

特に，R が可換環のとき，各 $[L]$ は一個の極大イデアルからなり，

$$\text{単純 } R \text{ 加群の同型類 } [M] \quad \Leftrightarrow \quad R \text{ の極大イデアル } m.$$

□

【定理 1.12 (Schur の補題)**】**

i) M, N を単純 R 加群とする．このとき，$f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ はゼロ準同型または同型である．

ii) M を単純 R 加群とすると，$D = \mathrm{End}_R(M)$ は体である．したがって，M は D 上の線形空間となり，R の M への表現は D 上の表現と見なされる．

iii) K を代数的閉体，A を K 代数とする．単純 A 加群が K 上有限次元ならば，$\mathrm{End}_A(V) = K\mathrm{id}_V$.

□

【定義 1.13 (半単純加群)**】** R 加群 M が単純加群の直和として表されるとき，**半単純加群**という．さらに，単純加群 P と同型な単純加群の直和となる半単純加群は P **型等型加群**という．また，加群 M に含まれる最大な P 等型部分加群（必ず存在する）を M **の** P **等型成分**という． □

【定義 1.14 (正則加群)**】** 環 R を左 R 加群と見なしたものを R **上の正則加群**という．さらに，正則加群が半単純となるとき，R を**半単純環**という．特に，正則加群が等型加群となるとき，R を**等型半単純環**という． □

【定理 1.15 (完全行列環)**】** 体 K 上の線形空間 V に対して，$R = \mathrm{End}_K(V)$ とおく．

i) V は左 R 加群として忠実かつ単純である．

ii) V が有限次元のとき，R は等型半単純環かつ Artin 単純環である．

□

【定理 1.16】 R 加群 M に対して，次の 3 つの条件は同値である：

i) M は半単純.

ii) M は単純加群の系の和である．

iii) M の任意の部分加群は直和因子である．

□

【定理 1.17】 半単純加群について次が成り立つ．

i) R 加群 M が単純部分加群 $N_i (i \in I)$ の和であれば，M の任意の単純部分加群は N_i のいずれかに同型である．

ii) 半単純加群の部分加群，商加群は半単純である．

iii) 半単純部分加群の和は半単純である．

□

【定理 1.18 (Maschke の定理)**】** 有限群 G の位数 g が可換体 K の標数で割り切れないとき，K 上の G の群環あるいは一般によじれ群環 A の上の加群は，すべて半単純である．したがって，K 上の G の線形表現あるいは一般に射影表現はすべて完全可約である． □

【定義 1.19 (双対正則加群)**】** K を可換環，A を K 線形環とする．A の双対加群 $A^* = \mathrm{Hom}_K(A, K)$ に A の左作用を

$$(af)(b) = f(ba) \quad a, b \in A, \quad f \in A^*$$

で定義する．このように定義される左 A 加群 A^* を A **上の双対正則加群**という． □

【定義 1.20 (表現の係数)**】** G を集合，K を可換環，V を K 加群，$V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$ とする．写像

$$\rho : G \to \mathrm{End}_K(V)$$

に対して，各 $x \in V, x^* \in V^*$ ごとに決まる K^G の元

$$\rho_{x,x^*}(s) := x^*(\rho(s)x) \quad s \in G$$

を ρ の (x, x^*) 係数とよぶ．さらに，ρ_{x,x^*} から生成される K^G の K 部分加群

$$C(\rho) := K < \rho_{x,x^*} \mid x \in V, x^* \in V^* >$$

を ρ **の係数加群**とよぶ．特に，G が K 代数 A となるとき，$C(\rho)$ は A 上の双対正則加群 A^* の部分加群と見なされる． $\square$

【定義 1.21】 R 加群 M と P に対して，M の部分加群

$$M_P := \sum \{\mathrm{Im}\, h \mid h \in \mathrm{Hom}_R(P, M)\}$$

を，M における P の**トレース**と呼ぶ．特に，$M = M_P$ となるとき，P は M の**生成加群**という．さらに，P が任意の R 加群の生成加群となるとき，P を単に生成加群という． $\square$

【定理 1.22】 P を単純 R 加群とするとき，R 加群 M における P のトレース M_P は最大の P 等型部分加群（すなわち P 等型成分）であり，P に同型なすべての部分加群の和である．また，M_P の部分加群はすべて P 等型である． $\square$

【定義 1.23 (表現の指標)**】** 可換体 K 上の有限次元表現 (ρ, V) に対して，対応する K 線形環 A 上の関数

$$\chi_\rho(a) = \mathrm{Tr}\rho(a) \quad (a \in A)$$

を**表現** ρ **の指標**という． $\square$

【定理 1.24】 A を可換体 K 上の線形環，A^* を A の双対正則加群とする．

i) 単純 A 加群 P の定める既約表現 ρ の表現加群 $C(\rho)$ は A^* の P 等型成分である．また，$\rho_1, \cdots, \rho_m$ を互いに同型でない A の既約表現とすると，$C_{(}\rho_1), \cdots, C_{(}\rho_m)$ は A^* において加法的に独立である．（これは双対正則加群の等型成分として A のすべての既約表現が得られることを意味している.）

ii) $\rho_1, \cdots, \rho_m$ がすべてゼロでない有限次既約表現とすると，次の２条件は同値である．

a) $\rho_1, \cdots, \rho_m$ は互いに同型でない．

b) $\chi_{\rho_1}, \cdots, \chi_{\rho_m}$ は K 上線形独立である．

$\square$

【定理 1.25 (半単純加群の構造定理)**】** 半単純 R 加群 M は等型成分の直和となる：

$$M = \sum_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda.$$

さらに，M の部分加群 N について次の 2 条件は同値である：

i) ある $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ に対して，$N = \sum_{\lambda \in \Lambda_0} M_\lambda$.

ii) 任意の $f \in \mathrm{End}_R(M)$ に対して，$f(N) \subseteq N$.

$\square$

【定理 1.26】 P を単純 R 加群，M を任意の R 加群とするとき，

i) M の部分加群 N について，$N_P = M_P \cap N$.

ii) M の直和分解 $M = N + N'$ に対して，$M_P = N_P + N'_P$.

$\square$

1.3 半単純環

【定義 1.27 (半単純環)**】** 環 R 上の正則加群が半単純であるとき，R を半単純環という． $\square$

【定理 1.28】 環 R について，次の諸条件は互いに同値である：

(I) R は半単純環である．

(II) 任意の R 加群が半単純である．

(III) 任意の R 加群が移入的である．

(IV) 任意の R 加群が射影的である．

(V) R 加群の任意の完全系列は分裂する．

(V)' R 加群の任意の短完全系列は分裂する．

(VI) 有限個の Artin 単純環の直積に同型である．

(VI)' Artin 環であり，有限個の単純環の直積に同型である．

□

【定理 1.29 (半単純環の性質)**】** 半単純環は次の性質を持つ：

i) 半単純環の剰余環は半単純環である．

ii) 有限個の半単純環の直積環は半単純環である．

iii) 半単純環は Noether かつ Artin 環であり，有限個の左極小イデアルの直和である．

iv) 半単純環 R 上の任意の単純加群は，R のある左極小イデアルに同型である．

v) 半単純環上の単純加群の同型類は有限個である．

vi) 半単純環 R の極小イデアルは有限個であり，R はそれらの直和に分解される：$R = \mathfrak{a}_1 + \cdots \mathfrak{a}_n$. 各極小イデアルは，正則加群 R の等型半単純成分で，半単純かつ単純環である．これを R の**単純成分**という．単純成分の個数は，単純加群の同型類の個数と一致する．

□

【定理 1.30 (半単純環の中心)**】**

i) 単純環の中心は体である．

ii) R を半単純環，$\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_n$ をその単純成分とすると，中心 $C(R)$ は半単純環で，$C(\mathfrak{a}_1), \cdots, C(\mathfrak{a}_n)$ はその単純成分である．

□

【定理 1.31 (単純半単純環)**】** 環 R について，次の５条件は互いに同値である．

(I) 等型半単純環である．

(II) 半単純環であり，単純 R 加群の同型類は１つだけである．

(III) 半単純環であり，かつ単純環である．

(IV) 半単純環であり，中心は単純環（したがって体）である．

(V) Artin 単純環である．

□

【定理 1.32】 可換体 K 上の有限次元線形空間 V の線形変換の集合 G について，G が完全可約 $\Leftrightarrow$ G の生成する $\mathrm{End}_K(V)$ の部分線形環 $K[G]$ が半単純． □

【定理 1.33 (Artin-Wedderburn の定理)**】** Artin 単純環 R 上の単純加群 V に対して，$D = \mathrm{End}_R(V)$，$n = l_R(R)$ とおけば，

i) D は体である．

ii) V は D 加群として有限生成であり，$\dim_D V = n$．

iii) R 加群 V は忠実かつ再中心化性を持つ．すなわち，標準的に

$$R \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_D(V) \cong M_n(D^o).$$

逆に，体 D' 上の有限生成加群 $V \neq 0$ に対して，$R' = \mathrm{End}_{D'}(V)$，$n' = \dim_{D'} V$ とおくと，

i)' R' は Artin 単純環である．

ii)' V は R' 加群として単純であり，$l_{R'}(R') = n'$．

iii)' D' 加群 V は忠実かつ再中心化性をもつ．すなわち標準的に

$$D' \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{R'}(V).$$

$\square$

【**定理 1.34**】　体 D, D'，整数 n, n' について，

$$M_n(D) \cong M_{n'}(D') \quad \Leftrightarrow \quad n = n', \quad D = D'.$$

$\square$

【**定理 1.35** (半単純環の構造定理)】　半単純環 R に対して，体 $D_1, \cdots, D_h$，整数 $n_1, \cdots, n_h > 0$ が定まり，

$$R \cong M_{n_1}(D_1) \times \cdots M_{n_h}(D_h).$$

逆に，このような環は半単純である．特に，R が代数的閉体 K 上の有限次元半単純線形環のとき，$D_1 = \cdots = D_h = K$. $\square$

【**定理 1.36** (Burnside の定理)】　A を代数的閉体 K 上の線形環とする．K 上有限次元の A 加群 M について，

$$\mathrm{M}\text{ が単純} \quad \Leftrightarrow \quad A_M = \mathrm{End}_K(M).$$

$\square$

1.4 Hom と $\otimes$

1.4.1 完全系列への作用

【**定理 1.37 (テンソル積の作用)**】　左 R 加群 P と右 R 加群 Q を固定する．

1. 右 R 加群の完全系列

$$M' \xrightarrow{u'} M \xrightarrow{u} \bar{M} \longrightarrow 0$$

は，完全系列

$$M' \otimes_R P \xrightarrow{u' \otimes \mathrm{id}_P} M \otimes_R P \xrightarrow{u \otimes \mathrm{id}_P} \bar{M} \otimes_R P \longrightarrow 0$$

を引き起こす.

2. 左 R 加群の完全系列

$$N' \xrightarrow{v'} N \xrightarrow{v} \bar{N} \longrightarrow 0$$

は，完全系列

$$Q \otimes_R N' \xrightarrow{\mathrm{id}_Q \otimes v'} Q \otimes_R N \xrightarrow{\mathrm{id}_Q \otimes v} Q \otimes_R \bar{N} \longrightarrow 0$$

を引き起こす.

□

【定義 1.38 (平坦加群)】 任意の右 R 加群の単準同型 $u' : M' \to M$ に対して，$u' \otimes \mathrm{id}_P : M' \otimes_R P \to M \otimes_R P$ が単準同型となるとき，左 R 加群は**平坦** (flat) であるという．平坦な右 R 加群も同様に定義される. □

【命題 1.39 (射影加群の平坦性)】 射影的加群は平坦である. □

【命題 1.40 (Noether 環上の有限生成加群の平坦性条件)】 R を Noether 環，P を有限生成 R 加群とするとき，次の 4 条件は互いに同値でる.

1) $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ について，$f \in R \setminus \mathfrak{p}$ が存在して，P_f は R_f 自由加群となる.

2) $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ について，$P_{\mathfrak{p}}$ は $R_{\mathfrak{p}}$ 自由加群である.

3) P は射影的加群である.

4) P は平坦加群である.

□

2　可換環

様々な環の間の関係

離散付値環 $\Rightarrow$　付値環 $\Rightarrow$　局所整域
$\Downarrow$
主イデアル整域 $\Rightarrow$　Bézout 整域
$\Downarrow$
Gauss 整域 (UFD) $\Rightarrow$　GCD 整域 $\Rightarrow$　整閉整域（正規環）

2.1　基礎事項

2.1.1　イデアル

【定義 2.1 (Spec)**】**　環 R に対し，その素イデアルの全体のなす集合を $\mathrm{Spec}(R)$ で表す．また，$\mathfrak{a}$ を R のイデアルとするとき，$\mathfrak{a}$ を含む素イデアルの全体を $\mathrm{Spec}(R, \mathfrak{a})$ で表す：

$$\mathrm{Spec}(R, \mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}\}.$$

□

【命題 2.2 (部分環)**】**　R を可換環，A をその部分環とする．このとき，$\mathfrak{a}$ が R のイデアルなら，$\mathfrak{a} \cap A$ は A のイデアルである．特に，$\mathfrak{p}$ が R の素イデアルで $\mathfrak{p} \not\supset A$ なら，$\mathfrak{p} \cap A$ は A の素イデアルとなる．

□

【命題 2.3 (剰余環のイデアル)**】**　R を可換環，$\mathfrak{a}$ をそのイデアル．$\pi : R \to R/\mathfrak{a}$ を標準的全射とする．ことのき，

1. $\pi_* : \mathfrak{b} \mapsto \pi(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ により次の１対１対応が得られる：

$$\pi_* : \{\mathfrak{a} \text{ を含む } R \text{ のイデアルの全体}\} \xrightarrow{\simeq} \{R/\mathfrak{a} \text{ のイデアルの全体}\}$$

2. 1. の対応は次の１対１対応を与える：

$$\pi_* : \mathrm{Spec}(R, \mathfrak{a}) \cong \mathrm{Spec}(R/\mathfrak{a}).$$

□

【命題 2.4 (分数環のイデアル)**】** R を単位可換環，S を単位元を含みゼロを含まない R の積閉集合，R_S を分数環，j を R から R_S への包含写像とする：

$$j : R \to R_S = \left\{ xs^{-1} \,\middle|\, x \in R, s \in S \right\}.$$

1. $\mathfrak{b}$ が R_S のイデアルであるとき，$j^{-1}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b} \cap R$ は R のイデアルとなり，対応 $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a} \cap R$ は次の単射を与える：

   $j^* : \{R_S$ のイデアルの全体$\} \to \{R$ および $\mathfrak{a} \cap S = \emptyset$ となる R のイデアルの全体$\}$

   この写像の逆像は，対応

   $$j_* : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}_S := \left\{ as^{-1} \,\middle|\, a \in \mathfrak{a}, s \in S \right\}$$

   で与えられる．

2. 1. の対応 j^* は素イデアルに制限すれば全単射となる：

   $$j^* : \mathrm{Spec}(R_S) \cong \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$$

□

【定義 2.5 (斉次イデアル)**】** 次数付環 $A = \bigoplus_j A_j$ のイデアル $\mathfrak{a}$ は，A の斉次元たちから生成されるとき，**斉次イデアル** (homogeneous ideal) という． □

【命題 2.6 (斉次イデアルの特徴付け)**】** 次数付環 $A = \bigoplus_j A_j$ のイデアル $\mathfrak{a}$ が斉次イデアルであるための必要十分条件は，$\mathfrak{a}_j := \mathfrak{a} \cap A_j$ として，$\mathfrak{a} = \bigoplus_j \mathfrak{a}_j$ が成り立つことである． □

【命題 2.7 (斉次素イデアルの構造)**】** 次数付環 $A = \bigoplus_j A_j$ と正整数 d に対して，$A^{(d)} = \bigoplus_j A_{dj}$ とおく．$A^{(d)}$ を A の部分環と見なすと，A の任意の斉次素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して，$\mathfrak{p}^{(d)} = \mathfrak{p} \cap A^{(d)}$ は $A^{(d)}$ の斉次素イデアルとなり，対応 $\pi : \mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}^{(d)}$ は，A の斉次素イデアル全体と $A^{(d)}$ の斉次素イデアル全体の間の 1 対 1 対応を与える．また，π の逆対応は，$\pi^* : \mathfrak{q} \mapsto \sqrt{\mathfrak{q}}$ で与えられる． □

2.2 整拡大

【定義 2.8 (整拡大)**】** S を整域，R をその部分環とする．S の元 x が，R 係数のモニック多項式 $f(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n$ の根となるとき，x は R 上**整**であるという．S の任意の元が R 上整であるとき，S は R 上**整**，あるいは S は R の**整拡大**であるという． □

【定義 2.9 (整閉)**】** S を整域，R をその部分環とする．

i) R 上整な S の元の全体 $\tilde{R}$ は，S の部分 R 多元環となる．これを，R の S における**整閉包**という．

ii) R の S における整閉包が R と一致するとき，R は**整閉**であるという．

iii) R の商体 $Q(R)$ における整閉包を R の**正規化**という．また，R の正規化が R 自身と一致するとき，R を**整閉整域**という．

□

2.3 Artin 環

【定義 2.10 (Artin 環)**】** 単位元をもつ可換環 R において，その真イデアルからなる任意の集合が包含関係に関して常に極小元をもつとき，R を **Artin 環**という． □

2.3.1 例

【例 2.11】

1.

2. Artin 環の商環は Artin 環である．

□

2.3.2　性質

【命題 2.12】　Artin 環は Noether 環である． □

2.4　Noether 環

【定義 2.13 (Noether 環)**】**　単位元をもつ可換環 R において，その真イデアルからなる任意の集合が包含関係に関して常に極大元をもつとき，R を **Noether 環**という． □

2.4.1　例

【例 2.14】

1. 主イデアル環は Noether 環である．したがって，$\mathbb{Z}$，体 k 上の整式環 $k[X]$ は Noether 環である．
2. Artin 環は Noether 環である．
3. Noether 環の商環は Noether 環である．
4. R が Noether 環ならその上の有限生成環 $R[X_1, \cdots, X_n]/I$ も Noether 環となる．

□

2.4.2　性質

【命題 2.15】　単位元をもつ可換環 R について，つぎの４条件は同等である．

i) R は Noether 環.

ii) R のイデアルの任意の昇鎖列 $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \cdots$ について，適当な $N > 0$ が存在して $I_N = I_{N+1} = \cdots$.

iii) R の任意のイデアルは有限生成イデアルである．

iv) 有限生成 R 加群の部分加群は有限生成 R 加群である．

□

【**定理 2.16** (Hilbert の基底定理)】　R が Noether 環ならその上の有限生成環 $R[X_1, \cdots, X_n]/I$ も Noether 環となる．□

【**定義 2.17** (Krull 次元)】　R を環として，R の素イデアルの昇鎖 $\mathfrak{p}_0 \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathfrak{p}_n$ を長さ n の素イデアル列という．素イデアル列の長さの上限を R の **Krull 次元**といい，K-dim R と書く．□

2.5　正規環

【**定義 2.18** (正規環)】　整閉整域を**正規環**という．□

2.5.1　例

【**例 2.19** (正規環の例)】

1. A を正規環とすると，$A[X_1, \cdots, X_n]$ も正規環．特に，k を体とすると，$k[X_1, \cdots, X_n]$ は正規環.
2. A を正規環とすると，その分数環 A_S も正規環.
3. 可換体の正規部分環 A_i $(i \in I)$ の交わり $\cap_{i\in I} A_i$ は正規.

□

2.5.2　性質

【**定理 2.20**】　A を正規環，$\mathfrak{p}$ をその高さ 1 の素イデアルとして，

$$A = \cap_{\mathrm{ht}(\mathfrak{p})=1} A_{\mathfrak{p}}. \tag{1}$$

□

2.6 局所環

【定義 2.21 (局所環)**】** 単位元をもつ可換環が極大イデアルを一つしか持たないとき，局所環という． □

2.6.1 Noether 局所環

【定義 2.22 (パラメーター系)**】** Noether 局所環 $(R, \mathfrak{m})$ について，$\mathfrak{m}$ の元の列 $\{a_1, \cdots, a_d\}(d =$K-dim $R)$ で，$\mathfrak{m} = \sqrt{(a_1, \cdots, a_d)}$ となるとき，$\{a_1, \cdots, a_d\}$ を R の**パラメーター系**という． □

【定義 2.23 (正則局所環)**】** Noether 局所環 $(R, \mathfrak{m})$ が $\mathfrak{m} = (a_1, \cdots, a_d)$ となるパラメーター系 $\{a_1, \cdots, a_d\}(d =$K-dim $R)$ をもつとき，$(R, \mathfrak{m})$ を**正則局所環**，$\{a_1, \cdots, a_d\}$ をその**正則パラメーター系**という． □

【定理 2.24 (Auslander)**】** 正則局所環は素元分解環であり，したがって正規環である． □

【定義 2.25 (Cohen-Macaulay 環)**】**

1. A を環，M をその上の加群とする．A の元の列 $x_1, \cdots, x_d$ は，次の条件を満たすとき，長さ d の M-**正則列** (M-regular sequence) であるという：$i = 1, \cdots, d$ に対して，x_i をかける写像

$$x_i : M/(x_1, \cdots, x_{i-1})M \to M/(x_1, \cdots, x_{i-1})M$$

   が単射でありかつ全射でない．

2. A を Noether 局所環，M を有限生成 A-加群とする．A の極大イデアルに含まれる M-正則列の長さの最大値を，M **の深さ** (depth) といい，depth$M$ で表す．

3. $\dim A = \mathrm{depth} A$ となる Noether 局所環 A を **Cohen-Macaulay 環**という．

□

3　代数

3.1　外積代数

以下，特に断らない限り体 K は標数ゼロとする．

【定義 3.1 (外積べき空間)**】**　体 K 上の線形空間 V に対して，ある体 K 上の代数 $\bigwedge V$ と線形写像 $j: V \to \bigwedge V$ が存在して，V から任意の体 K 上の代数 A への線形写像 $\phi: V \to A$ が

$$\phi(v) \cdot \phi(v) = 0 \quad \forall v \in V$$

を満たすとき，$\phi_* \circ j = \phi$ となる代数の準同型 $\phi_*: \bigwedge V \to A$ が一意的に存在する．この対 $(\bigwedge V, j)$ を V **の外積代数**という．外積代数における積は，$a \wedge b$ と表す．　$\square$

【命題 3.2 (次数付き代数構造)**】**　体 K 上の n 次元線形空間 V 上の外積代数 $(\bigwedge V, j)$ に対して次が成り立つ．

i) j は単射である．$e_1, \cdots, e_n$ を V の基底とするとき，$j(e_k)$ を同じ記号 e_k で表すと，

$$1, e_i, e_i \wedge e_j (i < j), \cdots, e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} (i_1 < \cdots < i_p), \cdots$$

が $\bigwedge V$ の基底となる．特に，$\bigwedge V$ の次元は $n(n-1)/2$ である．

ii) $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} (i_1 < \cdots < i_p)$ で生成される線形部分空間を $\bigwedge^p V$ とおくと，基底の取り方に依らない直和分解

$$\bigwedge V = K \oplus V \oplus \cdots \oplus \bigwedge^p V \oplus \cdots \oplus \bigwedge^n V$$

が得られ，この分解に関して $\bigwedge V$ は次数付き代数となる．特に，$v \in \bigwedge^p V, w \in \bigwedge^q V$ に対して，

$$v \wedge w = (-1)^{pq} w \wedge v$$

が成り立つ．

$\square$

【命題 3.3 (テンソルによる表現)**】** テンソル積空間 $\bigotimes^p V$ での反対称化作用素

$$A_p : \bigotimes^p V \to \bigotimes^p V$$

を

$$A_p(v_1 \otimes \cdots v_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sign}(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \cdots v_{\sigma(p)}$$

により定義する．$c(p)$ をゼロでない定数として，$\bigwedge^p V$ の元 $v_1 \wedge \cdots v_p$ に

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \mapsto c(p) A_p(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) \in \bigotimes^p V$$

を対応させと，この対応は一意的に線形単射準同型 $\phi : \bigwedge^p V \to \bigotimes^p V$ に拡張され，外積代数の元の反対称テンソルによる表現を与える．この表現のもとで，$t \in \bigwedge^p V, s \in \bigwedge^q$ に対して，

$$\phi(t \wedge s) = \frac{c(p+q)}{c(p)c(q)} A_{p+q}(\phi(t) \otimes \phi(s)) \in \bigwedge^{p+q} V$$

が成り立つ． □

【定義 3.4 (内積)**】** $\bigwedge^p V^* \times \bigwedge^p V$ 上の双線形関数を

$$< u^1 \wedge \cdots \wedge u^p, v_1 \wedge \cdots \wedge v_p >:= \det(u^i(v_j))$$

により定義し，内積と呼ぶ．e_i を V の基底，θ^j をその双対基底とするとき，一般元

$$\phi = \sum_{i_1 < \cdots i_p} \phi_{i_1 \cdots i_p} \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^p = \frac{1}{p!} \sum_{i_1, \cdots, i_p} \phi_{i_1 \cdots i_p} \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^p$$

$$v = \sum_{i_1 < \cdots i_p} v^{i_1 \cdots i_p} e_1 \wedge \cdots \wedge e_p = \frac{1}{p!} \sum_{i_1, \cdots, i_p} v^{i_1 \cdots i_p} e_1 \wedge \cdots \wedge e_p$$

の内積は

$$< \phi, v >= \sum_{i_1 < \cdots i_p} \phi_{i_1 \cdots i_p} v^{i_1 \cdots i_p} = \frac{1}{p!} \sum_{i_1, \cdots, i_p} \phi_{i_1 \cdots i_p} v^{i_1 \cdots i_p}$$

と表される． □

【命題 3.5】 $\bigwedge V$ と $\bigwedge V^*$ は内積に関して互いに双対空間となり，$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}\}$ と $\{\theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_p}$ が互いに双対基底となる． □

【定義 3.6 (内積作用素)**】** 各 $\phi \in \bigwedge^p V^*$ に対して

$$u \in \bigwedge^q V \mapsto \phi \cdot u \bigwedge^{q-p} V$$

を

$$(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^p) \cdot (v_1 \wedge \cdots \wedge v_q) = \frac{1}{(q-p)!} \sum_{\sigma \in S_q} \mathrm{sign}(\sigma) \omega^1(v_{\sigma(1)}) \cdots \omega^p(v_{\sigma(p)})$$
$$\times \qquad v_{\sigma(p+1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(q)}$$

により定義する．この作用素 $\phi\cdot$ を**内積作用素**と呼ぶ． □

【命題 3.7】

i) $\omega \in V^*, u \in \bigwedge^p V, v \in \bigwedge^q V$ に対して，

$$\omega \cdot (u \wedge v) = (\omega \cdot u) \wedge v + (-1)^p u \wedge (\omega \cdot v).$$

ii) $\omega \in \bigwedge^p V^*, \chi \in \bigwedge^q V^*, u \in \bigwedge^r V (r \geq p+q)$ のとき，次の式が成り立つ．

$$(\omega \wedge \chi) \cdot u = \chi \cdot (\omega \cdot u).$$

iii) $\omega \in \bigwedge^p V^*, v \in \bigwedge^p V$ に対して，

$$\omega \cdot v = < \omega, v > .$$

□

【定義 3.8 (Hodge 双対変換)**】** V が非退化な内積 $< u, v >$ をもつとし，その正規直交基底を $e_1, \cdots, e_n$，その V^* における双対基底を $\theta^1, \cdots, \theta^n$ とする：

$$< e_i, e_j >= \eta_{ij}, \quad < \theta^i, \theta_j >= \eta^{ij}.$$

体積要素

$$*1 := \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n$$

を用いて，線形写像

$$* : \bigwedge^{p} V^* \to \bigwedge^{n-p} V^*$$

を

$$\phi \wedge *\chi = < \phi, \chi > *1 \quad \forall \phi \in \bigwedge^{p} V^*$$

と定義し，**Hodge 双対作用素**と呼ぶ. □

【命題 3.9】 $e_1, \cdots, e_n$ を V の正規直交基底，$\theta^1, \cdots, \theta^n$ をその双対基底とするとき，

$$\begin{aligned} *(\theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_p}) &= \frac{1}{(n-p)!} \epsilon^{i_1 \cdots i_p}{}_{i_{p+1} \cdots i_n} \theta^{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_n} \\ &= \eta^{i_1 j_1} \cdots \eta^{i_p j_p} (e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_p}) \cdot (*1). \end{aligned}$$

□

3.2 Clifford 代数

3.2.1 定義と一般的性質

【定義 3.10】 体 K 上の n 有限次元ベクトル空間 V とその計量 q に対して，そのテンソル代数を $\mathscr{T}(V)$，$v\otimes v+q(v,v)(v\in V)$ の形の元全体から生成される $\mathscr{T}(V)$ のイディアルを $\mathscr{I}_q(V)$ とする．このとき，商代数

$$\mathcal{C}\ell(V,q):=\mathscr{T}(V)/\mathscr{I}_q(V)$$

を (V,q) **に伴う Clifford 代数**という．特に，$K=\mathbb{R}$ で q が (p,q) 型の符号を持つ非退化計量のとき，それに伴う Clifford 代数を $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q})=\mathcal{C}\ell_{p,q}$ と表す．また，$K=\mathbb{C}$ で q が非退化のとき，それに伴う Clifford 代数は次元のみで決まるので，それを $\mathcal{C}\ell(\mathbb{C}^n)=\mathbb{C}\ell_n$ と表す．さらに，$\mathcal{C}\ell_{p,0}=\mathcal{C}\ell_p$，$\mathcal{C}\ell_{0,q}=\mathcal{C}\ell_q^*$ と略記する． □

【命題 3.11】 V から $\mathcal{C}\ell(V,q)$ への自然な写像 j は単射であり，$(\mathcal{C}\ell(V,q),j)$ は次の意味で普遍的である：

V から単位元を持つ K を係数とする任意の代数 A への線形写像 f が，$f(v)f(v)=-<v,v>$ を満たすとき，K-代数としての準同型 $\phi:\mathcal{C}\ell(V,q)\to A$ で $f=\phi\circ j$ となるものが一意的に存在する．

□

【命題 3.12】 任意の $v_1,\cdots,v_j\in V$ に対して，対応

$$v_1\wedge\cdots\wedge v_j\in\Lambda^j(V)\mapsto\frac{1}{j!}\sum_{\sigma\in S_j}\mathrm{sign}(\sigma)v_{\sigma(1)}\cdots v_{\sigma(j)}$$

により決まる写像

$$j:\Lambda^*V\to\mathcal{C}\ell(V,q)$$

は K-加群としての同型となる．特に，$\mathcal{C}\ell(V,q)$ は 2^n 次元ベクトル空間で，$e_1,\cdots,e_n$ を V の基底とすると，$e_{i_1}\cdots e_{i_j}(i_1<\cdots<i_j,$ $1\le j\le n)$ の形の元の全体は $\mathcal{C}\ell(V,q)$ の基底となる． □

【定義 3.13】 $\mathcal{C}\ell(V,q)$ に対して，$\alpha(v)=-v(\forall v\in V)$ となる自己同型が一意的に存在する．この自己同型を**主自己同型**という．また，$\beta(v)=v(\forall v\in V)$ となる反自己同型（i.e., $\beta(vw)=\beta(w)\beta(v)$）が一意的に存在する．これを**主反自己同型**または転置写像と呼ぶ． □

3.2.2 構造

【命題 3.14】

i) α の固有値は $+1$ および -1 で，$C\ell(V,q)$ は対応する固有空間の直和となる：
$$C\ell(V,q) = C\ell^0(V,q) \oplus C\ell^1(V,q)$$
この分解により，$C\ell(V,q)$ は $\mathbb{Z}_2$ を次数とする次数付き代数となる．

ii) 次の K-代数としての同型が成り立つ：
$$C\ell^0_{p,q} \cong C\ell_{p-1,q},$$
$$\mathbb{C}\ell^0_n \cong \mathbb{C}\ell_{n-1}.$$

iii) $\mathbb{C}$-代数として次の同型が成り立つ：
$$C\ell_{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}\ell_{p+q}.$$

□

【定義 3.15】 $\mathscr{A}$ と $\mathscr{B}$ を $\mathbb{Z}_2$-次数付き代数とする．そのテンソル積の要素のうち，$\mathscr{A}^0$ ないし $\mathscr{A}^1$ に属する元と $\mathscr{B}^0$ ないし $\mathscr{B}^1$ に属する元のテンソル積として表されるもの，$a \otimes b$，$a' \otimes b'$ に対して，その積を
$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (-1)^{\deg(b)\deg(a')}(aa') \otimes (bb')$$
と定義する．このとき，$\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ に
$$(\mathscr{A}\hat{\otimes}\mathscr{B})^0 := \mathscr{A}^0 \otimes \mathscr{B}^0 + \mathscr{A}^1 \otimes \mathscr{B}^1,$$
$$(\mathscr{A}\hat{\otimes}\mathscr{B})^1 := \mathscr{A}^0 \otimes \mathscr{B}^1 + \mathscr{A}^0 \otimes \mathscr{B}^1$$
により次数を与えて得られる $\mathbb{Z}_2$ 次数付き代数を，**$\mathscr{A}$ と $\mathscr{B}$ の $\mathbb{Z}_2$ 次数付きテンソル積**と呼び，$\mathscr{A}\hat{\otimes}\mathscr{B}$ と表す． □

【命題 3.16】

i) (V,q) の直交分解 $V = V_1 \oplus V_2, q = q_1 \oplus q_2$ に対して，次の K-代数としての同型が存在する：

$$\mathcal{C}\ell(V,q) \cong \mathcal{C}\ell(V_1,q_1)\hat{\otimes}\mathcal{C}\ell(V_2,q_2).$$

ii) 特に，次の同型が成り立つ：

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\ell_{p,q} &\cong \mathcal{C}\ell_1\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}\mathcal{C}\ell_1\hat{\otimes}\mathcal{C}\ell_1^*\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}\mathcal{C}\ell_1^*,\\ \mathbb{C}\ell_n &\cong \mathbb{C}\ell_1\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}\mathbb{C}\ell_n.\end{aligned}$$

ただし，$\mathcal{C}\ell_1$，$\mathcal{C}\ell_1^*$，$\mathbb{C}\ell_1$ はそれぞれ p,q,n 回現れるものとする．

□

【定義 3.17】 $\mathcal{C}\ell(V,q) = \mathcal{C}\ell_{r,s}(n=r+s)$ に対して，V が向きづけられているとして，V の正の向きの q-正規直交基底 $e_1,\cdots,e_n$ から定義される

$$\omega := e_1\cdots e_n \in \mathcal{C}\ell_{r,s}$$

を $\mathcal{C}\ell_{r,s}$ の**体積要素**と呼ぶ. □

【命題 3.18】 $\mathcal{C}\ell_{r,s}$ の体積要素 ω に対して次の性質が成り立つ：

i) n が奇数の時，$\mathcal{C}\ell_{r,s}$ の中心は $\mathbb{R}+\mathbb{R}\cdot\omega$.

ii) n が偶数の時，$\mathcal{C}\ell_{r,s}$ の中心は $\mathbb{R}$ で，任意の $\phi\in\mathcal{C}\ell_{r,s}$ に対して，$\omega\phi = \alpha(\phi)\omega$.

iii)

$$\omega^2 = \begin{cases} (-1)^s & \text{for } n\equiv 0,3(\mathrm{mod}4)\\ (-1)^{s+1} & \text{for } n\equiv 1,2(\mathrm{mod}4)\end{cases}$$

□

	1	2	3	4	5	6	7	8
$C\ell_n$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8)\oplus\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(16)$
$C\ell_n^*$	$\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(2)\oplus\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(16)$
$\mathbb{C}\ell_n$	$\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{C}(2)\oplus\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{C}(4)\oplus\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{C}(8)\oplus\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{C}(16)$

表 1: $n=1,\cdots,8$ に対する Clifford 代数の分類

3.2.3　分類と相互関係

【命題 3.19】　次の $\mathbb{R}$ 代数としての同型が成り立つ：

i) $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\cong\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$:

$$1\otimes 1\mapsto(1,1),\quad i\otimes i\mapsto(1,-1),\quad i\otimes 1\mapsto(i,i),\quad 1\otimes i\mapsto(-i,i).$$

ii) $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{H}\cong\mathbb{C}(2)$:

$$1\otimes e_j\mapsto -i\sigma_j,\quad i\otimes e_j\mapsto\sigma_j.$$

iii) $\mathbb{H}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{H}\cong\mathbb{R}(4)$:

$$\begin{aligned}&e_1\otimes 1\mapsto 1\otimes(-i\sigma_2),\quad e_2\otimes 1\mapsto(-i\sigma_2)\otimes\sigma_3,\\&1\otimes e_1\mapsto\sigma_3\otimes(i\sigma_2),\quad 1\otimes e_2\mapsto(i\sigma_2)\otimes 1.\end{aligned}$$

□

【命題 3.20】　$n=1,\cdots,8$ に対して，$C\ell_n, C\ell_n^*, \mathbb{C}\ell_n$ は表 1 で与えられる． □

【定理 3.21 (周期性)**】**　次の代数としての同型が成り立つ：

$$\begin{aligned}&C\ell_n\cong C\ell_{n-2}^*\otimes C\ell_2\cong C\ell_{n-2}^*\otimes\mathbb{R}(2)\\&C\ell_n^*\cong C\ell_{n-2}\otimes C\ell_2^*\cong C\ell_{n-2}\otimes\mathbb{H}\\&C\ell_{r,s}\cong C\ell_{r-1,s-1}\otimes C\ell_{1,1}\cong C\ell_{r-1,s-1}\otimes\mathbb{R}(2).\end{aligned}$$

特に，$C\ell_n$ と $C\ell_n^*$ に対して n に関する次の周期 8 の周期性がある：

$$\begin{aligned}&C\ell_{n+8}\cong C\ell_n\otimes C\ell_8\cong C\ell_n\otimes\mathbb{R}(16),\\&C\ell_{n+8}^*\cong C\ell_n^*\otimes C\ell_8^*\cong C\ell_n^*\otimes\mathbb{R}(16).\end{aligned}$$

n	$C\ell_n$	ν_n	d_n	K_n	$\mathscr{M}_n$	$\mathbb{C}\ell_n$	$\nu_n^{\mathbb{C}}$	$d_n^{\mathbb{C}}$	$\mathscr{M}_n^{\mathbb{C}}$
1	$\mathbb{C}$	1	2	$\mathbb{C}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$	2	1	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$
2	$\mathbb{H}$	1	4	$\mathbb{H}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{C}(2)$	1	2	$\mathbb{Z}$
3	$\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}$	2	4	$\mathbb{H}$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	$\mathbb{C}(2)\oplus\mathbb{C}(2)$	2	2	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$
4	$\mathbb{H}(2)$	1	8	$\mathbb{H}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{C}(4)$	1	4	$\mathbb{Z}$
5	$\mathbb{C}(4)$	1	8	$\mathbb{C}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{C}(4)\oplus\mathbb{C}(4)$	2	4	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$
6	$\mathbb{R}(8)$	1	8	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{C}(8)$	1	8	$\mathbb{Z}$
7	$\mathbb{R}(8)\oplus\mathbb{R}(8)$	2	8	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	$\mathbb{C}(8)\oplus\mathbb{C}(8)$	2	8	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$
8	$\mathbb{R}(16)$	1	16	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{C}(16)$	1	16	$\mathbb{Z}$

表 2: $n = 1, \cdots, 8$ に対する Clifford 代数の表現

また，次の対称性がある：

$$C\ell_{r,s} \cong C\ell_{r-4,s+4}, \quad C\ell_{r,s+1} \cong C\ell_{s,r+1}.$$

さらに，これらより $\mathbb{C}\ell_n$ に対して次の周期性が成り立つ：

$$\mathbb{C}\ell_{n+2} \cong \mathbb{C}\ell_n \otimes \mathbb{C}\ell_2 \cong \mathbb{C}\ell_n \otimes \mathbb{C}(2).$$

□

3.2.4　表現

【定義 3.22】　k を体 K の部分体とするとき，$C\ell(V,q)$ から K 線形空間 W の線形変換の作る代数への k 代数としての準同型

$$\rho : C\ell(V,q) \to \mathrm{Hom}_K(W,W)$$

を $C\ell(V,q)$ **の** K**-表現**と呼ぶ．また，この表現のもとで，W を K **上の** $C\ell(V,q)$**-加群**と呼ぶ．□

【定理 3.23 (表現定理)**】**　$K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のとき，行列代数 $M(n,K) = \mathrm{Hom}_K(K^n, K^n)$ の既約表現は自明な表現と K^n への基本表現に限られる．これより Cliffor 代数 $C\ell_n(\mathbb{C}\ell_n)$ の $n = 1, \cdots, 8$ に対する実（複素）既約表現の個数 $\nu_n(\nu_n^{\mathbb{C}})$，既約表現の次元 $d_n(d_n^{\mathbb{C}})$，各既約表現の

可換部分代数 K_n，表現環 $\mathscr{M}_n(\mathscr{M}_n^{\mathbb{C}})$ は，表 2 のようになる．さらに，これらの指標は次の周期性を持つ：

$$\begin{aligned}
&\nu_{m+8k} = \nu_m, \quad \nu^{\mathbb{C}}_{m+2k} = \nu^{\mathbb{C}}_m,\\
&d_{m+8k} = 2^{4k} d_m, \quad d^{\mathbb{C}}_{m+2k} = 2^k d^{\mathbb{C}}_m,\\
&\mathscr{M}_{m+8k} \cong \mathscr{M}_m, \quad \mathscr{M}^{\mathbb{C}}_{m+2k} \cong \mathscr{M}^{\mathbb{C}}_m,\\
&K_{m+8k} \cong K_m.
\end{aligned}$$

□

4　体

4.1　諸定義

【定義 4.1 (素体)】　可換体 K は，その部分体が必ず K と一致するとき**素体** (prime field) という．　□

【定義 4.2 (標数)】　体 K の単位元 1 の n 個の和 $n1$ が 0 となる自然数 n が存在するとき，その最小値 p は素数となり，**標数** (characteristic) という．また，そのような自然数が存在しないときには，標数は 0 であるという．　□

4.2　拡大体

4.2.1　基礎事項

【定義 4.3 (拡大次数)】　体 L が体 K の拡大体であるとき，L を K-加群とみたときの次元を**拡大次数**といい，$[L:K]$ で表す：

$$[L:K] := \dim_K L$$

□

【定理 4.4 (拡大次数の連鎖律)】　体の拡大 $K \subset L \subset M$ に対して，

$$[M:K] = [M:L][L:K]$$

が成り立つ．特に，L が K の有限次拡大体で，さらに M が L の有限次拡大体なら，M は K の有限次拡大体である．　□

【定義 4.5 (代数拡大)】　L を体 K の拡大体とする．L の元 α が K 上**代数的** (algebraic) であるとは，K を係数とする多項式 $f(X)(\neq 0) \in K[X]$ が存在して，$f(\alpha)=0$ となることである．特に，L のすべての元が K 上代数的となるとき，L は K の**代数拡大体** (algebraic extension) であるという．　□

【定理 4.6 (根体)】 $K[X]$ の任意の既約多項式 $f(X)$ に対し，

$$M = K(\theta), \quad f(\theta) = 0$$

となる K の拡大体 M が一意的に存在し，$K[X]/(f)$ と同型となる． □

【命題 4.7 (有限次代数拡大)】 L が K の有限次拡大体なら，K の代数拡大体である．逆に，K に K 上代数的な元を有限個付加して得られる拡大体 $K(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ は，K 上有限次拡大体となる．特に，n 次の既約多項式 $f(X)$ に対して，その根体は K 上の n 次拡大体となる． □

【定義 4.8 (代数的閉体)】 体 K は，K 上の代数方程式が必ず K に解を持つとき，**代数的に閉じている** (algebraically closed) という． □

【定義 4.9 (代数的閉包)】 体 K の拡大体 Ω は，つぎの 2 条件を満たすとき，K の代数的閉包という：

(1) Ω は代数的に閉じている．

(2) Ω は K の代数拡大である．

□

【定理 4.10 (代数的閉包の存在 [Steinitz E (1910)])】 K を任意の体とするとき，その代数的閉包が同型を除いて一意的に存在する． □

4.3 有限体

【定理 4.11 (Wedderburn)】 有限な非可換体は存在しない．[岩波数学事典; Wederburn JHM 1905; Witt E 1931] □

【定理 4.12 (有限体の分類)】 有限体の標数は素数 p で，元の個数は $p^\alpha (\alpha \in \mathbb{N})$ となる．逆に，任意の素数 p と自然数 α に対して，元の個数が p^α となる有限体が同型を除いて一意的に存在する．この体を $GF(p^\alpha)$ または $\mathbb{F}_q (q = p^\alpha)$ と表記する．特に，素数 p に対して，$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}_p$ である．[岩波数学事典] □

参考文献

[1] 山崎圭次郎：環と加群 (岩波書店, 1990).

[2] 横田一郎：群と位相 （裳華房，1973）.

[3] A.O. Barut and R. Raczka: Theory of group representations and applications.

[4] 竹内外史： リー代数と素粒子論（裳華房，1983）.

[5] H.B. Lawson, Jr. and M-L. Michelsohn: *Spin Geometry* (Princeton Univ. Press, 1989).