Geometry

LastUpdate: 2006.9.26

目 次

1 Differential Geometry

[LastUpdate: 2008.5.11]

1.1 History

1.1.1 教科書，レビュー

Berger M (2000)[Ber00]
Riemannian Geometry During the Second Half of the Twentieth Century

1.1.2 全般

1913 (Weyl H) “Riemann 面の概念”

1915 (Einstein A) 一般相対性理論

1924 (Cartan E at ICM) 接続のホロノミー，常微分方程式の幾何学化

1932 (de Rahm, Čech, Hopf, Pontryagin) トポロジー概念の微分幾何学への導入

1935 (Myers S B) “Riemannian manifolds in the large” 「完備 Riemann 多様体の Ricci 曲率が正定値で下に有界ならば，多様体はコンパクトである」

1936 (Synge J L at ICM) “On connectivity of spaces of positive curvature”

1941 (Hodge W V D) “調和積分の理論と応用”

1950 (Bocher, Lichnerowicz at ICM) 曲率の Betti 数への影響.「コンパクト多様体上の Ricci 曲率が正ならば，ゼロでない１次調和形式は存在しない」

(Morse at ICM) “Calculus of variations in the large”

(Chern at ICM) ファイバー束，特性類

1954 (Hirzebruch) Riemann-Roch の定理の一般化

(小平) 小平の消滅定理，射影多様体の理論，層の理論の応用

1962 (Atiyah, Singer at ICM) Atiyah-Singer の指数定理

1966 (Atiyah: Fields 賞受賞)

1978 (Yau S T at ICM) “The role of differential equations in differential geometry” Calabi 予想の証明

(Penrose R at ICM) “The complex geometry of the natural world”

(Gromov M at ICM) “Synthetic geometry in Riemannian manifolds”

* (Donaldson S K) YM 理論の応用

1.1.3 Coarse Geometry

1935 (Myers S B) “Riemannian manifolds in the large” 「完備 Riemann 多様体の Ricci 曲率が正定値で下に有界ならば，多様体はコンパクトである」

1978 (Gromov M at ICM) “Synthetic geometry in Riemannian manifolds”

1998 (Colding T H) 「次の条件を満たす正の定数 $\epsilon = \epsilon(n) > 0$ が存在する： M が $b_1(M) = n$ となるコンパクト n 次元 Riemann 多様体で，その Ricci 曲率が $-\epsilon/\mathrm{diam}_M^2$ により下からおさえられれば，M は n 次元トーラスに位相同型である.」

「コンパクト n 次元 Riemann 多様体 M に対して，次の条件が成り立つ $\epsilon = \epsilon(M) > 0$ が存在する：n 次元多様体 N の Ricci 曲率が下から $-(n-1)$ によっておさえられ，かつ $d_{\mathrm{GH}}(M, N) < \epsilon$ ならば，M と N は微分同相である.」（ここで，d_{GH} は Gromov-Hausdorff 距離.）

1.1.4 Special Geometry

1977 (Hawking S W) Euclidian Taub-NUT 解（非自明な U(2) 不変 Ricci 平坦完備 Riemann 多様体の最初の例）[Haw77]

1978 (Yau S T) Calabi 予想の証明．コンパクト Ricci 平坦 Riemann 多様体の存在.

1992 (Hitchin N J) $\mathbb{R}^4$ 上の Ricci 平坦かつ U(2) 不変な完備 Riemann 計量の Hyper-Kähler 商構成法

(Hitchin N J) ゲージ理論のモジュライ空間における自然な Hyper-Kähler 計量の存在.

* (Bryant R, Salamon S) 例外ホロノミーをもつ７次元および８次元非コンパクト完備多様体の例.

1998 (Joyce D at ICM) 例外ホロノミー $(\mathrm{SU}(n), \mathrm{Sp}(n))$ をもつコンパクト多様体の多くの例.

1.1.5 シンプレクティック幾何学

* (Gromov D) シンプレクティック多様体内の擬正則曲線（J-正則曲線）の概念.

199* (Seiberg-Witten) Seiberg-Witten 方程式

* (Taubes C) Seiberg-Witten 方程式と J-正則曲線の関係：「４次元シンプレクティック多様体 M に対して，ゼロでないコホモロジー類 $a \in H^2(M, \mathbb{Z})$ が非自明な Seiberg-Witten 不変量を持つならば，ある J-正則曲線が存在して，そのホモロジー類は a に Poincaré 双対となる.」

1.1.6 Thurston 予想，Hamiton フロー，3 次元 Poincaré 予想

３次元多様体に対する

1982 Ricci flow [Hamilton R 1982[Ham82]]

2003 Perelman の定理 [Perelman G [Per02, Per03b, Per03a]]

1.2　接続

1.2.1　ベクトル束の接続

【定義 1.1 (主ファイバー束の接続)】　多様体 M 上の構造群 G をもつ主ファイバー束を $P(M,G)$，各点 $u\in P$ において，P のファイバーに接するベクトル全体の作る $T_u(P)$ の線形部分空間を G_u とする．このとき，各点 u で定義された $T_u(P)$ の線形部分空間 H_u の系 Γ が次の性質をもつとき，Γ を P 上の**接続** (connection) という：

(a) $T_u(P)=G_u+H_u$ (直和)
(b) $(R_a)_*H_u=H_{ua}$(任意の $u\in P,\ a\in G$)
(c) H_u は u に滑らかに依存.

また，G_u は**鉛直部分空間** (vertical subspace)，H_u は**水平部分空間** (horizontal subspace) という．□

【定義 1.2 (主ベクトル束上の接続形式)】　$P(M,G)$ を多様体 M 上の構造群 G をもつ主ファイバー束，$\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数とし，G の P への右作用から誘導される $\mathfrak{g}$ と P 上の鉛直ベクトル場の対応を $A\mapsto A^*$ で表す．このとき，P 上の接続 Γ が与えられると，P 上の $\mathfrak{g}$ に値をとる 1 形式 ω で，Γ から定義されるベクトル $X\in T_u(P)$ の鉛直成分が $(\omega_u(X))^*$ と一致するものが，常に一意的に存在する．この P 上の 1 形式 ω を Γ の**接続形式** (connection form) という．□

【命題 1.3 (接続形式の性質)】　主ファイバー束 $P(M,G)$ 上の接続形式 ω は次の性質をもつ：

(a) $\omega(A^*)=A,\ \forall A\in\mathfrak{g}$.
(b) $(R_a)^*\omega=\mathrm{ad}(a^{-1})\omega,\ \forall a\in G$.

　逆に，これらの条件を満たす P 上の $\mathfrak{g}$ に値を取る 1 形式は，適当な接続 Γ の接続形式となる．□

【命題 1.4 (局所的表現)】　主ファイバー束 $P(M,G)$ の局所座標系を $\{(\psi_\alpha,U_\alpha)\}$ とする：

$$\begin{array}{cccc} \psi_\alpha: & \pi^{-1}(U_\alpha) & \to & U_\alpha\times G \\ & \Uplus & & \Uplus \\ & u & \mapsto & (\pi(u),\phi_\alpha(u)) \end{array}$$

このとき，G の P に対する右作用は

$$\phi_\alpha(ua) = \phi_\alpha(u)a, \quad \forall a \in G$$

と表される．いま，各局所座標系から定義される P の局所断面 σ_α を

$$\phi_\alpha(\sigma_\alpha(x)) = e, \quad x \in U_\alpha$$

により定義すると，異なる座標近傍での局所断面の関係は,

$$\phi_\beta(u) = g_{\beta\alpha}(x)\phi_\alpha(u), \quad x = \pi(u) \in U_\alpha \cap U_\beta$$

により定義される変換関数 $g_{\beta\alpha}(x) = g_{\alpha\beta}(x)^{-1}$ を用いて,

$$\sigma_\beta(x) = \sigma_\alpha(x)g_{\alpha\beta}(x), \quad x \in U_\alpha \cap U_\beta$$

と表される．

いま，P 上の接続形式 ω に対して，各座標近傍 U_α において $\mathfrak{g}$ に値を取る 1 形式 ω_α を

$$\omega_\alpha := (\sigma_\alpha)^*\omega$$

により定義すると，$X \in T_x(U_\alpha)$ の $u = \sigma_\alpha(x) \in P$ における水平リフト，すなわち $\pi_*\tilde{X} = X, \omega(\tilde{X}) = 0$ となるベクトル $\tilde{X} \in T_u(P)$ は

$$\tilde{X} = (\sigma_\alpha)_*X - (\omega_\alpha(X))^*_u$$

で与えられる．また，ω_α の座標変換則は

$$\omega_\beta = \mathrm{ad}(g_{\beta\alpha})\omega_\alpha - (dg_{\beta\alpha})g_{\beta\alpha}^{-1}$$

で与えられる． □

【定義 1.5 (テンソル値微分形式)】 $P(M, G)$ を主ファイバー束，V を線形空間，ρ を G の V への線形表現とする．このとき，V に値を取る P 上の r-形式 ϕ が

$$(R_a)^*\phi = \rho(a^{-1})\phi, \quad \forall a \in G$$

を満たすとき，(ρ, V) **型準テンソル値 r-形式** (pseudtensorial form) という．

さらに，Γ を P 上の接続，$h : T_u(P) \to H_u$ を対応する水平部分空間への射影するとき，(ρ, V) 型準テンソル値 r-形式 ϕ が水平，すなわち

$$(\phi h)(X_1, \cdots, X_r) := \phi(hX_1, \cdots, hX_r)$$

に対して，$\phi h = \phi$ を満たすとき，**テンソル値 r-形式** (tensorial form) という．

テンソル値微分形式は，P に随伴するベクトル束 $E = P \times_\rho V$ に値を取る微分形式と 1 対 1 に対応する． $\square$

【定義 1.6 (共変外微分)】 Γ を主ファイバー束 $P(M, G)$ 上の接続，$h : T_u(P) \to H_u$ を対応する水平部分空間への射影する．(ρ, V) 型準テンソル値 r-形式 ϕ に対して，$D\phi := (d\phi)h$ は (ρ, V) 型テンソル値 $(r+1)$-形式となる．これを ϕ の**共変外微分** (exterior covariant derivative) という． $\square$

【定理 1.7 (曲率形式)】 主ファイバー束 $P(M, G)$ 上の接続 Γ に対して，その接続形式を ω とするとき，$(\mathrm{ad}, \mathfrak{g})$ 型テンソル値 2 形式 $\mathscr{R} := D\omega$ を Γ の**曲率形式** (curvature form) という．このとき，関係式

$$d\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)] = \mathscr{R}(X, Y), \quad X, Y \in T_u(P),\ u \in P$$

および **Bianchi 恒等式**

$$D\mathscr{R} = 0$$

が成り立つ．

P の座標近傍 U_α での断面を σ_α として，

$$\mathscr{R}_\alpha := \sigma_\alpha^* \mathscr{R}$$

とおくと，$\mathscr{R}_\alpha$ は接続形式の座標成分 $\omega_\alpha = \sigma_\alpha^* \omega$ を用いて，

$$\mathscr{R}_\alpha(X, Y) = d\omega_\alpha(X, Y) + [\omega_\alpha(X), \omega_\alpha(Y)], \quad X, Y \in T_x(U_\alpha)$$

と表され，座標変換 $\sigma_\beta = \sigma_\alpha g_{\alpha\beta}$ に対して，

$$\mathscr{R}_\beta = \mathrm{ad}(g_{\beta\alpha}) \mathscr{R}_\alpha$$

と変換する．また，Bianchi 恒等式は

$$D\mathscr{R}_\alpha := d\mathscr{R}_\alpha + [\omega_\alpha \wedge \mathscr{R}_\alpha] = 0$$

と表される．ここで，一般に，$\mathfrak{g}$ に値を取る p 形式 α と q 形式 β に対して，

$$[\alpha \wedge \beta](X_1, \dots, X_{p+q}) := \\ \frac{1}{p!q!}\sum_\sigma \mathrm{sign}(\sigma)[\alpha(X_{\sigma(1)}, \cdots, X_{\sigma(p)}), \beta(X_{\sigma(p+1)}, \cdots, X_{\sigma(p+q)})]$$

である． $\square$

【定義 1.8 (随伴ベクトル束の接続)】 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ を G の線形表現，主ファイバー束 $\tilde{\pi} : P(M, G) \to M$ に随伴するベクトルバンドルを $\pi : E = P \times_\rho V \to M$，$p : P \times V \to E$ を自然な射影とする（$p(ua, v) = p(u, \rho(a)v)$）．

このとき，$u \in P$ は同型写像

$$\begin{array}{cccccc} u: & V & \to & E_x & & , x = \tilde{\pi}(u) \\ & \Cup & & \Cup & & \\ & v & \mapsto & p(u, v) & & \end{array}$$

と同一視することができる．また，σ_α を $U_\alpha \subset M$ における P の局所切断とすると，

$$\psi_\alpha : U_\alpha \times V \ni (x, v) \mapsto p(\sigma_\alpha(x), v) \in E$$

は，E の局所座標系を与える．

いま，P の接続 $\Gamma = \{H_u \mid u \in P\}$ が与えられると，$(p_*)_{(u,v)}(H_u \oplus 0) \subset T_{p(u,v)}(E)$ は，次の性質をもつ $w = p(u, v)$ のみに依存した部分空間族 $\Gamma' = \{H'_w \subset T_w(E) \mid w \in E\}$ を与える：

$$T_w(E) = T_w(E_x) + H'_w \text{ (直和)}, \quad w \in E,\ x = \pi(w).$$

Γ' は，M の任意のベクトル（場）X の E における水平リフト

$$\tilde{X}_w \in H'_w : \quad \pi_*(\tilde{X}_w) = X_{\pi(w)}$$

を一意的に定める．上で定めた局所座標系 ψ_α では，接続形式 ω の座標成分を ω_α とすると，$\tilde{X}_w$ は

$$\psi_\alpha^* \tilde{X}_w = X_x \oplus (-\rho_*(\omega_\alpha(X_x))v), \quad w = \psi_\alpha(x, v)$$

と表される．ここで，$\rho_* = (d\rho)_e$ は ρ から誘導される Lie 代数の準同型

$$\rho_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V); \quad \rho_*([\xi, \eta]) = [\rho_*(\xi), \rho_*(\eta)]$$

である．

このようにして定義された水平リフトにより，M 上のベクトル場 X は E 上の水平ベクトル場 $\tilde{X}$ および対応する E の 1 径数バンドル変換群 Φ_t を与える．いま，ϕ を E の局所切断とすると，

$$\nabla_X \phi(x) := \lim_{t \to 0} \frac{\Phi_t^* \phi(x) - \phi(x)}{t}$$

により，新たな E の切断に値をもつ M 上の 1 形式 $\nabla \phi$ が定義される．これを接続 Γ' による ϕ の**共変微分** (covariant derivative) という．切断 ϕ を局所座標系 ψ_α で

$$\phi(x) \mapsto \phi_\alpha(x) \in V, \quad x \in U_\alpha$$

と成分表示すると，その共変微分は

$$\nabla \phi \mapsto d\phi_\alpha + \rho_*(\omega_\alpha)\phi_\alpha$$

と表される．また，その曲率

$$F(X, Y)\phi := (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})\phi$$

の座標成分は，$\mathscr{R}_\alpha$ を曲率形式の座標成分として

$$F_\alpha = \rho_*(\mathscr{R}_\alpha)$$

で与えられる．

E の局所切断 ϕ を，

$$p(u, \tilde{\phi}(u)) = \phi(x)$$

により P 上の (ρ, V) 型テンソル値 0-形式 $\tilde{\phi}$ に対応させると，$\nabla \phi$ は共変外微分 $D\tilde{\phi}$ と対応する． □

1.3　曲率と位相

1.3.1　Books and Reviews

- Besse, A.L.: *Einstein Manifolds* (Springer, 1987).

1.3.2　一般的事実

【定理 1.9 (J. Kazdan & F. Warner (1975), L. Bérnard Bergery (1981))**】**
次元 $n \geq 3$ のコンパクト Riemann 多様体はつぎの 3 つのカテゴリーに分類される：

A) M 上の任意のなめらかな関数をスカラ曲率としてもつ計量が存在する．

B) M 上の関数は，恒等的にゼロまたはある領域で負定値のとき，かつそのときのみ，ある計量のスカラ曲率となり，しかもスカラ曲率がゼロとなる計量は必ず Ricci 平坦である．

C) M 上の関数は，ある領域で負定値になるとき，かつその時のみ，ある計量のスカラ曲率となる．

□

1.3.2.1　非負 Ricci 曲率の多様体

【定理 1.10 (**Myers の定理** [Myers SB (1935)])**】**　(M, g) が完備 Riemann 多様体で，その Ricci 曲率が $\mathrm{Ric}(M) \geq k^2 g$ $(k > 0)$ を満たすとする．このとき，M はコンパクトでその直径は $d(M) \leq \pi/k$ を満たす．さらに，M の基本群は有限群となる．□

【注 1.11】　Myers の定理は，Bishop の定理より直ちに得られる．□

【定理 1.12 (Bochner)**】**　コンパクト Riemann 多様体が Ricci 平坦なら，その Killing ベクトルおよび調和 1 形式は平行である．□

【定理 1.13 (**Bochner の定理** [Bochner 1946])**】** (M, g) をコンパクト Riemann 多様体とする．もし，M の Ricci 曲率が非負なら $\dim H^1(M, \mathbb{R}) = b_1 \leq \dim M$ で，その普遍被覆空間は $\mathbb{R}^{b_1} \times N$ に同相である． □

【定理 1.14 (**Gallot-Gromov の定理** [Gallot S, Gromov M])**】** M をコンパクトで連結な n 次元 Riemann 多様体とする．このとき，n と M の直径のみに依存した正の定数 ϵ が存在して，$\mathrm{Ric}(M) \geq -\epsilon(M)^{2/n}$ なら $b_1(M) \leq n$ となる． □

【定義 1.15 (群の増大関数)**】** G を有限生成群，$\mathscr{H}$ をその有限な生成元の組とする．このとき，任意の正整数 s に対し，$\mathscr{H}$ の元およびその逆元を高々 s 個用いて作られる G の異なる元の数を $\gamma_{\mathscr{H}}(s)$ とおくとき，$\gamma_{\mathscr{H}}$ を G の $\mathscr{H}$ に関する増大関数という． □

【定理 1.16 (**Milnor の定理**)**】** (M, g) を非負 Ricci 曲率の完備 Riemann 多様体とする．すると，M の基本群の任意の有限生成部分群に対して，不等式 $\gamma_{\mathscr{H}}(s) \leq ks^n$ が成り立つ．ここで，n は M の次元，k は定数である． □

【定義 1.17 (線と射線)**】** 完備な Riemann 多様体において，共役点対を持たない測地線（半測地線）γ を線（射線）という． □

【定理 1.18 (**Cheeger-Gromoll の定理** [Cheeger J, Gromoll D (1971)])**】** 連結完備な Riemann 多様体 (M, g) が非負 Ricci 曲率をもてば，(M, g) は $E^q \times (N, g_1)$ と表される．ここで，(N, g_1) は線をもたない非負 Ricci 曲率の完備 Riemann 多様体である． □

【定理 1.19 (**Cheeger-Gromoll の定理** [Cheeger J, Gromoll D(1971, 1972)])**】** (M, g) がコンパクト連結な Riemann 多様体で非負の Ricci 曲率をもつとする．このとき，

a) $\pi_1(M)$ の有限正規部分群 F が存在し，$\pi_1(M)/F$ は $\mathbb{Z}^q$ の有限群により拡大となる．

b) (M,g) の普遍被覆 Riemann 多様体は，Ricci 曲率が非負の単連結コンパクト Riemann 多様体 $(\bar{M},\bar{g})$ と Euclid 空間 E^q の直積となる．

c) $(\bar{M},\bar{g})$ の有限等長変換部分群による商 $(\hat{M},\hat{g})$ で，(M,g) の有限被覆 (M_1,g_1) が $\hat{M}\times T^q$ に微分同相で，局所自明化が $(\hat{M},\hat{g})\times(T^q,g_0)$ に局所等長となるファイバーバンドル構造 $p:(M_1,g_1)\to(T^q,g_0)$ をもつものが存在する．ここで，(T^q,g_0) は平坦トーラスである．

□

1.3.2.2 非負スカラ曲率の多様体

【命題 1.20 (Dirac 作用素に対する Weitzenböck 公式)**】** $\mathscr{D}=i\Gamma^\mu D_\mu$ を Riemann 多様体 M 上のスピノールバンドルに対する Dirac 作用素とする．このとき，$\mathscr{D}$ および $\mathscr{D}^2$ は自己共役な楕円型作用素で

$$\mathscr{D}^2=D^*D+\frac{1}{4}s$$

が成り立つ．ここで，s はスカラ曲率である． □

【定理 1.21 (Lichnerowicz の定理 [Lichnerowicz A (1963)])**】** (M,g) をコンパクトなスピン多様体とする．もし，スカラ曲率が非負で高踏的にゼロでなければ，ゼロ以外に調和スピノールは存在しない．また，スカラ曲率が恒等的にゼロなら，すべての調和スピノールは平行となる． □

【定理 1.22 (Hitchin の定理 [Hitchin N (1974)])**】** $\hat{A}:\Omega^{\mathrm{spin}}_*\to KO^{-*}(pt)$ を一般化された $\hat{A}$ 種数とする．もし M がコンパクトなスピン多様体でスカラ曲率が正の計量をもつとすると，$\hat{A}(M)=0$ である． □

【例 1.23】

1. 4 次元では $\hat{A}(M)=\frac{1}{16}\tau(M)$ となる．$K3$ 曲面はスピン多様体で $\hat{A}(M)=-1$ となるので，スカラ曲率が正の計量を許さない．

2. $\mathbb{C}P^2$ はスピン多様体でないので，$\tau(\mathbb{C}P^2) = 1$ であるがスカラ曲率正の計量をもつ．

$\square$

【定理 1.24 (Gromov-Lawson の定理)】 [Gromov M, Lawson HB (1980)]] M が次元 6 以上のコンパクト多様体とする．

1. M が単連結スピン多様体でスカラ曲率正のスピン多様体とスピン同境なら，M もスカラ曲率正の計量をもつ．また，M が単連結スピン多様体で $\hat{A}(M) = 0$ なら，適当な数の連結和 $M\sharp\cdots\sharp M$ はスカラ曲率正の計量をもつ．

2. M がスピン構造を持たないなら，M は常にスカラ曲率正の計量をもつ．

$\square$

1.3.2.3 測地球の体積と面積

【定義 1.25】 n 次元 Riemann 多様体 (M, g) の点 p を中心として測地的半径 t の球体を $B(p, t)$，その体積を $\mathrm{vol}(B(p, t))$ と表す．また，点 p を中心とする指数写像 $\exp_p : T_p(M) \to M$ による標準体積要素の引き戻しを $\exp_p^*(\mu_g) = \theta(x, t) d\Omega_{n-1}(x) dt$ とおく．ここで，$x \in U_p(M)$:$T_p(M)$ である．このとき，

$$\mathrm{vol}(B(p, t)) = \Omega_n t^n \left(1 - \frac{1}{6(n+2)} R(p) t^2 + o(t^2)\right) \tag{1}$$

および

$$\theta(x, t) = t^n \left(1 - \frac{1}{6} \mathrm{Ricci}(x, x) t^2 + o(t^2)\right) \tag{2}$$

が成り立つ． $\square$

【定理 1.26 (**Bishopの定理** [Bishop R (1963)])**】** n 次元 Riemann 多様体 (M,g) の Ricci 曲率がある定数 k に対して $\mathrm{Ricci}(g) \geq (n-1)kg$ を満たしているとする．このとき，勝手な点 p を中心とする測地球の単位立体角あたりの面積を $\theta(x,t)$，断面曲率 k の定曲率空間の対応する量を $\theta_k(t)$ とすると，$\theta(x,t)/\theta_k(t)$ は $\theta(x,t) > 0$ となる t の範囲で t の非増加関数である．特に，$\theta(x,t) \leq \theta_k(t)$ が成り立つ． □

【定理 1.27 (**Gromov の定理**)**】** n 次元 Riemann 多様体 (M,g) の Ricci 曲率がある定数 k に対して $\mathrm{Ricci}(g) \geq (n-1)kg$ を満たしているとする．このとき，勝手な点 p を中心とする測地球の体積を $\mathrm{vol}(B(p,t))$，断面曲率 k の定曲率空間の対応する量を $\mathrm{vol}(B(S^n_k,t))$ とすると，$\mathrm{vol}(B(p,t))/\mathrm{vol}(B(S^n_k,t))$ は $t < \mathrm{diam}(g)$ で t の非増加関数である． □

1.3.2.4 単体的体積

【定義 1.28 (単体的体積)**】** M を n 次元の向き付けられたコンパクト多様体，$[M]$ をその基本ホモロジーるいとする．このとき

$$\|M\| := \inf_{c=\sum \lambda_i\sigma_i \in [M]} \sum_i |\lambda_i|$$

□

【命題 1.29】 コンパクト多様体の単体的体積はつぎの性質をもつ．

1. M が単連結なら，$\|M\| = 0$.
2. M から N への次数 d の写像が存在すれば，$\|M\| \geq |d|\|N\|$.
3. $\dim M = \dim N \geq 3$ なら，

$$\|M\sharp N\| = \|M\| + \|N\|,$$
$$\|M \times N\| \geq C\|M\|\|N\|.$$

ここで，C は次元のみで決まる定数.

□

【定理 1.30 (**Gromovの主不等式**)**】** (M,g) が条件 $R_{ij} \geq -(n-1)g_{ij}$ を満たすコンパクト n 次元多様体なら，$\mathrm{vol}(M,g) \geq C'\|M\|$ が成り立つ．ここで，C' は次元 n のみの関数である． □

1.3.3　特性類

1.3.3.1　Euler 類

【定理 1.31 (曲率形式による表示)**】**　E を多様体 M 上の向き付けられた $2p$ 次元実ベクトルバンドル，$\mathscr{F}^{ij}$ をその計量に関する線形接続の曲率形式とするとき，E の Euler 類は

$$e(E) = \frac{1}{2^{2p}\pi^p p!}\sum \epsilon_{i_1\cdots i_{2p}}\mathscr{F}^{i_1 i_2}\wedge\cdots\wedge\mathscr{F}^{i_{2p-1}i_{2p}}$$

により与えられる．　□

1.3.4　２次元曲面

【定理 1.32 (Thurston 1980)**】**　任意の２次元面は完備な定曲率計量を許す．曲率の符号は（開曲面の場合も含めて）Euler 数で決まる．

1. $\chi > 0$: $S^2, \mathbb{R}P^2$
2. $\chi = 0$: $\mathbb{R}^2, T^2, S^1\times\mathbb{R}$, Klein bottle, Möbius strip.
3. $\chi < 0$: 他のすべての場合

□

1.3.5　３次元多様体

【定理 1.33 (Schoen and Yau)**】**　非コンパクト３次元多様体が Ricci 曲率正の完備 Riemann 計量を持てば $\mathbb{R}^3$ と同相である．　□

【定理 1.34 (Milnor)**】**　Nil を三角行列

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の作る３次元 Lie 群，K を $a,b,c\in\mathbb{Z}$ となるその部分群とする．このとき，Nil/K は S^1 上の T^2 バンドルとなり，$\pi_1(\mathrm{Nil}/K)$ の増大関数は４次の多項式となる．したがって，Milnor の定理より，Nil/K は Ricci 曲率が非負となる Riemann 計量を許さない．　□

1.3.6 ４次元多様体

【定理 1.35 (Euler 数)**】** ４次元多様体 M の Euler 数はその Riemann 計量に関する曲率テンソルをもちいて

$$\chi(M) = \frac{1}{32\pi^2}\int_M d\mu_g \left[C_{ijkl}C^{ijkl} - 3\hat{R}_{ij}\hat{R}^{ij} + \frac{1}{6}R^2\right]$$

と表される．ここで，

$$\hat{R}_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{4}Rg_{ij}.$$

□

【定理 1.36 (符号数)**】** ４次元多様体 M の符号数 (signature) は，Weyl テンソルのカイラル分解 $W = W^+ + W^-$ を用いて

$$\tau(M) = \frac{1}{48\pi^2}\int_M d\mu_g \left(\|W^+\|^2 - \|W^-\|^2\right)$$

で与えられる．ここで，

$$\|W\|^2 := W_{ijkl}W^{ijkl}$$

である． □

【定理 1.37 (J. Thorpe)**】** M を４次元の向き付けられたコンパクト Einstein 多様体とする．このとき，その Euler 数 $\chi(M)$ と符号数 $\tau(M)$ は次の不等式を満たす：

$$\chi(M) \geq \frac{3}{2}|\tau(M)|.$$

□

【定理 1.38】 ４次元コンパクト閉 Riemann 多様体は Ricci 平坦であるが平坦でなければ，$b_1(M) = b_3(M) = 0$. □

【定理 1.39 (N. Hitchen)**】**　M を向き付けられた４次元コンパクト Einstein 多様体とする．もし，その Euler 数と符号数の間に

$$|\tau(M)| = \frac{2}{3}\chi(M)$$

の関係が成り立てば，M は Ricci 平坦であり，平坦，K3 曲面，Enriques 曲面（K3/$\mathbb{Z}_2$)，Enriques 曲面の自由な反正則包合変換による商空間 (K3/$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$) のいずれかである．　□

【定理 1.40 (K3 曲面)**】**　M を K3 曲面とホモトピー同値な４次元多様体とする．このとき，M 上の計量 g に対する次の３つの条件は同値である：

i) g のスカラ曲率が非負．

ii) g は Ricci 平坦．

iii) (M, g) は hyperkähler.

□

【定理 1.41 (M. Gromov (1982))**】**　M を４次元コンパクト多様体とする．M が Einstein 計量を持つなら，

$$\|M\| \leq 2592\pi^2\chi(M)$$

が成り立つ．　□

1.4 等質空間

1.4.1 Books and Reviews

- Kobayashi S, Nomizu K: *Foundation of Differential Geometry II* (Interscience Pub., 1969).
- Besse, A.L.: *Einstein Manifolds* (Springer, 1987).

1.4.2 一般的性質

【定理 1.42 (完備性)**】** 等質 Riemann 空間は完備である．
[Kobayashi-Nomizu] □

【定義 1.43 (Reductivity)**】** G と K の Lie 代数を $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ とするとき，$\mathfrak{g}$ の部分空間 $\mathfrak{m}$ で,

i) $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$, $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{m} = 0$.

ii) $\mathrm{ad}(K)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$

となるものが存在するとき，等質空間 G/K は **reductive** であるという． □

【命題 1.44】 K が次のいずれかのとき，G/K は reductive である．

1. K がコンパクト.
2. K が連結で，任意の $k \in K$ に対し $\mathrm{ad}(k)$ が $\mathfrak{g}$ で完全可約.
3. K が G の離散部分群.

[Kobayashi-Nomizu] □

【例 1.45 (non-reductive homogeneous space)**】** $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ の $\mathbb{R}^n_* = \mathbb{R}^n - \{0\}$ に対する作用の等方群を $H \cong \mathrm{Euclid}(n-1)$ とする：$\mathbb{R}^n_* = \mathrm{GL}(n)/H$．この等質空間は reductive でない．[Kobayashi-Nomizu] □

【命題 1.46】 Reductive な等質空間 G/K において，$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$ とすると，$\mathfrak{m}$ は G/K の点 $[K]$ における接空間 $T_{[K]}(G/K)$ と自然に同一視でき，K のその空間への線形等方表現は $\mathrm{Ad}(K)$ の $\mathfrak{m}$ への作用と対応する． □

【定理 1.47】 上記の Lie 代数の分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{m}$ のもとで，G の $M=G/K$ への作用に対して不変な Riemann 計量と $\mathfrak{m}$ 上の $\mathrm{Ad}_G(K)$ 不変な内積は 1 対 1 に対応する．[Kobayashi-Nomizu] □

【公式 1.48 (曲率公式)**】** 等質空間 $M=G/K$ に対して，G の左不変ベクトル場（Lie 代数の元）X を $\exp(tX)$ の M への左作用から決まる無限小変換 X を同一視する．このとき，

$$[X,Y]_{\mathfrak{g}}=-[X,Y]$$

が成り立つ．また，X,Y,Z を Riemann 多様体 (M,g) の Killing ベクトルとするとき，

$$2g(D_XY,Z)=g([X,Y],Z)+g([X,Z],Y)+g(X,[Y,Z])$$

が成り立つ．これより，$\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{m}$（$\mathfrak{m}$ は $\mathrm{Ad}_G(K)$ 不変）と分解し，G 不変計量 g に対して，$\mathfrak{m}$ の内積を $(X,Y)=g_{[K]}(X,Y)$ により定義すると，次の公式が成り立つ．

i) (**接続係数**) $X,Y\in\mathfrak{m}$ に対して，

$$(D_XY)_{[K]}=-\frac{1}{2}[X,Y]_{\mathfrak{m}}+U(X,Y).$$

ここで，$U:\mathfrak{m}\times\mathfrak{m}\to\mathfrak{m}$ は，$X,Y,Z\in\mathfrak{m}$ に対して

$$2(U(X,Y),Z)=([Z,X]_{\mathfrak{m}},Y)+(X,[Z,Y]_{\mathfrak{m}})$$

が成り立つことで定義される．ただし，$[X,Y]_{\mathfrak{m}}$ は $[X,Y]$ の分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{m}$ における $\mathfrak{m}$ 成分．

ii) (**Riemann 曲率**）$X,Y\in\mathfrak{m}$ に対して，

$$g_{[K]}(R(X,Y)X,Y)=\frac{3}{4}|[X,Y]_{\mathfrak{m}}|^2+\frac{1}{2}([X,[X,Y]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{m}},Y)$$
$$+\frac{1}{2}([Y,[Y,X]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{m}},X)-|U(X,Y)|^2+(U(X,X),U(Y,Y)).$$

iii) （**Ricci 曲率**）X_i を $\mathfrak{m}$ の正規直交基底とするとき，

$$\mathrm{Ric}(X,X) = -\frac{1}{2}\sum_i |[X,X_i]_{\mathfrak{m}}|^2 - \frac{1}{2}\sum_i ([X,[X,X_i]_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}}, X_i)$$
$$-\sum_i ([X,[X,X_i]_{\mathfrak{k}}]_{\mathfrak{m}}, X_i) + \frac{1}{4}\sum_{i,j}([X_i,X_j]_{\mathfrak{m}}, X)^2 - ([Z,X]_{\mathfrak{m}}, X).$$

ここで，$Z = \sum_i U(X_i, X_i)$．$B(X,Y)$ を $\mathfrak{g}$ の Killing 形式とすると，この公式は次のように書き換えられる：

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(X,X) = \ & -\frac{1}{2}\sum_i |[X,X_i]_{\mathfrak{m}}|^2 - \frac{1}{2}B(X,X) \\ & +\frac{1}{4}\sum_{i,j}([X_i,X_j]_{\mathfrak{m}}, X)^2 - ([Z,X]_{\mathfrak{m}}, X).\end{aligned}$$

iv) (**スカラ曲率**）

$$s = -\frac{1}{4}\sum_{i,j}|[X_i,X_j]_{\mathfrak{m}}|^2 - \frac{1}{2}\sum_i B(X_i,X_i) - |Z|^2.$$

□

1.4.3 例

【例 1.49 (球面に推移的に作用する変換群 [Montgomery D & Samelson H (1943), Borel A (1966, 1967)])**】** n 次元球面に等長変換群として有効かつ推移的に作用する変換群の連結部分群はすべて $\mathrm{SO}(n+1)$ の部分群であり，表 1 で尽くされる． □

【例 1.50 (射影空間に推移的に作用する変換群 [Onisčk AL (1963)])**】** 射影空間の有効かつ推移的な等長変換群による等質空間表示は次のものに限られる．

$$\begin{aligned}&\mathbb{R}P^n = \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{O}(n),\\ &\mathbb{C}P^n = \mathrm{SU}(n+1)/S(\mathrm{U}(1)\mathrm{U}(n)),\\ &\mathbb{C}P^{2n-1} = \mathrm{Sp}(n)/\mathrm{Sp}(n-1)\mathrm{U}(1),\\ &\mathbb{H}P^n = \mathrm{Sp}(n+1)/\mathrm{Sp}(n)\mathrm{Sp}(1),\\ &\mathbb{C}aP^2 = F_4/\mathrm{Spin}(9).\end{aligned}$$

□

G	$\mathrm{SO}(n)$	$\mathrm{U}(n)$	$\mathrm{SU}(n)$	$\mathrm{Sp}(n)\mathrm{Sp}(1)$	$\mathrm{Sp}(n)\mathrm{U}(1)$	$\mathrm{Sp}(n)$
G/K	S^{n-1}	S^{2n-1}		S^{4n-1}		
K	$\mathrm{SO}(n-1)$	$\mathrm{U}(n-1)$	$\mathrm{SU}(n-1)$	$\mathrm{Sp}(n-1)\mathrm{Sp}(1)$	$\mathrm{Sp}(n-1)\mathrm{U}(1)$	$\mathrm{Sp}(n-1)$
moduli	0	1	1	1	2	6

G	G_2	$\mathrm{Spin}(7)$	$\mathrm{Spin}(9)$
G/K	S^6	S^7	S^{15}
K	$\mathrm{SU}(3)$	G_2	$\mathrm{Spin}(7)$
moduli	0	0	1

表 1: 球面に推移的に作用する等長変換群

【例 1.51 (トーラスに推移的に作用する変換群 [Montgomery D & Samelson H (1943)])**】** トーラス T^n に有効かつ推移的に作用するコンパクト群は T^n に限られる. □

1.5　対称空間

1.5.1　教科書とレビュー

- Fomenko AT: *Differential Geometry and Topology* (Plenum Pub., 1987)(三村護訳, 微分幾何学とトポロジー（共立出版，1996,1998))
- Besse AL: *Einstein Manifolds* (Springer-Verlag, 1987).
- Helgason S: *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces* (Academic Press, 1978)
- Kobayashi S, Nomizu K: *Foundations of Differential Geometry*, vol. 2 (Interscience, 1969)

1.5.2　対称 Riemann 空間

1.5.2.1　定義と一般的性質

【定義 1.52 (対称 Riemann 空間)**】**　連結な Riemann 多様体 (M, g) は，任意の点 $p \in M$ において対合的等長変換 s_p で p を孤立不動点とするものが存在するとき，**対称 Riemann 空間**という．□

【命題 1.53】　(M, g) を対称 Riemann 空間，s_p をその対合的等長変換とするとき，s_p は p を通る測地線を反転する．すなわち，s_p の $T_p(M)$ における線形等方表現 s_p^* は $s_p^* = -\mathrm{id}$ となる．逆に，任意の点 p に対して p を通る測地線を反転する等長変換 s_p が存在するなら，(M, g) は対称 Riemann 空間である．□

【命題 1.54 (等質性)】　対称 Riemann 空間は等質である．□

【定理 1.55 (Lie 群による特徴付け [Cartan E]**)】**

(i) $M = G/K$ を対称空間，s を $[K] \in M$ での対合的等長変換，σ を $\sigma(f) = s \circ f \circ s^{-1}$ で定義される G の対合的自己同型, $G^\sigma = \{f \in G; \sigma(f) = f\}$, G_0^σ を G^σ の単位元を含む連結成分とする．このとき，$G^\sigma \supset K \subset G_0^\sigma$ が成り立つ．

(ii) 逆に，G を Lie 群，K をコンパクト部分群，σ を G の対合的自己同型とする．もし，$G^\sigma \supset K \supset G_0^\sigma$ が成り立てば，G/K 上の任意の G 不変 Riemann 計量は対称となる．

□

【命題 1.56 (Lie 代数による特徴付け)】 σ を Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の対合的自己同型，$\mathfrak{k}$ および $\mathfrak{p}$ をその固有値 1 および -1 の固有空間とするとき，次の関係が成り立つ：

$$[\mathfrak{k},\mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}.$$

□

【命題 1.57 (曲率)】 $X, Y, Z \in \mathfrak{p}$ のとき，Riemann 対称空間 G/K の曲率は次式で与えられる：

$$\begin{aligned} &R_{[K]}(X,Y)Z = -[[X,Y],Z], \\ &\mathrm{Ric}_{[K]}(X,Y) = -\mathrm{tr}((\mathrm{ad}X\,\mathrm{ad}Y)|_{\mathfrak{p}}) = -\frac{1}{2}B(X,Y). \end{aligned}$$

□

【定理 1.58 (Einstein 空間となるための条件)】 対称空間 (G, K, σ) が Einstein 空間となるための必要十分条件は，Killing 形式 B が $\mathfrak{p}$ 上で恒等的にゼロないし定符号となることである． □

【定理 1.59 (対称 Riemann 空間となる Lie 群)**】** Lie 群 G が両側不変な Riemann 計量 g をもつとき，(G, g) は対称 Riemann 空間となる．特に，G がコンパクトなら対称 Riemann 空間の構造をもつ．さらに，G の 1 助変数部分群は単位元 e を通る測地線を与える．[From: Fomenko AT (1987)[Fom87]] □

【命題 1.60 (対称 Riemann 空間となる Lie 群の接続と曲率)**】** Lie 群 G が両側不変な計量 g を持つとし，X, Y, Z, W を G の左不変ベクトル場とする．このとき次の関係式が成り立つ．

1) $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$.

2) $g([X, Y], Z) + g(Y, [X, Z]) = 0$.

3) $R(X, Y)Z = -\frac{1}{4}[[X, Y], Z]$.

4) $R(X, Y, Z, W) = \frac{1}{4}g([X, Y], [Z, W])$.

特に，断面曲率は常に非負である．[From: Fomenko AT (1987)[Fom87]] □

【命題 1.61 (コンパクト Lie 群の等質空間として表される対称空間)**】** G を単連結かつ連結なコンパクト Lie 群，σ を G の対合的自己同型とする．このとき，σ の不動点集合 H は G の閉部分群で，G/H は単連結となる．さらに，G の両側不変計量は G/H に Riemann 計量を誘導し，その計量に関して G/H は対称 Riemann 空間となる．[From: Fomenko AT (1987)[Fom87]] □

1.5.2.2 分類

【定義 1.62 (既約対称空間)】 対称空間 (G, K, σ) は，K の $\mathfrak{p}$ 上への随伴表現 $\mathrm{Ad}_G(K)$ が既約であるとき，既約であるという． □

【定理 1.63 (既約分解定理)】 任意の単連結対称 Riemann 空間は，Euclid 空間と有限個の既約対称 Riemann 空間の直積となる． □

【定理 1.64 (分類定理)】 単連結既約対称空間 G/K は次の４つに分類される．

i) (**コンパクト型**)

I 型: G が単連結コンパクト実単純 Lie 群の場合．

II 型: 単連結コンパクト実単純 Lie 群 H とその中心 Z を用いて，$G = (H \times H)/Z$，$K = H/Z$ と表される場合．ただし，H, Z は $H \times H$ の対角部分と同一視する．

ii) (**非コンパクト型**) 非コンパクトな既約対称空間は, 中心が自明な非コンパクト単純実 Lie 群 G とその極大コンパクト部分群 K を用いて G/K と表される．これらは，G のタイプに応じて次の 2 つに分類される.

III 型: G の複素化 $G^{\mathbb{C}}$ が複素単純 Lie 群となる場合.

IV 型: G 自体が複素 Lie 群の構造を持つ場合.

$\square$

1.6 Einstein 空間

1.6.1 Books and Reviews

- Besse, A.L.: *Einstein Manifolds* (Springer, 1987).

1.6.2 存在

1. 5 次元以上のコンパクト多様体に対して，Einstein 計量が存在するための条件もまた存在しない例も知られていない．[Besse AL (1987)]

2. 4 次元コンパクト多様体に対しては，Einstein 計量が存在するために条件
$$\chi(M) \geq \frac{1}{2}|p_1(M)| = \frac{3}{2}|\tau(M)| \tag{3}$$
が満たされることが必要であることが知られている．ただし，この条件が十分条件であるかどうかは不明．[Besse AL (1987)]

1.6.3 一意性

1. 次元 $n \geq 4$ では，一意的な Einstein 構造をもつ例は知られていない [Besse AL (1987)].

2. S^n 上では，標準計量の近傍に Einstein 計量は存在せず，ピンチング因子 $3n/(7n-4)$ 以内（$n=4$ では 1/4 以内）では Einstein 計量は一意的である．

3. コンパクト複素等質空間は一意的な Kähler-Einstein 計量をもつが [Matsushima Y]，非 Kähler の Einstein 計量や異なる複素構造に対応する Kähler-Einstein 計量を持つ可能性がある．

4. S^{4n+3} 上には任意の n に対して，非標準的な一様 Einstein 計量が存在する [Jensen G].

5. T^4 上の Einstein 計量はすべて平坦，すなわち定曲率で，モジュライ空間の次元は 6.

6. K3 面上のすべての Einstein 計量は適当な複素構造に関して Kähler であり，モジュライ空間の次元は 57.

1.6.4 モジュライ空間 $\mathscr{E}(M)$

1. コンパクト多様体上では，Einstein 計量のモジュライ空間 $\mathscr{E}(M)$ の次元は局所有限である [Besse A (1987)].
2. $\mathscr{E}(M)$ は計量構造空間 $\mathscr{M}/\mathscr{D}$ 内のなめらかな多様体の解析的 Hausdorff 部分集合である．[Koiso N]

1.6.4.1 一般論

Banach 多様体 X から Banach 空間 B へのなめらかな写像を F とする：

$$F : X \to B$$

このとき，T_xX は Banach 空間となり，$dF_x : T_xX \to B$ は有界写像となる．

【定義 1.65 (形式的積分可能性)**】** X はその接空間の開集合と同一視できるとする．この仮定のもとで，$x \in X$ の近傍での形式的ベキ級数

$$x(t) = x + tv_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!} v_k$$

に対して，

$$F(x(t)) = F(x) + tF_x^1(v_1) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!} F_x^k(v_1, \cdots, v_k)$$

により，$F_x^k(v_1, \cdots, v_k)$ $(k = 0, 1, \cdots)$ を定義する．このとき，$v_1 \in \mathrm{Ker}\ F_x^1$ に対して，適当な形式的ベキ級数 $x(t)$ が存在して，$F(x(t)) = 0$ となるとき，v_1 は**形式的に積分可能**であるという． □

【命題 1.66】

1. $F_x^k(v_1, \cdots, v_k)$ は次の構造をもつ．

$$F_x^k(v_1, \cdots, v_k) = F_x^1(v_k) + P_x^k(v_1, \cdots, v_{k-1}).$$

ここで，P_x^k は多項式である．

2. $x \in X$ の近傍 U で，$\mathrm{Im}\ F_y^1 \subset \mathrm{Ker}\ C_y (y \in U)$ となる T_yX から B への線形作用素 C_y が存在し，C_y は y になめらかに依存するとする．このとき，

$$F_x^j(v_1, \cdots, v_j) = 0 \ (0 \leq j \leq k)$$

を満たす $v_1, \cdots, v_k$ に対して，

$$C_x(P^{k+1}(v_1, \cdots, v_k)) = 0$$

が成り立つ．したがって，$\mathrm{Im}\ F_x^1 = \mathrm{Ker}\ C_x$ が成り立てば，

$$F^{k+1}(v_1, \cdots, v_{k+1}) = 0$$

を満たす v_{k+1} が存在する．

□

【定義 1.67 (障害空間)**】**　前命題において，$\mathrm{Ker}\ F_x^1/\mathrm{Im}\ C_x$ を，積分可能条件 C に従う方程式 $F(x) = 0$ の**障害空間**という．□

1.6.4.2　Einstein 構造の変形

【定義 1.68】　コンパクト Riemann 多様体 M に対して，

$$\begin{aligned}
&\mathscr{M} := \{M \text{ 上のなめらかな Riemann 計量の全体}\},\\
&\mathscr{M}_1 = \left\{g \in \mathscr{M} \,\middle|\, \textstyle\int \mu_g = 1\right\},\\
&S^2M := \{M \text{ 上の 2 階対称共変テンソルのバンドル}\}
\end{aligned}$$

とおく．このとき，$\mathscr{M}$ の接空間 $T_g\mathscr{M}$ は Hilbert 空間 $L^2(S^2M, g)$，$\mathscr{M}_1$ の接空間 $T_g\mathscr{M}_1$ は $\int_M \mu_g \mathrm{Tr}_g h = 1$ となる $h \in T_g\mathscr{M}$ の全体と一致する．□

【定義 1.69】　作用素 $\delta_g : S^2M \to A^1M$ およびその共役作用素 $\delta_g^* : A^1M \to S^2M$ を

$$\begin{aligned}
&(\delta h)_\mu = \nabla^\nu h_{\nu\mu},\\
&(\delta^* v)_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(\nabla_\mu v_\nu + \nabla_\nu v_\mu)
\end{aligned}$$

により定義する..　□

【命題 1.70】

1. Im δ_g^* は $T_g(\mathscr{M}_1)$ の閉部分空間となり，次の直和分解が成り立つ [Besse AL 1987]：
$$T_g\mathscr{M}_1 = \mathrm{Im}\ (\delta_g^*) \oplus [T_g\mathscr{M}_1 \cap \mathrm{Ker}\ \delta_g].$$
（注：Im δ_g^* は，g における $\mathrm{Diff}(M)$ 軌道の接空間である.）

2. $T_g\mathscr{M}_1 \cap \mathrm{Ker}\ \delta_g$ は，つぎの性質をもつ $\mathscr{M}_1$ の実解析的部分多様体 $\mathfrak{S}_g$（**スライス**）の g における接空間となる（Slice Theorem [Ebin DG 1968]）：
   - $\mathfrak{S}_g$ は $\mathrm{Isom}(M,g)$ の作用に対して不変で，$\phi \in \mathrm{Diff}(M)$ に対して $\phi^*\mathfrak{S}_g \cap \mathfrak{S}_g \neq \emptyset$ なら，$\phi \in \mathrm{Isom}(M,g)$.
   - 局所断面 $\chi : \mathrm{Diff}(M)/\mathrm{Isom}(M,g) \to \mathrm{Diff}(M)$ が剰余類 I_g の近傍で存在し，それから誘導される局所写像 $\mathrm{Diff}(M)/\mathrm{Isom}(M,g) \times \mathfrak{S}_g \to \mathscr{M}_1$ が g の近傍で局所微分同相となる. 特に，写像 $\mathrm{Isom}(M,g)\backslash\mathfrak{S}_g \to \mathrm{Diff}(M)\backslash\mathscr{M}_1$ は g の近傍の Riemann 構造への同相写像を与える.

□

【定義 1.71 (Einstein 構造の前モジュライ空間)**】** g を M 上の Einstein 計量とする. $\mathscr{M}_1$ の g におけるスライス $\mathfrak{S}_g$ に含まれる Einstein 計量の全体を，g の近傍における Einstein 構造の**前モジュライ空間**という. □

【注 1.72】 スカラ曲率 $S(g)$ がゼロないし負なら，$\mathrm{Isom}_0(M,g)$ の前モジュライ空間への作用は自明である [Besse AL 1987]. したがって，モジュライ空間は g の近傍で orbifold となる. □

【定義 1.73 (Einstein 作用素)**】** Einstein 作用素 $E : \mathscr{M}_1 \to \mathscr{S}^2M$ を
$$E(g) = \mathrm{Ric}_g - \frac{1}{n} g \int_M \mu_g S_g$$

により定義する．ここで，n は多様体の次元，S_g はスカラ曲率である．このとき，E の線形化 $E'_g = E^1_g : T_g\mathscr{M}_1 \to \mathscr{S}^2 M$ は次のように表される：

$$2E'_g(h) = D^*_g D_g h - 2\delta^*_g \delta_g h - D_g d(\mathrm{Tr} h) - 2\mathring{R}_g h.$$

ここで，D_g は g に関する共変微分作用素，D^*_g はその形式的共役作用素，$\mathring{R}$ は代数的線形作用素

$$(\mathring{R}h)_{\mu\nu} = -R_{\mu\alpha\nu\beta} h^{\alpha\beta}$$

である． □

【定義 1.74 (無限小 Einstein 変形)**】** Einstein 計量 g に対して，次の条件を満たす $h \in T_g\mathscr{M}_1$ を**無限小 Einstein 変形**といい，その全体を $\epsilon(g)$ で表す：

$$E'_g(h) = 0, \quad \delta_g h = 0, \quad \int_M \mu_g \mathrm{Tr}_g h = 0.$$

□

【定理 1.75】 $h \in \mathscr{S}^2 M$ が無限小 Einstein 変形であるための必要十分条件は,

$$(D^*_g D_g - 2\mathring{R}_g) h = 0, \quad \delta_g h = 0, \quad \mathrm{Tr}_g h = 0$$

で与えられる．特に，$\epsilon(g)$ は有限次元である． □

【定理 1.76 (Koiso N 1980)**】** g を M 上の Einstein 計量とする．このとき，スライス $\mathfrak{S}_g$ は g を含み次の性質をもつ有限次元実解析的部分多様体 Z を含む：

i) Z の g における接空間は $\epsilon(g)$ と一致する．

ii) Z は g の近傍での前モジュライ空間を実解析的部分集合として含む.

さらに，$h \in \epsilon(g)$ を接ベクトルとする前モジュライ空間内のなめらかな曲線が存在するための必要十分条件は，h が形式的積分可能であることである． □

【注 1.77】 Einstein 作用素は縮約 Bianchi 恒等式 β_g を積分可能条件としてもつ．この条件に関する障害空間は,.

$$\mathrm{Ker}\ \beta_g = \mathrm{Im}\ E'_g \oplus \epsilon(g).$$

より，$\epsilon(g)$ と同型となる．したがって，決してゼロとならない．このため，前モジュライ空間は Z の真部分集合となることがある．例えば，対称空間 $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^{2k}$ の対称計量 g_0 に対して，$\dim \epsilon(g_0) = 4(4k^2 - 1)$ となるが，$[g_0]$ は前モジュライ空間の孤立点となる． □

1.6.4.3 Einstein 空間の体積

【定理 1.78 (体積値分布の離散性)**】** 与えられた多様体 M 上の Einstein 構造のモジュライ空間は，局所弧状連結で，各連結成分の上で（体積=1 と規格化した）スカラ曲率は一定である．また，可能なスカラ曲率の値は高々可算個である． □

【注 1.79 (モジュライ空間の連結性)**】**

1. $S^{4n+3} (n \geq 2)$ 上の Einstein 構造のモジュライ空間は，少なくとも２つの連結成分をもつ．また，S^{15} に対しては，連結成分の数は３以上である．

2. 曲率がゼロでない３次元定曲率空間の Einstein 構造は一意的である．３次元および４次元局所平坦コンパクト空間のモジュライ空間は連結である．K3 面と微分同相な４次元コンパクト多様体の Einstein 構造のモジュライ空間は連結である．

3. $2m$-次元 Kähler-Einstein 多様体 (M, J, g) の体積は，規格化条件 $\mathrm{Ric} = \pm(2m-1)g$ のもとで，

$$\mathrm{vol}(g) = \left(\frac{2\pi}{2m-1} c_1(J)\right)^m$$

で与えられる．特に，M が $\mathbb{C}P^{m+1}$ ないの次数 $d > m+1$ の超曲面と双正則であるとき，体積は

$$\mathrm{vol}(g) = d\left(2\frac{d-m-2}{2m-1}\right)^m \mathrm{vol}(\mathbb{C}P^m).$$

4. 偶数次元定曲率空間の体積は Euler 特性数に比例し,（曲率で規格化された）その値の全体は離散的な閉集合となる.
5. 奇数次元定曲率空間の（曲率で規格化された）体積は，正曲率なら，任意の小さい値を取りうる．一方，負曲率の場合は，４次元以上では体積値の全体は離散的な閉集合となる．ただし，３次元の場合は，有限な下限 ($\simeq 0.98$) に収束する集合となる.
6. 正曲率 Einstein 空間の体積は，Bishop の不等式より標準球面の体積以下となる.

$\square$

1.6.4.4 Einstein 構造の剛性

【定義 1.80 (剛性)**】** モジュライ空間の孤立点に対応する Einstein 構造は剛性をもつという. $\square$

【定理 1.81 (Koiso N 1979)**】** M 上の Einstein 計量 g に対して,

$$a_0 := \sup\left\{\langle \mathring{R}h, h\rangle/\|h\|_2^2, h \in C^\infty(S_0^2M)\right\}$$

とおくとき，条件

$$a_0 < \max\left\{-\frac{S(g)}{n}, \frac{S(g)}{2n}\right\}$$

が満たされるなら，計量 g は無限小 Einstein 変形を持たない. $\square$

【定理 1.82 (Bourguignon JP)**】** n 次元 Einstein 計量 g の断面曲率の最大値を $K_{\max}$，最小値を $K_{\min}$ とするとき，条件

$$K_{\min} > \frac{n-2}{3n}K_{\max}$$

が満たされれば，g に対応する Einstein 構造は剛性をもつ. $\square$

【定理 1.83】 負の断面曲率をもつ Einstein 構造は３次元以上では剛性をもつ. $\square$

【定理 1.84】 正曲率の定曲率空間に対応する Einstein 構造は剛性をもつ. □

【定理 1.85 (Koiso N 1979)**】**

1. 非コンパクトな局所対称 Einstein 空間は，局所的に 2 次元因子を持たないなら，剛性をもつ.
2. コンパクト既約対称 Einstein 空間は，次のものを除いて剛性をもつ：
   - $\mathrm{SU}(p+q)/S(U(p)\times U(q))$ $(p\geq q\geq 2)$
   - $\mathrm{SU}(m)/\mathrm{SO}(m)$
   - $\mathrm{SU}(2m)/\mathrm{Sp}(m)$
   - $\mathrm{SU}(m)$ $(m\geq 3)$
   - E_6/F_4.

□

1.6.4.5 モジュライ空間の次元

【定理 1.86 (Gallot S 1983)**】** 直径 d の n 次元 Einstein 多様体 (M,g) が条件 $d^2K_{\min}\geq k$ を満たせば，その無限小 Einstein 変形の次元 $\dim(\epsilon(g))$ は $\eta(n,k)$ 以下となる．ここで，

$$\eta(n,k)=Nf\left(\frac{2(n-1)\pi^2-2nk}{\Gamma(k)^2}\right);\quad N=\frac{n(n+1)}{2}-1,$$

$$f(x)=\prod_{j=0}^{\infty}\left[1+\frac{\alpha(n)\beta^jx^{1/2}}{(2\beta^j-1)^{1/2}}\right]^{2/\beta^j},$$

$$\alpha(n)=\frac{2n^{(n-2)/2n}}{(n-2)^{1/2}}\left(\frac{\mathrm{vol}(S^{n-1})}{\mathrm{vol}(S^n)}\right)^{1/n}+2^{1-1/n}.$$

ただし，$n \geq 3$ に対して $\beta = n/(n-2)$, $n = 2$ に対して $\beta = 100$.
また,

$$\Gamma(\alpha) = \begin{cases} 2^{-1/n} H(\alpha) & \alpha \geq 0, \\ |\alpha|^{1/2n} \left[\int_0^{|\alpha|^{1/2}} \left(\frac{\cosh(t)}{H(\alpha)} + \frac{\sinh(t)}{n|\alpha|^{1/2}} \right)^{n-1} dt \right]^{-1/n} & \alpha < 0, \end{cases}$$

$$H(\alpha) = \begin{cases} \alpha^{1/2} \left(\int_0^{\alpha^{1/2}/2} \cos(t^{n-1}) dt \right)^{-1} & \alpha > 0, \\ 2 & \alpha = 0, \\ |\alpha|^{1/2} \left(\int_0^{|\alpha|^{1/2}/2} \cosh(t^{n-1}) dt \right)^{-1} & \alpha < 0 \end{cases}.$$

□

【定理 1.87 (Gallot S 1981, 1983)**】** 各次元 n に対して正の数 $\tilde{\alpha}(n)$ が存在して，条件

$$(n-1)S(g) - n^2 K_{\min} \leq \tilde{\alpha}(n) d^2$$

(d は直径）を満たす Einstein 多様体 (M, g) の無限小 Einstein 変形の全体 $\epsilon(g)$ の次元は平坦なトーラスに対する値 $N = n(n+1)/2 - 1$ を超えない. □

1.6.5 等質 Eintein 空間

【定理 1.88 (**4次元等質 Einstein 空間** [Jensen GR (1969)])**】** 4次元等質 Einstein 空間は対称空間となる. □

【定義 1.89 (**等方既約**)**】** 等質空間 G/K(K はコンパクト）は，K の線形等方表現が既約であるとき，**等方既約** (isotropy-irreducible) という. □

【定理 1.90 ([Wolf JA (1968)])**】** 等方既約な等質空間 G/K は，定数倍を除いて一意的な G 不変計量をもち，その計量は Einstein となる. □

【定理 1.91 ([Besse AL (1987)])**】** コンパクトでない等方既約等質空間は対称空間である． □

【定理 1.92 ([Wolf JA (1968)])**】** K がコンパクト単純 Lie 群で中心が自明なら，等質空間 $\mathrm{SO}(\dim K)/\mathrm{Ad}(K)$ は等方既約である． □

【定理 1.93 (**正スカラ曲率の等質 Einstein 空間**)**】** (M, g) がスカラ曲率正の等質 Einstein 空間とすると，M はコンパクトでその基本群は有限群である．また，等長変換群 G はコンパクトで，極大半単純部分群 G_0 と離散有限群の半直積となる．G_0 は M に推移的に作用する．[¡ Besse.AL1987B] □

【注 1.94】 正スカラ曲率の等質 Einstein 空間の分類は未完である．[Besse.AL1987B] □

【定理 1.95 (**負スカラ曲率の等質 Einstein 空間**)**】** 負スカラ曲率の等質 Einstein 空間は非コンパクトである． □

【定理 1.96 (**ユニモジュラー可解群** [Doti-Miatello I (1982)])**】** G をユニモジュラー可解群とする．このとき，G 上の左不変 Einstein 計量は平坦である． □

【定理 1.97 (**Ricci 平坦な等質 Einstein 空間** [Alekseevskii DV & Kimelfeld BN (1975)])**】** Ricci 平坦な等質 Einstein 空間は平坦で，トーラスと Euclid 空間の積となる． □

<table>
<tr><td>Ricci 曲率</td><td>位相</td><td colspan="3">細分</td><td>分類</td></tr>
<tr><td rowspan="6">正</td><td rowspan="6">コンパクト</td><td rowspan="3">強等方既約</td><td rowspan="2">既約対称空間</td><td>I 型</td><td>完</td></tr>
<tr><td>II 型</td><td>完</td></tr>
<tr><td colspan="2">非対称空間</td><td>完</td></tr>
<tr><td rowspan="3">非強等方既約</td><td rowspan="2">標準</td><td>G:単純</td><td>完</td></tr>
<tr><td>その他</td><td>未</td></tr>
<tr><td colspan="2">非標準</td><td>未</td></tr>
<tr><td>ゼロ</td><td>$E^p \times T^q$</td><td colspan="3"></td><td>未</td></tr>
<tr><td rowspan="2">負</td><td rowspan="2">非コンパクト</td><td colspan="3">既約対称 $\Leftrightarrow$ 等方既約</td><td>完</td></tr>
<tr><td colspan="3">非既約</td><td>未</td></tr>
</table>

表 2: 等質 Einstein 空間の分類

1.6.6 コンパクト等質 Kähler 多様体

【定理 1.98 (Lie 群の随伴表現に伴うコンパクト Kähler 多様体)】
G をコンパクト連結 Lie 群とし，G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ への随伴表現が忠実であるとする．このとき，$\mathfrak{g}$ における各 G 軌道 M に対し，

i) M 上には標準的な G 不変複素構造 J および定数倍を除いて一意的な G 不変な Kähler-Einstein 計量が存在する．この Einstein 計量は正のスカラ曲率をもつ．

ii) M 上の任意の Kähler-Einstein 計量はその等長変換群に関して一様で，適当な G 不変 Kähler-Einstein 計量から複素構造の自己同型により得られる．

$\square$

【定理 1.99 (分類)】

i) 各コンパクト等質 Kähler 多様体は，平坦な複素トーラスとコンパクト単連結等質 Kähler 多様体との Kähler 積となる．

ii) すべてのコンパクト単連結等質 Kähler 多様体は，その等長変換群の随伴表現の軌道（複素構造は上記の標準的なものを取る）と，等質複素多様体として同型で，有理代数多様体となる．

$\square$

【定理 1.100 (Kähler-Einstein 構造の一意性 [Matsushima Y (1972)])**】**
すべてのコンパクト単連結 Kähler 多様体は（定数倍を除いて）一意的な Kähler-Einstein 構造をもつ. □

1.6.7 例

【例 1.101 (等質空間型)**】** 等質空間 $M = G/H$ において，等方群 H の不動点 p_0 における接空間 $T_{p_0}(M)$ への作用が既約なら，M は（定数倍を除いて）一意的な Einstein 計量をもつ [Cartan E (1929)]. 特に，すべての既約 Riemann 対称空間は一意的な Einstein 計量をもつ．ただし，H の $UT_{p_0}(M)$ への作用が推移的であることをさらに要求すると，M は階数 1 の対称空間に限られる．また，局所平坦空間を除いて，コンパクト等質空間は決して Ricci 平坦とならない． □

【例 1.102 (コンパクト Kähler 多様体)**】** コンパクト Kähler 多様体 M は，$c_1(M) = 0$ ならば一意的な Ricci 平坦計量をもつ [Calabi E (1955), Yau ST (1976)]．このタイプの Einstein 空間は 1987 年時点で知られている唯一の Ricci 平坦空間である．また，$c_(M) < 0$ なら，一意的な負 Ricci 曲率の Einstein 計量をもつ [Calabi E (1976), Aubin T (1976), Yau ST(1976)]．例えば，$\mathbb{C}P^{m+1}$ 内の d 次の代数的超曲面の第 1 Chern 類は，$d = m + 2$ の時ゼロ，$d > m + 2$ のとき負となる． □

【例 1.103 (Don Page 構成法)**】** $\mathbb{C}P^2 \sharp \mathbb{C}P^2$ 上の Einstein 計量 [Page D (1979)]．この例は，L.Bérard-Bergery により一般化されたが，応用例はほとんどなし． □

1.7 接触多様体

1.7.1 概接触多様体

【定義 1.104 (概接触構造)】 M を $(2n+1)$-次元多様体とする．M 上のベクトル場 ξ, 1-形式 η および $(1,1)$ 型テンソル場 Φ が条件

$$\eta(\xi)=1, \quad \Phi^2=-1+\xi\otimes\eta$$

を満たすとき，(ξ,η,Φ) を M 上の**概接触構造** (almost contact structure)，M を**概接触多様体** (almost contact manifold) という．(Yano K, Kon M 1984[YK84]) □

【定理 1.105 (G 構造としての特徴付け)】 M を $(2n+1)$-次元多様体とするとき，M が概接触構造を持つことと，TM の構造群が $\mathrm{U}(n)$ に簡約可能であることは同等である．特に，概接触多様体は常に向き付け可能である．(Yano K, Kon M 1984[YK84]) □

【定義 1.106 (概接触計量構造)】 M を概接触多様体，(ξ,η,Φ) をその概接触構造とする．このとき，条件

$$g(X,\xi)=\eta(X), \quad g(\Phi X,\Phi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)$$

を満たす計量 g をもつとき，M を**概接触計量多様体** (almost constact metric manifold)，(ξ,η,Φ,g) を**概接触計量構造** (almost contact metric structure) という．(Yano K, Kon M 1984[YK84]) □

【定理 1.107 (概接触計量構造の存在)】 奇数次元多様体上の概接触構造 (ξ,η,Φ) は常に概接触計量構造 (ξ,η,Φ,g) に拡張可能である．(Yano K, Kon M 1984[YK84]) □

【注 1.108 (概接触 (計量) 構造の幾何学的意味)】 $(2n+1)$ 次元の多様体 M において概接触構造 (ξ,η,Φ) を与えることは，至る所ゼロでないベクトル場 ξ，ξ に横断的な TM の階数 $2n$ の部分ベクトルバンドル $\mathscr{D}$ および $\mathscr{D}$ 上の概複素構造 J を与えることと同等である．さらに，それに付随する概複素計量構造を与えることは，$\mathscr{D}$ に J に関する Hermite 計量 g を与えることに対応する．(Boyer CP, Galicki K 2004[BG04]) □

1.7.2　接触多様体

【定義 1.109 (接触構造)】　M を $(2n+1)$-次元多様体とする．M 上の 1-形式 η が至る所で条件

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

を満たすとき，η を**接触形式** (contact form)，組 (M, η) を**接触多様体** (contact manifold) という．また，２つの接触形式 η, η' は，適当な至る所ゼロとならない関数 f を用いて $\eta' = f\eta$ と表されるなら同値と定義するとき，M 上の接触形式の同値類を**接触構造** (contact structure) という．(Yano K, Kon M 1984[YK84]; Boyer CP, Galicki K 2004[BG04]) □

【定理 1.110 (接触形式の局所的特徴付け)】　M を $(2n+1)$-次元多様体とする．M 上の 1-形式 η が接触形式であるための必要十分条件は，各点の近傍で局所座標系 $(x^1, \cdots, x^n; y^1, \cdots, y^n; z)$ が存在して，η が

$$\eta = dz - \sum_i y^i dx^i$$

と書けることである．(Yano K, Kon M 1984[YK84]; Boyer CP, Galicki K 2004[BG04]) □

【定義 1.111 (Reeb ベクトル場)】　η を多様体 M 上の接触形式とすると，条件

$$\eta(\xi) = 1, \quad i_\xi d\eta = 0$$

を満たすベクトル場 ξ が一意的に存在する．このベクトル場を **Reeb ベクトル場**という．(Boyer CP, Galicki K 2004[BG04]; Yano K, Kon M 1984[YK84]) □

【定義 1.112 (接触計量構造)】　M 上の概接触計量構造 (ξ, η, Φ, g) において，

$$d\eta(X, Y) = g(X, \Phi Y) \tag{4}$$

が成り立つとき，M を**接触計量多様体** (contact metric manifold)，対応する概接触計量構造を**接触計量構造** (contact metric structure) という．(Yano K, Kon M 1984[YK84]) □

【定理 1.113 (接触構造の随伴する接触計量構造)】 M を接触多様体とすると，その接触構造 η は常に接触計量構造 (ξ, η, Φ, g) に拡張可能である．(Yano K, Kon M 1984[YK84]) □

【例 1.114 ($\mathbb{E}^{2n+1}$)】 $\mathbb{E}^{2n+1} \ni (x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_n; z)$ において，1-形式

$$\eta = dz - \sum_i y_i dx_i$$

は，接触形式となる．Reeb ベクトル場は $\xi = \partial_z$．また，Φ を

$$\Phi\partial/\partial x_j = -\partial/\partial y_j, \quad \Phi\partial/\partial y_j = -\partial/\partial x_j, \quad \Phi\partial/\partial z = 0$$

とおくと，(ξ, η, Φ, g) (g は $\mathbb{E}^{2n+1}$ の標準計量）が随伴する接触計量構造を与える． □

【定理 1.115 ($\mathbb{R}^{2n+2}$ の超曲面: Gray GW 1959)】 M を $\mathbb{R}^{2n+2}$ 内の滑らかな超曲面とする．このとき，M の接平面が $\mathbb{R}^{2n+2}$ の原点を通過しないなら，$\mathbb{R}^{2n+2}$ の 1-形式

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n+1} (x^{2j-1} dx^{2j} - x^{2j} dx^{2j-1})$$

から M に誘導される 1-形式は接触形式となる．(Yano K, Kon M 1984[YK84]) □

【例 1.116 (接球束)】 $\mathbb{R}^{2n}$ において，1-形式

$$\beta = \sum_{j=1}^{n} x_j dx_{n+j}$$

を考える．

$$\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n_1 \times \mathbb{R}^n_2 \ni (x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{2n})$$

とおくとき，$\mathbb{R}^{2n}$ 内の超曲面 Σ に対し，$\Sigma \cap \mathbb{R}^n_1 = \emptyset$, $\dim(\Sigma \cap \mathbb{R}^n_2) = n - 1$ かつ $\Sigma \cap \mathbb{R}^n_2$ の $\mathbb{R}^n_2$ における接平面が原点を通過しないならば，β は Σ に接触形式を誘導する．

これより，$(n+1)$ 次元 Riemann 多様体 M の余接束 $\pi : T^*M \to M$ において，M の座標近傍 U における局所座標系 $(x^1, \cdots, x^{n+1})$ を用いて，$\pi^{-1}(U)$ の点を $p = \sum_i p_i dx^i$ と表すとき，T^*M 上の 1-形式

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n+1} p_i dq^i; \quad q^i = x^i \circ \pi$$

は，M の単位余接束 UM^* に接触形式を誘導する．このとき，対応する Reeb ベクトル ξ は $p \in UM^*$ に対応する M のベクトル $p^i \partial/\partial x^i$ の p への水平リフト

$$\xi = p^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \Gamma^j_{ik} p_j p^k \frac{\partial}{\partial p_i}$$

で与えられる．(Yano K, Kon M 1984[YK84]) □

1.7.3　佐々木多様体

【定義 1.117 (K-接触構造)】　接触計量構造 (ξ, η, Φ, g) は，ξ が g に関して Killing ベクトルとなるとき，**K-接触構造** (K-contact structure)，対応する多様体は **K-接触多様体** (K-contact manifold) という．(Yano K, Kon M 1984[YK84]) □

【命題 1.118】　接触計量構造 (ξ, η, Φ, g) が K-接触となるための必要十分条件は，

$$\nabla_X \xi = -\Phi X$$

が成り立つことである．(Yano K, Kon M 1984[YK84]) □

【定理 1.119 (K-接触構造の幾何学的特徴付け)】　奇数次元 Riemann 多様体が K-接触構造をもつためには，次の２条件が成り立つことが必要十分である：

1) 長さ１の Killing ベクトル場 ξ が存在する．

2) ξ を含む２次元面に関する断面曲率が常に１となる．

(Yano K, Kon M 1984[YK84]) □

【定義 1.120 (概接触構造の正規性)】 M を概接触構造 (ξ, η, Φ) をもつ $(2n+1)$ 次元多様体とする．このとき，積多様体 $M \times \mathbb{R}$ には，

$$J(X, f\partial_t) = (\Phi X - f\xi, \eta(X)\partial_t)$$

により，自然に概複素構造 J が定義される．この概複素構造が積分可能，すなわち

$$N_J(X,Y) := J^2[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] = 0$$

が成り立つとき，概接触構造は**正規** (normal) であるという．(Yano K, Kon M 1984[YK84]) □

【定義 1.121 (佐々木構造)】 正規な概接触計量構造をもつ多様体を**佐々木多様体** (Sasakian manifold)，対応する構造を**佐々木構造** (Sasakian structure) という．(Yano K, Kon M 1984[YK84]) □

【定理 1.122 (幾何学的特徴付け)】 奇数次元 Riemann 多様体 (M, g) に関する次の条件は同等である：

1) M は佐々木構造 (ξ, η, Φ, g) をもつ.

2) M は次の条件を満たす概接触計量構造 (ξ, η, Φ, g) をもつ：

$$(\nabla_X \Phi)Y = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X.$$

3) M は次の条件を満たす単位 Killing ベクトル ξ をもつ：

$$R(X,\xi)Y = -g(X,Y)\xi + \eta(Y)X.$$

4) M 上の錐 $(\mathcal{C}(M), \bar{g}) = (\mathbb{R}_+ \times M, dr^2 + r^2 g)$ が Kähler 多様体となる.

(Yano K, Kon M 1984[YK84]; Boyer CP, Galicki K 2004[BG04]) □

1.8 スペクトル幾何学

1.8.1 レビュー

- Craioveanu M, Puta M and Rassias T M: *Old and New Aspects in Spectral Geometry*, (Kluwer Academic Pub., 2001)

2 Sheaf

[LastUpdate: 2006.10.31]

2.1 基本定義

【定義 2.1 (Presheaf)**】**

1. 位相空間 X の各開集合 U にアーベル群（可換環，加群）$\mathscr{P}(U) = \Gamma(U, \mathscr{P})$ が，また，開集合の組 $V \subset U$ に対して準同型 $r_{VU} : \mathscr{P}(U) \to \mathscr{P}(V)$ が対応していて，条件

   i) $W \subset V \subset U$ に対して常に $r_{WV} r_{VU} = r_{WV}$.

   ii) $\mathscr{P}(\emptyset) = 0$.

   が成り立つとき，$\mathscr{P} = \{\mathscr{P}(U), r_{VU}\}$ を X 上のアーベル群（可換環，加群）の**前層**という．すなわち，前層とは空間 X の開集合族の作る圏から各タイプの代数的圏への関手である．

2. 位相空間 X 上の 2 つの前層 $\mathscr{P} = \{\mathscr{P}(U), r_{VU}\}, \mathscr{Q} = \{\mathscr{Q}(U), s_{VU}\}$ に対して，各開集合 U ごとに準同型 $f(U) : \mathscr{P}(U) \to \mathscr{Q}(U)$ が対応していて $f(V) r_{VU} = s_{VU} f(U)$ が成立するとき，$f = \{f(U)\}$ を前層の**射**（準同型）といい，$f : \mathscr{P} \to \mathscr{Q}$ と表す．すなわち，前層の射とは，前層を関手と見なしたときの自然変換である．

3. 空間 X 上の前層を $\mathscr{P}$ とするとき，X の各点 x に対してその上の**ストーク** $\mathscr{P}_x$ を次のように定義する：

$$\mathscr{P}_x = \varinjlim_{x \in U} \mathscr{P}(U). \tag{5}$$

$\square$

【定義 2.2 (Sheaf)**】**

1. 空間 X 上の前層 $\mathscr{F}$ が，任意の開集合 U とその開被覆 $\mathfrak{U} = \{U_\alpha; \alpha \in A\}$ に対して次の条件を満たすとき**層**という：

i) $\{x_\alpha \in \mathscr{F}(U_\alpha)\}$ が $V = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ に対して $r_{VU_\alpha}(x_\alpha) = r_{VU_\beta}(x_\beta)$ を満たすとき，$x \in \mathscr{F}(U)$ が存在して $x_\alpha = r_{U_\alpha U}(x)$ となる．

ii) $x \in \mathscr{F}(U)$ がすべての α について $r_{U_\alpha U}(x) = 0$ を満たすなら $x = 0$.

2. 空間 X 上の前層 $\mathscr{P}$ に対して, 層 $\mathscr{F}$ と射 $f : \mathscr{P} \to \mathscr{F}$ が存在して, 任意の層 $\mathscr{G}$ と射 $g : \mathscr{P} \to \mathscr{G}$ に対して $kf = g$ となる射 $k : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ が一意的に存在するとき，$\mathscr{F}$ を $\mathscr{P}$ に伴う層ないし層化といい，$\mathscr{F} = \mathscr{P}_a$ と表す.

□

【命題 2.3 (層化の存在)**】** 任意の前層 $\mathscr{P}$ に対してその層化 $\mathscr{F}$ が一意的に存在し，$\mathscr{P}$ が層の時は自分自身と同型となる．空間 X 上の前層 $\mathscr{P}$ の層化は具体的に次のように構成される．まず，$x \in X$ 上のストークを $\mathscr{P}_x$ として，集合 $\mathscr{F}_0$ をストークの直和

$$\mathscr{F}_0 = \coprod_{x \in X} \mathscr{P}_x$$

とする．つぎに，X の各開集合 U と $a \in \mathscr{P}(U)$ に対し，$\mathscr{F}_0$ の部分集合 $V(U, a)$ を

$$V(U, a) = \{a_x \mid x \in U\}$$

により定義し，$V(U, a)$ の全体を基本近傍系とする位相を $\mathscr{F}_0$ に導入する．このようにして得られる位相空間を $\mathscr{F}$ とし，X の各開集合に対して $\mathscr{F}(U)$ を $\mathscr{F}$ の連続な局所断面 $s : U \to \mathscr{F} (s(x) \in \mathscr{P}_x)$ の全体として定義すると $\mathscr{F}$ が $\mathscr{P}$ の層化を与える． □

【定義 2.4】

1. 層の射 $f : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ は，各点のストークの射 $f_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ が単射（全射，同型）のとき，単射（全射，同型）であるという.

2. 層の系列 $\mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ は，各点のストークの射の系列が完全であるとき，完全系列という.

$\square$

【定義 2.5】

1. 層の射 $f : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ に対してその完全系列への拡張

$$0 \to \mathscr{K} \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{C} \to 0 \tag{6}$$

が存在する．$\mathscr{K}$ を f の**核**，$\mathscr{C}$ を f の**余核**という．

2. 層 $\mathscr{F}$ に対して，$\mathscr{K}(U) \subset \mathscr{F}(U)$，$r^{\mathscr{K}}_{VU} = r^{\mathscr{F}}_{VU}$ となる層 $\mathscr{K}$ を $\mathscr{F}$ の**部分層**という．

3. $\mathscr{K}$ を $\mathscr{F}$ の部分層とするとき，包含写像 $j : \mathscr{K} \to \mathscr{F}$ の余核を $\mathscr{F}$ の $\mathscr{K}$ による**商層**といい，$\mathscr{F}/\mathscr{K}$ と表す.

$\square$

【定義 2.6 (順像と逆像)】　$f : X \to Y$ を位相空間の連続写像とする.

1. $\mathscr{F} = (\mathscr{F}(U), r_{UU'})$ を X 上の前層とする．このとき，

$$f_*\mathscr{F}(V) = \mathscr{F}(f^{-1}(V)), \quad \rho_{VV'} = r_{f^{-1}(V)f^{-1}(V')}$$

により定義される $\mathscr{Y}$ 上の前層 $f_*\mathscr{F} = (f_*\mathscr{F}(V), \rho_{VV'})$ を $\mathscr{F}$ の f による**順像**という．$\mathscr{F}$ が層の時，$f_*\mathscr{F}$ も層となる.

2. $\mathscr{G} = (\mathscr{G}(V), \rho_{VV'})$ を Y 上の層とする．このとき，

$$f^*\mathscr{G}(U) = \varinjlim_{f(U)\subset V} \mathscr{G}(V)$$

および対応する制限写像から定義される X 上の前層の層化 $f^*\mathscr{G}$ を $\mathscr{G}$ の f による**逆像**という．このとき，$(f^*\mathscr{G})_x = \mathscr{G}_{f(x)}$ $(\forall x \in X)$ が成り立つ.

$\square$

【命題 2.7】 位相空間 X 上の層 $\mathscr{F}$，位相空間 Y 上の層 $\mathscr{G}$ および連続写像 $f: X \to Y$ に対して，

$$\mathrm{Hom}_X(f^*\mathscr{G}, \mathscr{F}) \cong \mathrm{Hom}_Y(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F}).$$

$\square$

【定義 2.8 (環付空間)**】**

1. 位相空間 X とその上の可換環の層 $\mathscr{A}$ の組 $(X, \mathscr{A})$ を**環付空間**という．
2. 環付空間 $(X, \mathscr{A})$ から環付空間 $(Y, \mathscr{B})$ への射を，連続写像 $f: X \to Y$ および可換環層の準同型 $\phi: \mathscr{B} \to f_*\mathscr{A}$ の組 (f, ϕ) により定義する．
3. ストークが常に局所環となる環付空間を**局所環付空間**といい，記号 $(X, \mathscr{O}_X)$ で表す．局所環付空間の射 $(f, \phi): (X, \mathscr{O}_X) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ には常に，$(\phi^\sharp)_x : (f^*\mathscr{O}_Y)_x = \mathscr{O}_{Y,f(x)} \to \mathscr{O}_{X,x}$ が局所環の準同型，すなわち，$(\phi^\sharp)_x(m_{Y,f(x)}) \subset m_{X,x}$ となることを要求する．

$\square$

2.1.1 例

【定義 2.9 (多様体上の様々な層)**】**

1. なめらかな多様体 M 上の層 $C^\infty, C^*, \mathscr{A}^p, \mathscr{Z}^p, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ を次のように定義する：

   C^∞: $C^\infty(U) =$ U 上の滑らかな関数の全体.

   C^*: $C^*(U) =$ U 上に零点を持たないなめらかな関数の乗法群.

   $\mathscr{A}^p$: $\mathscr{A}^p(U) =$ U 上のなめらかな p 形式の全体.

   $\mathscr{Z}^p$: $\mathscr{Z}^p(U) =$ U 上のなめらかな閉 p 形式の全体.

   $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$: $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とおくとき，$R(U) =$ U 上の局所的に定数となる R に値をもつ関数の全体.

2. M を複素多様体，V をその解析的部分集合，$E \to M$ を正則ベクトルバンドルとするとき，M 上の層 $\mathscr{O}, \mathscr{O}^*, \Omega^p, \mathscr{A}^{p,q}, \mathscr{Z}^{p,q}_{\bar\partial}, \mathscr{I}_V, \emptyset(E), \mathscr{A}^{p,q}(E)$ を次のように定義する：

$\mathscr{O}$: $\mathscr{O}(U) =$ U 上の正則関数の全体.

$\mathscr{O}^*$: $\mathscr{O}^*(U) =$ U 上のゼロとならない正則関数全体の作る乗法群.

Ω^p: $\Omega^p(U) =$ U 上の正則 p 形式全体.

$\mathscr{A}^{p,q}$: $\mathscr{A}^{p,q}(U) =$ U 上のなめらかな (p,q) 型微分形式の全体.

$\mathscr{Z}_{\bar{\partial}}^{p,q}$: $\mathscr{Z}_{\bar{\partial}}^{p,q}(U) =$ U 上のなめらかな $\bar{\partial}$-閉 (p,q) 型微分形式の全体.

$\mathscr{I}_V$: $\mathscr{I}_V(U) =$ $V \cap U$ 上でゼロとなる U 上の正則関数の全体.

$\mathscr{O}(E)$: $\mathscr{O}(E)(U) =$ E の U 上での正則断面の全体.

$\mathscr{A}^{p,q}(E)$: $\mathscr{A}^{p,q}(E)(U) =$ E に値を取る U 上のなめらかな (p,q) 型微分形式の全体.

□

2.2 加群層

2.2.1 定義と基本的性質

【**定義 2.10** (加群層)】

1. $\mathscr{R}$ と $\mathscr{F}$ を空間 X 上の可換環およびアーベル群の層とする．$\mathscr{F}(U)$ に $\mathscr{R}(U)$-加群の構造が与えられていて，$v \in \mathscr{F}(U)$，$a \in \mathscr{R}(U)$ に対して $r^{\mathscr{F}}_{VU}(av) = r^{\mathscr{R}}_{VU}(a) r^{\mathscr{F}}_{VU}(v)$ が成り立つとき，$\mathscr{F}$ を $\mathscr{R}$-**加群層**という．

2. $\Phi = (f, \phi) : (X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{B})$ を環付空間の射とする．X 上の $\mathscr{A}$ 加群層 $\mathscr{F}$ に対して，Y 上の $f_*\mathscr{A}$ 加群層 $f_*\mathscr{F}$ は，準同型 $\phi : \mathscr{B} \to f_*\mathscr{A}$ により $\mathscr{B}$ 加群層と見なすことができる．この Y 上の $\mathscr{B}$ 加群層を $\mathscr{F}$ の Φ による**順像**といい，$\Phi_*\mathscr{F}$ と表す．

3. 同様に，Y 上の $\mathscr{B}$ 加群層 $\mathscr{G}$ に対し，X 上の $f^*\mathscr{B}$ 加群層 $f^*\mathscr{G}$ と準同型 $\phi^\sharp : f^*\mathscr{B} \to \mathscr{A}$ から X 上の $\mathscr{A}$ 加群層を $\Phi^*\mathscr{G} = \mathscr{A} \otimes_{f^*\mathscr{B}} f^*G$ により構成することができる．これを $\mathscr{G}$ の Φ による**逆像**という．

□

【**定義 2.11** (有限型加群層)】 $(X, \mathscr{O}_X)$ を環付空間，$\mathscr{F}$ を $\mathscr{O}_X$ 加群層とする．

i) $\mathscr{F}$ が**有限型**であるとは，任意の点 $x \in X$ に対して，その適当な開近傍 U において U 上の $\mathscr{O}_X|_U$ 加群層の全射 $(\mathscr{O}_X|_U)^r \to \mathscr{F}|_U$ が存在することである．

ii) $\mathscr{F}$ が**有限表現をもつ**とは，任意の点 $x \in X$ に対して，その適当な開近傍 U において，U 上の $\mathscr{O}_X|_U$ 加群層の完全列 $(\mathscr{O}_X|_U)^m \to (\mathscr{O}_X|_U)^n \to \mathscr{F}|_U$ が存在することである．

□

【命題 2.12 (有限型加群層の台)**】** 環付空間 $(X, \mathscr{O}_X)$ において，有限型 $\mathscr{O}_X$-加群層 $\mathscr{F}$ の台 $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$ は X の閉集合である． □

【定義 2.13 (連接性)**】** $\mathscr{O}_X$ 加群層が連接であるとは，次の 2 条件が満たされることである．

i) $\mathscr{F}$ が有限型である．

ii) 任意の開集合 $U \subset X$ と任意の射 $\alpha : (\mathscr{O}_X|_U)^r \to \mathscr{F}|_U$ に対して，$\ker \alpha$ が有限型である．

□

【命題 2.14 (連接性の伝播)**】** 環付空間 $(X, \mathscr{O}_X)$ 上の $\mathscr{O}_X$-加群層について次の命題が成り立つ．

1) 連接層の部分層は，有限型なら連接である．

2) 完全列 $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ のどれか 2 つが連接なら残りの一つも連接である．

3) 連接層 $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ の間の射 $\alpha : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ に対し，$\mathrm{Ker}\,\alpha$ と $\mathrm{Coker}\,\alpha$ は共に連接である．

4) $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ が連接層なら，$\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{G}$ と $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ も連接層である．

□

【命題 2.15 (連接的環付空間)**】**　環付空間 $(X, \mathscr{O}_X)$ において，$\mathscr{O}_X$ 自身が $\mathscr{O}_X$-加群層として連接なら，任意の有限表現をもつ $\mathscr{O}_X$-加群層は連接である． □

【定理 2.16 (Oka K, Cartan H, Serr JP)**】**　解析空間および代数多様体の構造層は連接である． □

2.3 Cohomology

2.3.1 層係数コホモロジー

【**定義 2.17** (入射的分解)】

1. $\mathscr{I}$ を空間 X 上の $\mathscr{R}$-加群層とする．任意の $\mathscr{R}$-加群層の射 $f:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ と $g:\mathscr{F}\to\mathscr{I}$ に対して，$\mathscr{R}$-加群層の射 $k:\mathscr{G}\to\mathscr{I}$ が存在して $g=kf$ となるとき，$\mathscr{I}$ を**入射的** $\mathscr{R}$-加群層という．

2. $\mathscr{R}$-加群層 $\mathscr{F}$ に対して，入射的 $\mathscr{R}$-加群層 $\mathscr{I}_j$ からなる完全系列

$$0\to\mathscr{F}\xrightarrow{\eta}\mathscr{I}^0\xrightarrow{\Delta^0}\mathscr{I}^1\xrightarrow{\Delta^1}\cdots\xrightarrow{\Delta^{n-1}}\mathscr{I}^n\xrightarrow{\Delta^n}\cdots \tag{7}$$

を $\mathscr{F}$ の**入射的分解**という．

□

【**定義 2.18** (層係数コホモロジー)】 空間 X 上の $\mathscr{R}$-加群層 $\mathscr{F}$ の入射的分解 $\{\mathscr{I}^n,\Delta^n\}$ に関手 $\Gamma(X,*)$ を施して得られる複体

$$0\to\Gamma(X,\mathscr{I}^0)\xrightarrow{\delta^0}\Gamma(X,\mathscr{I}^1)\xrightarrow{\delta^1}\cdots\xrightarrow{\delta^{n-1}}\Gamma(X,\mathscr{I}^n)\xrightarrow{\delta^n}\cdots \tag{8}$$

のコホモロジーを **$\mathscr{F}$ を係数とする X のコホモロジー**といい，$H^*(X,\mathscr{F})$ と表す． □

【**定義 2.19** (加群層に対するコホモロジー理論)】 $(X,\mathscr{A})$ を環付空間，U を X の開集合として，任意の $\mathscr{A}$ 加群層 $\mathscr{F}$ に $\Gamma(U,\mathscr{A})$ 加群 $K^n(U,\mathscr{F})$ を対応させる関手の族 $\{K^n(U,\cdot)\}_{n\geq 0}$ が与えられ次の条件を満たすとき，関手の族 $\{K^n(U,\cdot)\}_{n\geq 0}$ を**環付空間 $(X,\mathscr{A})$ 上のコホモロジー理論**という:

1) $K^n(U,\cdot)$ は，X 上の $\mathscr{A}$ 加群層の圏から $\Gamma(U,\mathscr{A})$ 加群の層への単位射を保つ共変関手である．

2) $K^0(U,\mathscr{F})=\mathscr{F}(U)$ で，$\mathscr{I}$ が移入的 $\mathscr{A}$ 加群層なら $K^n(U,\mathscr{I})=0(n>0)$ である．

3) $\mathscr{A}$ 加群層の完全列

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}_1 \xrightarrow{\alpha} \mathscr{F}_2 \xrightarrow{\beta} \mathscr{F}_3 \longrightarrow 0$$

に対し，$\Gamma(U,\mathscr{A})$ 準同型 $\delta^n : K^n(U,\mathscr{F}_3) \to K^{n+1}(U,\mathscr{F}_1)$ が存在し次の完全系列をつくる：

$$\begin{aligned}0 &\longrightarrow K^0(U,\mathscr{F}_1) \xrightarrow{\alpha^0} K^0(U,\mathscr{F}_2) \xrightarrow{\beta^0} K^0(U,\mathscr{F}_3) \xrightarrow{\delta^0} K^1(U,\mathscr{F}_1)\\ &\xrightarrow{\alpha^1} K^1(U,\mathscr{F}_2) \longrightarrow \cdots \longrightarrow K^n(U,\mathscr{F}_1) \xrightarrow{\alpha^n} K^n(U,\mathscr{F}_2)\\ &\xrightarrow{\beta^n} K^n(U,\mathscr{F}_3) \xrightarrow{\delta^n} K^{n+1}(U,\mathscr{F}_1) \longrightarrow \cdots.\end{aligned}$$

ここで，$\alpha^n = K^n(U,\alpha), \beta^n = K^n(U,\beta)$ である．さらに，短完全列の間の準同型

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{F}_1 \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & \mathscr{F}_2 \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & \mathscr{F}_3 \arrow[r] \arrow[d, "c"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{F}_1' \arrow[r] & \mathscr{F}_2' \arrow[r] & \mathscr{F}_3' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

に対して，図式

$$\begin{tikzcd} K^n(U,\mathscr{F}_3) \arrow[r, "\delta^n"] \arrow[d, "c^n"'] & K^{n+1}(U,\mathscr{F}_1) \arrow[d, "a^{n+1}"'] \\ K^n(U,\mathscr{F}_3') \arrow[r, "\delta'^n"] & K^{n+1}(U,\mathscr{F}_1') \end{tikzcd}$$

が可換となる．ここで，$c^n = K^n(U,c), a^{n+1} = K^{n+1}(U,a)$ である．

□

【定理 2.20 (de Rahm 型定理)】 空間 X 上の層 $\mathscr{F}$ が次の層完全列により分解されたとする：

$$0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{R}^0 \xrightarrow{\delta^0} \mathscr{R}^1 \xrightarrow{\delta^1} \cdots. \tag{9}$$

このとき，層に対する完全性条件を満たすコホモロジー $H^*(X,\cdot)$ に対して，

i) ある $p \geq 0$ に対して $H^q(X,\mathscr{R}^{p-q}) = 0(q = 1,\cdots,p)$ が成り立てば，単射

$$0 \to H^{p+1}(\Gamma(\mathscr{R}^*)) \to H^{p+1}(X,\mathscr{F}) \ (p \geq 0). \tag{10}$$

が存在する．

ii) i) の条件に加えてさらに $H^q(X, \mathscr{R}^{p-q+1}) = 0 (q = 1, \cdots, p+1)$ が成り立てば，同型

$$H^{p+1}(\Gamma(\mathscr{R}^*)) \cong H^{p+1}(X, \mathscr{F}) \tag{11}$$

が成り立つ．

□

【定義 2.21 (散布層)**】** X 上の層 $\mathscr{F}$ に対し，任意の開集合 U について $p_{UX} : \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(U)$ が全射であるとき，$\mathscr{F}$ を**散布層**という．

□

【定義 2.22 (散布分解)**】** X 上の $\mathscr{A}$ 加群層 $\mathscr{F}$ に対して，散布的 $\mathscr{A}$ 加群層の列 $\mathscr{R}^n (n = 0, 1, \cdots)$ からなる系列

$$0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\epsilon} \mathscr{R}^0 \xrightarrow{d^0} \mathscr{R}^1 \xrightarrow{d^1} \cdots \mathscr{R}^n \xrightarrow{d^n} \cdots$$

が存在して完全系列となるとき，$\mathscr{F}$ の**散布的分解**という． □

【定理 2.23】 X 上の $\mathscr{A}$ 加群層 $\mathscr{F}$ の散布的分解を

$$0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\epsilon} \mathscr{R}^0 \xrightarrow{d^0} \mathscr{R}^1 \xrightarrow{d^1} \cdots \mathscr{R}^n \xrightarrow{d^n} \cdots$$

とする．

1. この散布的分解から得られる複体

$$0 \to \Gamma(X, \mathscr{R}^0) \xrightarrow{d^0} \Gamma(X, \mathscr{R}^1) \xrightarrow{d^1} \cdots \Gamma(X, \mathscr{R}^n) \xrightarrow{d^n} \cdots$$

のコホモロジー $\tilde{H}^n(X, \mathscr{F})$ は，散布的分解の取り方に依存せず，環付空間 $(X, \mathscr{A})$ 上の完全なコホモロジー関手を与える．

2. 入射的分解は散布的分解である．したがって，$\tilde{H}^n(X, \mathscr{F}) = H^n(X, \mathscr{F})$ が成り立つ．

□

2.3.2 Ceck コホモロジー

【定義 2.24 (Čeck コホモロジー)**】** 環付空間 $(X, \mathscr{A})$ 上の $\mathscr{A}$ 加群層を $\mathscr{F}$ とする．

1) $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ を X の開被覆とし，$\mathfrak{U}$ から定義されるČeck$n$ 単体 $s = (i_0, \cdots, i_n) \in I^{n+1}$ に対して，$U_s = U_{i_0} \cap \cdots U_{i_n}$ とおく．$\prod_{s \in I^{n+1}} \mathscr{F}(U_s)$ の元 $\alpha = (\alpha(s))_{s \in I^{n+1}}$ が次の 2 条件を満たすとき，α を $\mathscr{F}$ **係数のČeck n コチェイン**という：

   i) $s = (i_0, \cdots, i_n)$ に対して，$U_s = \emptyset$ または $i_j = i_k (\exists j, k, j \neq k)$ ならば $\alpha(s) = 0$.

   ii) σ を $(0, 1, \cdots, n)$ の任意の置換として，$\sigma(s) = (i_{\sigma(0)}, \cdots, i_{\sigma(n)})$ とおくとき，$\alpha(\sigma(s)) = \mathrm{sign}(\sigma)\alpha(s)$.

   このように定義されたコチェインの全体は $\Gamma(X, \mathscr{A})$ 加群 $C^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ となる．さらに，$\Gamma(X, \mathscr{A})$ 準同型 $d^n : C^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to C^{n+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ を

$$(d^n\alpha)(t) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \left.\alpha(t_j)\right|_{U_t}$$

   により定義する．ここで，$t_j = (i_0, \cdots, i_{j-1}, i_{j+1}, \cdots, i_{n+2})$ である．このとき，$(C^*(\mathfrak{U}, \mathscr{F}), d)$ は $\Gamma(X, \mathscr{A})$ 加群のコチェイン複体となる．さらに，$\mathscr{A}$ 加群層の準同型 $f : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ に対して，$\alpha \in C^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ として $(f^n\alpha)(s) = f(U_s)(\alpha(s))$ により $\Gamma(X, \mathscr{A})$ 準同型 $f^n : C^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to C^n(\mathfrak{U}, \mathscr{G})$ を定義すると，X 上の $\mathscr{A}$ 加群層の圏から $\Gamma(X, \mathscr{A})$ 加群コチェイン複体の圏への共変関手 $C^*(\mathfrak{U}, \cdot)$ が得られる．この関手とコホモロジー関手を結合して得られる，X 上の $\mathscr{A}$ 加群層の圏から $\Gamma(X, \mathscr{A})$ 加群の圏への共変関手を $H^n(\mathfrak{U}, \cdot)$ と表す．

2) X 上の $\mathscr{A}$ 加群層を $\mathscr{F}$ とするとき，X の開被覆全体は細分について擬有向集合となり，$H^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ はこの擬有向集合について帰納系となる．そこでその帰納的極限を $\check{H}^n(X, \mathscr{F})$ と表し，X の n 次Čeck コホモロジー群という：

$$\check{H}^n(X, \mathscr{F}) = \varinjlim_{\mathfrak{U}} H^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F}).$$

□

【**命題 2.25** (散布層のチェックコホモロジー)】　X 上の $\mathscr{A}$ 加群層 $\mathscr{F}$ が散布層ならば，X の任意の開被覆 $\mathfrak{U}$ に対して，$H^n(\mathfrak{U},\mathscr{F})=0$ $(n>0)$．特に，$\check{H}^n(X,\mathscr{F})=0(n>0)$. □

【**定理 2.26**】　環付空間 $(X,\mathscr{A})$ 上の $\mathscr{A}$ 加群層 $\mathscr{F}$ と X の開被覆 $\mathfrak{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ について，次の事柄が成り立つ：

1) $\forall n>0,\forall m\geq 0,\forall s=(i_0,\cdots,i_m)\in I^{m+1}$ について $H^n(U_s,\mathscr{F})=0$ となれば，$H^n(\mathfrak{U},\mathscr{F})\cong H^n(X,\mathscr{F})(n\geq 0)$.

2) X の任意の開被覆に対して 1) の条件を満たすその細分がとれるならば，$\check{H}^n(X,\mathscr{F})\cong H^n(X,\mathscr{F})(n\geq 0)$.

□

【**定理 2.27**】　X がパラコンパクトならば，Čeck コホモロジーは完全性をもつコホモロジー関手となる．したがって，任意の $\mathscr{A}$ 加群層 $\mathscr{F}$ について，$\check{H}^n(X,\mathscr{F})\cong H^n(X,\mathscr{F})(n\geq 0)$ が成り立つ． □

2.3.3　高次順像

【**定義 2.28** (高次順像)】　$\{\mathscr{I}^n,\Delta^n\}$ を空間 X 上の $\mathscr{A}$-加群層 $\mathscr{F}$ の入射的分解とする．環付き空間の射 $\Phi=(f,\phi):(X,\mathscr{A})\to(Y,\mathscr{B})$ が与えられると，Y 上の $\mathscr{B}$-加群層の複体

$$0\to f_*\mathscr{I}^0\xrightarrow{f_*\Delta^0}f_*\mathscr{I}^1\xrightarrow{f_*\Delta^1}\cdots\xrightarrow{f_*\Delta^{n-1}}f_*\mathscr{I}^n\xrightarrow{f_*\Delta^n}\cdots\tag{12}$$

が得られる．この複体から定義される $\mathscr{B}$-加群層

$$R^nf_*\mathscr{F}=\mathrm{Ker}f_*\Delta^n/\mathrm{Im}f_*\Delta^{n-1}\tag{13}$$

を $\mathscr{F}$ の n 次の**高次順像**という．これは, $U\subset Y$ に対して $H^n(f^{-1}(U),\mathscr{F}|_{f^{-1}(U)})$ を対応させて得られる前層の層化と一致する． □

3 Complex Manifolds

[LastUpdate: 2006.9.26]

3.1 Complex Structure

3.1.1 複素多様体

【定義 3.1 (複素構造)】

1. 連結 Hausdorff 空間 $\mathscr{M}$ に対して，その開被覆 $\{\mathscr{U}_j\}$ と各 $\mathscr{U}_j$ から $\mathbb{C}^n$ の中への同相写像 ϕ_i が与えられ，

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(\mathscr{U}_i \cap \mathscr{U}_j) \to \phi_j(\mathscr{U}_i \cap \mathscr{U}_j) \tag{3.1.1}$$

が正則写像であるとき，$\{\mathscr{U}_j, \phi_j\}$ は $\mathscr{M}$ 上の**局所複素座標系**という．

2. $\mathscr{M}$ 上の２つの局所複素座標系 $\{\mathscr{U}_j, \phi_j\}$，$\{\mathscr{V}_k, \psi_k\}$ は，$\mathscr{U}_j \cap \mathscr{V}_k \neq \emptyset$ となる任意の j, k に対して $\psi_k \circ \phi_j^{-1}$ が双正則写像となるとき，**正則同値**であるという．

3. 連結 Hausdorff 空間上の局所複素座標系の正則同値類を**複素構造**，複素構造 X が定義されている連結 Hausdorff 空間を**複素多様体**といい，同じ記号 X で表す．

□

【定義 3.2 (正則写像)】

1. ２つの複素多様体 X, Y の間の写像 $f : X \to Y$ は，それぞれの局所複素座標系 $\{U_j, \phi_j\}$，$\{\mathscr{V}_k, \psi_k\}$ に対して，$\psi_k \circ f\phi_j^{-1}$ が正則写像となるとき**正則**であるという．

2. 正則写像 f が逆写像をもちそれも正則となるとき**双正則**であるという．特に，２つの複素多様体の間に双正則な同相写像が存在するとき，それらは**双正則同値**であるという．

□

【定義 3.3 (解析的集合と部分多様体)】

1. S を複素多様体 X^n の閉部分集合とする．S の各点 p に対して，p の開近傍 $\mathscr{U}(p)$ とその上で定義された正則関数の組 $f_p^1, \cdots, f_p^\nu$ が存在して

$$S \cap \mathscr{U}(p) = \left\{ q \in U(p) \,\middle|\, f_p^1(q) = \cdots = f_p^\nu(q) = 0 \right\} \tag{3.1.2}$$

が成り立つとき，S を X^n の**解析的部分集合**，$f_p^1, \cdots, f_p^\nu$ をその p における**局所方程式**という．

2. 解析的部分集合 S の点 p に対して，p における局所複素座標系を $(z^1, \cdots, z^n)$ とするとき，p の近傍で

$$\mathrm{rank} \frac{\partial(f^1, \cdots, f^\nu)}{\partial(z^1, \cdots, z^n)} = \nu \tag{3.1.3}$$

となる局所方程式 $f^1, \cdots, f^\nu$ が存在するとき，S は p でなめらかであるといい，$n - \nu$ を S の p における次元という．

3. 解析的部分集合 S が点 p においてなめらかでないとき，p を S の**特異点**という．

4. 複素多様体の特異点を持たない解析的部分集合を**部分多様体**という．

□

3.1.2　概複素多様体

【定義 3.4 (概複素構造)】

1. $2n$ 次元多様体 $\mathscr{M}$ の接バンドル $T(\mathscr{M})$ から自分自身への（ベクトルバンドルとしての）バンドル写像 J，すなわち可逆な $(1,1)$ 型テンソル場 J が $J^2 = -1$ を満たすとき，J を $\mathscr{M}$ の**概複素構造**という．また，組 $(\mathscr{M}, J)$ を**概複素多様体**という．

2. $\mathbb{C}^n \ni (z^1, \cdots, z^n)$ に対して，$z^j = x^j + iy^j$ とおくとき，写像

$$J : \partial/\partial x^j \to \partial/\partial y^j, \quad \partial/\partial y^j \to -\partial/\partial x^j \tag{3.1.4}$$

を $\mathbb{C}^n$ の**標準複素構造**という．

3. 概複素多様体 $(\mathscr{M}, J)$ の**自然な向き**を $(X_1, \cdots, X_m, JX_1, \cdots, JX_m)$ により定義する．$\mathbb{C}^m$ の場合，この向きは $(x^1, \cdots, x^m, y^1, \cdots, y^m)$ に対応する．

3. 複素多様体 X の局所複素座標系を $\{(\psi, \mathscr{U})\}$ とするとき，$\psi : \mathscr{U} \to \mathbb{C}^n$ による $\mathbb{C}^n$ の標準複素構造の引き戻しは X 上に概複素構造 J を定義する．これを，X の複素構造に付随する概複素構造という．

□

【命題 3.5 (積分可能性)】　概複素構造 J は次の 3 つの互いに同値な条件のいずれかが成り立つとき**積分可能**であるという．

i) 任意の $(1,0)$ 型 1 形式 θ に対して，$d\theta$ が $(0,2)$ 型成分を持たない．

ii) 次式により定義される $(1,2)$ 型テンソル場 N がゼロとなる：

$$\frac{1}{2}N(X,Y) = [JX, JY] - [X,Y] - J[X, JY] - J[JX, Y] \qquad (3.1.5)$$

N は **Nijenhuis テンソル**または**複素捻れテンソル**と呼ばれる．

iii) $(1,0)$ 型ベクトル場の交換子が常に $(1,0)$ 型ベクトル場となる．

□

【定理 3.6】　$2n$ 次元多様体 $\mathscr{M}$ の概複素構造 J が $\mathscr{M}$ のある複素構造に付随するための必要十分条件は，J が積分可能であることである．□

3.1.3　複素多様体上のテンソル

【定義 3.7 (複素接バンドル)】

1. 概複素多様体 $(\mathscr{M}, J)$ に対して，$\mathscr{M}$ の複素接バンドル $T^c(\mathscr{M}) = T(\mathscr{M}) \otimes \mathbb{C}$ の部分複素ベクトルバンドルを

$$T'(\mathscr{M}) = T^{1,0}(\mathscr{M}) = \{V \in T^c(\mathscr{M}) \mid JV = iV\}, \qquad (3.1.6)$$
$$T''(\mathscr{M}) = T^{0,1}(\mathscr{M}) = \{V \in T^c(\mathscr{M}) \mid JV = -iV\}, \qquad (3.1.7)$$

により定義すると，

$$T^c(\mathscr{M}) = T'(\mathscr{M}) \oplus T''(\mathscr{M}). \qquad (3.1.8)$$

2. 複素余接バンドル $T^{*c}(\mathscr{M})$ に対して，

$$A^{1,0}(\mathscr{M}) = \{\omega \in T^{*c}(\mathscr{M}) \mid J\omega = i\omega\}, \tag{3.1.9}$$
$$A^{0,1}(\mathscr{M}) = \{\omega \in T^{*c}(\mathscr{M}) \mid J\omega = -i\omega\}, \tag{3.1.10}$$

と定義すると，

$$A^1(\mathscr{M}) = T^{c*}(\mathscr{M}) = A^{1,0}(\mathscr{M}) \oplus A^{0,1}(\mathscr{M}). \tag{3.1.11}$$

$\bigwedge T^{c*}(\mathscr{M})$ の部分ベクトルバンドルを

$$A^{p,q}(\mathscr{M}) = (\bigwedge^p A^{1,0}(\mathscr{M})) \wedge (\bigwedge^q A^{0,1}(\mathscr{M})) \tag{3.1.12}$$

により定義すると，

$$A^n(\mathscr{M}) = \bigwedge^n T^{c*}(\mathscr{M}) = \sum_{p+q=n} A^{p,q}(\mathscr{M}). \tag{3.1.13}$$

このとき，$A^{p,q}(\mathscr{M})$ の（局所）断面を (p,q) 次の複素微分形式といい，その全体を $\mathscr{A}^{p,q}(\mathscr{M})$ と表す．

□

【命題 3.8】 複素多様体 X^n の局所複素座標系を $(z^1,\cdots,z^n)$ とする．

1. $T^{1,0}(X)$ の局所断面，すなわち $(1,0)$ 型複素ベクトル場の基底は

$$\partial/\partial z^j = \frac{1}{2}\left(\partial/\partial x^j - i\partial/\partial y^j\right), \tag{3.1.14}$$

で，$T^{0,1}(X)$ の局所断面，すなわち $(0,1)$ 型複素ベクトル場の基底は

$$\partial/\partial \bar{z}^j = \frac{1}{2}\left(\partial/\partial x^j + i\partial/\partial y^j\right), \tag{3.1.15}$$

で与えられる．

2. $\mathscr{A}^{p,q}$ の基底は

$$dz^I \wedge d\bar{z}^J;\ I = (i_1,\cdots,i_p),\ J = (j_1,\cdots,j_q) \tag{3.1.16}$$

で与えられる．

$\square$

【定義 3.9 (正則ベクトル場と正則微分形式)】

1. 複素多様体 X 上の $(1,0)$ 型複素ベクトル場 V を局所複素座標系 $(z^1,\cdots,z^n)$ を用いて局所的に
$$V=\sum_j V^j\partial/\partial z^j \tag{3.1.17}$$
と表すとき，$V^1,\cdots,V^n$ が常に正則関数となるならば V を正則ベクトル場という．

2. 複素多様体 X 上の $(p,0)$ 次微分形式 ω を局所複素座標系 $(z^1,\cdots,z^n)$ を用いて局所的に
$$\omega=\sum_{I=(i_1,\cdots,i_p)}\omega_I dz^I \tag{3.1.18}$$
と表すとき，ω_I が常に正則関数となるならば ω を p 次正則微分形式という．

$\square$

【命題 3.10 (Dolbeault 微分)】

1. 複素多様体 X 上の (p,q) 次複素微分形式 ω に対して，直和分解
$$d\omega=\partial\omega+\bar\partial\omega\in\mathscr{A}^{p+1,q}(X)+\mathscr{A}^{p,q+1}(X) \tag{3.1.19}$$
により写像
$$\partial:\mathscr{A}^{p,q}(X)\to\mathscr{A}^{p+1,q}(X), \tag{3.1.20}$$
$$\bar\partial:\mathscr{A}^{p,q}(X)\to\mathscr{A}^{p,q+1}(X), \tag{3.1.21}$$
を定義すると，
$$\partial^2=0,\ \bar\partial^2=0,\ \partial\bar\partial+\bar\partial\partial=0. \tag{3.1.22}$$

2. $\omega\in\mathscr{A}^{p,0}(X)$ が正則であるための必要十分条件は，$\bar\partial\omega=0$.

$\square$

3.2 複素構造の変形

【命題 3.11】 複素構造 J の無限小変形を $\dot{J}$ と表すと

$$\dot{J}J + J\dot{J} = 0$$

が成り立つ．この条件は,

$$\begin{aligned}&\dot{J} = I + \bar{I};\\ &I = I^a{}_{\bar{b}}\partial_a \otimes d\bar{z}^b \in \mathscr{T}^{1,0} \otimes \mathscr{A}^{0,1}(M).\end{aligned}$$

このとき,

$$\begin{aligned}&\dot{N} = -2(i+J)\bar{\partial} I + 2(i-J)\partial \bar{I},\\ &\pounds_X J = 2i(\bar{\partial} X' - \partial X'').\end{aligned}$$

ここで，N は Nijenhuis テンソル．また，$X = X' + X'' \in \mathscr{T}^{1,0} \oplus \mathscr{T}^{0,1}(M)$. □

【定義 3.12 (可微分族)**】** $\mathbb{R}^m$ 内の領域 B の各点 t に対しコンパクト複素多様体 $M_t = M_t^n$ が与えられているとする．このとき，次の条件を満たす可微分多様体 $\mathscr{M}$ と $\mathscr{M}$ を B の上に写す $\mathscr{C}^\infty$ 写像 ϖ が存在するならば，集合 $\{M_t \mid t \in B\}$ をコンパクト多様体の**可微分族** (differentiable family) とよぶ：

(i) $\mathscr{M}$ の各点において $\mathscr{C}^\infty$ 写像 ϖ の Jacobi 行列の階数は m に等しい．

(ii) 各点 $t \in B$ に対して，$\varpi^{-1}(t)$ は $\mathscr{M}$ のコンパクトな連結部分集合である．

(iii) $\varpi^{-1}(t) = M_t$

(iv) $\mathscr{M}$ の局所開被覆 $\{\mathscr{U}_j \mid j = 1, 2, 3, \cdots\}$ と $\mathscr{U}_j$ 上の複素数値 $\mathscr{C}^\infty$ 関数 $z_j^a(p)$ $(a = 1, \cdots, n,\ j = 1, 2, 3, \cdots)$ が存在して，各 t に対して複素多様体 M_t の局所複素座標系をなす．

[小平邦彦著「複素多様体論」（岩波書店，1992)] □

【定義 3.13 (可微分族の同値性)**】** 領域 $B \subset \mathbb{R}^m$ を底空間とする 2 つの可微分族 $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ と $(\mathscr{N}, B, \pi)$ が与えられたとき，$\mathscr{M}$ を $\mathscr{N}$ の上に写す可微分同相写像 Φ が存在して，各 $t \in B$ に対して Φ が $M_t = \varpi^{-1}(t)$ を $N_t = \pi^{-1}(t)$ の上に双正則に写すならば，可微分族 $\mathscr{M}$ と $\mathscr{N}$ は**同値**であるという． □

【定義 3.14 (自明な可微分族)**】** 可微分族 $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ が $(M \times B, B, \pi)$ $(M = \varpi^{-1}(t_0), t^0 \in B)$ と同値であるとき，$(\mathscr{M}, B, \varpi)$ は**自明**であるという． □

【定理 3.15 (Frölicher-Nijenhuis の定理 (1957))**】** コンパクト複素多様体の可微分族 $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ (B は $\mathbb{R}^m$ 内の領域で $0 \in B$）において，$H^1(M_0, \Theta^0) = 0, M_0 = \varpi^{-1}(0)$ ならば，十分小さい開多重区間 I $(0 \in I \subset B)$ に対して $(\mathscr{M}_I, I, \varpi)$ は自明である．
[Frølicher A, Nijenhuis A: *A theorem on stability of complex structures*, Proc. Nat. Acad. Sci. (USA) 43: 239-41 (1957)] □

【定理 3.16】 複素構造の無限小変形の自由度は $H^1(M, \Theta)$ と 1 対 1 に対応する．ここで，Θ は正則ベクトル場の層． □

【注 3.17 (説明)**】** 複素構造の無限小変形と $H^1(M, \Theta)$ との対応は次のようにして得られる．

1. 可微分族 $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ において，$t \in B$ 近傍での複素局所座標系 $(\mathscr{U}_j, z_j^a (a = 1, \cdots, n))$ に対し，各 t での座標変換を $z_j = f_{ji}(z_i, t)$ とおく．このとき，$\mathscr{U}_j \cap \mathscr{U}_i$ での正則ベクトル場 $\theta_{ji}(t)$ を
$$\theta_{ji}(t) = \frac{f_{ji}^a(z_i, t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z_i^a} \tag{3.2.1}$$
により定義すると，座標変換の結合則
$$f_{ki}(z_i, t) = f_{kj}(f_{ji}(z_i, t), t) \tag{3.2.2}$$
より
$$\theta_{ki}(t) = \theta_{kj}(t) + \theta_{ji}(t), \quad \theta_{ij}(t) = -\theta_{ji}(t) \tag{3.2.3}$$
が成り立つ．したがって，対応 $\mathscr{U}_j \cap \mathscr{U}_i \mapsto \theta_{ji}(t)$ は M_t 上の正則ベクトル場の層 Θ_t に係数をもつ Cech コホモロジーにおける 1 コサイクルを定義する．

2. このコサイクルがコバウンダリーとなるとき，すなわち各 $\mathscr{U}_i$ 上の正則ベクトル場 $\theta_i(t)$ が存在して
$$\theta_{ji} = \theta_j - \theta_i \tag{3.2.4}$$
となる条件は，新たな座標系 $Z_j = g(z_j, t)$ を
$$\frac{\partial g(z_j, t)}{\partial t} = \theta_j(z_j, t) \tag{3.2.5}$$
により定めるとき，Z_j の変換が t に依存しない ($Z_j = F_{ji}(Z_i)$) ことと同等である．

3. 以上より，複素構造の変形の自由度は $H^1(M_t, \Theta_t)$ と対応する．

□

【定義 3.18 (複素解析族)**】** $\mathbb{C}^m$ 内の領域 B の各点 t に対しコンパクト複素多様体 $M_t = M_t^n$ が与えられているとする．このとき，次の条件を満たす複素多様体 $\mathscr{M}$ と $\mathscr{M}$ を B の上に写す正則写像 ϖ が存在するならば，M_t は t に**正則に依存する**といい，集合 $\{M_t \mid t \in B\}$ をコンパクト多様体の**複素解析族** (complex analytic family) とよぶ：

(i) $\mathscr{M}$ の各点において正則写像 ϖ の Jacobi 行列の階数は m に等しい．

(ii) 各点 $t \in B$ に対して，$\varpi^{-1}(t)$ は $\mathscr{M}$ のコンパクトな部分多様体である．

(iii) $\varpi^{-1}(t) = M_t$

[小平邦彦著「複素多様体論」(岩波書店，1992)] □

【定理 3.19 (微分同相性)**】** コンパクト多様体の複素解析族 $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ において，任意の $t, s \in B$ に対して M_t と M_s は微分同相である．[小平邦彦著「複素多様体論」(岩波書店，1992)] □

【定義 3.20 (完備性)**】** 複素解析族 $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ が $p \in B$ で**完備**であるとは，点 $q \in C$ と双正則同型 $\phi : N_q \to M_p$ が存在するような任意の族 $(\mathscr{N}, C, \pi)$ に対して，q の近傍 $\mathscr{U}$ と正則写像 $f : T' \to B, h : \pi^{-1}(\mathscr{U}) \to \mathscr{M}$ が存在して，次の 3 条件を満たすことである．

i) $f \circ \pi = \varpi \circ h$

ii) $f(q) = p$

iii) N_q 上で $h = \phi$.

このとき，$\mathscr{U}$ を十分小さく取ると，h は各ファイバー N_t から $M_{f(t)}$ 上への双正則同型を与えている．したがって，p で完備な族は，M_p のすべての微小変形を含んでいるといえる． □

【定義 3.21 (効果的パラメーター)**】** 複素解析族 $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ の点 $p \in B$ において，小平-Spencer 写像

$$\rho_p : T_p B \to H^1(M_p, \Theta) \tag{3.2.6}$$

が単射となるとき，$(\mathscr{M}, B, \varpi)$ は p で**効果的にパラメータ付けされている**という． □

【定理 3.22 (倉西の基本定理 (1964))**】** 任意のコンパクト複素多様体 M に対し，次の条件を満たす複素解析族 $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ と $p \in B$ が存在する：

i) B の各点で完備.

ii) p で効果的にパラメーター付けされている．

iii) $M_p = M$.

このとき，B を**倉西空間** (Kuranishi space) または M の**局所モジュライ空間** (local moduli space) と呼ぶ． □

3.3 エルミート多様体

3.3.1 エルミート計量

【定義 3.23】

1. 概複素多様体 $(\mathscr{M}, J)$ の Riemann 計量 g が任意のベクトル場 X, Y に対して

$$g(JX, JY) = g(X, Y) \tag{3.3.1}$$

を満たすとき，**エルミート計量**という．

2. エルミート計量を与えられた概複素多様体を**概エルミート多様体**，エルミート計量を与えられた複素多様体を**エルミート多様体**という．

□

【定義 3.24 (エルミート形式)】 概エルミート多様体 $(\mathscr{M}, J, g)$ に対して，

$$\omega(X, Y) = g(JX, Y) \tag{3.3.2}$$

により定義される 2 次微分形式 Φ を**基本 2 形式**ないし**エルミート形式**という．成分表示では，$\omega_{jk} = g_{kl}J^l{}_j = J_{kj} = -J_{jk}$ である．(注：Kobayashi-Nomizu の定義 Φ との対応は，$\Phi = -\omega$.） □

【命題 3.25】

1. エルミート計量 g を複素接バンドルに拡張すると次の性質を持つ：

   i) 任意の複素ベクトル場 Z, W に対して，$g(\bar{Z}, \bar{W}) = \overline{g(Z, W)}$.

   ii) 任意のゼロでない複素ベクトル場 Z に対して，$g(Z, \bar{Z}) > 0$.

   iii) $(1, 0)$ 型ベクトル場 Z と $(0, 1)$ 型ベクトル場 W に対して，$g(Z, \bar{W}) = 0$.

   特に，$h(Z, W) = 2g(Z, \bar{W})$ は $T'(\mathscr{M})$ 上の正値エルミート計量を与える．

2. 逆に，$T'(\mathscr{M})$ の正値エルミート計量 $h(*,*)$ が与えられると，$2g(Z,\bar{W}) = h(Z,W)(Z,W \in T'_p(\mathscr{M}))$ と 1.i)-iii) を満たす複素接バンドルの対称双線形形式 g が一意的に存在し，その実接バンドル $T(\mathscr{M})$ への制限は $\mathscr{M}$ のエルミート計量を与える．

3. $T'(\mathscr{M})$ の断面，すなわち $(1,0)$ 型複素ベクトル場の基底を $f_1,\cdots,f_n$，$\mathscr{A}^{1,0}(\mathscr{M})$ の双対基底を $\phi^1,\cdots,\phi^n$ とおく．すなわち，$\phi^j(f_k) = \delta^j_k$．このとき，$T'(\mathscr{M})$ のエルミート計量 h を

$$h = h_{ij}\phi^i\bar{\phi}^j;\ h_{ij} = h(f_i,f_j) = 2g(f_i,\bar{f}_j) \tag{3.3.3}$$

とおくと，h_{ij} はエルミート行列で，基本 2 形式 ω は

$$\omega = \frac{i}{2}h_{ij}\phi^i \wedge \bar{\phi}^j \tag{3.3.4}$$

と表される．

□

【注 3.26】 Riemann 計量 g を $T^{*\mathbb{C}}(\mathscr{M})$ に拡張したものは，形式的に

$$ds^2 = g_{jk}dz^j \otimes dz^k + g_{j\bar{k}}dz^j \otimes d\bar{z}^k + g_{\bar{j}k}d\bar{z}^j \otimes dz^k + g_{\bar{j}\bar{k}}d\bar{z}^j \otimes d\bar{z}^k \tag{3.3.5}$$

と表される．ここで，計量が対称形式である条件は $g_{jk} = g_{kj}, g_{j\bar{k}} = g_{\bar{k}j}, g_{\bar{j}\bar{k}} = g_{\bar{k}\bar{j}}$，計量が実接空間 $T^*(\mathscr{M})$ 上で実である条件は $g_{\bar{j}\bar{k}} = \bar{g}_{jk}, g_{\bar{j}k} = \bar{g}_{j\bar{k}}$ と表されので，

$$ds^2 = g_{jk}dz^j \otimes dz^k + \bar{g}_{jk}d\bar{z}^j \otimes d\bar{z}^k + g_{j\bar{k}}(dz^j \otimes d\bar{z}^k + d\bar{z}^k \otimes dz^j). \tag{3.3.6}$$

このとき，Hermite 計量である条件は，$g_{jk} = 0$．よって，Hermite 計量は，

$$ds^2 = g_{j\bar{k}}(dz^j \otimes d\bar{z}^k + d\bar{z}^k \otimes dz^j). \tag{3.3.7}$$

ただし，$\bar{g}_{j\bar{k}} = g_{k\bar{j}}$．したがって，$h_{jk} = 2g_{j\bar{k}}$ を用いると，

$$ds^2 = \tfrac{1}{2}h_{jk}(dz^j \otimes d\bar{z}^k + d\bar{z}^k \otimes dz^j) \tag{3.3.8}$$

この式はしばしば，

$$ds^2 = h_{jk}dz^jd\bar{z}^k \tag{3.3.9}$$

と表される．たとえば,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \Rightarrow \quad ds^2 = dzd\bar{z}. \tag{3.3.10}$$

また,

$$ds^2 = \mathrm{Re}(h_{jk}dz^j \otimes d\bar{z}^k), \quad \omega = -\mathrm{Im}(h_{jk}dz^j \otimes d\bar{z}^k). \tag{3.3.11}$$

特に,

$$\omega = \frac{i}{2}h_{jk}dz^j \wedge d\bar{z}^k. \tag{3.3.12}$$

□

3.4 Kähler 多様体

【定義 3.27】

1. 概エルミート多様体 $(\mathscr{M}, J, g)$ は，そのエルミート ω が閉形式となるとき，**概 Kähler 多様体**という．このとき ω を **Kähler 形式**という．

2. 概 Kähler 多様体は，その概複素構造が積分可能であるとき，すなわち，複素多様体で J がその複素構造から決まる概複素構造となるとき，**Kähler 多様体**という．

□

【注 3.28】 様々な定義の関係

$\Phi\backslash J$	N/A	$\exists$(almost complex)	$N=0$(complex)
$\exists$		almost Hermitian	Hermitian
$d\Phi=0$	almost symplectic	almost Kähler	Kähler

□

【定理 3.29】 $2m$ 次元概エルミート多様体 $(\mathscr{M}, J, g)$ に対し，次の条件は同等である．

(i) J は複素構造で，g は Kähler.

(ii) $\nabla J = 0$.

(iii) $\nabla\omega = 0$. (ω はエルミート形式)

(iv) g のホロノミーガウンが $\mathrm{U}(m)$ の部分群で，J が対応する $\mathrm{U}(m)$ 構造を与える．

[[< Joice DJ 2000B]] □

【定理 3.30】 エルミート多様体が Kähler 多様体となるための必要十分条件は，各点 p の近傍で

$$ds_p^2 = dz^i d\bar{z}^i, \quad D(\partial_{z_i})|_p = 0$$

となる複素座標が存在することである． □

3.4.0.1 基本的性質

【定理 3.31】 Kähler 多様体の複素部分多様体は，誘導計量により再び Kähler 多様体となる． □

【定理 3.32】 Kähler 形式 ω に対して，局所的に滑らかな実関数 ϕ が存在し，

$$\omega = dd^c\phi.$$

ここで，$d^c = i(\bar{\partial} - \partial)$． □

3.4.1 曲率テンソル

【命題 3.33】 Kähler 多様体の曲率テンソル R と Ricci テンソル Ric は次の性質をもつ：

1. $R(X,Y)\circ J = J\circ R(X,Y), \quad R(JX,JY) = R(X,Y)$.
2. $\mathrm{Ric}(JX,JY) = \mathrm{Ric}(X,Y)$.
3. $\mathrm{Ric}(X,Y) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(J\circ R(X,JY))$.

□

【定義 3.34 (Ricci 形式)】 Kähler 多様体の Ricci 曲率から定義される

$$\rho(X,Y) = \mathrm{Ric}(JX,Y)$$

は 2 形式となり，**Ricci 形式**と呼ばれる． □

【命題 3.35 (成分表示)】 $e_1, \cdots, e_n, e_{\tilde{1}}, \cdots, e_{\tilde{n}}(e_{\tilde{k}} = Je_k)$ を $T_x(M)$ の基底，$\theta^1, \cdots, \theta^n, \theta^{\tilde{1}}, \cdots, \theta^{\tilde{n}}(\theta^{\tilde{k}} = -J\theta^k)$ をその双対基底として，

$$\phi^j = (1-iJ)\theta^j, \quad f_j = \frac{1}{2}(1-iJ)e_j,$$
$$\Psi^j_k = \phi^j(\mathscr{R}f_j) = \mathscr{R}^j{}_k - i\mathscr{R}^j{}_{\tilde{k}}$$

とおくと，

$$\mathscr{R}^{\tilde{j}}{}_{\tilde{k}} = \mathscr{R}^j{}_k, \quad \mathscr{R}^{\tilde{j}}{}_k = -\mathscr{R}^j{}_{\tilde{k}}$$

より，

$$\rho = i\Psi^j_j$$

が成り立つ． □

3.4.2　座標成分表示

【命題 3.36】　複素座標系 z^j に関する成分表示のもとで次の諸式が成り立つ：

1. 計量
$$ds^2 = 2g_{i\bar{j}}dz^i d\bar{z}^j$$
ただし，$\bar{g}_{i\bar{j}} = g_{j\bar{i}}$.

2. Kähler 形式
$$\omega = i g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

3. 接続係数
$$\begin{aligned}\Gamma^i_{jk} &= \Gamma^i_{kj} = g^{i\bar{l}} \frac{\partial g_{\bar{l}j}}{\partial z^k}, \\ \Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{k}} &= \Gamma^{\bar{i}}_{\bar{k}\bar{j}} = g^{\bar{i}l} \frac{\partial g_{l\bar{j}}}{\partial \bar{z}^k}\end{aligned}$$
他の成分はゼロ.

4. 曲率テンソル
$$R_{i\bar{j}k\bar{l}} = g_{m\bar{j}} \frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial \bar{z}^l} = \frac{\partial^2 g_{i\bar{j}}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} - g^{m\bar{n}} \frac{\partial g_{i\bar{n}}}{\partial z^k} \frac{\partial g_{\bar{j}m}}{\partial \bar{z}^l}$$
およびこれと Riemann 曲率テンソルの代数的対称性から決まるもの以外はゼロ.

5. Ricci 曲率と Ricci 形式
$$\begin{aligned}&R_{i\bar{j}} = -\frac{\partial^2 \ln G}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}, \\ &\rho = -i\partial\bar{\partial} \ln G, \\ &G = \det(g_{i\bar{j}}).\end{aligned}$$
特に，Ricci 形式は複素構造と体積要素のみで決まる.

□

3.4.3 標準直線バンドル

【定義 3.37 (標準直線バンドル)】 n 次元複素多様体 M に対して，$\wedge^n(T'M)^*$ を**標準直線バンドル**といい K で表す．また，$\wedge^n T'M$ を**反標準直線バンドル**といい，K^* で表す． □

【定理 3.38】 Kähler 多様体の Ricci 形式 ρ は，標準直線バンドル（反標準直線バンドル）に誘導される接続の曲率テンソルの i 倍（$-i$ 倍）となる．特に，$\rho = 0$ となる条件は，標準直線バンドルが平行な局所断面を持つことと同等である．このとき，対応する断面は正則である． □

3.4.4 ホロノミー

【定理 3.39 (Iwamoto)】 複素次元 n の Kähler 多様体に対して，制限線形ホロノミー群が $SU(n)$ に含まれるための必要十分条件は，Ricci テンソルが恒等的にゼロとなることである． □

3.4.5 Chern 類

【定理 3.40 (曲率形式による表現)】 Kähler 多様体 M の Kähler 形式を ω，曲率形式を $\mathscr{R}$ とすると，その p 次 Chern 類 $c_p(M)$ は，

$$c_p(M) = [\frac{1}{(p!)^2} I^p_\omega(\mathscr{R} \wedge \cdots \mathscr{R})]$$

と表される．特に，ρ を Ricci 形式として

$$c_1(M) = [\frac{1}{2\pi}\rho]$$

□

3.4.6　例

3.4.6.1　複素射影空間

【例 3.41 (Fubini-Study 計量)】　$\mathbb{C}^{m+1}-\{0\}$ 上の関数 $U=|Z_0|^2+\cdots+|Z_m|^2$ から 2 形式 ω を

$$\omega = dd^c(\log U) = \frac{2i}{U}\sum_a dZ_a\wedge d\bar{Z}_a - \frac{2i}{U^2}(\sum_a \bar{Z}_a dZ_a)\wedge(\sum_b Z_b dZ_b) \quad (3.4.1)$$

により定義すると，これは $[Z_0,\cdots,Z_m]$ を同次座標とする $\mathbb{CP}^m$ 上の閉 2 形式と見なされる．ω は $\mathbb{CP}^m$ 上の正形式となっており，$\mathbb{CP}^m$ 上の次の Kähler 計量と対応する．

$$g = \frac{4}{U}\sum_a dZ_a d\bar{Z}_a - \frac{4}{U^2}(\sum_a \bar{Z}_a dZ_a)(\sum_b Z_b d\bar{Z}_b). \quad (3.4.2)$$

これは $Z_a : Z_b$ のみに依存している．例えば，$Z_0\neq 0$ のとき，

$$Z_j = Z_0 z_j \ (j\neq 0) \quad (3.4.3)$$

により $\mathbb{CP}^m$ の局所座標系 z_j を導入すると，

$$g = \frac{4}{u}\sum_j dz_j d\bar{z}_j - \frac{4}{u^2}|\sum_j \bar{z}_j dz_j|^2 \quad (3.4.4)$$

となる．ここで，

$$u = 1+\sum_j |z_j|^2. \quad (3.4.5)$$

□

3.4.7　Kähler-Einstein 多様体

3.4.7.1　一般的性質

【定義 3.42 (２次コホモロジー類の符号)】　$H^2(M,\mathbb{R})$ のコホモロジー類は，正（負）の $(1,1)$ 型部分形式を代表元としてもつとき，正（負）であるという．この符号は代表元に依存せず，コホモロジー類のみで決まる．ここで $\alpha\in\mathscr{A}_{1,1}(M)$ が正（負）であるとは，$a(X,Y)=\alpha(X,JY)$ により定義される J 不変実対称双線形形式 a が正（負）であることを意味する．□

【命題 3.43 (Kähler-Einstein 多様体のスカラ曲率の符号)】 Kähler-Einstein 多様体 M のスカラ曲率 s の符号は複素構造のみにより定まる．さらに，s の値は，M の複素次元を n, V を体積として

$$Vs^n = \frac{4\pi n^n}{n!} c_1^n \tag{3.4.6}$$

により定まる．ここで，c_1^n は複素構造のみで決まる Chern 特性数である． □

【注 3.44 (第１ Chern 類の符号)】

1. $\mathbb{CP}^N$ ないの $d_j (j = 1, \cdots, p)$ 次同次多項式により定義される超曲面の交わりにより定義される代数多様体 M の第 1 Chern 類は，超曲面が一般の位置にあるとき，$d = d_1 + \cdots + d_p$ として

   $$c_1(M) = (N + 1 - d)h$$

   で与えられる．ここで，h は $H^2(\mathbb{CP}^N, \mathbb{Z})$ の正の生成元の M への制限である．

2. 小平の定理より，第 1 Chern 類が正ないし負のコンパクト複素多様体は複素射影空間への正則埋め込みをもつ．

3. 複素曲面に対しては，$c_1(M)$ が定符号となるのは $c_1^2(M)$ が非負の場合に限る．一方，複素曲面を 1 点でブローアップすると，$c_1^2(M)$ は 1 だけ減少する．したがって，十分多くの点でブローアップして得られる曲面の第 1 Chern 類は定符号でなくなる．例えば，$\mathbb{CP}^2$ を r 回ブローアップした曲面 Σ_r に対して，$c_1^2(\Sigma_r) = 9 - r$．また，$0 \le r \le 8$ のとき，Σ_r は正の第 1 Chern 類をもち，正の第 1 Chern 類をもつ複素曲面はそれらと $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ に限られる．これらのうち，$\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ には Kähler-Einstein 計量が入らないことが示される．$\Sigma_r(4 \le r \le 8$）については，Kähler-Einstein 計量が入るかどうかは不明．[Besse AL 1987]

□

3.4.7.2 Calabi-Yau 予想

【定理 3.45 (**Calabi-Yau の定理**)**】** M をコンパクト Kähler 多様体, ω をその Kähler 形式，$c_1(M)$ を第１ Chern 類とする．このとき，コホモロジー類 $2\pi c_1(M)$ に属する任意の $(1,1)$ 型実閉形式は，Kähler 形式が ω と同じコホモロジー類に属する Kähler 計量の Ricci 形式となり，そのような Kähler 計量は一意的である． □

【定理 3.46 (**Aubin-Calabi-Yau の定理**)**】** 第１ Chern 類が負となる任意のコンパクト複素多様体は,（スカラ曲率が負の）Kähler-Einstein 計量をもつ．そのような計量は，定数倍の除いて一意的である． □

3.4.7.3 例

【注 3.47】

1. 任意のコンパクト単連結一様 Kähler 多様体は正スカラ曲率の Kähler-Einstein 計量をもつ．これは，1987 年時点で，唯一の正スカラ曲率 Kähler-Einstein 多様体の例である [Besse AL 1987]

□

3.4.8 Ricci 平坦多様体

【定理 3.48 (**Calabi-Yau 多様体**)**】** コンパクト複素多様体 M に対して，次の３つの条件は同等である．

i) 第１ Chern 類がゼロで Kähler 計量をもつ.

ii) Ricci 平坦な Kähler 計量をもつ.

iii) 標準直線バンドルに誘導される接続が局所平坦となる Kähler 計量をもつ.

□

【定理 3.49 (モジュライ自由度)】 (M, J) を Kähler 計量をもち $c_1(M) = 0$ となるコンパクト複素多様体とする．このとき，M の各 Kähler 類ごとに Ricci 平坦な Kähler 計量が一意的に存在する．(M, J) 上の Ricci 平坦な Kähler 計量の全体は，M の Kähler 錐と同型な次元 $h^{1,1}(M)$ の多様体となる． □

3.4.9 Calabi-Yau 多様体

3.4.9.1 定義と基本性質

【定義 3.50 (Calabi-Yau 多様体)】 複素 m 次元コンパクト Kähler 多様体 (M, J, g) のホロノミー群が $\mathrm{SU}(m)$ となるとき，M を（非特異）Calabi-Yau 多様体という． □

【命題 3.51 (ホロノミーによる特徴付け)】 (M, J, g) を単連結，既約，コンパクト，Ricci 平坦な（複素）m 次元 Kähler 多様体とする．このとき，$m \geq 2$ かつ $\mathrm{Hol}(g) = \mathrm{SU}(m)$，または m は 4 以上の偶数かつ $\mathrm{Hol}(g) = \mathrm{Sp}(m/2)$ となる．逆に，(M, J, g) が複素 m 次元コンパクト Kähler 多様体で $\mathrm{Hol}(g)$ が $\mathrm{SU}(m)$ か $\mathrm{Sp}(m/2)$ と一致すれば，g は Ricci 平坦，既約でその基本群は有限群となる．(Joyce DD 2000[Joy00]) □

【命題 3.52 (平行微分形式)】 (M, J, g) をコンパクト，Ricci 平坦な Kähler 多様体，ξ を滑らかな $(p, 0)$ 形式とする．このとき，$d\xi = 0$ と $\nabla\xi = 0$ は同等となる．したがって，$H^{p,0}(M)$ は平行 $(p, 0)$ 形式の空間と同型となる．(Joyce DD 2000[Joy00]) □

【定理 3.53 (Ricci 平坦 Kähler 多様体)】 コンパクトで Ricci 平坦な Kähler 多様体の有限非分岐被覆は，Kähler 多様体の直積 $T \times X_1 \times \cdots \times X_k$ と同型である．ここで，T は平坦な Kähler トーラス，各 X_k は単連結既約な Riemann 多様体で，Calabi-Yau 多様体か超 Kähler 多様体のいずれか．[[< 岩波数学事典 v4]] □

【命題 3.54 (標準線バンドル)】 (M, J, g) をコンパクト，Ricci 平坦な複素 m 次元 Kähler 多様体とする．このとき，$\mathrm{Hol}(g) \subset \mathrm{SU}(m)$ となるための必要十分条件は，M の標準線バンドル K_M が自明となることである．(Joyce DD 2000[Joy00]) □

【命題 3.55 (コホモロジー)】 n 次元 Calabi-Yau 多様体 M に対して，$h^{p,q} = \dim H^{p,q}(M)$ とおくと，

$$h^{0,p} = h^{p,0} = h^{n,p} = h^{p,n} = 0 \ (0 < p < n), \tag{3.4.7a}$$
$$h^{0,0} = h^{0,n} = h^{n,0} = h^{n,n} = 1. \tag{3.4.7b}$$

(¡ Joyce DD 2000[Joy00]) □

【定理 3.56 (代数性定理)】 複素次元が 3 以上の Calabi-Yau 多様体は射影的である．(Joyce DD 2000[Joy00]) □

3.4.10 Hyperkähler 多様体

【定義 3.57 (Hyperkähler 多様体)】 $4k$ 次元 Riemann 多様体 (M, g) が $IJ = -JI = K$ を満たす 3 つの概複素構造 I, J, K をもち，かつ g が I, J, K のいずれに関してもエルミートであるとき，(M, g) を **hyperkähler** 多様体という． □

3.5 位相的性質

3.5.1 基本群

【定理 3.58 (3 次元コンパクト複素多様体の基本群 [Tau92, ABC+96])】 有限表示をもつ任意の群 G に対し，基本群が G と同型となる 3 次元コンパクト複素多様体が，あるコンパクト（実 4 次元）自己双対多様体のツィスター空間として実現される． □

3.6　層係数コホモロジー

3.6.1　de Rham の定理

【定理 3.59 (de Rham の定理)】　M を（パラコンパクトで）なめらかな多様体とする．

1. M の単体分割を K とすると，
$$\check{H}^*(M,\mathbb{Z}) \cong H^*(K,\mathbb{Z}) \cong H^*_{\mathrm{sing}}(M,\mathbb{Z}).$$
2. $\check{H}^*(M,*)$ は完全なコホモロジー関手で，
$$\check{H}^*(M,*) = H^*(M,*).$$
3. (**Poincaré の補題**）定数層 $\mathbb{R}$ の次の層分解は完全である：
$$0 \to \mathbb{R} \to \mathscr{A}^0 \xrightarrow{d} \mathscr{A}^1 \xrightarrow{d} \mathscr{A}^2 \to \cdots .$$
4. $\mathscr{A}^p$ は散布層である．したがって，
$$H^k(M,\mathscr{A}^p) = 0,\ k \geq 1.$$
5. M 上のコホモロジー環に対して，
$$H^*_{\mathrm{DR}}(M,\mathbb{R}) \cong \check{H}^*(M,\mathbb{R}) \cong H^*_{\mathrm{sing}}(M,\mathbb{R}).$$

□

3.6.2　Dolbeault の定理

【定義 3.60 (Dolbeault コホモロジー)】　複素多様体 M 上で大域的に定義された微分形式の線形空間 $A^{p,q} = \Gamma(M,\mathscr{A}^{p,q})$ から定義される双対複体
$$0 \xrightarrow{\bar\partial} A^{p,0} \xrightarrow{\bar\partial} A^{p,1} \xrightarrow{\bar\partial} \cdots$$
のコホモロジーを **Dolbeault コホモロジー**といい，$H^{p,q}_{\bar\partial}(M)$ と表す．

□

【定理 3.61 ($\bar{\partial}$-Poicaré 補題)】 Δ^n を原点を中心とする $\mathbb{C}^n$ の多重円盤，$\Delta^{*n} = \Delta^n - \{0\}$ とする．このとき，

$$H^{p,q}_{\bar{\partial}}(\delta^{*k} \times \delta^l) = 0, \quad q \geq 1. \tag{3.6.1}$$

□

【定理 3.62 (Dolbeault の定理)】 M を複素多様体とする．

1. $\check{H}^*(M, *)$ は完全なコホモロジー関手で，
$$\check{H}^*(M, *) = H^*(M, *).$$
2. ($\bar{\partial}$-Poicaré 補題）層 Ω^p の次の層分解は完全である：
$$0 \to \Omega^p \to \mathscr{A}^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathscr{A}^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathscr{A}^{p,2} \to \cdots.$$
3. $\mathscr{A}^{p,q}$ は散布層である．したがって，
$$H^k(M, \mathscr{A}^{p,q}) = 0,\ k \geq 1.$$
4. M 上のコホモロジー環に対して，
$$H^q(M, \Omega^p) \cong H^{p,q}_{\bar{\partial}}(M). \tag{3.6.2}$$

□

【命題 3.63 (諸定理)】

1. 任意の n 次元複素多様体 M に対し，
$$H^q(M, \mathscr{O}) \cong H^{0,q}_{\bar{\partial}}(M) = 0, \quad q > n.$$
2. $$H^q(\mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^*)^l, \mathscr{O}) = 0, \quad q > 0.$$
3. $$H^q(\mathbb{C}^n, \mathscr{O}^*) = 0, \quad q > 0.$$
これより，$\mathbb{C}^n$ の任意の解析的超曲面は一個の正則関数のゼロ点集合として表される．
4. $$H^p(\mathbb{CP}^n, \Omega^q) = \begin{cases} \mathbb{C} & p = q \leq n, \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

□

3.7 調和理論

3.7.1 Hodge 理論

【定義 3.64 (Hodge 双対と調和形式)】

1. n 次元複素多様体 M のエルミート計量 h のユニタリ基底を ϕ_i,

$$h = \sum_i \phi_i \otimes \bar{\phi}_i$$

対応する体積要素を

$$\Phi = (-1)^{n(n-1)/2} \left(\frac{i}{2}\right)^n \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n \wedge \bar{\phi}_1 \wedge \cdots \bar{\phi}_n$$

とする．これを用いて，微分形式の Hodge 双対

$$* : A^{p,q}(M) \to A^{n-p,n-q}(M)$$

を，任意の $\psi \in A^{p,q}$ に対して，

$$\psi(z) \wedge *\eta(z) = (\psi(z), \eta(z))\Phi$$

が成り立つという条件で定義する．ただし，$(\psi(z), \eta(z))$ は $\psi(z)$ と $\eta(z)$ のエルミート内積である．このとき，

$$**\eta = (-1)^{p+q}\eta$$

が成り立つ．

2. Hodge 双対を用いて

$$\bar{\partial}^* := -*\bar{\partial}* : A^{p,q} \to A^{p,q-1}$$

と定義すると，$\psi \in A^{p,q}, \eta \in A^{p,q-1}$ に対して

$$(\bar{\partial}^*\psi, \eta) = (\psi, \bar{\partial}\eta)$$

が成り立つ．ただし，

$$(\psi, \eta) := \int (\psi(z), \eta(z))\Phi(z)$$

3. $\bar{\partial}$-Laplacian を
$$\Delta_{\bar{\partial}} = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}$$
で定義するとき，
$$\Delta_{\bar{\partial}}\psi = 0$$
を満たす微分形式を**調和形式**といい，調和 (p,q) 形式の全体を $\mathscr{H}^{p,q}(M)$ と表す．

$\square$

【定理 3.65 (Hodge の定理)】 M をコンパクト複素多様体とする．

1. $\dim \mathscr{H}^{p,q}(M) < \infty$.
2. $\mathscr{H} : A^{p,q}(M) \to \mathscr{H}^{p,q}(M)$ を関数空間としての垂直射影とするとき，次の性質をもつ Green 作用素
$$G : A^{p,q}(M) \to A^{p,q}(M)$$
が一意的に存在する：
$$G(\mathscr{H}^{p,q}(M)) = 0, \tag{3.7.1}$$
$$\bar{\partial}G = G\bar{\partial},\ \bar{\partial}^*G = G\bar{\partial}^*, \tag{3.7.2}$$
$$I = \mathscr{H} + \Delta_{\bar{\partial}}G. \tag{3.7.3}$$
3. 自然な写像 $\mathscr{H}^{p,q}(M) \to H^{p,q}_{\bar{\partial}}(M)$ は同型である．

$\square$

【定理 3.66 (Kodaira-Serre 双対定理)】 M を n 次元コンパクト複素多様体とする．

1. $H^n(M, \Omega^n) \cong \mathbb{C}$.
2. 双線形写像
$$H^p(M;\Omega^q) \otimes H^{n-p}(M;\Omega^{n-p}) \to H^n(M;\Omega^n)$$
は非退化である．

$\square$

3.7.2 Hodge 分解

【定理 3.67 (Hodge 分解)】 コンパクト Kähler 多様体 M の複素係数コホモロジーは次の関係式を満たす：

$$H^r(M,\mathbb{C}) \cong \oplus_{p+q=r} H^{p,q}(M), \tag{3.7.4a}$$

$$H^{p,q}(M) \cong \overline{H^{q,p}(M)}. \tag{3.7.4b}$$

□

【系 3.68】 複素次元 n のコンパクト Kähler 多様体 M に対して，

$$b_r = \dim_{\mathbb{C}} H^r(M,\mathbb{C}), \quad h^{p,q} = \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}(M)$$

とおくとき，次の関係式が成り立つ：

$$b_r = \sum_{p+q=r} h^{p,q}, \tag{3.7.5}$$

$$h^{p,q} = h^{q,p}, \quad h^{p,q} = h^{n-p,n-q}. \tag{3.7.6}$$

□

3.8 因子と線バンドル

3.8.1 因子

【定義 3.69 (因子)】 複素多様体 M において，その既約解析的超曲面の局所有限な $\mathbb{Z}$ 係数形式和

$$D = \sum_i a_i V_i$$

を M 上の**因子**といい，その全体を $\mathrm{Div}(M)$ と表す． □

【定義 3.70 (有理型関数)】 M を複素多様体とする．

1. M 上の関数 f が局所的に互いに素な正則関数 g, h を用いて $f = g/h$ と表されるとき**有理型関数**という．

2. $\mathscr{M}(U)$ が U の有理型関数の全体となる M 上の層を $\mathscr{M}$，$\mathscr{M}^*(U)$ が恒等的にゼロでない有理型関数の全体となる $\mathscr{M}$ の部分層を $\mathscr{M}^*$ と表す．

□

【定義 3.71 (関数の因子)】

1. (**正則関数の超曲面に沿う位数**) V を M の既約解析的超曲面とする．$p \in V$ の近傍 U における V の局所定義関数を $f(\in \mathscr{O}_p)$ とするとき，任意の $g \in \mathscr{O}(U)$ は $\mathscr{O}_p$ において，整数 a および f と互いに素な関数 $h \in \mathscr{O}_p$ を用いて
$$g = f^a h$$
と分解される．このとき，$\mathrm{ord}_{V,p}(g) = a$ と定義し，g の p における V に沿う位数という．g が M 上の正則関数の時，$\mathrm{ord}_{V,p}(g)$ は p の取り方に依らないので，その値を単に $\mathrm{ord}_V(g)$ と表し，g の V に沿う位数という．このとき，$g, h \in \mathscr{O}(M)$ に対して，
$$\mathrm{ord}_V(gh) = \mathrm{ord}_V(g) + \mathrm{ord}_V(f)$$
が成り立つ．

2. （**有理型関数の因子**）M 上の有理型関数 f が局所的に $f = g/h$ $(g, h \in \mathscr{O}_p$，互いに素$)$ と表されるとき，既約超曲面 V に沿う f の位数を
$$\mathrm{ord}_V(f) = \mathrm{ord}_V(g) - \mathrm{ord}_V(h)$$
により定義する．$\mathrm{ord}_V(f)$ は f の局所的な表現に依存しない．この位数を用いて，f の因子 (f) を
$$(f) = \sum_V \mathrm{ord}_V(f)$$
により定義する．

3. （**$\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*$ の大域的断面の因子**）商層 $\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*$ の大域的断面 s は，M の適当な開被覆 $\{U_\alpha\}$ で $\{[f_\alpha]\}$ $(f_\alpha \in \mathscr{M}^*(U_\alpha))$ により表される．このとき，
$$(s) = \sum_V \mathrm{ord}_V(f_\alpha)V, \quad (V \cap U_\alpha \neq \emptyset)$$
は，代表元 f_α（$\mathrm{mod}\ \mathscr{O}^*(U_\alpha)$）や $U_\alpha(\cap V \neq \emptyset)$ の取り方に依存せず，断面 s の因子を定義する．

4. （**線バンドルの有理型断面の因子**）線バンドル L の有理型断面，すなわち層 $\mathscr{O}(L) \otimes_{\mathscr{O}} \mathscr{M}$ のゼロでない大域的断面 s は，L の局所座標近傍 U_α で，$f_\alpha \in \mathscr{M}^*(U_\alpha)$ により表される．この有理型関数から定義される
$$(s) = \sum_V \mathrm{ord}_V(f_\alpha)V, \quad (V \cap U_\alpha \neq \emptyset)$$
は局所座標近傍の取り替え $f_\beta = g_{\beta\alpha} f_\alpha$ $(g_{\beta\alpha} \in \mathscr{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta))$ により不変で，s の因子を定義する．

□

3.8.2 線形系

【定義 3.72 (因子の線形系)】

1. ２つの因子 D, D' が有理型関数 f を用いて $D' = D + (f)$ と表されるとき，２つの因子は**線形同値**であるという．

2. 因子 D が $D=\sum_i a_i V_i$ $(a_i \geq 0)$ と表されるとき，D は**有効**であるといい，$D \geq 0$ と表す.

3. 因子 D と線形同値な有効因子の全体を $|D|$ と表す：

$$|D| = \{D + (f) \geq 0 \mid f \in \mathscr{M}^*(M)\}.$$

また，$D+(f) \geq 0$ となる有理型関数全体のつくる線形空間を**完備線形系**といい，$\mathscr{L}(D)$ と表記する：

$$\mathscr{L}(D) = \{f \in \mathscr{M}(M) \mid D + (f) \geq 0\}.$$

$|D|$ と $\mathscr{L}(D)$ は次の関係にある：

$$|D| \cong \mathbb{CP}(\mathscr{L}(D))$$

4. 一般にある因子 D について，$\mathscr{L}(D)$ の線形部分空間に対応する $|D|$ の部分集合を**線形系**という.

□

3.8.3 Picard 群

【定義 3.73 (Picard 群)】 複素多様体 M 上の正則線バンドルの全体は，テンソル積に関して乗法群となる：

$$L : \{g_{\alpha\beta}\},\ L' : \left\{g'_{\alpha\beta}\right\} \to L \otimes L' : \left\{g_{\alpha\beta} g'_{\alpha\beta}\right\},$$
$$L : \{g_{\alpha\beta}\} \to L^{-1} : \left\{g_{\alpha\beta}^{-1}\right\}.$$

この群を M の Picard 群といい，$\mathrm{Pic}(M)$ と表す. □

3.8.4 因子と正則線バンドルの対応

【命題 3.74 (因子と正則線バンドルの対応)】

1. 商層 $\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*$ の大域的切断 s とその因子 (s) の対応は次の同型を与える：

$$H^0(M, \mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*) \cong \mathrm{Div}(M).$$

また，Picard 群は $\check{H}^1(M,\mathscr{O}^*)$ と自然に同一視できる：

$$\check{H}^1(M,\mathscr{O}^*) \cong \mathrm{Pic}(M).$$

これと，層の完全系列

$$0 \to \mathscr{O}^* \to \mathscr{M}^* \to \mathscr{M}^*/\mathscr{O}^* \to 0$$

から得られるコホモロジー完全系列より，$\mathrm{Div}(M)$ から $\mathrm{Pic}(M)$ への対応が定義される：

$$\begin{array}{ccc} H^0(M,\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*) & \cong & \mathrm{Div}(M) \\ s=\{(U_\alpha,f_\alpha)\} & \mapsto & D=(s) \\ & & \\ \delta^0\big\downarrow g_{\alpha\beta}=\frac{f_\alpha}{f_\beta} & & \big\downarrow \\ & & \\ \check{H}^1(M,\mathscr{O}^*) & \cong & \mathrm{Pic}(M) \\ \{(U_\alpha\cap U_\beta, g_{\alpha\beta})\} & \mapsto & L=[D]. \end{array}$$

2. 対応 $\delta^0:\mathrm{Div}(M)\to\mathrm{Pic}(M)$ の核は主因子群と一致する：

$$\mathrm{Ker}\,\delta_0 = \mathrm{Div}_0(M) = \left\{(f)\,\middle|\, f\in H^0(M,\mathscr{M}^*)\right\}.$$

また，線バンドル L の局所有理切断の層を

$$\mathscr{M}(L) = \mathscr{O}(L)\otimes_{\mathscr{O}}\mathscr{M}$$

と表すと，δ^0 の像は，大域的な有理切断をもつ線バンドルの全体と一致する：

$$\mathrm{Im}\,\delta^0 = \left\{L=[(s)]\,\middle|\,\exists s\neq 0\in H^0(M,\mathscr{M}(L))\right\}.$$

さらに，$L\in\mathrm{Im}\,\delta^0$ の逆像は

$$(\delta^0)^{-1}(L)\cong\left(H^0(M,\mathscr{M}(L))-\{0\}\right)/H^0(M,\mathscr{O}^*).$$

したがって，$s_0\in H^0(M,\mathscr{M}(L)), D=(s_0)$ とすると，つぎの図式が成り立つ：

$$\begin{array}{cccc} H^0(M,\mathscr{O}^*)\rhd & H^0(M,\mathscr{M}(L))-\{0\} & \to & (\delta^0)^{-1}(L) \\ & s & \mapsto & (s) \\ & \cup & & \cup \\ & H^0(M,\mathscr{O}(L))-\{0\} & \to & |L|=|D| \\ & \cong\uparrow\otimes s_0 & D+(f)\nearrow & \\ & \mathscr{L}(D)\ni f & & \end{array}$$

すなわち，

因子の線形同値類	$\Leftrightarrow$	大域的有理切断を持つ正則線バンドルの同値類
同一同値類内の各因子	$\Leftrightarrow$	正則線バンドルの大域的有理切断
有効因子	$\Leftrightarrow$	正則線バンドルの大域的正則切断

$\square$

3.8.5 $\mathscr{E}(D), \mathscr{E}(-D)$

【命題 3.75 $(\mathscr{E}(D), \mathscr{E}(-D))$**】** $D = \sum_i a_i V_i$ を有効因子，s_0 を $D = (s_0)$ となる $\mathscr{O}([D])$ の大域的正則切断 $s_0 \in H^0(M, \mathscr{O}([D]))$，$\mathscr{E}$ を正則ベクトルバンドル E の正則切断の層とする．

1. D の台以外で正則かつ V_i 上で位数が a_i 以下の極をもつ $\mathscr{E}$ の有理切断の層を $\mathscr{E}(D)$ とすると，次の同型対応が成り立つ：
$$\mathscr{E}(D) \xrightarrow{\otimes s_0} \mathscr{O}(E \otimes [D]).$$
2. V_i 上で位数が a_i 以上の零点をもつ $\mathscr{E}$ の正則切断の層を $\mathscr{E}(-D)$ とすると，次の同型対応が成り立つ：
$$\mathscr{E}(-D) \xrightarrow{\otimes s_0^{-1}} \mathscr{O}(E \otimes [-D]).$$
3. D がなめらかな解析超曲面のとき，次の層の完全系列が成り立つ：
$$0 \to \mathscr{O}_M(E \otimes [-D]) \xrightarrow{\otimes s_0} \mathscr{O}_M(E) \xrightarrow{r} \mathscr{O}_D(E|_D) \to 0.$$
ここで，r は制限写像である．

$\square$

3.9　複素曲面

以下，２次元コンパクト複素多様体を複素曲面という.

3.9.1　双有理不変量

【定義 3.76】　Ω_S^q を複素曲面 S の正則 q 次微分形式の層とし，

$$h^{q,p} = \dim_k H^p(S; \Omega_S^q)$$

とおく.

$q = h^{1,0}$: **不正則数**

$p_g = h^{2,0}$: **幾何種数** (geometric genus)

$p_a = h^{0,2} - h^{0,1}$: **算術種数** (arithmetic genus)

$\chi(\mathscr{O}_S) = h^{0,2} - h^{0,1} + h^{0,0}$:

□

【定義 3.77】　K_S を複素曲面 S の標準因子（の定める直線バンドル），$\rho_{|mK_S|}$ を完備線形系 $|mK_S|(m = 1, 2, \cdots)$ の定める有理型射

$$\rho_| mK_S| : H^0(S; mK_S) \to \mathbb{CP}^{\dim |mK_S|}$$

とする.

$\dim H^0(S; K_S) = h^{2,0}$: 幾何種数 p_g

$P_m = \dim H^0(S; mK_S)$: m**-種数** (多重種数)

$\kappa = \max_m \dim \mathrm{Im}\ \rho_{|mK_S|}$: **小平次元**. ただし，$P_m = 0 (\forall m)$ の時は $\kappa = -\infty$ と定める.

□

目次へ

3.10 Examples

3.10.1 Fundamental manifolds

【例 3.78 (**Complex Lie group**)**】** 群 G が同時に複素多様体でかつ群演算 $(a,b) \in G \times G \to ab^{-1} \ni G$ が正則写像となるとき，G を複素 Lie 群という．

Property: Lie 群 G が複素 Lie 群となるための必要十分条件は，その Lie 代数 $\mathscr{L}$ が複素 Lie 代数となること，すなわち，$\mathscr{L}$ の複素構造 J が存在して J が ad と可換となることである． □

【例 3.79 (**Complex projective space**)**】** $P_n(\mathbb{C})$ は $(\mathbb{C}^{n+1}-\{0\})/\mathbb{C}^*$ と同型でコンパクト．

$$P_n(\mathbb{C}) := \left\{ L \subset \mathbb{C}^{n+1} \,\middle|\, L \text{ は原点を通る 1 次元複素線形部分空間} \right\}. \tag{3.10.1}$$

□

【例 3.80 (**Complex Grassmann manifold**)**】**

Definition:

$$G_{p,q}(\mathbb{C}) := \left\{ L \subset \mathbb{C}^{p+q} \,\middle|\, L \text{ は原点を通る } p \text{ 次元複素線形部分空間} \right\}. \tag{3.10.2}$$

$z^1, \cdots, z^{p+q}$ を $\mathbb{C}^{p+q}$ の自然な複素座標系，$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$ を $1 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_p \leq p+q$ となる自然数の組，$\alpha_{p+1} < \cdots < \alpha_{p+q}$ を $(\alpha_1, \cdots, \alpha_{p+q})$ が $(1, \cdots, p+q)$ の置換となる数の組として，

$$\mathscr{U}_\alpha = \{ L \in G_{p,q}(\mathbb{C}) \mid z^{\alpha_1}, \cdots, z^{\alpha_p} \text{ は } L \text{ 上で 1 次独立} \}, \tag{3.10.3}$$

$$\phi_\alpha(L) = (l^k_j) \in M(q,p;\mathbb{C});\ z^{\alpha_{p+k}}|_L = \sum_{j=1}^{p} l^k_j z^{\alpha_j}|_L \ (k = 1, \cdots, q) \tag{3.10.4}$$

とおくと，$\phi_\alpha : \mathscr{U}_\alpha \to M(q,p;\mathbb{C})$ は 1 対 1 の全射で，$(\mathscr{U}_\alpha, \phi_\alpha)$ の全体は $G_{p,q}(\mathbb{C})$ の複素構造を定める．

Property

 目次へ

i) 複素次元が pq でコンパクト.

ii) $G_{p,q}(\mathbb{C}) \cong U(p+q)/U(p) \times U(q)$.

□

【定理 3.81 (Kirchhoff)】 S^n が概複素構造を持つならば，S^{n+1} は絶対平行化可能である. □

【定理 3.82 (Adams)】 S^{n+1} が絶対平行化可能となるのは，$n+1 = 1, 3, 7$ の場合に限られる. □

【定理 3.83 (Borel and Serre)】 S^n は $n = 2, 6$ 以外の場合には，概複素構造を持たない. □

【注 3.84】 S^6 が複素構造を持つかどうかは分かっていない. □

3.10.2 Quotient manifolds

【例 3.85 (Complex torus)】

Definition: Γ を $2n$ 次元実ベクトル空間と見た $\mathbb{C}^n$ の一次独立な有限個のベクトルから生成される $\mathbb{C}^n$ の離散部分 Abel 群とするとき，$\mathbb{C}^n/\Gamma$.

Property: 複素トーラスはコンパクト複素可換Lie 群であり，逆に任意のコンパクト複素 Lie 群は適当な複素トーラスと同型である.

□

【例 3.86 (Hopf surface)】

Definition:

$$\begin{aligned} &\mathscr{M} = \{z \in \mathbb{C}^2 - \{0\}\}/\Gamma; \\ &\Gamma = \{\phi^n \mid \phi(z) = 2z, n \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned} \tag{3.10.5}$$

Property: Hopf surface はどのような次元の射影空間にも埋め込めない.

□

【例 3.87 (Hopf manifold)】

Definition: λ を $|\lambda| \neq 1, 0$ を満たす複素数，Γ_λ を $z \mapsto \lambda z$ により定義される $\mathbb{C}^{p+1}$ の離散線形変換群とするとき，

$$M_\lambda^p := (\mathbb{C}^{p+1} - \{0\})/\Gamma_\lambda. \tag{3.10.6}$$

Property: $\mathscr{M}_\lambda^p \approx S^{2p+1} \times S^1$ （微分同相）

□

【例 3.88 (Calabi-Eckmann manifold)】

Definition: τ_1, τ_2 を実一次独立な 2 つの複素数，Γ をそれらの生成する $\mathbb{C}$ の離散部分群とする．$[z^0, \cdots, z^p]$，$[w^0, \cdots, w^q]$ を $P_p(\mathbb{C})$, $P_q(\mathbb{C})$ の同次座標系，U_α, V_λ をそれぞれ $z^\alpha \neq 0$，$w^\lambda \neq 0$ に対応するアファイン開近傍として，$P_p(\mathbb{C}) \times P_q(\mathbb{C})$ の開被覆 $\{U_\alpha \times V_\lambda\}$ に関する遷移関数 $\psi_{\beta\mu,\alpha\lambda} : (U_\alpha \times V_\lambda) \cap (U_\beta \times V_\mu) \to \mathbb{C}/\Gamma$ を

$$\psi_{\beta\mu,\alpha\lambda} = \frac{1}{2\pi i}\left(\tau_1 \log z^\beta/z^\alpha + \tau_2 \log w^\mu/w^\lambda\right) \tag{3.10.7}$$

により定義する．このときこの遷移関数の定める主ファイバーバンドルを

$$M_{\tau_1,\tau_2}^{p,q}(P_p(\mathbb{C}) \times P_q(\mathbb{C}), \mathbb{C}/\Gamma) \tag{3.10.8}$$

と表す.

Property:

i) $M_{\tau_1,\tau_2}^{p,q} \approx S^{2p+1} \times S^{2q+1}$（微分同相）.

ii) $M_{\tau_1,\tau_2}^{p,q}$ には $GL(p+1;\mathbb{C}) \times GL(q+1;\mathbb{C})$ が正則かつ推移的に作用する.

□

3.10.3 Kähler manifold

【例 3.89 ($\mathbb{C}^n$, **complex torus)】**

Definition:

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} dz^\alpha d\bar{z}^\alpha, \tag{3.10.9}$$

$$\Phi = -i \sum_{\alpha=1}^{n} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\alpha. \tag{3.10.10}$$

Property: コンパクトで複素平行化可能な複素多様体の中で Kähler 計量を持つものは複素トーラスに限られる.

□

【例 3.90 ($P_n(\mathbb{C})$**: Fubini-Study metric)】**

Definition: $[z^0, \cdots, z^n]$ を $P_n(\mathbb{C})$ の同次座標系，$\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to P_n(\mathbb{C})$ を標準射影とすると，

$$\Phi = \pi_*(\tilde{\Phi});\ \tilde{\Phi} = -4i\partial\bar{\partial}\log(z^0\bar{z}^0 + \cdots + z^n\bar{z}^n). \tag{3.10.11}$$

局所座標系 $t^\alpha = z^\alpha/z^0$ では

$$ds^2 = 4\frac{(1+\sum_\alpha t^\alpha\bar{t}^\alpha)\sum_\alpha dt^\alpha d\bar{t}^\alpha - (\sum_\alpha \bar{t}^\alpha dt^\alpha)(\sum_\alpha t^\alpha d\bar{t}^\alpha)}{(1+\sum_\alpha t^\alpha\bar{t}^\alpha)^2}. \tag{3.10.12}$$

Property: $P_n(\mathbb{C})$ に推移的に作用する $U(n+1)$ に対して Fubini-Study 計量は不変.

□

【定義 3.91】 $K_S \sim 0$(標準直線束が自明)，$q = 0(H^1(S,\mathbb{R}) = 0)$ となる複素曲面を **K3 曲面**という．[数学事典] □

【定理 3.92】

K3 曲面に対して次が成り立つ：

i) K3 曲面は単連結であり，すべて互いに可微分同相である．

ii) K3 曲面 S のホモロジーは

$$H_k(S;\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0,4 \\ \mathbb{Z}^{22} & k = 2, \\ 0 & k = 1,3 \end{cases}$$

また，S の交叉形式は

$$2(-E_8) \oplus 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

iii) すべての K3 曲面は Kähler 計量をもつ．

iv) K3 曲面のモジュライ空間は２０次元である．そのなかで，代数的 K3 曲面は無限個の連結成分をもつ１９次元の部分空間となる．

[Barth, W., Peters, C. and Van de Ven, A.: Compact Complex Surfaces (1984)] □

3.11 Twistor

3.11.1 Basic definitions

3.11.1.1 Spinor description

【定義 3.93 (Twistor equation)】

1. $(1, 0)$ 型スピノール ω^A に対するスピノール方程式

$$\nabla_{A'}^{(A}\omega^{B)} = 0 \tag{3.11.1}$$

を**ツィスター方程式**，その解を**基本ツィスター**ないし $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 型ツィスターといい，シンボリックに Z^α，W^β のように表す．また，基本ツィスター全体の作る線形空間を**ツィスター空間**といい，$\mathbb{T}$ と表す.

2. ツィスター空間 $\mathbb{T}$ の双対空間を共役ツィスター空間といい $\mathbb{T}^*$ と表す．また，共役ツィスター空間の元を基本共役ツィスターないし $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 型ツィスターといい，シンボリックに Z_α, W_β のように表す.

□

【命題 3.94 (Twistor equation の整合性)】

1. $\nabla_{AA'}$ が一般に電磁場が存在する曲がった時空上の共変微分とすると，ツィスター方程式より

$$\Psi_{ABCD}\omega^D = -ie\phi_{(AB}\omega_{C)} \tag{3.11.2}$$

が得られる．特に，電磁場が存在しないとき，ゼロ以外のツィスターが存在するためには，時空が共形的に平坦であることが必要である.

2. ツィスター方程式は共形変換

$$\epsilon_{AB} \to \hat{\epsilon}_{AB} = \Omega\epsilon_{AB}, \tag{3.11.3}$$
$$\omega^A \to \hat{\omega}^A = \omega^A \tag{3.11.4}$$

に対して

$$\hat{\nabla}_{A'}^{(A}\hat{\omega}^{B)} \equiv \Omega^{-1}\nabla_{A'}^{(A}\omega^{B)} = 0 \tag{3.11.5}$$

と変換する．したがって，共形不変である.

□

【命題 3.95】 任意の基本ツィスター ω^A に対して，$k^a = \omega^A \bar{\omega}^{A'}$ は null conformal Killing ベクトルとなる．逆に，任意の null conformal Killing ベクトル k^a は適当なツィスター ω^A を用いて $k^a = \omega^A \bar{\omega}^{A'}$ と表される． □

【命題 3.96 (Minkowski 時空の twistor)】

1. Minkowski 時空において，ツィスター方程式は次の 2 式に分解される：

$$\nabla_{BA'}\omega^C = -i\epsilon_B{}^C \pi_{A'}, \tag{3.11.6}$$

$$\nabla_{AA'}\pi_{B'} = 0. \tag{3.11.7}$$

これより，基本ツィスターは 4 個の複素数 $(\omega^A(0), \pi_{A'})$ を用いて

$$\omega^A = \omega^A(0) - ix^{AA'}\pi_{A'} \tag{3.11.8}$$

と表され，複素線形空間として同型 $\mathbb{T}^\alpha \cong \mathbb{C}^4$ が成り立つ．

2. $(\omega^A(0), \pi_{A'})$ は Lorentz 変換に対しては $(1,0)$ 型および $(0,1)$ 型スピノールの組として変換し，並進 $x^{AA'} \to x^{AA'} + a^{AA'}$ に対しては，

$$\omega^A(0) \to \omega^A(0) + ia^{AA'}\pi_{A'}, \tag{3.11.9}$$

$$\pi_{A'} \to \pi_{A'} \tag{3.11.10}$$

と変換する．

3. 2 つの基本ツィスター $Z^\alpha = (\omega^A, \pi_{A'})$，$W^\alpha = (\lambda^A, \sigma_{A'})$ に対して，

$$\Phi(Z, W) = Z^\alpha \bar{W}_\alpha = \omega^A(\bar{\sigma}_A + \pi_{A'}\bar{\lambda}^{A'} \tag{3.11.11}$$

とおくと，右辺は x が実 Minkowski 時空の点であるとき x によらない一定の値を取り，ツィスター空間 $\mathbb{T}$ に符号が $(++--)$ のエルミート内積を定義する．この内積はツィスター空間から共役ツィスター空間への反線形写像

$$\mathbb{T} \ni (\omega^A, \pi_{A'}) \to (\bar{\pi}_A, \bar{\omega}^{A'}) \in \mathbb{T}^* \tag{3.11.12}$$

を与える．

□

【定義 3.97 (Helicity)】

1. 基本ツイスター $Z^\alpha = (\omega^A, \pi_{A'})$ に対して，
$$s = \frac{1}{2} Z^\alpha \bar{Z}_\alpha \tag{3.11.13}$$
で定義される s を**ヘリシティ**という．

2. ヘリシティがゼロ，正，負の基本ツイスターからなるツイスター空間の部分集合をそれぞれ $\mathbb{T}^0, \mathbb{T}^+, \mathbb{T}^-$ と表す．

□

【命題 3.98 (運動量，角運動量との関係)】

1. ヘリシティsのツイスター ω^A に対して，対応する null ベクトル $k^a = \omega^A \bar{\omega}^{A'}$ は
$$\epsilon^{abcd} \nabla_a k_b k_c = 2 s k_d, \tag{3.11.14}$$
$$\nabla_k k^a = i(\omega^A \bar{\pi}_A - \bar{\omega}^{A'} \pi_{A'}) k^a, \tag{3.11.15}$$
$$\nabla_{(a} k_{b)} = \frac{i}{2} (\omega^A \bar{\pi}_A - \bar{\omega}^{A'} \pi_{A'}) g_{ab} \tag{3.11.16}$$
を満たす．特に，k^a は shear-free null congruence を与える．

2. 質量ゼロの粒子の４元運動量を P^a，角運動量を $M^{ab} = x^a P^b - x^b P^a$ とすると，それらは適当なツイスター $Z^\alpha = (\omega^A, \pi_{A'})$ を用いて，
$$p_a = \pi_A \bar{\pi}_{A'}, \; M^{ab} = i \left(\omega^{(A} \bar{\pi}^{B)} \epsilon^{A'B'} \bar{\omega}^{(A'} \pi^{B'} \epsilon^{AB} \right) \tag{3.11.17}$$
と表される．さらに，Z^α のヘリシティを s とすると
$$\frac{1}{2} \epsilon^{abcd} P_b M^{cd} = s P^a \tag{3.11.18}$$
が成り立つ．(P^a, M^{ab}) は Z^α を全体としての位相 $(Z^\alpha \to e^{i\theta} Z^\alpha)$ を除いて一意的に決定する．

□

【命題 3.99】

1. 複素 Minkowski 時空 $\mathbb{CM}^4$ 上で，各基本ツィスター $Z^\alpha = (\omega^A, \pi_{A'})$ に対して，$\pi_{A'} \neq 0$ のとき，$\omega^A(x) = 0$ となる点 $x \in \mathbb{CM}^4$ の全体は接ベクトルがすべて複素nullベクトルからなる２次元複素平面となる．これは α 平面と呼ばれ，Z^α の成分の比 $[\omega^A(0), \pi_{A'}]$ のみで決まる．

2. α 平面と実 Minkowski 時空 $\mathbb{M}^4$ の交わりは，ヘリシティ $s=0$，すなわち $Z^\alpha \in \mathbb{T}^0$ の時かつその時のみ空でなく，$k^a = \bar{\pi}^A \pi^{A'}$ に平行な null line となる．

3. 逆に複素 Minkowski 時空 $\mathbb{CM}^4$ 上の点 x に対して，$\omega^A(x) = 0$ を満たす基本ツィスターの全体は $\mathbb{T}$ の２次元複素線形部分空間 L_x となる．

4. $\mathbb{T}$ の任意の２次元複素線形部分空間 L は $L = L_x$ により一意的に複素 Minkowski 時空 $\mathbb{CM}^4$ の点 x を定める．x が実 Minkowski 時空の点となるための必要十分条件は，L が $\mathbb{T}^0$ に含まれることである．

□

【定義 3.100】 ツィスター空間を４次元複素線形空間と見たとき，対応する射影空間を**射影ツィスター空間**といい，$\mathbb{PT}$ と表す．ツィスター空間のヘリシティによる分割に対応して射影ツィスター空間は３つの部分集合 $\mathbb{PT}^+, \mathbb{PT}^0, \mathbb{PT}^-$ に分割される． □

【命題 3.101】 射影ツィスター空間 $\mathbb{PT}$ の複素射影直線の全体は，Grassmann 多様体 $M_{2,2}(\mathbb{C})$ と同相な４次元コンパクト複素多様体 $\bar{\mathbb{C}}^4$ となるが，それから無限遠点 $[\omega^A(0), \pi_{A'}] = [\omega^A(0), 0, 0]$ を除いた部分集合は，自然に複素 Minkowski 時空 $\mathbb{CM}^4$ と同一視できる．この同一視のもとで，$\mathbb{PT}^0$ に含まれる複素射影直線の全体は実 Minkowski 時空 $\mathbb{M}^4$ の１点コンパクト化を与える． □

3.11.1.2 Twistor algebra

【定義 3.102】

1. ツイスター空間とその双対空間のテンソル積，$(\otimes^p\mathbb{T})\otimes(\otimes^q\mathbb{T}^*)$ の元を $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$-型ツィスターという．$\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$-型ツィスターは一般に，$2^{p+q}$ 個の混合スピノール場の組

$$T^{A_1\cdots A_p}{}_{B_1\cdots B_q}, T_{A'_1}{}^{A_2\cdots A_p}{}_{B_1\cdots B_q}, \cdots, T_{A'_1\cdots A'_p}{}^{B'_1\cdots B'_q} \tag{3.11.19}$$

で表され，Minkowski 時空ではそれぞれ時空座標 x について上付き添え字の数と同じ次式の式で表される．これらのスピノール場は，時空の並進に対して，そのツィスター空間への表現のテンソル積表現に従って変換する．

2. $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$-型ツィスターを表現する場の中で $T^{A_1\cdots A_p B'_1\cdots B'_q}$ という成分表示をもつものを **primary スピノール成分**という．

2. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$-型ツィスター

$$E^\alpha{}_\beta = \begin{pmatrix} \theta^A{}_B & \xi^{AB'} \\ \eta_{A'B} & \zeta_{A'}{}^{B'} \end{pmatrix} \tag{3.11.20}$$

が条件

$$\bar{E}_\beta{}^\alpha = E^\alpha{}_\beta :\ \xi^{AB'} = \bar{\xi}^{AB'},\ \eta_{AB'} = \bar{\eta}_{AB'},\ \theta^A{}_B = \bar{\zeta}_B{}^A \tag{3.11.21}$$

を満たすとき，**Hermitian ツィスター**という．

3. $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$-型ツィスター

$$S^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \sigma^{AB} & \rho^A{}_{B'} \\ \tau_{A'}{}^B & \kappa_{A'B'} \end{pmatrix} \tag{3.11.22}$$

が条件

$$\bar{S}_{\beta\alpha} = \pm S^{\alpha\beta} :\ \sigma^{AB} = \pm\sigma^{BA},\ \rho^A{}_{B'} = \pm\tau_{B'}{}^A,\ \kappa_{A'B'} = \pm\kappa_{B'A'} \tag{3.11.23}$$

を満たすとき，**対称ツィスター** $(+)$，**反対称ツィスター** $(-)$ という．

4. $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$-型ツィスターが

$$T^{\alpha\cdots\delta}{}_{\rho\cdots\tau} = T^{(\alpha\cdots\delta)}{}_{(\rho\cdots\tau)}, \tag{3.11.24}$$

$$T^{\alpha\beta\cdots\delta}{}_{\alpha\sigma\cdots\tau} \tag{3.11.25}$$

を満たすとき，**trace-free symmetric ツィスター**という．

【命題 3.103】

1. 対称 $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$-ツィスター

$$S^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \sigma^{AB} & \rho^{A}{}_{B'} \\ \tau_{A'}{}^{B} & \kappa_{A'B'} \end{pmatrix} \tag{3.11.26}$$

の各成分は次の方程式を満たす：

$$\nabla_{CC'}\sigma^{AB} = -i\epsilon_{C}{}^{A}\tau^{B}_{C'} - i\epsilon_{C}{}^{B}\rho^{A}_{C'}, \tag{3.11.27}$$

$$\nabla_{CC'}\rho^{A}_{B'} = -i\epsilon_{C}{}^{A}\kappa_{C'B'}, \tag{3.11.28}$$

$$\nabla_{CC'}\tau^{B}_{A'} = -i\epsilon_{C}{}^{B}\kappa_{A'C'}, \tag{3.11.29}$$

$$\nabla_{CC'}\kappa_{A'B'} = 0. \tag{3.11.30}$$

特に，primary part σ^{AB} は方程式

$$\nabla^{(C}_{C'}\sigma^{AB)} = 0 \tag{3.11.31}$$

を満たし，その任意の解は $S^{\alpha\beta}$ を一意的に決定する．

2. $S^{\alpha\beta}$ の primary partσ^{AB} を用いて

$$Q^{ab} = i\sigma^{AB}\epsilon^{A'B'} - i\bar{\sigma}^{A'B'}\epsilon^{AB} \tag{3.11.32}$$

とおくと，Q^{ab} は Killing-Yano テンソル，すなわち

$$\nabla_{(a}Q_{b)c} = 0 \tag{3.11.33}$$

を満たす．さらに

$$\xi^{a} = \frac{1}{3}\nabla_{b}Q^{ba} = -\rho^{AB'} - \bar{\rho}^{AB'} \tag{3.11.34}$$

は Killing ベクトルとなる．

□

【定義 3.104 (Killing spinor)】 (p,q) 型スピノール場 $\xi^{A\cdots DR'\cdots T'}$ が方程式

$$\nabla_{(U'}^{(E}\xi_{R'\cdots T')}^{A\cdots D)} = 0 \tag{3.11.35}$$

を満たすとき，Killing **スピノール**という． □

【命題 3.105】

1. Trace-free symmetric ツィスターの primary part $T^{A\cdots DR'\cdots T'} = \lambda^{A\cdots DR'\cdots T'}$ は Killing スピノールとなり，trace-free symmetric ツィスターのすべての成分を一意的に決定する．

2. $\xi^{A\cdots DR'\cdots T'}$ を Killing スピノール，$p^a = \pi^A\bar{\pi}^{A'}$ を質量ゼロ粒子の運動量とすると，

$$\nabla_p\pi^A = 0 \tag{3.11.36}$$

のとき，

$$Q = \xi^{A\cdots DR'\cdots T'}\pi_A\cdots\pi_D\bar{\pi}_{R'}\cdots\bar{\pi}_{T'} \tag{3.11.37}$$

は運動の保存量となる．

□

【命題 3.106】

1. $\overset{2}{{}^{6}_{4}}\,\substack{1\\1}\,\overset{3}{{}^{7}_{5}}$ 型エルミートツィスター

$$E^{\alpha}{}_{\beta} = \begin{pmatrix} \theta^A{}_B & \xi^{AB'} \\ \eta_{A'B} & \zeta_{A'}{}^{B'} \end{pmatrix} \tag{3.11.38}$$

の各成分は方程式

$$\nabla_{CC'}\xi^{AB'} = i\epsilon_{C'}{}^{B'}\theta^A{}_C - i\epsilon_C{}^A\zeta_{C'}{}^{B'}, \tag{3.11.39}$$

$$\nabla_{CC'}\theta^A{}_B = -i\epsilon_C{}^A\eta_{C'B}, \tag{3.11.40}$$

$$\nabla_{CC'}\zeta_{A'}{}^{B'} = i\epsilon_{C'}{}^{B'}\eta_{A'C}, \tag{3.11.41}$$

$$\nabla_{CC'}\eta_{A'B} = 0 \tag{3.11.42}$$

を満たす．

2. $E^{\alpha}{}_{\beta}$ の primary part $\xi^{AB'}$ は方程式

$$\nabla^{(B}_{(B'}\xi^{A)}_{A')} = 0 \tag{3.11.43}$$

を満たし，conformal Killing vector と１対１に対応する．

□

【命題 3.107 (角運動量ツィスター)】 運動量 $p^a = p^{AA'}$ および角運動量 M^{ab} のスピノール表示

$$M^{ab} = \bar{\mu}^{AB}\epsilon^{A'B'} + \mu^{A'B'}\epsilon^{AB} \tag{3.11.44}$$

を用いて，

$$A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & p_A{}^{B'} \\ p^{A'}{}_B & 2i\mu^{A'B'} \end{pmatrix} \tag{3.11.45}$$

とおくと，$A_{\alpha\beta}$ は対称ツィスターとなる． □

3.11.1.3 Vector description

【命題 3.108 (Minkowski 時空のコンパクト化)】

1. $\hat{x} = (x^{\alpha\beta})$ $(\alpha, \beta = 0, \cdots, 3)$ を反対称テンソルとして，

$$\mathbb{CM}^\sharp := \left\{ [x^{\alpha\beta}] \in \mathbb{CP}^5 \;\middle|\; x^{[\alpha\beta}x^{\gamma\delta]} = 0 \right\} \tag{3.11.46}$$

により，$\mathbb{CP}^5$ の４次元コンパクト超曲面 $\mathbb{CM}^\sharp$ を定義すると，

$$ds^2 = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}dx^{\alpha\beta}dx^{\gamma\delta} \tag{3.11.47}$$

は $\mathbb{CM}^\sharp$ に共形的に平坦な共形構造を与える．

2. $\rho \in GL(4, \mathbb{C})$ を用いて，$\mathbb{CP}^5$ のアフィン変換を

$$\hat{x} \mapsto \rho\hat{x}\rho^T \tag{3.11.48}$$

により定義すると，この変換は $\mathbb{CM}^\sharp$ に共形変換を誘導する．

3. $\mathbb{CM}^\sharp$ の開集合 $x^{23} \neq 0$ を

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 0 & s & -w & \tilde{z} \\ -s & 0 & -z & \tilde{w} \\ w & z & 0 & 1 \\ -\tilde{z} & -\tilde{w} & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.11.49}$$

$(s = z\tilde{z} - w\tilde{w})$ と座標付けすると，計量 ds^2 は

$$ds^2 = \mu(dzd\tilde{z} - dwd\tilde{w}) \tag{3.11.50}$$

と表され，複素 Minkowski 時空 $\mathbb{CM}^4$ と共形となる．

□

【定義 3.109】 $\mathbb{CM}^\sharp$ の null 2 次元面は，その 1 次独立な接ベクトル L, M から作られる bivector $L \wedge M$ が自己共役のとき，α **平面**という．また，$L \wedge M$ が反自己共役のとき，β **平面**という． □

【命題 3.110】 $\mathbb{CM}^4$ の双 null 座標を $(z, \tilde{z}, w, \tilde{w})$ とおく：

$$ds^2 = 2(dzd\tilde{z} - dwd\tilde{w}). \tag{3.11.51}$$

1. $\mathbb{CM}^4$ の自己双対 2 次形式の基底は

$$dz \wedge dw,\ d\tilde{z} \wedge d\tilde{w},\ dz \wedge d\tilde{z} - dw \wedge d\tilde{w} \tag{3.11.52}$$

で与えられる．特に，自己双対 null 2 次形式 $\pi^{ab}\pi_{ab} = 0$ は

$$\zeta_0^2 d\tilde{z} \wedge d\tilde{w} + \zeta_0\zeta_1(-dz \wedge d\tilde{z} + dw \wedge d\tilde{w}) - \zeta_1^2 dz \wedge dw \tag{3.11.53}$$

と表される．

2. $\mathbb{CM}^4$ の反自己双対 2 次形式の基底は

$$dz \wedge d\tilde{w},\ d\tilde{z} \wedge dw,\ dz \wedge d\tilde{z} + dw \wedge d\tilde{w} \tag{3.11.54}$$

で与えられる．特に，自己双対 null 2 次形式 $\pi^{ab}\pi_{ab} = 0$ は

$$\zeta'^2_0 dz \wedge d\tilde{w} + \zeta'_0\zeta'_1(dz \wedge d\tilde{z} + dw \wedge d\tilde{w}) - \zeta'^2_1 d\tilde{z} \wedge dw \tag{3.11.55}$$

と表される．

$\square$

【命題 3.111】 $\mathbb{CM}^\sharp$ の同次座標 $\hat{x} = (x^{\alpha\beta})$ を用いると，各 α 平面 Z は，$[Z^\alpha] \in \mathbb{CP}^3$ を用いて

$$x^{[\alpha\beta}Z^{\gamma]} = 0 \tag{3.11.56}$$

と表される．特に，$(Z^2, Z^3) \neq 0$ に対して，この方程式は double null 座標を用いて，

$$Z^2\tilde{z} + Z^3 w = Z^0,\ Z^2\tilde{w} + Z^3 z = Z^1 \tag{3.11.57}$$

と表され，接ベクトルは

$$L = Z^2\partial_z - Z^3\partial_{\tilde{w}},\ M = -Z^2\partial_w + Z^3\partial_{\tilde{z}} \tag{3.11.58}$$

で与えられる． $\square$

【定義 3.112】

1. $\mathbb{CM}$ の α 平面の全体を **(射影) ツイスター空間**といい，$\mathbb{PT}$ と表す．$\mathbb{PT}$ は $\mathbb{CP}^3$ の開集合

$$\mathbb{CP}^3 - \mathbb{CP}^1 = \left\{[Z^\alpha] \in \mathbb{CP}^3 \,\middle|\, (Z^2, Z^3) \neq 0\right\}$$

となる．

2. $\mathbb{CM}^\sharp$ の開集合 U に対して，U と交わる α 平面の全体を U のツイスター空間といい，$\mathscr{P}(U)$ と表す：

$$\mathscr{P}(U) = \{Z \in \mathbb{PT} \mid Z \cap U \neq \emptyset\} \tag{3.11.59}$$

3. $\mathbb{CM}^\sharp$ の開集合 U に対して，$U \times \mathscr{P}(U)$ の部分集合

$$\mathscr{F} = \{(x, Z) \in U \times \mathscr{P}(U) \mid x \in Z\} \tag{3.11.60}$$

を**対応空間**という．$\mathscr{F}$ から U および $\mathscr{P}$ への全射が存在する：

$$\begin{array}{ccc} & \mathscr{F} & \\ {}_q\swarrow & & \searrow_p \\ U & & \mathscr{P} \end{array} \tag{3.11.61}$$

射影 q に対するファイバーは $\mathbb{CP}^1$，射影 p に対するファイバーは α 平面と U の交わりとなる．したがって，$\mathscr{F}$ は直積 $U\times\mathbb{CP}^1$ に同相で，その部分集合 $U\times\mathbb{C}$ 上では p,q は具体的に次のように表される：

$$p:(w,z,\tilde{w},\tilde{z},\zeta)\mapsto(\lambda,\mu,\zeta)=(\zeta w+\tilde{z},\zeta z+\tilde{w},\zeta) \tag{3.11.62}$$

$$q:(w,z,\tilde{w},\tilde{z},\zeta)\mapsto(w,z,\tilde{w},\tilde{z}) \tag{3.11.63}$$

$\square$

3.12 解析空間

3.12.1 解析的部分集合

【定義 3.113 (複素部分多様体)】 n 次元複素多様体 M の部分集合 N に対し，各点 $x \in N$ の適当な近傍 U_x において，階数が k の正則な関数の組 $f_1, \cdots, f_k$ で，$N \cap U_x$ が $f_1, \cdots, f_k$ の共通零点となるものが存在するとき，N を M の**複素部分多様体**という．N はそれ自体で $n-k$ 次元の複素多様体となる． □

【定義 3.114 (解析的部分集合)】

1. n 次元複素多様体 M の部分集合 V は，その各点 x に対して近傍 U_x と U_x 上の適当な正則関数の組 $\{f_1, \cdots, f_m\}$ が存在して，$V \cap U_x = \{z \in U_x \mid f_1(z) = \cdots = f_m(z) = 0\}$ が成り立つとき，**解析的部分集合**という．特に，各点の近傍で 1 個の正則関数の零点となる解析的部分集合は**主解析的部分集合**または**解析的超曲面**という．

2. M の解析的部分集合 V に対して，V が $x \in V$ の近傍で複素部分多様体となるとき，x を**正則点**といい，正則点全体からなる部分集合を V^* と表す. (V が空集合でなければ）V^* は決して空集合となることはない．また，正則点以外の点を**特異点**といい，その全体 $V - V^*$ を V_s と表す.

□

【定義 3.115 (既約性)】 複素多様体 M の解析的部分集合 V は，2 つの解析的部分集合 $V_1, V_2 \neq V$ を用いて $V = V_1 \cup V_2$ と表されるとき**可約**，可約でないとき**既約**という． □

【命題 3.116】 解析的部分集合 V が既約であるための必要十分条件は，V^* が連結となることである． □

3.12.2　解析的局所モデル

【定義 3.117 ($\mathbb{C}^n$ **の構造層)】**　$\mathbb{C}^n$ の各開集合 U に対して U 上の正則関数の全体 $\mathscr{O}(U)$ を対応させることにより得られる可換環の層を $\mathscr{O} = \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}$，その $z \in \mathbb{C}^n$ 上でのストーク $\mathscr{O}_z$ を $\mathscr{O}_{n,z}$ と表す．特に，$\mathscr{O}_{n,0}$ を $\mathscr{O}_n$ と表記する．$\mathscr{O}_{n,z}$ は局所環となるので，$(\mathbb{C}^n, \mathscr{O})$ は局所環付空間である．□

【命題 3.118 ($\mathscr{O}_n$ **の性質)】**

1. $\mathscr{O}_n$ は局所環で，$f(0) = 0$ となる関数の全体がその極大イデアルとなる．
2. $\mathscr{O}_n$ は一意分解整域である．
3. (**弱い零点定理**）$f \in \mathscr{O}_n$ が既約で，$h \in \mathscr{O}_n$ が f の零点集合上でゼロとなるなら，$\mathscr{O}_n$ において h は f により割り切れる．

□

【定義 3.119 (局所モデル)】　V を複素多様体 M の解析的部分集合，M の開集合 U に

$$\mathscr{I}(U) = \{f \in \mathscr{O}_M(U) \mid f|_{U\cap V} = 0 \text{ if } U \cap V \neq \emptyset\}$$

を対応させることにより定義される $\mathscr{O}_M$ のイデアル層を $\mathscr{I}$，$\mathscr{J}$ を $\mathscr{I}$ の部分層で $\sqrt{\mathscr{J}} = \mathscr{I}$ となるイデアル層する．このとき，商層 $\mathscr{O}_M/\mathscr{J}$ は（$M - V$ 上でストークが自明となるので）V 上の局所環の層と見なすことができる．M が $\mathbb{C}^n$ の開集合のとき，このようにして構成される局所環付空間 $(V, \mathscr{O}_V)$ を**解析的局所モデル**，層 $\mathscr{O}_V = \mathscr{O}_M/\mathscr{J}$ をその**構造層**という，特に，$\mathscr{J} = \mathscr{I}$ のとき，$(V, \mathscr{O}_V)$ を**被約な**解析的局所モデルという，□

3.12.3　解析空間

【定義 3.120 (解析空間)】　局所環付空間 $(X, \mathscr{O}_X)$ が**解析空間**であるとは，X が Hausdorff で，開被覆 $X = \cup_i U_i$ と解析的局所モデルの系 $(V_i, \mathscr{O}_{V_i})$ が存在し，局所環付空間としての同型 $(U_i, \mathscr{O}_X|_{U_i}) \cong (V_i, \mathscr{O}_{V_i})$ が成り立つことである．また，解析的局所モデルと同型な開集合を**座標近傍**とよぶ．□

【定義 3.121 (部分空間)】 $(X, \mathscr{O}_X)$ を解析空間とする,

1. X の開集合 U に対して,局所環付空間 $(U, \mathscr{O}_X|_U)$ は解析空間となり,$(X, \mathscr{O}_X)$ の**開部分空間**という.

2. X の閉集合 Z は,各座標近傍 U において $Z \cap U$ が適当な有限個の関数が生成するイデアル $I \subset \mathscr{O}_X(U)$ の共通零点 $V(I)$ として表されるとき,$\mathscr{I}(U) = I$ により定義されるイデアル層を $\mathscr{I}$ として,構造層 $\mathscr{O}_Z = \mathscr{O}_X/\mathscr{I}|_Z$ をもつ解析空間となる.このとき,$(Z, \mathscr{O}_Z)$ は $(X, \mathscr{O}_X)$ の**閉部分空間**,$\mathscr{I}$ はその定義イデアルと呼ばれる.さらに,解析空間 $(Y, \mathscr{O}_Y)$ から $(X, \mathscr{O}_X)$ への射 $(i, i*)$ に対して,$V = i(Y)$ となる $(X, \mathscr{O}_X)$ の閉部分空間 $(V, \mathscr{O}_V)$ が存在し,射 $(i, i*)$ が同型 $(Y, \mathscr{O}_Y) \cong (V, \mathscr{O}_V)$ を誘導するとき,射 $(i, i*)$ は**閉埋め込み**と呼ばれる,

□

【定理 3.122 (連接イデアル層)】 解析空間 $(X, \mathscr{O}_X)$ の連接イデアル層 $\mathscr{I}$ と解析的閉部分空間 $(V, \mathscr{O}_V)$ とは,$V = \mathrm{Supp}(\mathscr{I})$,$\mathscr{O}_V = \mathscr{O}_X/\mathscr{I}$ の関係により,1対1に対応する. □

【定義 3.123 (特異点)】 解析空間 $(X, \mathscr{O})$ の点 x において,$\mathscr{O}_x$ が正則局所環となるとき,x は**非特異点**,そうでないとき**特異点**という. □

【命題 3.124】 解析空間 X が被約かつ既約のとき,その特異点集合 X_{sing} は X の解析的閉部分集合で,その補集合は X で稠密となる. □

3.12.4 代数幾何学との対応

【定理 3.125 (GAGA の原理 [Serre JP (1956)])】 $(X, \mathscr{O}_X)$ を射影的スキーム,$(X^h, \mathscr{O}_{X^h})$ を対応するコンパクト複素解析空間とする.このとき,X 上の連接 $\mathscr{O}_X$-加群層のカテゴリーから,X^h 上の連接 $\mathscr{O}_{X^h}$-加群層のカテゴリーへの自然な関手

$$(\mathcal{C}oh_X) \to (\mathcal{C}oh_{X^h}); \quad \mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}^h$$

は,カテゴリー同値を与える. □

【系 3.126】

1. 射影的スキーム X 上の任意の連接 $\mathscr{O}_X$-加群層 $\mathscr{F}$ と任意の整数 p に対して，コホモロジー群の自然な写像
$$H^p(X, \mathscr{F}) \to H^p(X^h, \mathscr{F}^h)$$
は同型写像となる．

2. 射影空間の複素解析的閉部分空間には，自然に代数的閉部分スキームの構造がはいる．

3. 射影的スキーム X, Y の間の複素解析空間としての射 $g : X^h \to Y^h$ に対して，スキーム射 $f : X \to Y$ が存在して，$g = f^h$ となる．

4. 射影的スキーム X に対して，自然な準同型
$$p^* : H^1(X, \mathscr{O}_X^\times) \to H^1(X^h, \mathscr{O}_{X^h}^\times)$$
は同型写像となる．

□

【定義 3.127 (Moishezon 多様体)】 コンパクト複素多様体 $\mathcal{X}$ は，その有理型関数体に対して $\mathrm{tr.d.}K(\mathcal{X}) = \dim \mathcal{X}$ が成り立つとき，**Moishezon 多様体**という． □

【定義 3.128 (Hodge 多様体)】 コンパクト Kähler 多様体 $\mathcal{X}$ は，Kähler 類 $(\in H^2(\mathcal{X}, \mathbb{C}))$ が $H^2(\mathcal{X}.\mathbb{Z})$ に含まれるとき，**Hodge 多様体**という．[< [Har77]] □

【注 3.129 (射影的となる条件)】

1. 任意の１次元コンパクト複素多様体は射影的代数曲線である．[Riemann]
1 次元非特異：コンパクト = 完備代数的 = 射影的

2. 複素多様体が代数的であるためには，Moishezon 多様体であることが必要である．

3. ２次元以上では，定数以外に有理型関数をもたないコンパクト複素多様体が存在する．したがって，代数的でないコンパクト複素多様体が存在する．

4. 2 次元 Moishezon 多様体は，射影的代数曲面となる．[Chow & Kodaira (1952)]
2 次元非特異：コンパクト $\supsetneq$ Moishezon $=$ 完備代数的 $=$ 射影的

5. ３次元以上では，代数的でない Moishezon 多様体が存在する．[Hironaka H (1960), Moishezon BG (1967)]
3 次元以上で非特異：
コンパクト $\supsetneq$ Moishezon $\supsetneq$ 完備代数的 $\supsetneq$ 射影的

6. すべての Moishezon 多様体は，非特異点を中心とするブローアップを有限回行うことにより射影的となる．[Moishezon]

7. Moishezon 多様体は Kähler ならば，射影的である．[Moishezon BG (1967)]

8. コンパクト多様体が射影的であるための必要十分条件は，Hodge 多様体となることである．[Kodaira K (1954)]
Kähler で非特異:
コンパクト $\supset$ Hodge $=$ Moishezon $=$ 完備代数的 $=$ 射影的

[< [Har77]] □

【定理 3.130 (Artin の代数化定理)】 x を解析空間 X の孤立特異点とすると，$\mathbb{C}$ 上の代数多様体 A とその特異点 P が存在し，X における x の適当な近傍と A を解析空間と見なした場合の P の適当な近傍が解析空間として同型となる． □

4 Algebraic Geometry

[LastUpdate: 2011.5.30]

4.1 スキーム代数多様体

4.1.1 代数的局所モデル

4.1.1.1 アフィン代数多様体

【定義 4.1 (Zariski **位相)】**

1. k を体として，多項式環 $R = k[x_1, \cdots, x_n]$ を空間 k^n 上の関数の環と見なすとき，R のイデアル I に属する関数の共通零点全体の集合を I により定義される**代数的部分集合**といい，$V(I)$ で表す.
2. k^n の代数的部分集合の全体は位相に対する閉集合の公理を満たす. この位相は **Zariski 位相**という.

□

【命題 4.2 (アフィン空間)】 空間 k^n において，多項式環 $k[x_1, \cdots, x_n]$ を R と記し，そのイデアルから定義される Zariski 位相を k^n に導入する.

1. $f \in R$ として，$U(f) = k^n \setminus V(f)$ の全体は Zariski 位相の開集合の基となる．すなわち，任意の R のイデアル I と点 $x \in U(I) = k^n - V(I)$ に対して，適当に f を取れば，$x \in U(f) \subset U(I)$．また，$U(f) \subset U(g)$ なら，$f = gh (h \in R)$ である.
2. k^n 上の前層を

$$\begin{array}{rcl} U(f) & \mapsto & R_{(f)} = R[1/f], \\ U(f) \subset U(g) & \mapsto & p = p_{U(f)U(g)} : R_{(g)} \to R_{(f)}; \quad p(1/g) = h/f \\ (f = gh) & & \end{array}$$

により定義する．この前層の層化により得られる層を $\mathscr{O}_{k^n}$ とすると，$\mathscr{O}_{k^n}$ の点 $x = a$ におけるストーク $\mathscr{O}_{k^n,a}$ は，M_a を R の極大イデアル $(x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n)$ として，局所環 $(R_{M_a}, R_{M_a}M_a)$ となる．こ

のようにして得られる局所環付空間 $(k^n, \mathscr{O}_{k^n})$ を体 k 上の n **次元アフィン空間**といい，$\mathbb{A}_k^n$ と記す．また，$R = k[x_1, \cdots, x_n]$ はその**座標環**という．

□

【**定義 4.3** (**アフィン代数多様体**)】　局所環付空間としてのアフィン空間 $\mathbb{A}_k^n = (k^n, \mathscr{O}_{k^n})$ において，その座標環 R のイデアル I は，対応 $U(f) \mapsto R_{(f)}I$ により $\mathscr{O}_{k^n}$ のイデアル層 $\mathscr{I}$ を与え，商層 $\mathscr{O}_{k^n}/\mathscr{I}$ の台は $X = V(I)$ となる，したがって，この商層は X 上の層 $\mathscr{O}_X$ と同一視でき，また，X 上の点 p でのストークは局所環 $\mathscr{O}_{k^n,p}/I$ となる．このようにして構成される局所環付空間 $(X, \mathscr{O}_X)$ を**アフィン代数的集合**，I と R/I をその**定義イデアル**および**座標環**という．また，既約なアフィン代数的集合を**アフィン代数多様体**という．□

4.1.1.2　アフィンスキーム

【**定義 4.4** (**アフィンスキーム圏**)】　R を可換環，$\mathrm{Spec}(R)$ をその素イデアル全体の集合とする．この集合から次の方法で局所環付空間 $(X, \mathscr{O}_X)$ を構成する．

1, R の任意の部分集合 E に対して，

$$\begin{aligned} V(E) &= \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid E \subseteq \mathfrak{p}\}, \\ U(E) &= \mathrm{Spec}(R) - V(E) \end{aligned}$$

とおくとき，様々な R のイデアル I に対する $V(I)$ の全体は閉集合の公理を満たし，$\mathrm{Spec}(R)$ に **Zariski 位相**を定義する．以下，$\mathrm{Spec}(R)$ にこの位相を付加した空間を X とおく．このとき，$x \in U(I)$ は，$I \subsetneq \mathfrak{p}_x$ と同等.

2. $f \in R$ に対して，イデアル (f) に対応する閉集合と開集合を $V(f), U(f)$ と書くことにすると，$U(f)$ の全体は X の開集合の生成系となる．また，$U(f) \subset U(g)$ なら $f = gh$ $(h \in R)$ となる．

3. 対応

$$
\begin{array}{rcl}
U(f) & \mapsto & R_f = R[1/f], \\
U(f) \subset U(g) & \mapsto & p = p_{gf} : R_g \to R_f; \quad p(1/g) = h/f \\
(f = gh) & &
\end{array}
$$

により，X 上の前層を構成し，その層化により得られる層を $\mathscr{O}_X$ とおく．このとき，点 x 上のストークは局所環 $R_{\mathfrak{p}_x}$ となる．

このようにして構成される局所環付空間 $(X, \mathscr{O}_X)$ を可換環 R の定める**アフィンスキーム**といい，$(\mathrm{Spec}(R), \tilde{R})$ で表す．また，R を**座標環**，$\mathscr{O}_X = \tilde{R}$ を**構造層**という．アフィンスキームの全体とそれらの間の局所環付空間としての射は，アフィンスキーム圏をつくる．

4. 特に，体 k 上の多項式環 $k[x_1, \cdots, x_n]$ の剰余環 $R = k[x_1, \cdots, x_n]/I$ の定めるアフィンスキームを**体 k 上の代数的アフィンスキーム**という． □

【定理 4.5 (環論との同値性)】 環の準同型写像 $f : A \to B$ とアフィンスキームの射 $(g, \theta) : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ の間には自然な一対一対応があり，可換環の圏からアフィンスキームの圏への反変関手はカテゴリーの同値を与える：

$$(\mathcal{R}ing) \to (\mathcal{A}f - \mathcal{S}ch)^o, \quad A \mapsto \mathrm{Spec}(A). \tag{4.1.1}$$

□

【定義 4.6 (加群層)】 環 A 上の加群 M に対して，アフィンスキーム $X = \mathrm{Spec}(A)$ 上の $\mathscr{O}_X$-加群層 $\tilde{M}$ を次の対応により定める：

$$U(f) \mapsto \Gamma(U(f), \tilde{M}) = M_f = A_f \otimes_A M.$$

□

【定理 4.7】 環 A とそのアフィンスキーム $X = \mathrm{Spec}(A)$ に対して，A-加群の圏から $\mathscr{O}_X$-加群層の圏への関手

$$(A - \mathcal{M}od) \to (\mathscr{O}_X - \mathcal{M}od), \quad M \mapsto \tilde{M} \tag{4.1.2}$$

は，充満忠実な完全関手 (fully faithful exact functor) を与える． □

【定理 4.8 (アフィンスキーム上の準連接層のコホモロジー)】 R を任意の単位可換環として，$X = \mathrm{Spec}(R)$ とおくと，任意の準連接 $\mathscr{O}_X$ 加群層 $\mathscr{F}$ に対して，

$$\begin{aligned} H^0(X, \mathscr{F}) &= \Gamma(X, \mathscr{F}), \\ H^i(X, \mathscr{F}) &= 0, \quad \forall i > 0. \end{aligned}$$

[< [宮西 90] < Grothendieck A & Dieudonné J, EGA] □

4.1.2 スキーム

4.1.2.1 基本定義

【定義 4.9 (スキーム圏)】

1. 局所環付空間 $(X, \mathscr{O}_X)$ において，X の各点 x に対して x の開近傍 U と可換環 A_x が存在し，$(U, \mathscr{O}_X|_U)$ と $(\mathrm{Spec}(A_x), \tilde{A}_x)$ が局所環付空間として同型となるとき，$(X, \mathscr{O}_X)$ を**スキーム**，$\mathscr{O}_X$ をその**構造層**という．

2. スキームの開集合 U は，$(U, \mathscr{O}_X|_U)$ があるアフィンスキーム $(\mathrm{Spec}(A), \tilde{A})$ に局所環付空間として同型となるとき，**アフィン開集合**と呼ばれる．

3. 二つのスキーム $(X, \mathscr{O}_X)$ と $(Y, \mathscr{O}_Y)$ の間の局所環付空間としての射 $(f, \phi) : (Y, \mathscr{O}_Y) \to (X, \mathscr{O}_X)$ を**スキームの射**という．また，このような射 f が存在するとき，Y を X 上のスキーム，f を構造射という．

4. $\mathscr{I}$ が $\mathscr{O}_X$ の準連接イデアル層ならば，$Y = \mathrm{Supp}(\mathscr{O}_X/\mathscr{I}), \mathscr{O}_Y = \mathscr{O}_X/\mathscr{I}|_Y$ として，$(Y, \mathscr{O}_Y)$ はスキームである．このように表されるスキームを X の**閉部分スキーム**という．

□

【定義 4.10 (S-スキーム圏)】 スキーム X からスキーム S へのスキーム射 $f : X \to S$ が存在するとき，射組 (X, f) ないし X を **S-スキーム**，f を**構造射**という．また，2つの S-スキーム $f; X \to S$, $g : Y \to S$ の間の射 $h : X \to Y$ は，$g \circ h = f$ となるとき S **(上の) 射** (morphism over S) と呼ばれる．特に，k を体として，$\mathrm{Spec}(k)$ 上のスキームを単に **k-スキーム**とよぶ． □

4.1.2.2　ファイバー積

【定義 4.11 (ファイバー積)】　2つのS-スキーム$f; X \to S, g : Y \to S$に対して，それらのS-スキーム圏での直積，すなわち次の普遍写像性を満たすS-スキーム$X \times_S Y \to S$およびS射$p : X \times_S Y \to X$, $q : X \times_S Y \to Y$の組を**ファイバー積** (fibre product) という．

任意のS-スキームZとS射$a : Z \to X$，$b : Z \to Y$に対して，$p \circ c = a, q \circ c = b$となる$S$射$c : Z \to X \times_S Y$が一意的に存在．

特に，体k上のスキームに対しては，k-スキームとしてのファイバー積をしばしば直積とよぶ．□

【定理 4.12 (ファイバー積の存在)】　任意ののS-スキーム$f; X \to S$, $g : Y \to S$に対して，ファイバー積$X \times_S Y \to S$は常に存在する．$\{U_i\}_{i \in I}$をXのアフィン開被覆，$\{V_j\}_{j \in J}$をYのアフィン開被覆とするとき，$X \times_S Y$のアフィン開被覆$\{W_{ij}\}_{i \in I, j \in J}$が存在して，$U_i \times_S V_j \cong W_{ij}$となる．また，$X, Y, S$がすべてアフィンスキームで，$X = \mathrm{Spec}(A), Y = \mathrm{Spec}(B), S = \mathrm{Spec}(C)$のとき，

$$\mathrm{Spec}(A) \times_{\mathrm{Spec}(C)} \mathrm{Spec}(B) = \mathrm{Spec}(A \otimes_C B)$$

が成り立つ．□

4.1.2.3　有限射と固有射

【定義 4.13 (分離的射)】　任意のS-スキームXに対して，$p_1 \circ \Delta = p_1 \circ \Delta = \mathrm{id}_X$により決まる$S$-射$\Delta : X \to X \times_S X$を**対角線射**という．特に，$\Delta$が$X$から$X \times_S X$の閉部分スキームへの同型射となっているとき，$X$は$S$上**分離的** (separated) という．□

【定義 4.14 (（局所）有限型射)】　スキームXからアフィンスキーム$Y = \mathrm{Spec}(B)$への射fに対して，Xのアフィン開被覆（有限アフィン開被覆）$U_i = \mathrm{Spec}(A_i)_{i \in I}$が存在して，$A_i$が$f^*B$上有限生成となるとき，$f$は**局所有限型（有限型）**であるという．$Y$が一般のスキームのときには，適当な$Y$のアフィン開被覆$\{V_j\}_{j \in J}$に対して，$f|_{f^{-1}(V_j)}$が局所有限型（有限型）となるとき，スキーム射$f : X \to Y$は局所有限型（有限型）であるという．□

【定義 4.15 (固有射)】 スキームの射 $f : X \to Y$ が次の条件を満たすとき，**固有射**という．

i) f は分離的かつ有限型である．

ii) 任意の Y-スキーム Z に対して，射影 $X \times_Y Z \to Z$ が閉写像である．

□

【定義 4.16 (有限射)】 スキームの射 $f : X \to Y$ は，Y の任意のアフィン開集合 U の逆像 $V = f^{-1}(U)$ がアフィンスキームとなるとき，**アフィン射**という．このアフィン射において，$U = \mathrm{Spec}(A), V = \mathrm{Spec}(B)$ と書くとき，常に A が B 上有限生成加群となるなら，f を**有限射**という． □

【命題 4.17 (有限射の特徴付け)】 Y が局所 Noether スキーム（例えば代数的スキーム）のとき，スキーム射 $f : X \to Y$ について，次の 3 つの条件は同値である：

i) 有限射.

ii) 固有かつアフィン射

iii) 固有射で，任意の $y \in Y$ について $f^{-1}(y)$ は有限集合.

□

4.1.2.4 局所自由層と準連接層

【定義 4.18 (局所自由層)】

1. スキーム $(X, \mathscr{O}_X)$ 上の $\mathscr{O}_X$-加群層 $\mathscr{F}$ は，構造層の有限ないし無限個の直和 $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{O}_X$ と同型となるとき，**自由層** (free sheaf) という．また，層 $\mathscr{F}$ は，各点の適当な近傍 U で $\mathscr{F}|_U$ が自由層となるとき，**局所自由層** (locally free sheaf) といい，r が U の取り方に依らないときは，r を $\mathscr{F}$ の**階数** (rank) という．

2. 階数 1 の局所自由層を**可逆層** (invertible sheaf) という．X 上の可逆層の全体はテンソル積に関して Abel 群となる．この群は **Picard 群**といい，$\mathrm{Pic}(X)$ で表す．Picard 群の単位元は $\mathscr{O}_X$，$\mathscr{L}$ の逆元は $\mathscr{L}^{(-1)} = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{L}, \mathscr{O}_X)$ で与えられる．

□

【命題 4.19 (局所自由層に対する射影公式)】 スキーム射 $f : X \to Y$，X 上の $\mathscr{O}_X$ 加群層 $\mathscr{F}$ および Y 上の有限階数局所自由層 $\mathscr{G}$ に対して，つぎの公式が成り立つ：

$$f_*(\mathscr{F} \otimes f^*\mathscr{G}) \cong f_*\mathscr{F} \otimes \mathscr{G}.$$

□

【定義 4.20 (準連接層)】 スキーム X 上の $\mathscr{O}_X$ 加群層 $\mathscr{F}$ は，次の条件を満たすとき**準連接層** (quasi-coherent sheaf) であるという：

任意の点 $P \in X$ に対して，その適当な近傍 $U \subset X$ において自由層による表示（完全系列）

$$\mathscr{O}_U^{\Lambda_1} \longrightarrow \mathscr{O}_U^{\Lambda_0} \longrightarrow \mathscr{F}|_U \longrightarrow 0$$

が存在する．

□

4.1.3　代数的スキーム

4.1.3.1　定義

【定義 4.21 (代数的スキーム)】 スキームは，有限個のアフィン開集合からなる被覆 $\{U_i\}$ をもち，各アフィン開集合が代数的アフィンスキームと同型となるとき，**代数的スキーム**という．基礎体が k の代数的スキーム $(X, \mathscr{O}_X)$ は自然に k-スキーム $X \to \mathrm{Spec}(k)$ となる．

□

【定義 4.22 (代数多様体)】 スキームは，各点の局所環がべきゼロ元を持たないとき**被約** (reduced) という．既約かつ被約で分離的な代数的スキームを**代数多様体** (algebraic variety) という． □

【定義 4.23 (一般点と閉点)】 $(X, \mathscr{O}_X)$ を基礎体が k の代数的スキームとする．

1. 代数的スキームの点 x は，その閉包がスキーム全体となるとき**生成点**または**一般点** (generic point) という，これは，x が各アフィン開近傍でゼロイデアルに対応することを意味し，したがって一意的である．また，x の閉包が $\{x\}$ となる点は**閉点**という，閉点は，それを含むアフィン開近傍で極大イデアルに対応する，

2. k-スキーム $X \to \mathrm{Spec}(k)$ としての構造より，k から各点 x の剰余体 $k(x) = \mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ への同型が定まる．したがって，開集合 U に対し，$f \in \Gamma(U, \mathscr{O}_X)$ の閉点 $x \in U$ での値が意味をもち，f を U(の閉点からなる部分集合）上の関数と見なすことができる．この同一視のもとで，X の任意のアフィン開集合 U での有理関数体 $k(U)$ は，U の取り方によらず X に一般点 η_X での剰余体 $k(X) := \mathscr{O}_{X,\eta_X}/\mathfrak{m}_{\eta_X}$ と一致し，X の**有理関数体**と呼ばれる．

□

【定義 4.24 (有理写像)】 2つの代数多様体 X, Y を与える．

1. U, V を X の開集合として，2つの射 $f : U \to Y$ と $g : V \to Y$ は $U \cap V$ で $f = g$ となるとき，有理同値と定義する．この同値関係による X の開集合から Y への射の同値類を**有理写像**といい，$f : X \rightsquigarrow Y$ で表す．

2. 代数多様体の間の射 $f : X \to Y$ は，その像が Y の生成点を含むとき，**支配的** (dominating) であるという．有理写像については，それを代表する射が支配的なとき，支配的な有理写像という．支配的な有理写像 $f : X \rightsquigarrow Y$ は，有理関数の単射 $f^* : k(Y) \to k(X)$ を導く．また，2つの有理写像 $f : X \rightsquigarrow Y, g : Y \rightsquigarrow Z$ において f が支配的なら合成有理写像 $g \circ f : X \rightsquigarrow Z$ が定まる．

3. 有理写像として逆写像が存在する有理写像を，**双有理写像** (birational map) という．射 $f : X \to Y$ が双有理写像となるとき，**双有理射** (birational morphism) という．このとき，$f|_U$ が同型射となる最大の開集合 U に対して，$E := X \setminus U$ を f の**例外集合** (exceptional set) という．特に，E が因子となるとき，**例外因子** (exceptional divisor) と呼ばれる．

□

4.1.3.2 ベクトル束と連接層

【定理 4.25 (局所自由層の平坦性)】 R を Noether 環，$X = \mathrm{Spec}(R)$ とすると，連接 $\mathscr{O}_X$ 加群層 $\mathscr{F}$ について，次の 2 条件は同値である：

1) $\mathscr{F}$ は局所自由である．

2) 任意の点 $P \in X$ に対して，$\mathscr{F}_P$ は $\mathscr{O}_{X,P}$ 平坦である．

これより，X を代数的スキーム，$\mathscr{F}$ を X 上の局所自由層とすると，任意の $\mathscr{O}_X$ 加群層の完全系列

$$0 \longrightarrow \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C} \longrightarrow 0$$

は，完全系列

$$0 \longrightarrow \mathscr{A} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{B} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{C} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F} \longrightarrow 0$$

を誘導する． □

【定義 4.26 (ベクトル束)】 代数的スキーム X 上の階数 r の局所自由層 $\mathscr{F}$ を与える．このとき，$\mathscr{O}_X$ 上の対称積

$$\mathcal{S}ym^*_{\mathscr{O}_X}\mathscr{F} = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathcal{S}ym^m_{\mathscr{O}_X}\mathscr{F}$$

には，自然に $\mathscr{O}_X$ 多元環層の構造が入る．これより定まる X-上の代数的スキーム

$$\mathbb{A}_X(\mathscr{F}) := \mathcal{S}pec_X(\mathcal{S}ym^*_{\mathscr{O}_X}\mathscr{F})$$

を，$\mathscr{F}$ に伴う X 上の**ベクトル束** (vector bundle) という．特に，$\mathscr{F}$ が可逆層のとき，$\mathbb{A}_X(\mathscr{F})$ は**直線束** (line bundle) と呼ばれる． □

【命題 4.27 (連接層)】 代数的スキーム $(X, \mathscr{O}_X)$ 上の連接 $\mathscr{O}_X$-加群層 $\mathscr{F}$ について次が成り立つ,

i) $\mathscr{F}$ の台は閉集合.

ii) $x \in X$ について，$\mathscr{F}_x$ が自由 $\mathscr{O}_{X,x}$-加群なら，$\mathscr{F}$ は x の近傍で局所自由である.

iii) X の各既約成分上に空でない開集合 U が存在して，$\mathscr{F}|_U$ は局所自由層となる.

□

【命題 4.28 (連接イデアル層)】 代数的スキーム $(X, \mathscr{O}_X)$ を与える. このとき，X の閉部分スキーム Y にそのイデアル層 $\mathscr{O}_X(-Y)$ を対応させることにより，閉部分スキーム全体のなす集合と連接イデアル層全体のなす集合の間の１対１対応が得られる. □

4.1.3.3 非特異点・特異点

【定義 4.29 (非特異点・特異点)】 スキーム $(X, \mathscr{O}_X)$ の点 P において，$\mathscr{O}_{X,P}$ が正則局所環 (regular local ring) となるとき，P は**非特異点** (non-singular point)，そうでないとき**特異点** (singular point) という．非特異点において局所環 $\mathscr{O}_{X,P}$ の極大イデアル $\mathfrak{m}_P$ は，次元 d 個の元 $x_1, \cdots, x_d$ で生成される．この生成元の列を**正則パラメター系** (regular parameter system) という．特に，P が閉点のとき，その適当な開近傍 U が存在し，U 内の任意の閉点 Q において $x_1 - x_1(Q), \cdots, x_d - x_d(Q)$ が $\mathfrak{m}_Q$ の正則パラメター系となる．このような $x_1, \cdots, x_d \in \Gamma(U, \mathscr{O}_X)$ を U における**局所座標系** (local coordinate system) という. □

【命題 4.30】 スキーム X が被約かつ既約のとき，その特異点集合 X_{sing} は X の閉部分スキームで，その補集合は X で稠密となる. □

4.1.3.4 接層・余接層

【定義 4.31 (接層・余接層)】 X を体 k 上の非特異 n 次元代数多様体，$\Delta : X \to X \times X$ を対角線射，$p_i : X \times X \to X (i = 1, 2)$ を射影とする．

1. $\mathfrak{m}_P$ を閉点 P に対する極大イデアルとするとき，$T_P^* = \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ を P における**余接空間**，$T_P = Hom_k(T_P^*, k)$ を**接空間**という．

2. $X \times X$ における $\Delta_X = \Delta(X)$ の定義イデアル層を $\mathscr{I} = \mathscr{O}_{X\times X}(-\Delta_X)$ とする．X の閉点 P の十分小さな開近傍 U における局所座標系を $x_1, \ldots, x_n$ とすると，$y_i = p_1^* x_i, z_i = p_2^* x_i (i = 1, \cdots, n)$ はアフィン開近傍 $V = U \times U \subset X \times X$ における局所座標系となり，$\mathscr{I}|_V$ は $z_1 - y_1, \cdots, z_n - y_n$ で生成される．したがって，$\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ は Δ_X 上の階数 n の局所自由層となる．そこで，X 上の階数 n の局所自由層を
$$\Omega_X^1 = p_{1*}(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2) \tag{4.1.3}$$
により定義し，X の**余接層** (cotangent sheaf) とよぶ．

3. 対応 $z_i \mapsto x_i, y_i \mapsto x_i(P)$ により，$\Omega_{X,P}^1/\mathfrak{m}_P\Omega_{X,P}^1$ から $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ への k 線形空間としての同型対応が存在する，

4. $\mathscr{O}_X$ から Ω_X^1 への k-加群層としての射を
$$d = p_{1*} \circ (p_2^* - p_1^*) : \mathscr{O}_X \to \Omega_X^1 \tag{4.1.4}$$
により定義し，**微分写像** (derivation) という．このとき，任意の $s, t \in \Gamma(U, \mathscr{O}_X)$ および $c \in k$ に対して，次が成り立つ：

   (1) $d(s + t) = ds + dt$

   (2) $d(ct) = cdt$

   (3) $d(st) = sdt + tds$

   これより，$\Gamma(U, \Omega_X^1)$ は，$dx_i = z_i - y_i$ により生成される．

5. 余接層の双対層として，**接層** (tangent sheaf) $\mathscr{T}_X = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\Omega_X^1, \mathscr{O}_X)$ が定義される．接層の切断は**正則ベクトル場**という．余接層の基底 $dx_1, \cdots, dx_n$ の双対基底を $\partial_1, \cdots, \partial_n$ とすると，正則ベクトル場 v は
$$v = h_i \partial_i \tag{4.1.5}$$
と表される．

目次へ

□

4.1.3.5　微分形式

【定義 4.32 (微分形式)】　X を体 k 上の非特異 n 次元代数多様体, Ω^1_X をその余接層とする.

1. Ω^1_X の外積により定義される局所自由層
$$\Omega^p_X = \wedge^p \Omega^1_X \tag{4.1.6}$$
を p **次微分形式の層** (sheaf of differential p-form) という．U における局所座標系を $x_1, \cdots, x_n$ とすると，p 次微分形式 $s \in \Gamma(U, \Omega^p_X)$ は
$$s = h_{i_1 \cdots i_n} dx_1 \wedge \cdots dx_n \tag{4.1.7}$$
と表される.

2. 層 Ω^p_X には，自然に**外積** (exterior product)
$$\wedge ; \Omega^p_X \otimes_{\mathscr{O}_X} \Omega^q_X \to \Omega^{p+q}_X \tag{4.1.8}$$
が定義される．また，次の条件を満たす外微分 $d : \Omega^p_X \to \Omega^{p+1}_X$ が一意的に定まる： $s \in \Gamma(U, \Omega^p_X), t \in \Gamma(U, \Omega^q_X)$ に対して
   (1) $d(s+t) = ds + dt$
   (2) $d(s \wedge t) = ds \wedge t + (-1)^p s \wedge dt.$

3. 非特異代数多様体の間の正則写像 $f : X \to Y$ に対して，$\mathscr{O}_X$ 加群層としての**引き戻し準同型写像** (pull-back homomorphism)$f^* : f^*\Omega^p_Y \to \Omega^p_X$ を，次の 2 条件により一意的に定義することができる：
   1) $p = 0$ のとき，関数の引き戻し写像 $f^*\mathscr{O}_Y \to \mathscr{O}_X$ と一致.
   2) 任意の局所的な切断 s に対して，$f^*(ds) = d(f^*s)$.
   3) $f^*(s \wedge t) = f^*t \wedge f^*s$ が成り立つ.

□

【定義 4.33 (標準層)】　X を n 次元非特異代数多様体とするとき，Ω^n_X は可逆層となる．この可逆層を**標準層** (canonical sheaf) といい，ω_X で表す.　□

目次へ

4.1.4　解析空間との対応

【注 4.34 (一般的事実)】　X, Y をスキーム，X^h, Y^h を対応する解析空間とする．

1. X が $\mathbb{C}$ 上分離的　$\Leftrightarrow$　X^h が Hausdorff.
2. X が Zariski 位相に関して連結　$\Leftrightarrow$　X^h が連結.
3. X が被約　$\Leftrightarrow$　X^h が被約.
4. X が非特異　$\Leftrightarrow$　X^h が複素多様体.
5. 射 $f : X \to Y$ が固有　$\Leftrightarrow$　射 $f^h : X^h \to Y^h$ が固有（すなわち，コンパクト集合の f^h による逆像が常にコンパクト）.
6. X が完備　$\Leftrightarrow$　X^h がコンパクト.

□

4.2 因子と加群層

4.2.1 正規多様体

【定義 4.35 (正規性)】 スキーム X は，任意の点での局所環が正規環となるとき**正規** (normal) であるという． □

【命題 4.36 (アフィンスキームの正規性)】 A が整域のとき，アフィンスキーム $X = \mathrm{Spec}(A)$ に対して，次は同値である：

(1) X は正規である．

(2) 任意の閉点 $P \in X$ に対して，$\mathscr{O}_{X,p}$ は正規環である．

(3) A は正規環である．

[< [川又 97] < Atiyah M & MacDonald I (1969)] □

【定理 4.37 (正規化定理)】

1. 任意の代数多様体 X に対して，正規代数多様体 $\tilde{X}$ と双有理有限射 $f : \tilde{X} \to X$ の組 $(\tilde{X}, f)$ が双正則同型を除いて一意的に存在する．この組を X **の正規化**という．

2. $f : \tilde{X} \to X$ を正規化とすると，X のアフィン開集合 $U = \mathrm{Spec}(A)$ に対して，X の関数体 $k(X)$ での A の整閉包を $\tilde{A}$ とすると，$f^{-1}(U) = \mathrm{Spec}(\tilde{A})$ となる．

3. $f : X \to Y$ を代数多様体の間の支配的な射（像が一般点を含む射），$\nu_X : \tilde{X} \to X$ と $\nu_Y : \tilde{Y} \to Y$ を正規化とする．このとき，$f \circ \nu_X = \nu_Y \circ \tilde{f}$ となる射 $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ が一意的に定まる．

□

【定理 4.38 (正規多様体の性質)】

1. X を正規代数多様体とすると，その特異点集合は余次元が 2 以上の閉部分多様体となる．逆に，非特異代数多様体内の閉超曲面 X に対しては，X の特異点集合の余次元が 2 以上なら X は正規となる．

2. X を代数多様体，U を $X \setminus U$ の余次元が 2 以上となる正規開集合，$j : U \hookrightarrow X$ を開部分スキームとしての埋め込みとする．このとき，次の 2 条件は同値である：
   i) X は正規.
   ii) $\mathscr{O}_X = j_*(\mathscr{O}_X|_U)$.
   iii) X 上の任意の局所自由層 $\mathscr{F}$ に対して，自然な準同型写像 $\mathscr{F} \to j_*(\mathscr{F}|_U)$（すなわち，任意の V に対して，$p : \Gamma(V, \mathscr{F}) \to \Gamma(U \cap V, \mathscr{F})$）は全単射.

□

4.2.2 因子

4.2.2.1 Weil 因子と Cartier 因子

【定義 4.39 (因子可逆層対応)】 X を正規代数多様体とする．

1. X の余次元 1 の閉部分多様体を**素因子** (prime divisor)，素因子の整数係数形式和を **(Weil) 因子** (Weil divisor) という．因子 $D = \sum_i n_i D_i$ は，すべての係数が $n_i \geq 0$ となるとき**有効因子** (effective divisor) という．因子全体のなす加法群を $Z^1(X)$ で表す.

2. X は正規なので，任意の素因子 D_i に対応する X の（スキームとしての）点を η_i とすると，局所環 $\mathscr{O}_{X,\eta_i}$ は離散付値環となる．対応する付値を ord_{D_i} とすると，任意の有理関数 $f = a/b \in k(X)$ に対して，D_i に沿う位数が $\mathrm{ord}_{D_i}(f) = \mathrm{ord}_{D_i}(a) - \mathrm{ord}_{D_i}(b)$ により定義される．したがって，解析空間の場合と同様に，有理関数の因子 $(f) = \sum_{D_i} \mathrm{ord}_{D_i}(f) D_i$ が定義できる.

3. 因子 D が局所方程式をもつ，すなわち任意の点に対して開近傍 U とその上の有理関数 $h_U \in k(U)$ が存在して $D|_U = (h_U)$ が成り立つとき，D は **Cartier 因子**であるという．Cartier 因子全体のなす $Z^1(X)$ の部分群を $\mathrm{Div}(X)$ で表す.

4. Cartier 因子 D に伴う可逆層 $\mathscr{O}_X(D)$ を，有理関数体 $k(X)$ の定数層 $\mathscr{M}_X$ の部分層として次のように定義する：

$$\Gamma(U, \mathscr{O}_X(D)) = \{g \in \Gamma(U, \mathscr{M}_X) \mid (g) + D|_U \geq 0\}. \tag{4.2.1}$$

特に，有効な Cartier 因子 D に対して，$\mathscr{O}_X(-D)$ は連接イデアル層となり，D に対応する閉部分スキームを定義する．
（注：Cartier でない因子 D に対しても $\mathscr{O}_X$ 加群層 $\mathscr{O}_X(D)$ を上記の式により定義することができる．ただし，この場合，$\mathscr{O}_X(D)$ は階数１の連接層となるが可逆層とならない.）

5. 可逆層 $\mathscr{L}$ に対して，$\mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}_X$ の切断 s を $\mathscr{L}$ の**有理切断** (rational section) という．各点の適当な開近傍 U において，$\Gamma(U, \mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}_X) \cong k(U)$ より，大域的有理切断 $s \in \Gamma(X, \mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}_X)$ に対しては，U 上で $k(U)/\mathscr{O}_X^*(U)$ の元が一意的に定まるので，U 上での因子 $(s)|_U$ が有理関数の因子と同様に定まる．このようにして構成された異なる開集合上の因子は，整合的に張り合わされて X 上の Cartier 因子 (s) を与える．$\mathscr{L}$ の U 上での局所切断 t が正則である条件は $(t)|_U \geq 0$ となるので，$f = t/s$ とおくと，$\Gamma(U, \mathscr{L})$ は $(f) + (s)|_U \geq 0$ となる．したがって，４の定義より，$\mathscr{O}_X((s)) = \mathscr{L}$ となり，また，切断 s は $1 \in \Gamma(X, \mathscr{M}(X)) = k(X)$ に対応する．よって，$1 \in k(X)$ に対応する $\mathscr{O}_X(D)$ の大域的有理切断を s_D とすると，$D = (s_D)$ が成り立つ．

□

【命題 4.40 (Weil 因子に対応する連接層)】 滑らかな代数多様体では，Weil 因子は常に Cartier 因子となる．さらに，一般に，X を正規代数多様体，X_0 をその非特異部分からなる開部分多様体，$j : X_0 \hookrightarrow X$ を埋め込みとすると，X 上の Weil 因子 D は X_0 上で Cartier 因子となり可逆層 $\mathscr{O}_{X_0}(D|_{X_0})$ を定め，さらにその j による順像

$$\mathscr{O}_X(D) := j_* \mathscr{O}_{X_0}(D|_{X_0})$$

は連接層となる． □

【定義 4.41 (Cartier 因子の引き戻し)】 $f : Y \to X$ を正規代数多様体間の射，D を X 上の Cartier 因子とする．もし，D の各既約成分が像 $f(Y)$ を含まないならば，$f^*\mathscr{O}_X(D)$ は再び可逆層となり，$\mathrm{Supp}(f^*D) = f^{-1}(\mathrm{Supp}(D))$ および $\mathscr{O}_Y(f^*D) = f^*\mathscr{O}_Y(D)$ となる Y 上の Cartier 因子として**引き戻し** (pull-back)f^*D が次のようにして定まる：X の各点の適当な近傍で $D|_U = \mathrm{div}(h)$ のとき，$f^*D|_{f^{-1}(U)} = \mathrm{div}(f^*h)$. □

4.2.2.2　標準因子

【定義 4.42 (標準因子)】　X が非特異代数多様体のとき，その標準層 ω_X に対応する因子 K_X を**標準因子**という．また，X が正規代数多様体のときには，X の非特異部分を U として，K_U から一意的に決まる X 上の Weil 因子を標準因子 K_X と定義する．□

【例 4.43 ($\mathbb{P}^n$ の標準因子)】　$\mathbb{P}^n$ の可逆層 $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}$ に対応する因子は

$$\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(m) \quad \Leftrightarrow \quad D = mH \ (H \text{ は超平面}). \tag{4.2.2}$$

特に，標準層は

$$\omega_{\mathbb{P}^n} \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1), \tag{4.2.3}$$

標準因子は

$$K_{\mathbb{P}^n} = -(n+1)H \tag{4.2.4}$$

となる．

実際，斉次座標系

$$\mathbb{A}^{n+1} \ni (X_0, X_1, \cdots, X_n) \mapsto [X_0 : X_1 : \cdots : X_n] \in \mathbb{P}^n \tag{4.2.5}$$

を用いると，

$$s = d(X_1/X_0) \wedge \cdots \wedge d(X_n/X_0) \tag{4.2.6}$$

は $\omega_{\mathbb{P}^n}$ の有理切断を与え，$j \neq 0$ に対して

$$s = -(X_0/X_j)^{-n-1} d(X_0/X_j) \wedge \cdots d(X_{j-1}/X_j) \wedge d(X_{j+1}/X_j) \cdots \wedge d(X_n/X_j) \tag{4.2.7}$$

より，$K_{\mathbb{P}^n} \cong \div(s) = -(n+1) \div (X_0) \cong -(n+1)H$．□

【定理 4.44 (標準因子の変換公式)】　X を滑らかな代数多様体，Y をその滑らかな素因子とする．このとき，

$$(K_X + Y)|_Y = K_Y$$

すなわち，

$$\mathscr{O}_X(K_X + Y) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Y = \mathscr{O}_Y(K_Y)$$

が成り立つ．□

4.3 射影的スキーム

4.3.1 射影的スキームの位置付け

【注 4.45】

1. すべての代数的多様体は完備な代数的多様体に稠密な開部分スキームとして埋め込むことができる．[Nagata M (1962)]

2. すべての完備な代数曲線は射影的である．

3. すべての非特異で完備な代数曲面は射影的である．[Zeriski O (1958)]

4. 特異で完備な非射影的代数曲面が存在する．[Nagata M (1957)]

5. 非特異かつ完備で非射影的な３次元代数多様体が存在する．[Nagata M (1958), Hironaka H (1960)]

[< [Har77]] □

4.3.2 Proj スキーム

【定義 4.46 (定義)】 $A=\bigoplus_j A_j$ を任意の非負の次数付き環（$j<0$ のとき $A_j=0$）とする．$t\in k^*$ による A の線形変換を $a\in A_j\mapsto t^j a\in A_j$ により定義し，それらの作る変換群を G_m で表す．A からスキーム $\mathrm{Proj}(A)=(X,\mathscr{O}_X)$ を次のように構成する：

1. 点集合としては，A の斉次素イデアル $\mathfrak{p}$ で $A_+=\sum_{j>0}A_j$ を含まないものの全体を X とする．

$$X=\{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(A)\mid\ G_m\mathfrak{p}\subset\mathfrak{p},A_+\not\subset\mathfrak{p}\}\,. \tag{4.3.1}$$

2. A の適当な斉次イデアル I を用いて

$$\tilde{V}(I)=\{\mathfrak{p}\in X\mid\ I\subset\boldsymbol{p}\}=V(I)\cap X \tag{4.3.2}$$

と表される部分集合を X の閉集合と定義する．これは閉集合の公理をみたし，X に位相を定義する．このとき，斉次元 $h\in A$ を用いて

$$\begin{aligned}\tilde{U}(h)&=\mathrm{Proj}(A)\setminus\tilde{V}((h))=\{\mathfrak{p}\in\mathrm{Proj}(A)\mid\ h\notin\mathfrak{p}\}\\&=\mathrm{Proj}(A)\cap U(h),\quad G_m(h)=(h)\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

と表される集合の族が開集合の基本系となり，**基本開部分集合**という．

3. A_+ に属する斉次元 h に対して，局所化 A_h の次数ゼロの元の作る部分環を $A_{(h)} = A_{h,0}$ とおくとき，基本開部分集合 $\tilde{U}(h)$ は，位相空間として $\mathrm{Spec}(A_{(h)})$ と同相となる．そこで，対応

$$\tilde{U}(h) \mapsto \Gamma(\tilde{U}(h), \mathscr{O}_X) = A_{(h)} = \{f \in A[1/h] \mid G_m f = f\} \quad (4.3.4)$$

により前層をつくり層化をすると，X は局所環付空間となり，$\tilde{U}(h)$ はアフィン開集合となる：

$$\mathscr{O}_X|_{\tilde{U}(h)} = \tilde{A}_{(h)}, \quad (4.3.5)$$
$$\mathscr{O}_{X,\mathfrak{p}} = A_{(\mathfrak{p})} = \{f \in A_\mathfrak{p} \mid G_m f = f\}. \quad (4.3.6)$$

すなわち，$\mathrm{Proj}(A)$ は $\mathrm{Spec}(A) \setminus \mathfrak{p}_0$（$\mathfrak{p}_0$ は原点に対応する素イデアル）を G_m の作用で不変な"点"および関数に制限したものである． □

【命題 4.47 (Proj 関手の非単射性)】 次数付環 $A = \bigoplus_{j\geq 0} A_j$ と正の整数 d に対して，$A^{(d)} := \bigoplus_{j\geq 0} A_{dj}$ と定義する．このとき，自然な同型

$$\mathrm{Proj}(A) \to \mathrm{Proj}(A^{(d)}); \quad \mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p} \cap A^{(d)} \quad (4.3.7)$$

が存在する． □

【定義 4.48 (Proj 上の準連接層)】 A を非負の次数付環，$M = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} M_j$ を A 上の次数付加群とする．$t \in G_m = k^*$ の M への作用を，$v \in M_j \mapsto t^j v \in M_j$ により定義する．

1. $\mathrm{Proj}(A)$ の各基本開集合 $\tilde{U}(h)$ で

$$\tilde{M}|_{\tilde{U}(h)} = \tilde{M}_{(h)}; \quad (4.3.8)$$
$$M_{(h)} := \{v \in M_h = M \otimes_A A_h \mid G_m v = v\} \quad (4.3.9)$$

とおくことにより，$\mathrm{Proj}(A)$ 上の準連接層 $\tilde{M}$ が定義される．

2. 特に，整数 m に対して，次数付 A 加群 $A(m)$ を

$$A(m)_j = A_{m+j} \tag{4.3.10}$$

により定義するとき，$X = \mathrm{Proj}(A)$ に対して

$$\mathscr{O}_X(m) := \widetilde{A(m)} \tag{4.3.11}$$

と定義する．

□

【命題 4.49 (Proj の閉部分スキーム)】 A を非負の次数付環，I をその斉次イデアルとする．このとき，$\mathrm{Proj}(A/I)$ は，台が $\tilde{V}(I)$，構造層が $\mathscr{O}_X/\tilde{I}$ となるような $\mathrm{Proj}(A) = (X, \mathscr{O}_X)$ の閉部分スキームになる． □

4.3.3 射影的スキーム

【定義 4.50 (射影空間)】 $A = k[x_0, \cdots, x_n]$ における次数付けを，$t \in G_m = k^*$ の作用を $x_j \to tx_j$ により定義することで定める．この次数付けでの $\mathrm{Proj}(A)$ を**射影空間**という：

$$\mathbb{P}^n := \mathrm{Proj}(k[x_0, \cdots, x_n]) = (\mathbb{A}^{n+1} - \{0\})/G_m, \tag{4.3.12}$$

□

【命題 4.51 (射影空間の連接層)】 射影空間 $\mathbb{P}^n = \mathrm{Proj}(k[x])$ ($[x] = [x_0, \cdots, x_n]$) において，M がその有限個の斉次元から生成される次数付 $k[x]$-加群ならば，$\tilde{M}$ は $\mathbb{P}^n$ 上の連接層となる．M の生成元を $v_1, \cdots, v_k$, その次数を $d_1, \cdots, d_k$ とすると，基本開集合 $\tilde{U}(h)$ ($\deg(h) = d$) において

$$\Gamma(\tilde{U}(h), \tilde{M}) = \sum_j \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(\tilde{U}(h))[x]_{dl_j - d_j} h^{-l_j} v_j \tag{4.3.13}$$

となる．ここで，l_j は $dl_j - d_j \geq 0$ となる整数，$R[x]_m$ は R 係数の m 次同次多項式の全体で張られる R 加群．

特に，任意の整数 m に対して，$A(m) = k[x](m)$ は次数 $-m$ の 1 個の元 1 により生成される次数付 $k[x]$-加群なので，$\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$ は可逆層となり，アフィン開集合 $U_j = \tilde{U}(x_j)$ では

$$\Gamma(U_j, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) = k[x/x_j]\ x_j^m \quad (j = 0, 1, \cdots, n) \tag{4.3.14}$$

となる．したがって，大域的切断は

$$\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) = (k[x_0, \cdots, x_n])_m \ (m \text{ 次の斉次多項式の全体}) \tag{4.3.15}$$

□

【定義 4.52 (射影的スキーム)】 スキーム X は適当な次元の射影空間 $\mathbb{P}^n$ への閉部分スキームとしての埋め込み $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ が存在するとき，**射影的スキーム** (projective scheme) という．射影的スキームは代数的スキームである．特に，X が代数多様体となるときには，**射影的多様体** (projective variety) という． □

【定理 4.53 (射影的スキームの分離性)】 射影的なスキームは分離的代数的スキームとなる． □

【定義 4.54 (重み付き射影空間)】 $\{a_0, \cdots, a_n\}$ を最大公約数が 1 となる正整数の組とする．$G_{a_0,\cdots,a_n} = k^* \ni t$ の $A = k[x_0, \cdots, x_n]$ への作用（準同型）を $x_j \mapsto t^{a_j} x_j$ により定め，この作用によりかかる t のベキにより A の各元の次数付けを行う．このようにして得られる次数付環を $A_{a_0,\cdots,a_n}$ とするとき，$\mathrm{Proj}(A_{a_0,\cdots,a_n})$ を**重み付き射影空間** (weighted projective space) といい，

$$\mathbb{P}(a_0, \cdots, a_n) = \mathrm{Proj}(A_{a_0,\cdots,a_n}) = (\mathbb{A}^{n+1} - \{0\})/G_{a_0,\cdots,a_n} \tag{4.3.16}$$

で表す．これは，$\mathbb{P}^n$ の商空間となる：

$$\mathbb{P}(a_0, \cdots, a_n) = \mathbb{P}^n/(\mathbb{Z}_{a_0} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{a_n}). \tag{4.3.17}$$

□

【命題 4.55 (Proj の射影性)】 重み付き射影空間 $\mathbb{P}(a_0, \cdots, a_n)$ は，射影的代数多様体である．これより，次数付環 A において，$A_0 = k$ で A が A_0 上有限個の斉次元で生成されるならば，$\mathrm{Proj}(A)$ は射影的スキームとなる． □

4.3.4　連接層

【定義 4.56 (大域的切断で生成される連接層)】　X を代数的スキーム，$\mathscr{F}$ を X 上の連接層，V を $\mathscr{F}(X)$ の有限次元部分空間とする．自然な $\mathscr{O}_X$ 加群層の射 $V \otimes_k \mathscr{O}_X \to \mathscr{F}$ が全射となるとき，$\mathscr{F}$ は V で**生成される** (generated) という．特に，$V = \mathscr{F}(X)$ のとき，$\mathscr{F}$ は**大域的切断で生成される**という．□

【定義 4.57 (可逆層の豊富さ)】　X を射影的スキームとして，その射影空間 $\mathbb{P}^n$ への埋め込みにより

$$\mathscr{O}_X(m) := \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(m) \otimes_{\mathbb{P}^n} \mathscr{O}_X \tag{4.3.18}$$

とおく．$\mathscr{L}$ を X 上の可逆層とするとき，

1) （適当な埋め込みにより）$\mathscr{L} \cong \mathscr{O}_X(1)$ となるとき，**非常に豊富** (very ample) であるという．

2) 適当な正の整数 m が存在して，$\mathscr{L}^{\otimes m}$ が非常に豊富となるとき，**豊富** (ample) であるという．

3) 適当な正の整数 m が存在して，$\mathscr{L}^{\otimes m}$ が大域的切断で生成されるとき，**半豊富** (semi-ample) であるという．

□

【定理 4.58 (大域的切断と豊富さ)】　X を射影的なスキーム，$\mathscr{L}$ その上の可逆層する．このとき，X 上の任意の連接層 $\mathscr{F}$ に対して整数 m_0 が存在し，任意の整数 $m \geq m_0$ に対して $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}$ は大域的切断で生成される．□

【定理 4.59 (大域的切断と射影射)】　代数的スキーム X 上の可逆層 $\mathscr{L}$ と $\mathscr{L}$ を生成する有限次元線形部分空間 $V \subset H^0(X, \mathscr{L})$ を与える．このとき，射

$$\Phi_V : X \to \mathbb{P}(V)$$

が存在して，$\mathscr{L} = \Phi_V^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$ となる．□

【定理 4.60 (射影性と Proj の関係)】 X を射影的スキーム，$\mathscr{L}$ をその上の半豊富な可逆層とする．このとき，次数付環

$$A = \bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, \mathscr{L}^{\otimes m}) \tag{4.3.19}$$

は有限生成な k 多元環となる．さらに，$\mathscr{L}$ が豊富な可逆層なら，$X \cong \mathrm{Proj}(A)$ が成り立つ． □

4.3.5 双対定理と消滅定理

【定理 4.61 (射影的スキーム上の連接層のコホモロジー)】 $\mathscr{F}$ を射影的スキーム X 上の連接層とする．このとき，任意の整数 p に対して，$H^p(X, \mathscr{F})$ は有限次元 k-ベクトル空間となる．また，$p > n = \dim X$ ならば，$H^p(X, \mathscr{F}) = 0$ となる．[< [川又 97] < [Har77]] □

【定理 4.62 (Serre の双対定理)】 X を滑らかで射影的な n 次元代数多様体，$\mathscr{F}$ をその上の局所自由層，$\check{\mathscr{F}} = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{O}_X)$ をその双対層とする．このとき，

$$H^i(X, \mathscr{F}) \cong H^{n-i}(X, \check{\mathscr{F}} \otimes \omega_X)' \tag{4.3.20}$$

が成り立つ．ここで，右辺において V' は線形空間 V の双対空間を表す．特に，可逆層 $\mathscr{O}_X(D)$ に対して，

$$H^i(X, \mathscr{O}_X(D)) \cong H^{n-i}(X, \mathscr{O}_X(K_X - D))' \tag{4.3.21}$$

また，Ω^p を正則 p-形式の層として，

$$H^q(X, \Omega^p) \cong H^{n-q}(X, \Omega^{n-p})'. \tag{4.3.22}$$

[< [Har77]] □

【定理 4.63 (小平の消滅定理 [Kodaira K (1963)])】 X を滑らかで射影的な $\mathbb{C}$ 上の n 次元代数多様体，$\mathscr{L}$ をその上の豊富な可逆層とする．このとき，

$$H^p(X, \mathscr{L} \otimes \omega_X) = 0 \quad \text{for } p > 0, \tag{4.3.23a}$$

$$H^q(X, \mathscr{L}^{\otimes -1}) = 0 \quad \text{for } q < n. \tag{4.3.23b}$$

□

【注 4.64】 小平の消滅定理は，係数体の標数が正の時には成り立たない．[Raynaud] [< [Har77]] □

【定理 4.65 (Serre の消滅定理，豊富性の判定条件)】 X を射影的なスキームとするとき，その上の可逆層 $\mathscr{L}$ に対するつぎの 2 つの条件は同値である：

(1) $\mathscr{L}$ は豊富である．

(2) X 上の任意の連接層 $\mathscr{F}$ に対して，整数 m_0 が存在して，任意の正の整数 p および任意の整数 $m \geq m_0$ に対して，$H^p(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}) = 0$ となる．

[< [川又 97] < [Har77]] □

4.3.6 線形系

【定理 4.66 (完備線形系)】 X を正規な射影的代数多様体，D をその上の Cartier 因子とするとき，次の全単射が存在する：

$$\mathbb{P}\left(H^0(X, \mathscr{O}_X(D))\right) \to |D| := \{D' \mid D' \geq 0,\ D' \sim D\}.$$

ここで，有効な Cartier 因子の集合 $|D|$ を D の**完備線形系** (complete linear system) という． □

【定義 4.67 (線形系)】 X を正規な射影的代数多様体とする．

1. D を X 上の Cartier 因子とするとき，$H^0(X, \mathscr{O}_X(D))$ の有限次元線形部分空間 V に対応する完備線形系 $|D|$ の射影的線形部分空間 Λ を**線形系** (linear system) という．$\dim V = r+1$ のとき，$\Lambda \cong \mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^r$ となるので，r を**線形系** Λ **の次元**という．

2. X の点 P は，すべての因子 $D' \in \Lambda$ に対して，$P \in \mathrm{Supp}(D')$ となるとき，線形系 Λ の**固定点** (fixed point) であるという．固定点全体の集合 $\mathrm{Bs}\,\Lambda$ は閉集合をなす．

3. 点 P が線形系 Λ の固定点でないとき，Λ は P で**自由** (free) であるという．すべての点で自由な線形系は，単に**自由な線形系**という．

4. 線形系 Λ において，任意の $D' \in \Lambda$ に対し $F \leq D'$ となる有効因子 F のうちで最大のものを，Λ の**固定部分** (fixed part) といい，$M = D - F$ を**可動部分** (movable part) という．

□

4.3.7 交点数

【定義 4.68 (コンパクト複素解析多様体における交点数)】 M を n 次元の（なめらかとは限らない）コンパクト複素解析多様体とする．このとき，M の特異点集合は余次元が 2 以上のコンパクト閉集合となるので，M の基本ホモロジー類 $[M] \in H_{2n}(M, \mathbb{Z})$ が一意的に定まる．同様に，M の d 次元閉部分多様体 Z には，ホモロジー類 $[Z] \in H_{2d}(M, \mathbb{Z})$ が一意的に対応する．

1. 指数関数 $\mathfrak{e}(h) = \exp(2\pi\sqrt{-1}h)$ による完全系列

$$0 \longrightarrow Z \longrightarrow \mathscr{O}_M \xrightarrow{\mathfrak{e}} \mathscr{O}_M^\times \longrightarrow 0$$

より，コホモロジー完全系列

$$H^1(M, \mathscr{O}_M) \xrightarrow{\mathfrak{e}} H^1(M, \mathscr{O}_M^\times) \xrightarrow{c_1} H^2(M, \mathbb{Z})$$

が導かれる．M 上の可逆層 $\mathscr{L}$ を $H^1(M, \mathscr{O}_M^\times)$ の元とみなすとき，この完全系列により定義されるコホモロジー類 $c_1(\mathscr{L}) \in H^2(M, \mathbb{Z})$ を $\mathscr{L}$ の**第１ Chern 類**という．この定義より，

$$c_1(\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}) = c_1(\mathscr{L}) + c_1(\mathscr{M})$$

が成り立つ．

2. M 上の可逆層 $\mathscr{L}_1, \cdots, \mathscr{L}_d$ と d 次元の閉部分多様体 Z に対して，**交点数** (intersection number) $(\mathscr{L}_1 \cdots \mathscr{L}_d \cdot Z)$ を

$$(\mathscr{L}_1 \cdots \mathscr{L}_d \cdot Z) := (c_1(\mathscr{L}_1) \cup \cdots \cup c_1(\mathscr{L}_d))[Z] \in \mathbb{Z}$$

により定義する．$(\mathscr{L}_1 \cdots \mathscr{L}_n \cdot M)$ は，しばしば，$(\mathscr{L}_1 \cdots \mathscr{L}_n)_M$ ないし $(\mathscr{L}_1 \cdots \mathscr{L}_n)$ と表す．

3. M の d-次元閉部分多様体の形式的整数係数有限和 $Z=\sum_j a_j Z_j$ を d-**サイクル**という．このとき，

$$(\mathscr{L}_1\cdots\mathscr{L}_d\cdot Z):=\sum_j a_j(\mathscr{L}_1\cdots\mathscr{L}_d\cdot Z_j)$$

と定義する．

□

【定義 4.69 (射影的代数多様体での交点数)】 M が射影的代数多様体 X に伴うコンパクト解析的多様体であるとき，X 上の可逆層 $\mathscr{L}_1,\cdots,\mathscr{L}_d$ と代数的 d サイクル Z との交点数を

$$(\mathscr{L}_1\cdots\mathscr{L}_d\cdot Z):=(\mathscr{L}_1^h\cdots\mathscr{L}_d^h\cdot Z^h)$$

により定義する．□

【命題 4.70 (被覆写像と交点数)】 $f:Y\to X$ を 2 つの n 次元射影的代数多様体の間の全射正則射，$m=[\mathbb{C}(Y):\mathbb{C}(X)]$ を関数体の拡大次数とする．このとき，

i) $f_*[Y^h]=m[X^h]\in H_{2n}(X^h,\mathbb{Z})$ となる．

ii) X 上の可逆層たち $\mathscr{L}_i$ $(i=1,\cdots.n)$ に対して，$(f^*\mathscr{L}_1\cdots f^*\mathscr{L}_n)=m(\mathscr{L}_1\cdots\mathscr{L}_n)$ となる．

□

【定義 4.71 (Cartier 因子の交点数)】 X を n 次元の射影的代数多様体とする．X 上の Cartier 因子 D_i $(i=1,\cdots,d)$ および d 次元閉部分多様体 Z に対して

$$(D_1\cdots D_d\cdot Z);=(\mathscr{O}_X(D_1)\cdots\mathscr{O}_X(D_d)\cdot Z)$$

と定義する．□

【定理 4.72 (Cartier 因子の Chern 類)】 D を滑らかな射影的代数多様体 X 上の Cartier 因子，$[D]^*$ をそのホモロジー類の Poincaré 双対とするとき，次の関係式が成り立つ：

$$c_1(\mathscr{O}_X(D)) = [D]^* \in H^2(X^h, \mathbb{Z}).$$

□

【定理 4.73 (Euler 数の評価)】 X を n 次元の射影的スキーム，$\mathscr{L}$ を可逆層，$\mathscr{F}$ を連接層とする．

1. $\chi(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m})$ は m に関して次数が高々n の多項式となる．
2. 任意の正の整数 p に対して，$\dim H^p(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m})$ は m に関する n 次の多項式で上からおさえられる．

□

4.3.8 Riemann-Roch の定理

この節では，係数体はすべて $\mathbb{C}$ とする．

4.3.8.1 Chern 標数と Todd 標数

【定理 4.74 (Chern 類の存在)】 滑らかな射影的代数多様体 X 上の階数 r の局所自由層 $\mathscr{F}$ に対して，次の性質を満たす i **番目の Chern 類** $c_i(\mathscr{F}) \in H^{2i}(X^h, \mathbb{Z})$ $(0 \leq i \leq r)$ が定義できる．ただし，$c(\mathscr{F}) = \sum_{i=0}^{r} c_i(\mathscr{F}) \in H^*(X^h, \mathbb{Z})$ は**全 Chern 類**である．

0) $c_0 = 1$.

1) 滑らかな射影的代数多様体間の正則射 $f : X \to Y$ に対して，$c(f^*\mathscr{F}) = f^*c(\mathscr{F})$.

2) 局所自由層たちの完全系列 $0 \to \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2 \to \mathscr{F}_3 \to 0$ に対して，$c(\mathscr{F}_2) = c(\mathscr{F}_1)c(\mathscr{F}_3)$.

3) 可逆層 $\mathscr{L}$ に対して，$c(\mathscr{L}) = 1 + c_1(\mathscr{L})$.

□

【定理 4.75 (Chern 類の別の定義)】 滑らかな射影的代数多様体 X 上の階数 r の局所自由層 $\mathscr{F}$ に対して，$p : Y = \mathbb{P}(\mathscr{F}) \to X$ を対応する射影空間束，$\xi = c_1(\mathscr{O}_Y(1))$ とすると，

$$\sum_{i=0}^{r}(-1)^i p^* c_i(\mathscr{F})\xi^{r-i} = 0$$

が成り立つ． □

【命題 4.76 (接束の第１ Chern 類)】 $c_1(\mathscr{F}) = c_1(\det(\mathscr{F}))$ となる．特に，$c(X) := c(\mathscr{T}_X)$ と定義すると，$c_1(X) = c_1(-K_X)$ が成り立つ．

□

【定義 4.77 (Chern 標数)】 滑らかな射影的代数多様体 X 上の階数 r の局所自由層 $\mathscr{F}$ に対して，次数 1 の形式元 ξ_j $(j = 1, \cdots, r)$ を用いてその全 Chern 類を

$$c(\mathscr{F}) = \prod_{j=1}^{r}(1 + \xi_j)$$

と形式的に分解する．このとき，

$$ch(\mathscr{F}) := \sum_j e^{\xi_j} \in H^*(X, \mathbb{Q})$$

によって定義される全コホモロジー環の元 $ch(\mathscr{F})$ を **Chern 標数** (Chern characteristic) という．このとき，

$$ch(\mathscr{F}) = \sum_{i=0}^{\infty} ch_i(\mathscr{F}); \quad ch_i(\mathscr{F}) \in H^i(X, \mathbb{Q})$$

により定義されるコホモロジー類 $ch_i(\mathscr{F})$ は $c_1(\mathscr{F}), \cdots, c_i(\mathscr{F})$ の（r に依存しない）多項式となる．具体的な形は，

$$\begin{aligned}
ch_0 &= r, \\
ch_1 &= c_1, \\
ch_2 &= \frac{1}{2}\left(c_1^2 - 2c_2\right), \\
ch_3 &= \frac{1}{6}\left(c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3\right), \\
ch_4 &= \frac{1}{24}\left(c_1^4 - 4c_1^2c_2 + 4c_1c_3 + 2c_2^2 - 4c_4\right).
\end{aligned}$$

目次へ

$\square$

【定義 4.78 (Todd 標数)】 滑らかな射影的代数多様体 X 上の階数 r の局所自由層 $\mathscr{F}$ に対して，次数 1 の形式元 ξ_j $(j = 1, \cdots, r)$ を用いてその全 Chern 類を

$$c(\mathscr{F}) = \prod_{j=1}^{r}(1+\xi_j)$$

と形式的に分解する．このとき，

$$td(\mathscr{F}) := \prod_j \frac{\xi_j}{1-e^{-\xi_j}} \in H^*(X, \mathbb{Q})$$

によって定義される全コホモロジー環の元 $td(\mathscr{F})$ を **Todd 標数** (Todd characteristic) という．このとき，

$$td(\mathscr{F}) = \sum_{i=0}^{\infty} td_i(\mathscr{F}); \quad td_i(\mathscr{F}) \in H^i(X, \mathbb{Q})$$

により定義されるコホモロジー類 $td_i(\mathscr{F})$ は $c_1(\mathscr{F}), \cdots, c_i(\mathscr{F})$ の（r に依存しない）多項式となる．具体的な形は，

$$\begin{aligned}
td_0 &= 1,\\
td_1 &= \frac{1}{2}c_1,\\
td_2 &= \frac{1}{12}\left(c_1^2 + c_2\right),\\
td_3 &= \frac{1}{24}c_1c_2,\\
td_4 &= \frac{1}{720}\left(-c_1^4 + 4c_1^2c_2 + 3c_2^2 + c_1c_3 - c_4\right).
\end{aligned}$$

$\square$

4.3.8.2 Riemann-Roch の定理

【定理 4.79 (Hirzebruch-Riemann-Roch)】 滑らかな n 次元射影的代数多様体 X 上の局所自由層 $\mathscr{F}$ に対して，次の関係式が成り立つ：

$$\chi(X, \mathscr{F}) = \left(ch(\mathscr{F})\, td(\mathscr{T}_X)\right)_{2n}[X]. \tag{4.3.24}$$

$\square$

目次へ

説明. 例えば，$\mathscr{F}$ が可逆層のとき，$c_1(\mathscr{F})=\xi, c_i=c_i(X)$ とおくと，$n=1,2,3,4$ に対して

$$\begin{aligned}
\chi(X_1,\mathscr{F}) &= \xi+\frac{1}{2}c_1,\\
\chi(X_2,\mathscr{F}) &= \frac{1}{2}\xi^2+\frac{1}{2}c_1\xi+\frac{1}{12}(c_1^2+c_2),\\
\chi(X_3,\mathscr{F}) &= \frac{1}{6}\xi^3+\frac{1}{4}c_1\xi^2+\frac{1}{12}(c_1^2+c_2)\xi+\frac{1}{24}c_1c_2,\\
\chi(X_4,\mathscr{F}) &= \frac{1}{24}\xi^4+\frac{1}{12}c_1\xi^3+\frac{1}{24}(c_1^2+c_2)\xi^2+\frac{1}{24}c_1c_2\xi\\
&\quad +\frac{1}{720}\left(-c_1^4+4c_1^2c_2+3c_2^2+c_1c_3-c_4\right).
\end{aligned}$$

□

【定理 4.80 (交点数と Euler 数の関係)】 X を n 次元の射影的代数多様体とする.

1. X 上の可逆層 $\mathscr{L}$ に対して，$(\mathscr{L}^n)=(\mathscr{L}\cdots\mathscr{L})$ とおくと，

$$\chi(X,\mathscr{L}^{\otimes m})=\frac{m^n}{n!}(\mathscr{L}^n)+(m \text{ に関して低次の多項式}).$$

2, X 上の可逆層 $\mathscr{L}_1,\cdots,\mathscr{L}_n$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\chi(X,\mathscr{L}_1^{\otimes m_1}\otimes\cdots\otimes\mathscr{L}_n^{\otimes m_n})\\
&\quad=(\mathscr{L}_1\cdots\mathscr{L}_n)m_1\cdots m_n+(m_1,\cdots,m_n \text{ に関する他の項})
\end{aligned}$$

□

4.3.9 射影的射

【定義 4.81 (相対射影的スキーム)】 代数的スキーム X とその上の次数付 $\mathscr{O}_X$-多元環の層 $\mathscr{A}=\bigoplus_{m\geq 0}\mathscr{A}_m$ で次の条件を満たすものを考える：

1) 任意の m に対して，$\mathscr{A}_m$ は連接層となる.

2) $\mathscr{A}$ は $\mathscr{A}_0$ 多元環の層として，有限個の m に対する $\mathscr{A}_m$ たちで生成される.

このとき，X の各アフィン開集合 U_j において，自然な射 $\mathscr{O}_X(U_j) \to \mathscr{A}(U_j)$ は，スキーム射

$$Y_i = \mathrm{Proj}(\mathscr{A}(U_j)) \to U_j = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_X(U_j))$$

を誘導し，張り合わせにより X 上の代数的スキーム Y を定める．この Y を $\mathcal{P}roj_X\mathscr{A}$ と書き，X **上の射影的スキーム**または**射影的** X**-スキーム**とよぶ．射影 $f : Y \to X$ は**射影的射** (projective morphism) と呼ばれる． □

【定義 4.82 (射影空間束)】 代数的スキーム X 上の局所自由層 $\mathscr{V}$ から，対称テンソル積により X 上の次数付加群層 $\mathscr{A} = \mathcal{S}ym^*_{\mathscr{O}_X}\mathscr{V}$ を作る．この次数付加群層から構成される X 上の射影的スキーム $\mathcal{P}roj_X\mathscr{A}$ を**射影空間束** (projective space bundle) といい，$\mathbb{P}_X(\mathscr{V})$ で表す． □

説明. X の各点で適当なアフィン開集合 U と k 上の線形空間 $\mathcal{V}$ が存在して，$\mathscr{V}|_U = \mathscr{O}_U \otimes_k \mathcal{V}$ となる．これより，$\mathscr{A}|_U \cong \mathscr{O}_U[\mathcal{V}] = \mathscr{O}_U \otimes_k k[\mathcal{V}]$ ($k[\mathcal{V}]$ は $\dim \mathcal{V}$ 個の変数をもつ多項式環）となるので，$W = \mathbb{P}_U(\mathscr{V}|_U) \cong U \times_k \mathbb{P}(\mathcal{V})$ となる．$\mathbb{P}_X(\mathscr{V})$ はこれらを張り合わせたもの．したがって，$\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{V})}(1)|_W = p_2^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{V})}(1)$ が成り立つ．

さらに，これより，$p : \mathbb{P}_X(\mathscr{V}) \to X$ を自然な射影的射とするとき，$p_*\mathscr{O}_W(m) = \mathscr{O}_U \otimes_k \Gamma(\mathbb{P}(\mathcal{V}), \mathbb{P}(\mathcal{V})(m))$．よって，$m$ が正の整数のとき，

$$p_*\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{V})}(m) \cong \mathcal{S}ym^m_{\mathscr{O}_X}\mathscr{V}$$

となる．

□

【定理 4.83 (射影空間束への埋め込み)】 Y が代数的スキーム X 上の射影的スキームであることと，Y が X 上の射影空間束の閉部分スキームであることは同等である．正確には次が成り立つ．

$f : Y \to X$ を代数的スキーム X 上の射影的スキームとすると，X 上の射影空間束 $p : \mathbb{P}_X(\mathscr{V}) \to X$ への Y の閉スキームとしての埋め込み $j : Y \hookrightarrow \mathbb{P}_X(\mathscr{V})$ が存在して，$f = p \circ j$ となる．

逆に，代数的スキーム Y が，代数的スキーム X 上の射影空間束 $p : \mathbb{P}_X(\mathscr{V}) \to X$ の閉スキームとすると，Y は X 上の射影的スキー

ム $f : Y = \mathcal{P}roj_X\mathscr{A} \to X$ となり，埋め込みを $j : Y \hookrightarrow \mathbb{P}_X(\mathscr{V})$ として $f = p \circ j$ が成り立つ．ここで，$\mathscr{O}_Y(1) = \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{V})}(1) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{V})}} \mathscr{O}_Y$ に対して，$\mathscr{A} = \bigoplus_{j \geq 0} f_*\mathscr{O}_Y(m)$. □

【定義 4.84 (f-豊富)】 $f : Y = \mathcal{P}roj_X\mathscr{A} \to X$ を X 上の射影的スキームとすると，アファイン開集合 $U \subset X$ 上で，$\tilde{U} = f^{-1}(U) = \mathrm{Proj}\mathscr{A}(U)$ となるので，$\tilde{U}$ 上で可逆層 $\mathscr{O}_{\tilde{U}}(1) = \mathscr{A}(U)(1)\tilde{}$ が構成でき，張り合わせにより，Y 上の可逆層 $\mathscr{O}_Y(1)$ を定義する．このとき，一般に Y 上の可逆層 $\mathscr{L}$ について，

1. 適当な表現 $Y = \mathcal{P}roj_X\mathscr{A}$ のもとで，$\mathscr{L} \cong \mathscr{O}_Y(1)$ となるとき，**非常に f-豊富** (f-vary ample) であるという．

2. 適当な正の整数 m が存在して，$\mathscr{L}^{\otimes m}$ が非常に f-豊富となるとき，**f-豊富**であるという．

□

4.3.10 豊富性の数値的判定

4.3.10.1 $\mathbb{Z}$-可逆層

【命題 4.85 (閉部分スキームへの制限)】 射影的な代数的スキーム X に対して，その上の可逆層 $\mathscr{L}$ が豊富となるための必要十分条件は，X の任意の閉部分多様体 Z に対して $\mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Z$ が豊富となることである． □

【命題 4.86 (豊富さの伝播)】 射影的な代数的スキーム間の有限射 $f : X \to Y$ と Y 上の可逆層 $\mathscr{L}$ に対して，$\mathscr{L}$ が豊富なら $f^*\mathscr{L}$ も豊富である．さらに，f が全射ならば，逆も成り立つ． □

【定理 4.87 (中井の判定条件)】 射影的な代数的スキーム X の上の可逆層 $\mathscr{L}$ が豊富になるためには，任意の閉部分多様体 Z に対して，

$$(\mathscr{L}^d \cdot Z) > 0 \quad (d = \dim Z)$$

が成り立つことが必要十分である． □

4.3.10.2 $\mathbb{Q}$-可逆層，$\mathbb{R}$-可逆層

【定義 4.88 ($\mathbb{Q}$-可逆層，$\mathbb{R}$-可逆層)】 代数多様体 X に対して，Picard 群 Pic(X) を $\mathbb{R}$ 係数に拡大した群 $\mathrm{Pic}(X)_{\mathbb{R}} = \mathrm{Pic}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ の元を $\mathbb{R}$-**可逆層** ($\mathbb{R}$-invertible sheaf) という．また，その部分群 $\mathrm{Pic}(X)_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Pic}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の元を $\mathbb{Q}$-**可逆層** ($\mathbb{Q}$-invertible sheaf) という． □

【定義 4.89 (数値的同値性とネフ)】 X を射影的な代数多様体とする．可逆層と閉部分多様体の交点数の定義は $\mathbb{R}$-可逆層に自然に拡張できる．

1. 任意の曲線 $C \subset X$ に対して $(\mathscr{L} \cdot C) \geq 0$ となる（$\mathbb{R}$-）可逆層 $\mathscr{L}$ は，**数値的に半正** (numerically semi-positive) または**ネフ** (nef) であるという．
2. ２つの $\mathbb{R}$-可逆層 $\mathscr{L}$ と $\mathscr{L}'$ は，X 上の任意の曲線 C に対して $(\mathscr{L}\cdot C) = (\mathscr{L}' \cdot C)$ となるとき，**数値的に同値**であるといい，$\mathscr{L} \equiv \mathscr{L}'$ で表す.
3. X 上の２つの $\mathbb{R}$-１サイクル $C, C' \in Z_1(X)_{\mathbb{R}}$ は，X 上の任意の可逆層 $\mathscr{L}$ に対して，$(\mathscr{L} \cdot C) = (\mathscr{L} \cdot C')$ となるとき，**数値的に同値**であるといい，$C \equiv C'$ で表す.

□

【定理 4.90 (射影公式)】 射影的な代数多様体間の射 $f : X \to Y$ が与えられたとき，X 上の曲線 C と Y 上の可逆層 $\mathscr{L}$ に対して

$$(f^*\mathscr{L} \cdot C) = (\mathscr{L} \cdot f_*C)$$

が成り立つ. □

【命題 4.91 (ネフの伝播)】 射影的な代数多様体間の射 $f : X \to Y$ と Y 上の $\mathbb{R}$-可逆層 $\mathscr{L}$ に対して，$\mathscr{L}$ がナフなら，$f^*\mathscr{L}$ もネフとなる．さらに，f が全射なら，逆もなりたつ． □

【定理 4.92 (ネフ可逆層と部分多様体の交わり)】 射影的な n 次元代数多様体 X 上のネフな可逆層を $\mathscr{L}$ とすると，任意の部分多様体 Y（$\dim Y = d$）に対して，$(\mathscr{L}^d \cdot Y) \geq 0$ となる． □

【定義 4.93 (豊富錘と曲線の錘)】 射影的な代数多様体 X に対して，互いに双対な**有限次元実ベクトル空間**を次のように定義する：

$$\begin{aligned} N^1(X) &= \{\mathbb{R}\text{-可逆層の数値的同値類}\} \\ &= \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \{\text{可逆層の数値的同値類}\}, \\ N_1(X) &= \{\mathbb{R}\text{-1-サイクルの数値的同値類}\} \\ &= \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \{\text{1-サイクルの数値的同値類}\} \end{aligned}$$

$N^1(X)$ は，**Neron-Severi 群**

$$NS(X) := c_1(\mathrm{Pic}(X)) \subset H^2(X^h, \mathbb{Z})$$

に対応する実線形空間 $NS(X)_{\mathbb{R}}$ と同型である：

$$N^1(X) \cong NS(X)_{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} NS(X).$$

この空間の次元を **Picard 数**といい,

$$\rho(X) := \dim NS(X)_{\mathbb{R}}$$

で表す.

豊富な可逆層の数値的同値類たち全体が生成する，$N^1(X)$ の中の凸錐体 $\mathcal{A}m(X)$ を**豊富錘** (ample cone) という．豊富錘は開集合となる．また，曲線の数値的同値類たち全体が生成する，$N_1(X)$ の中の閉じた凸錐体 $\mathcal{C}v(X)$ を**曲線の錘** (cone of curves) という．$\mathcal{C}v(X)$ は $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ とも表す. □

【定理 4.94 (Kleiman の判定条件)】 射影的な代数多様体 X の豊富錘と曲線の錘は次に意味で互いに双対錘となる：

$$\mathcal{A}m(X) = \left\{z \in N^1(X) \,\middle|\, (z \cdot w) > 0 \ \forall w \in \mathcal{C}v(X) \setminus \{0\}\right\},$$
$$\mathcal{C}v(X) \setminus \{0\} = \{w \in N_1(X) \mid (z \cdot w) > 0 \ \forall z \in \mathcal{A}m(X)\},$$

□

【注 4.95 (Abel 曲面の豊富錘)】 ネフという概念は豊富という概念に非常に近いものである．実際，Abel 曲面（複素トーラスと同型となる滑らかな射影的代数曲面）に対しては，$N^1(X)$ の中で $[\mathscr{L}]^2 > 0$ により定義される錘体は２つの連結成分を持ち，その一つが $\mathcal{A}m(X)$ と一致する． □

【定義 4.96 (相対的 1-サイクルと f-ネフ)】 　$f : X \to S$ を代数多様体間の射影的正則射とする．

1. X 上の曲線 C は，$f(C)$ が S 上の１点となるとき，f に関して**相対的** (relative) であるという．f に関して相対的な曲線たちの形式的な $\mathbb{R}$ 係数１次結合 $\sum_i a_i C_i$ を**相対的 $\mathbb{R}$-1-サイクル** (relative $\mathbb{R}$-1-cycle) という．

2. X 上の $\mathbb{R}$-可逆層 $\mathscr{L}$ は，任意の相対的な曲線 $C \subset X$ に対して $(\mathscr{L} \cdot C) \geq 0$ となるとき，**f に関して数値的に半正** (numerically semi-positive for f) または **f-ネフ** (f-nef) であるという．

3. ２つの $\mathbb{R}$-可逆層 $\mathscr{L}$ と $\mathscr{L}'$ は，任意の相対的な曲線 C に対して $(\mathscr{L} \cdot C) = (\mathscr{L}' \cdot C)$ となるとき，**f に関して数値的に同値** (numerically equivalent for f) であるといい，$\mathscr{L} \equiv_S \mathscr{L}'$ で表す．
この定義の元で，互いに双対な有限次元実線形空間を

$$
\begin{aligned}
N^1(X/S) &= \{\mathbb{R}\text{-可逆層の } f \text{ に関する数値的同値類}\} \\
&= \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \{\text{可逆層の } f \text{ に関する数値的同値類}\}, \\
N_1(X) &= \{\text{相対的 } \mathbb{R}\text{-1-サイクルの数値的同値類}\} \\
&= \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \{\text{相対的 1-サイクルの数値的同値類}\}
\end{aligned}
$$

により定義する．
f-豊富な可逆層の数値的同値類たち全体が生成する，$N^1(X/S)$ の中の凸錐体 $\mathcal{A}m(X/S)$ を **f-豊富錐** (f-ample cone) という．f-豊富錐は開集合となる．また，f に関して相対的な曲線の数値的同値類たち全体が生成する，$N_1(X/S)$ の中の閉じた凸錐体 $\mathcal{C}v(X/S)$ を**相対的曲線の錐** (cone of relative curves) という．$\mathcal{C}v(X/S)$ は $\overline{\mathrm{NE}}(X/S)$ とも表す．

□

4.3.11 $\mathbb{Q}$-因子，$\mathbb{R}$-因子

【定義 4.97 (諸定義)】 　X を正規多様体とする．

1. X 上の素因子の実数係数（有理数係数）線形結合 $D = \sum_i a_i D_i$ を **$\mathbb{R}$-因子** ($\mathbb{R}$-divisor)（**$\mathbb{Q}$-因子** ($\mathbb{Q}$-divisor)）という．すべての a_i が非

負のとき，D は**有効**であるという．$\mathbb{R}$-因子の全体は $\mathbb{R}$ 上の線形空間 $Z^1(X)_{\mathbb{R}} = Z^1(X) \otimes \mathbb{R}$ を，$\mathbb{Q}$-因子の全体は $\mathbb{Q}$ 上の線形空間 $Z^1(X)_{\mathbb{Q}} = Z^1(X) \otimes \mathbb{Q}$ をなす．

2. $\mathbb{R}$-因子は Cartier 因子 E_j の実数係数の線形結合 $\sum_j b_j E_j$ で書かれるとき，**$\mathbb{R}$-Cartier 因子**であるという．同様に，$\mathbb{Q}$-因子は b_j が有理数となる同様の線形結合で表されるとき，**$\mathbb{Q}$-Cartier 因子**であるという．これらの全体のつくる可換群は，それぞれ $\mathrm{Div}(X)_{\mathbb{R}} = \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, $\mathrm{Div}(X)_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ で表される．

3. 準同型 $s : \mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Pic}(X)$, $D \mapsto \mathscr{O}_X(D)$ は自然に準同型 $s : \mathrm{Div}(X)_{\mathbb{R}} \to \mathrm{Pic}(X)_{\mathbb{R}}$ に拡張される．この拡張のもとで，２つの $\mathbb{R}$-Cartier 因子 D_1, D_2 は，$s(D_1) = s(D_2) \in \mathrm{Pic}(X)_{\mathbb{R}}$ のとき，**$\mathbb{R}$-線形同値** ($\mathbb{R}$-linearly equivalent) であるといい，$D_1 \sim_{\mathbb{R}} D_2$ で表す．２つの $\mathbb{Q}$-Cartier 因子 D_1, D_2 の，**$\mathbb{Q}$-線形同値** ($\mathbb{Q}$-linearly equivalent) $D_1 \sim_{\mathbb{Q}} D_2$ も同様に定義される．

4. 全射正則写像 $f : Y \to X$ に対しては，**$\mathbb{R}$-Cartier 因子 $\sum_j b_j E_j$ の引き戻し**が式 $f^*D := \sum_j b_j f^* E_j$ により定義でき，D の表し方に依存しない．また，$\mathbb{R}$-可逆層の引き戻しとも整合的となる．

□

【定義 4.98 ($\mathbb{Q}$-分解的)】 正規な代数多様体は，その上の任意の素因子が $\mathbb{Q}$-Cartier 因子となるとき，すなわち適当な整数をかければ Cartier 因子となるとき，**$\mathbb{Q}$-分解的** ($\mathbb{Q}$-factorial) であるという． □

4.3.12 双有理不変量

4.3.12.1 小平次元

【定義 4.99 (飯高・小平次元)】 X を正規な射影的代数多様体，D をその上の Cartier 因子とする．正の整数 m に対して，$H^0(X, mD) \neq 0$ なら，線形系 $|mD|$ に伴う有理写像 $\Phi_{|mD|} : X \rightsquigarrow \mathbb{P}(H^0(X, mD))$ が構成できる．このような m が存在するとき，**飯高・小平次元** $\kappa(X, D)$ を

$$\kappa(X, D) := \max_{m \in \mathbb{N}} \dim \mathrm{Im}\,(\Phi_{|mD|})$$

により定義する．一方，存在しないときには，$\kappa(X,D)=-\infty$ と約束する．$\kappa(X,D)=\dim X$ となる因子は，**巨大** (big) であるという．

$\square$

【定理 4.100 ($h^0(X,mD)$ **の増大度による特徴付け)】** 一般に，正の実数 α,β と正の整数 m_0 が存在して，m_0 の任意の正倍数 m に対して，次の評価式が成り立つ．

$$\alpha\, m^{\kappa(X,D)} \le h^0(X,mD) \le \beta\, m^{\kappa(X,D)}.$$

$\square$

【定理 4.101 (**飯高・小平次元の伝搬性)】** $f:X\to Y$ を正規で射影的な代数多様体間の正則な全射，D を Y 上の Cartier 因子とするとき，

$$\kappa(X,f^*D)=\kappa(Y,D)$$

が成り立つ．$\square$

【定義 4.102 (**射影多様体の種数と小平次元)】** X を滑らかな射影的代数多様体とする．

1. 正の整数 m に対して，

$$P_m(X):=\dim H^0(X,mK_X)$$

を X の m **重種数** (m-genus) という．特に，

$$p_g(X):=P_1(X)$$

を X の**幾何種数** (geometric genus) という．

2. X の**小平次元** $\kappa(X)$ を

$$\kappa(X):=\kappa(X,K_X)$$

により定義する．特に，$\kappa(X)=\dim X$ となるとき，X は**一般型** (general type) であるという．

□

【定理 4.103 (多重種数の双有理不変性)】 滑らかな射影的代数多様体間の双有理正則射 $f : X \to Y$ を与える．このとき，任意の正の整数 m に対して，引き戻し準同型 $f^* : H^0(Y, mK_Y) \to H^0(X, mK_X)$ は全単射となる．特に，$\kappa(X) = \kappa(Y)$． □

【定義 4.104 (数値的飯高・小平次元)】 $\mathscr{L}$ を n 次元の射影的代数多様体 X 上のネフな可逆層とするとき，組 $(X, \mathscr{L})$ の**数値的飯高・小平次元** (numerical Iitaka-Kodaira dimension)$\nu(X, \mathscr{L})$ を次のように定義する：

$$\nu(X, \mathscr{L}) := \max\left\{t \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \,\middle|\, [\mathscr{L}]^t \not\equiv 0\right\}.$$

ここで，$[\mathscr{L}]^t \not\equiv 0$ は，t 次元の閉部分多様体 Y が存在して，$([\mathscr{L}]^t \cdot Y) \neq 0$ となることを意味する．定義から，$0 \leq \nu(X.\mathscr{L}) \leq n$ となる．ネフな Cartier 因子に対しては,

$$\nu(X, D) := \nu(X, \mathscr{O}_X(D))$$

とおく． □

【定理 4.105 ($\nu(X, D)$ と $\kappa(X, D)$ の関係)】 X が正規な射影的代数多様体，D がネフな Cartier 因子のとき,

$$\nu(X, D) \geq \kappa(X, D)$$

が成り立つ． □

4.4 被覆空間

4.4.1 被覆空間と分岐

【定義 4.106 (被覆空間)】 正規な代数多様体間の有限射 $f : Y \to X$ を**被覆空間** (covering space) という． □

【定理 4.107 (正規化による被覆空間の構成)】 X を正規な代数多様体, $K = k(X)$ をその関数体とすると，アフィン開被覆 $X = \cup_j \mathrm{Spec}\ A_j$ に対して，A_j たちの商体はすべて K と一致し，A_j は K の中で整閉となっている．いま，L を K の有限次代数的拡大体として，A_j の L の中での整閉包を B_j とすると，B_j は A_j-加群として有限生成で，その商体はすべて L となる．さらに，Spec B_j を張り合わせることにより，k 上の正規な代数多様体 Y（**正規化**）が得られ，自然な射 $\pi : Y \to X$ は被覆空間となる．逆に，任意の被覆空間はこのようにして構成することができる． □

【定義 4.108 (分岐指数)】 $f : Y \to X$ を正規代数多様体から滑らかな代数多様体への全射有限射とする．X の素因子 D の f による引き戻しを，相異なる素因子 E_i により $f^*D = \sum_i a_i E_i$ と分解したとき，$a_i \geq 2$ となるなら f は E_i **で分岐している** (ramified) といい，a_i を**分岐指数** (ramification index) という． □

【定理 4.109 (分岐因子)】 $f : Y \to X$ を正規代数多様体から滑らかな代数多様体への全射有限射とする．このとき，Y 上の有効因子 R が存在して，

$$K_Y = f^*K_X + R; \quad R = \sum_i (a_i - 1)E_i$$

と書ける．R は f の**分岐因子**と呼ばれ，写像 f の Jacobi 行列式の因子となる．ここで，E_i は分岐する素因子，a_i は分岐指数である．特に，分岐する素因子の数は有限である． □

【定義 4.110 (エタール)】 滑らかな多様体間の全射有限射 $f : Y \to X$ は，f の分岐因子がゼロとなるとき，**エタール** (étale) であるという．f がエタールとなるための必要十分条件は，複素解析多様体の射として局所同型射となることである． □

【定理 4.111 (分岐集合の純粋性 [Zariski])】 $f : Y \to X$ を正規代数多様体から滑らかな代数多様体への全射有限射とする．もし，分岐因子がゼロならば，Y も滑らかで，f はエタールとなる． $\square$

4.5 特異点

4.5.1 ブローアップ

4.5.1.1 一般的定義

【定義 4.112 (ブローアップ)】 代数的スキーム X とその閉部分スキーム C を与える．C に対応する連接イデアル層を $\mathscr{I}$ とし，$\mathscr{B} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathscr{I}^d$ に自然な次数付 $\mathscr{O}_X$-多元環の構造をいれる．このとき，X 上の射影的スキームからの自然な射 $\mu : Y = \mathcal{P}roj_X \mathscr{B} \to X$ を，**C を中心とした X のブローアップ**という． □

説明. $\mathcal{P}roj_X \mathscr{B}$ は X のアフィン開集合上の Proj スキームの張り合わせなので，X がアフィンスキーム $X = \mathrm{Spec}(A)$ の場合を考える．このとき，C の定義イデアルを I として，

$$B = \bigoplus_{j \geq 0} I^j = A \oplus I \oplus I^2 \cdots \tag{4.5.1}$$

とおくと，μ は

$$\mu : \mathrm{Proj}(B) \to \mathrm{Spec}(A); \quad \mathfrak{q} \mapsto \mathfrak{q} \cap B_0 = \mathfrak{q}_0$$

で与えられる．ここで，次数付環としての 1 変数多項式環 $A[x]$ を

$$A[x] \cong A \oplus A \oplus \cdots$$

と表すと，B は $A[x]$ の（次数付環としての）部分環となる．また，A の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して

$$\mathfrak{p}[x] = \mathfrak{p}A[x] \cong \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{p} \oplus \cdots$$

は $A[x]$ の済次素イデアルとなる．よって，任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ に対して，

$$\tilde{\mathfrak{p}} := \mathfrak{p}[x] \cap B = \mathfrak{p} \oplus (\mathfrak{p} \cap I) \oplus (\mathfrak{p} \cap I^2) \oplus \cdots$$

は B の済次素イデアルとなり，$\tilde{\mathfrak{p}} \not\supset B_+$ なら $\mathrm{Proj}_A(B)$ の点となる．

1. $X \setminus C$ **上での対応**：$\mathfrak{p} \notin C$ のとき，$C = V(I)$ より，$I \not\subset \mathfrak{p}$．したがって，$h \in I$, $h \notin \mathfrak{p}$ となる $h \in A$ が存在．このとき，B の h を含まない（済次）素イデアル $\mathfrak{q}$ と B_h の（済次）素イデアル $\mathfrak{q}_h$ は 1 対 1 に

対応する（$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_h \cap B$）ので，$\mathfrak{q} \in \mu^{-1}(\mathfrak{p})$ は B_h の済次素イデアル $\mathfrak{q}_h$ で $(\mathfrak{q}_h)_0 = \mathfrak{p}_h$ となるものと１対１に対応．ところが，$h \in I$ より

$$\begin{aligned} B_h &= A_h \oplus I_h \oplus (I^2)_h \oplus \cdots \\ &= A_h \oplus A_h \oplus A_h \oplus \cdots = A_h[X] \end{aligned}$$

となるので，$\mathfrak{q}_h = \mathfrak{p}_h A_h[x] = \hat{\mathfrak{p}}_h$，したがって $\mathfrak{q} = \tilde{\mathfrak{p}}$ となる．これより，$X \setminus C$ 上では μ は１対１写像となる：

$$\mu : \tilde{\mathfrak{p}} \mapsto \mathfrak{p} \in X \setminus C.$$

また，$\mu^{-1}(U(h)) = \tilde{U}(h)$ で，$\mathscr{O}_Y(\tilde{U}(h)) = B_{(h)} = A_h = \mathscr{O}_X(U(h))$ より，μ は $X \setminus C$ 上で同型射となる．

2. $\mathfrak{p} \in C$ **の逆像**：このとき，$I \subset \mathfrak{p}$．まず，$\mathfrak{q} \in \mu^{-1}(\mathfrak{p})$ なら，$\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{p}$ より，$\mathfrak{q} \cap (B_0 \setminus \mathfrak{p})$．よって，$\mathfrak{m} = \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ を $\mathscr{O}_{X,\mathfrak{p}} = A_\mathfrak{p}$ の極大イデアルとして，$\mathfrak{q}$ は,
$$B_\mathfrak{p} = A_\mathfrak{p} \oplus IA_\mathfrak{p} \oplus I^2A_\mathfrak{p} \oplus \cdots$$
の済次イデアル $\mathfrak{q}_\mathfrak{p}$ で $(\mathfrak{q}_\mathfrak{p})_0 = \mathfrak{m}$ となるものと１対１に対応（問題の局所化）．この $\mathfrak{q}_\mathfrak{p}$ に対する条件は,
$$\mathfrak{p}B_\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus I\mathfrak{m} \oplus I^2\mathfrak{m} \oplus \cdots,$$
とおくと,
$$\mathfrak{p}B_\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}_\mathfrak{p} \subset \tilde{\mathfrak{p}}_\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus IA_\mathfrak{p} \oplus I^2A_\mathfrak{p} \oplus \cdots$$
と同等．したがって，$\mathfrak{q}$ は
$$\hat{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p} \subset \tilde{\mathfrak{p}}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p} = 0 \oplus k(\mathfrak{p})I \oplus k(\mathfrak{p})I^2 \oplus \cdots$$
を満たす
$$\hat{B}_\mathfrak{p} = B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p} = k(\mathfrak{p}) \oplus k(\mathfrak{p})I \oplus k(\mathfrak{p})I^2 \oplus \cdots$$
の済次素イデアル $\hat{\mathfrak{q}}$ と１対１に対応．すなわち,
$$\mu^{-1}(\mathfrak{p}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Proj}(\hat{B}_\mathfrak{p}).$$

3. **基本開部分集合の対応**：$h \in I^d$ を B_d の元と見るときは h_d と書くことにすると，$Y = \mathrm{Proj}_A(B)$ の基本開部分集合は，$\tilde{U}(h_d)(h \in I^d, d \geq 1)$ により与えられる．ここで，$\mathfrak{q} \in \tilde{U}(h_d)$ は，斉次素イデアル

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_0 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{q}_d \oplus \cdots, \quad h \notin \mathfrak{q}_d,\ B_+ \not\subset \mathfrak{q}$$

により表される．$X = \mathrm{Spec}(A)$ の基本開部分集合 $U(h)$ の点 $\mathfrak{p} \in U(h)$ に対して，$h \notin \mathfrak{p}$ より，$\mathfrak{p} \cap I^d \subsetneq I^d$ となるので，斉次素イデアル $\tilde{\mathfrak{p}}$ は $\tilde{U}(h_d)$ に含まれる．また，$\mathfrak{p} \notin V(I)$ なら $\mathfrak{q} = \tilde{\mathfrak{p}} = \mu^{-1}(\mathfrak{p})$ となり，$h \notin \mathfrak{q}_d = \mathfrak{p} \cap I^d$ より，$h \notin \mathfrak{p}$，すなわち $\mathfrak{p} \in U(h)$．よって，

$$\mu(\tilde{U}(h_d)) \supset U(h), \quad \mu(\tilde{U}(h_d)) \setminus U(h) \subset V(I).$$

$\mu(\tilde{U}(h_d))$ が $V(I)$ のどのような部分を含むかは，I の詳細の依存する．

□

4.5.1.2　例外因子

【定義 4.113 (イデアル層としての引き戻し)】　スキーム射 $f : Y \to X$ と $\mathscr{O}_X$ のイデアル層 $\mathscr{I}$ に対して，逆像 $f^*\mathscr{I}$ からの自然な準同型写像 $f^*\mathscr{I} \hookrightarrow f^*\mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_Y$ の像から生成される $\mathscr{O}_Y$ のイデアル層を，**イデアル層としての逆像**または**引き戻し** (inverse image or pull-back as ideal sheaf) とよび，$\mathscr{I} \cdot \mathscr{O}_Y$ で表す．　□

【定理 4.114 (ブローアップの例外因子)】　$\mu : Y \to X$ を C を中心とした X のブローアップ，$\mathscr{I}$ を C に対応する $\mathscr{O}_X$ の連接イデアル層とする．このとき，

(1) μ は，同型写像 $Y \setminus E \to X \setminus C$ を誘導する．

(2) $\mathscr{I} \cdot \mathscr{O}_Y$ は可逆層となり，$\mu^{-1}(C)$ に台をもつ有効な Cartier 因子（**例外因子**)E のイデアル層となる．しかも，$-E$ は非常に μ-豊富な因子となる．

□

Proof. (1) は，ブローアップの定義に続く説明より明らか．(2) に関して，$U = \mathrm{Spec}(A) \subset X$，$C \cap U = V(I)$ とすると，$\mu^{-1}(U) = \mathrm{Proj}_A(B)$, $B = A \oplus I \oplus \cdots$.

i) $\mathscr{O}_Y/\mathscr{I}\cdot\mathscr{O}_Y$ の台：まず，(1) より

$$\mathscr{I}\cdot\mathscr{O}_Y|_{Y\setminus E} = \mathscr{O}_Y|_{Y\setminus E}.$$

つぎに，$U \cap C \neq \emptyset$ のとき，$h_d \in I^d$ に対応する $\mathrm{Proj}_A(B)$ の基本開集合 $\tilde{U}(h_d)$ において，

$$\Gamma(\mathscr{O}_Y, \tilde{U}(h_d)) = B_{(h_d)} = A + \frac{I^d}{h_d} + \frac{I^{2d}}{h_d^2} + \cdots,$$
$$\Gamma(\mathscr{I}\cdot\mathscr{O}_Y, \tilde{U}(h_d)) = IB_{(h_d)}.$$

任意の $\mathfrak{q} \in E \cap \tilde{U}(h_d) = \mu^{-1}(C) \cap \tilde{U}(h_d)$ に対して，$\mathfrak{q}_0 \in C \Leftrightarrow I \subset \mathfrak{q}_0$ より，$IB_{(h_d)} \subset \mathfrak{q}_{(h_d)}$．よって，

$$\mathrm{Supp}(\mathscr{O}_Y/\mathscr{I}\cdot\mathscr{O}_Y) = E.$$

ii) $\mathscr{I}\cdot\mathscr{O}_Y$ の可逆性：$Y - E$ で可逆層となることは明らか．一方，U 上では，$\mathscr{I}\cdot\mathscr{O}_Y|_U \cong (\bigoplus_{j\geq 0} I^{j+1})\tilde{}$ で，U_{h_d} 上で

$$\begin{aligned}\mathscr{I}\cdot\mathscr{O}_Y|_{U_{h_d}} &\cong \sum_{0\leq j\leq kd, k\geq 0} \frac{I^{kd-j}I^{j+1}}{h_d^k} \\ &= \sum_{-1\leq j\leq kd, k\geq 0} \frac{I^{kd-j}I^{j+1}}{h_d^k} \cong (\bigoplus_{j\geq -1} I^{j+1})\tilde{}|_{U_{h_d}}\end{aligned}$$

より，$\mathscr{I}\cdot\mathscr{O}_Y|_U \cong \tilde{B}(1)$．よって，$\mathscr{I}\cdot\mathscr{O}_Y$ は可逆層で，かつ μ-豊富．

□

【定義 4.115 (厳密変換と全変換)】 $\mu : Y \to X$ を C を中心とした X のブローアップ，$E = \mu^{-1}(C)$ とする．このとき，C に含まれない X の閉部分多様体 Z に対して，

i) $\mu^{-1} : X \setminus C \to Y \setminus E$ による $Z \setminus C$ の像の閉包を $\mu_*^{-1}Z$ と書き，Z の**厳密変換** (strict transform) または**固有変換** (proper transform) という．

ii) Z に対応する $\mathscr{O}_X$ の連接イデアル層を $\mathscr{I} = \mathscr{O}_X(-Z)$ とするとき，イデアル層としての引き戻し $\mathscr{I} \cdot \mathscr{O}_Y = \mathscr{O}_Y(-\mu^* Z)$ に対応する閉部分スキーム $\mu^* Z$ は，Z の**全変換** (total transform) と呼ばれる．

一般の因子 $D = \sum_i a_i D_i$ に対して，その厳密変換が $\mu_*^{-1} D = \sum_i a_i \mu_* D_i$ により定義される．また，D が有効な Cartier 因子の差として $D = D' - D''$ と書けるときには，D の全変換が $\mu^* D = \mu^* D' - \mu^* D''$ により定義される． □

【命題 4.116 (閉部分スキームのブローアップ)】 $\mu : Y \to X$ を C を中心とした X のブローアップ，$E = \mu^{-1}(C)$ をその例外因子，$\mathscr{I}$ を C に対応する連接イデアル層とする:

$$\mu : Y = \mathcal{P}roj_X \left(\bigoplus_{j \geq 0} \mathscr{I}^j \right) \to X(\supset C).$$

いま，C に含まれない X の閉部分多様体 Z に対して，$\mathscr{J}$ をその連接イデアル層，$W = \mu_*^{-1} Z$ とすると，射影 $\mu|_W : W \to Z$ は，スキーム論的交わり $C \cap Z$ を中心とした Z のブローアップと一致し，

$$\mu|_W : W = \mathcal{P}roj_Z \left(\bigoplus_{j \geq 0} (\mathscr{I}^m + \mathscr{J})/\mathscr{J} \right) \to Z(\supset C \cap Z).$$

さらに，ブローアップ $\mu|_W$ の例外因子はスキーム論的交わり $E \cap W$ で与えられる． □

【定義 4.117 (ブローアップの中心に沿った位数)】 X を滑らかな代数多様体，C をその滑らかな閉部分多様体，$\mathscr{I}$ を C のイデアル層，$\mu : Y \to X$ を C を中心とするブローアップとする：

$$\mu : Y = \mathcal{P}roj_X \left(\bigoplus_{j \geq 0} \mathscr{I}^j \right) \to X(\supset C).$$

このとき，任意の閉点 $P \in C$ に対して，開近傍 U とその上での局所座標系 $x_1, \cdots, x_n$ が存在して，イデアル層 $\mathscr{I}$ が U 上では $x_1, \cdots, x_r$ により生成されるようにできる．

1. 例外因子 E の Y 上でのイデアル層 $\mathscr{O}_Y(-E) = \mathscr{I} \cdot \mathscr{O}_Y$ は，$\mu^{-1}(U)$ 上で $(\bigoplus_{j\geq 0} I^{j+1})^{\sim}$ と表されるので，E は U 上では $IA = \bigoplus_{j\geq 0} I^{j+1}$ を含む $A = \bigoplus_{j\geq 0} I^j$ の有効斉次素イデアルの全体となる．これは，$A/IA = \bigoplus_{j\geq 0} I^j/I^{j+1} \cong \mathcal{S}ym^*_{\mathscr{O}_X(U)/I} I/I^2$ の有効斉次素イデアルの全体と 1 対 1 に対応．よって，$E \cap \mu^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{P}^{r-1}$ で，大域的には E は C 上の $\mathbb{P}^{r-1}$-束：

$$E \cong \mathbb{P}_C(\mathscr{N}^*_{C/X}); \quad \mathscr{N}^*_{C/X} = \mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \cong \mathrm{Ker}(\Omega^1_X \otimes \mathscr{O}_C \to \Omega^1_C).$$

ここで，$\mathscr{N}^*_{C/X}$ は C の X 内での**法余層** (conormal sheaf) と呼ばれる．また，

$$K_Y = \mu^* K_X + (r-1)E$$

となる．

さらに，U_j を $U \cap U(x^j)$ とすると，$V_j = \mu^{-1}(U_j)$ 上での Y のアフィン環は

$$\begin{aligned} &\mathscr{O}_Y(V_j) = k[x_1, \cdots, x_n, x_1/x_j, \cdots, x_n/x_j] \cong k[y_1, y_2, \cdots, y_n], \\ &x_j = y_j,\ x_i = y_j y_i (i \neq j, i \leq r), \quad x_{r+1} = y_{r+1}, \cdots, x_n = y_n. \end{aligned}$$

このとき，

$$dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n = (y_j)^{r-1} dy_1 \wedge dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_n.$$

いま，$\mu^*\omega_X$ の有理切断を s とすると，($\mu^*\omega_X$ と ω_Y を共に $\omega_Y \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{M}_Y$ の部分層と見なすことにより）s は ω_Y の有理切断もあたえる．したがって，V_j 上で

$$s = f_j dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n = f_j (y_j)^{r-1} dy_1 \wedge dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_n$$

とすると，

$$K_Y = \mathrm{div}(f_j (y_j)^{r-1}) = \mathrm{div}(f_j) + (r-1)\mathrm{div}(y_j) = \mu^* K_X + (r-1)E.$$

2. 点 $P \in X$ と $h \in \mathscr{O}_{X,P}$ に対して，$h \in \mathscr{I}_P^d$ かつ $h \notin \mathscr{I}_P^{d+1}$ が成り立つとき，d をイデアル層 $\mathscr{I}$ に沿った（または中心 C に沿った）P での h の零点の**位数** (order) とよび，$d = \mathrm{ord}_I(h) = \mathrm{ord}_C(h)$ で表す．また，$h_d = h \ \mathrm{mod} \mathscr{I}_P^{d+1} \in \mathscr{I}_P^d / \mathscr{I}_P^{d+1}$ を h の**先導項** (leading term) という．

3. X 上の素因子 D が $D = \mathrm{div}(h)$ と表されるとき，$d = \mathrm{ord}_C(h) = \min_{P \in X}\{\mathrm{ord}_C(h_P)\}$ は，D の C に沿っての**重複度** (multiplicity) と呼ばれ，$\mathrm{mult}_C(D)$ で表される．このとき，D の μ による全変換 $\mu^*D = \mathrm{div}(\mu^*h)$ と厳密変換 $\mu_*^{-1}D$ の間には，$\mu_*^{-1}D = \mu^*D - dE$ の関係がある．また，ブローアップ $\mu_*^{-1}D \to D$ の例外因子 $E \cap \mu_*^{-1}D$ は，射影空間束 E の中で，先導項 h_d により定義される超曲面の族となっている．

□

4.5.1.3　１点でのブローアップ

【例 4.118 ($\mathbb{A}^n$ の１点ブローアップ)】　$X = \mathbb{A}^n$ の原点 O を中心とするブローアップ $\mu : Y \to X$ は，O 以外では，次のような Y の射影空間束 $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ への埋め込みと一致する：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1} & \hookleftarrow & Y \ni (x_1, \cdots, x_n, [x_1 : \cdots : x_n]) \\ p \downarrow & \swarrow \mu & \\ \mathbb{A}^n = X \ni (x_1, \cdots, x_n) & & \end{array}$$

また，$\mu^{-1}(O) = O \times \mathbb{P}^{n-1}$ となる．

Y は n 個のアフィン開集合 U_j $(j = 1, \cdots, n)$ により覆われ，$U_j \cong \mathbb{A}^n$ となる．U_j での局所座標系を y_{ji} $(i = 1, \cdots, n)$ とすると，

$$\mu^* x_j = y_{jj}, \quad \mu^* x_i = y_{jj} y_{ji} \ (i \neq j)$$

が成り立つ．したがって，例外因子 $E = \mu^{-1}(O)$ は，$E|_{U_j} = \mathrm{div}(y_{jj})$ と表され，次の対応により $\mathbb{P}^{n-1}$ と同型になる：

$$\begin{aligned} E \cap U_j \ni (y_{j1}, \cdots, y_{j\,j-1}, 0, y_{j\,j+1}, \cdots, y_{jn}) \\ \mapsto [y_{j1} : \cdots : y_{j\,j-1} : 1 : y_{j\,j+1} : \cdots : y_{jn}] \in \mathbb{P}^{n-1} \end{aligned}$$

さらに，標準因子は

$$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = y_{jj}^{n-1} dy_{j1} \wedge \cdots \wedge dy_{jn}$$

より，

$$K_Y = \mu^* K_X + (n-1)E$$

により対応する．□

【命題 4.119 (射影空間の標準線バンドルとの対応)】 アフィン空間 $X = \mathbb{A}^n$ の原点を中心とするブローアップ $p: Y \to X$ において，Y を $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ の閉部分代数多様体と見なす．このとき，

1. Y は射影空間 $\mathbb{P}^{n-1}$ 上の標準線バンドル γ^1_{n-1} と同型である：

$$Y \cong \gamma^1_{n-1} = \mathbb{A}_{\mathbb{P}^{n-1}}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1)).$$

   また，$\mathbb{P}^{n-1}$ の点を $\mathbb{A}^n$ の原点を通過する直線 L と同一視すると，射影 $p: Y \to X$ は

$$Y = \gamma^1_{n-1} \ni (L, \boldsymbol{x} \in L) \mapsto \boldsymbol{x} \in X = \mathbb{A}^n$$

   で与えられる．特に，例外因子 $E \cong \mathbb{P}^{n-1}$ は γ^1_{n-1} のゼロ切断に対応する．

2. 標準線バンドル $Y = \gamma^1_{n-1}$ のゼロ断面 $E = \mathbb{P}^{n-1}$ への標準射影を $\pi: \gamma^1_{n-1} \to \mathbb{P}^{n-1}$ とおく．このとき，

$$\mathscr{O}_Y(E) \cong \pi^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1)$$

   が成り立つ．

□

証明. $\mathbb{P}^{n-1} = \mathrm{Proj}\,\mathbb{C}[y_1, \ldots, y_n]$ の標準アフィン被覆を $\bigcup_{j=1}^n U_j$ $(U_j = \tilde{U}(y_j))$ とすると，その標準線バンドル γ^1_{n-1} は

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{A}_{\mathbb{P}^{n-1}}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1)) & = & \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\boldsymbol{z}_1][t_1] \cup \cdots \cup \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\boldsymbol{z}_n][t_n] \\ & = & \begin{array}{ccc} U_1 \times \mathbb{A}^1 & \cup \cdots \cup & U_n \times \mathbb{A}^1 \\ \Cup & & \Cup \\ (\boldsymbol{z}_1, t_1) & \cdots & (\boldsymbol{z}_n, t_n) \end{array} \end{array}$$

で与えられる．ここで，$\boldsymbol{z}_i$ は $U_j \cong \mathbb{A}^{n-1}$ のアフィン座標

$$\boldsymbol{z}_i = (y_1/y_i, \cdots, y_n/y_i)$$

である．また，$V_i = U_i \times \mathbb{A}^1$ とおくと，$V_i \cap V_j$ での座標変換は，$t_i/y_i = t_j/y_j$ より，

$$t_k = z_{jk} t_j, \quad \boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{z}_j / z_{jk}$$

で与えられる．

1. 標準線バンドルのこの開被覆のもとで, 各アフィン開集合$V_i = \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\boldsymbol{z}_i][t_i]$からYへの写像$\nu$を
$$\nu : V_i \ni (\boldsymbol{z}_i, t_i) \mapsto (t_i \boldsymbol{z}_i, [\boldsymbol{z}_i]) \in Y \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$$
により定義すると，明らかにνは$V_i \cap V_j$で一致し，γ^1_{n-1}とYの同型対応を与える．この対応によりYとγ^1_{n-1}を同一視すると，射影$p : Y \to X$が題意の写像と一致し，例外因子Eがγ^1_{n-1}のゼロ断面$(x_i = 0)$に対応することは明らか.

2. Y上で$E \cap V_i = \mathrm{div}(t_i)$となっている．ここで，$f|_{V_1} = 1/t_1$とおくと，$f$はY上の有理関数となり，$f|_{V_i} = y_i/y_1/t_i$．よって，
$$(E + \mathrm{div}(f))|_{V_i} = \mathrm{div}(y_i/y_1) = -\mathrm{div}(y_1)$$
これは,
$$\mathscr{O}_Y(E) = \pi^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1)$$
を意味する.

□

【例 4.120 ($\mathbb{P}^n$の１点ブローアップ)】 $\mathbb{A}^n$の原点でのブローアップは，自然に$\mathbb{P}^n$の一点でのブローアップに埋め込まれる．そのためには，$\mathbb{A}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n$，$\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$として，次のような対応を考えればよい：

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1} & = & \mathcal{P}roj_{\mathbb{P}^n} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}[y_1, \cdots, y_n] & \supset & \mathrm{Proj}_{U_i} R_i[y_1, \cdots, y_n] \\
\bigcup & & & & \downarrow y_i = x_i \\
Y & = & \mathcal{P}roj_{\mathbb{P}^n} \bigoplus_{m \geq 0} \mathscr{I}^m & \supset & \mathrm{Proj}_{U_i} R_i[x_1, \cdots, x_n] \\
 & & \Cup & & \\
 & & ([x_0, \cdots, x_n], [x_1, \cdots, x_n]) & & \big\downarrow \\
\big\downarrow \mu & & & & \\
X & = & \mathbb{P}^n \ni [x_0, \cdots, x_n] & \supset & U_i = \mathrm{Spec}\, R_i.
\end{array}$$

ここで,
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^n &= \mathrm{Proj}\,\mathbb{C}[x_0, \cdots, x_n], \\
R_i &= \mathbb{C}\left[x_0/x_i, \cdots, x_n/x_i\right].
\end{aligned}$$

また，$\mathscr{I}$ は原点 $O \in \mathbb{A}^n = U_0 \subset \mathbb{P}^n$ に対応する $\mathbb{P}^n$ 上の連接イデアル層である．

ブローアップ μ の例外因子 $E = \mu^{-1}(O)$ は，$O \times \mathbb{P}^{n-1}\,(\subset Y)$ と一致する．また，射影 $\pi : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \to \mathbb{P}^{n-1}$ から誘導される写像

$$\pi : Y \to \mathbb{P}^{n-1} \cong E$$

は，$\mu^{-1}(\mathbb{A}^n)\,(\subset Y)$ に制限すると，$\mathbb{P}^{n-1}$ の標準線バンドルの標準射影 $\pi : \gamma^1_{n-1} \to E$ と一致する．Y は全体としては，γ^1_{n-1} のファイバー $\mathbb{A}^1$ を $\mathbb{P}^1$ にコンパクト化した空間（Thom 空間）となり，コンパクトで射影的代数多様体である．そのアフィン被覆は，$U_i = \tilde{U}(y_i)$ $(i = 1, \cdots, n)$ を $\mathbb{P}^{n-1}$ の開被覆として，

$$\begin{aligned} V_{i0} &\cong U_i \times \mathbb{A}^1 \ni (y_1/y_i, \cdots, y_n/y_i, t_i) \mapsto ([y_i, t_i y_1, \cdots, t_i y_n], [y_1, \cdots, y_n]), \\ V_{i1} &\cong U_i \times \mathbb{A}^1 \ni (y_1/y_i, \cdots, y_n/y_i, s_i) \mapsto ([s_i y_i, y_1, \cdots, y_n], [y_1, \cdots, y_n]), \end{aligned}$$

座標変換は

$$\begin{aligned} V_{i0} \cap V_{j0} &: \ t_i/t_j = y_i/y_j, \\ V_{i1} \cap V_{j1} &: \ s_i/s_j = y_j/y_i, \\ V_{i0} \cap V_{j1} &: \ t_i s_j = y_i/y_j \end{aligned}$$

で与えられ，例外因子 E は，$E \cap V_{i0} = \mathrm{div}(t_i)$, $E \cap V_{i1} = 0$ と表される．また，$f|_{V_{10}} = 1/t_1$ は

$$f|_{V_{i0}} = \left(\frac{y_1}{y_i}\right)^{-1} \frac{1}{t_i}, \quad f|_{V_{i1}} = \left(\frac{y_1}{y_i}\right)^{-1} s_i$$

により，Y 上の有理関数に拡大される．したがって，$\mathbb{A}^n$ のブローアップの場合と同様に，

$$\begin{aligned} &V_{i0} \cap (E + \mathrm{div}(f)) = \mathrm{div}(y_i/y_1) = -\mathrm{div}(y_1), \\ &V_{i1} \cap (E + \mathrm{div}(f)) = \mathrm{div}(s_i y_i/y_1) = -\mathrm{div}(y_1) + \mathrm{div}(s_i). \end{aligned}$$

よって，$E' := \mu^{-1}(\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{A}^n) \cong \mathbb{P}^{n-1}$ とおくと，

$$\mathscr{O}_Y(E - E') = \pi^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1)$$

を得る． □

【命題 4.121 (射影空間上の $\mathbb{P}^1$ バンドルとの対応)】 射影空間 $X = \mathbb{P}^n$ の一点 P を中心とするブローアップ $\mu : Y \to X$ において，Y を $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ の閉部分代数多様体と見なす．このとき，

1. 点 P を通る X の直線 L ($\cong \mathbb{P}^1$) とその上の点 $x \in L$ の組の全体は，$\mathbb{P}^{n-1}$ の標準線バンドル γ^1_{n-1} のファイバー $\mathbb{A}^1$ を $\mathbb{P}^1$ にコンパクト化して得られる多様体 $\hat{\gamma}^1_{n-1}$ と同一視できる．このとき，Y はこのコンパクトな射影的代数多様体 $\hat{\gamma}^1_{n-1}$ と同型となる：
$$Y = \hat{\gamma}^1_{n-1} \ni (L, Q) \text{ st } P, Q \in L \mapsto Q \in X = \mathbb{P}^n.$$
特に，例外因子 E は $\hat{\gamma}^1_{n-1}$ の中で $\{(L, P) \mid P \in L\} \cong \mathbb{P}^{n-1}$ に対応する．

2. $\mathbb{P}^1$ バンドル $Y = \hat{\gamma}^1_{n-1}$ の $\mathbb{P}^{n-1}$ への標準射影を $\pi : \hat{\gamma}^1_{n-1} \to \mathbb{P}^{n-1}$，$P^*_L$ を L の中での P の共役点として
$$E' := \{(L, P^*_L)\} \cong \mathbb{P}^{n-1}$$
とおく．このとき，
$$\mathscr{O}_Y(E - E') \cong \pi^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1)$$
が成り立つ．

□

4.5.2 特異点解消

特異点解消とは，代数多様体の各双有理同値類が非特異代数多様体を含むかどうかを問う問題である．

【定義 4.122 (特異点解消)】 代数多様体 X が与えられたとき，なめらかな代数多様体 Y からの双有理的で射影的な射 $f : Y \to X$ を**特異点の解消** (resolution of singularities) という． □

【定理 4.123】 正規で射影的な代数多様体間の双有理射 $f : X \to Y$ を与える．このとき，Y の余次元が 2 以上の閉集合 Z が存在し，制限射 $f : f^{-1}(Y \setminus Z) \to Y \setminus Z$ は同型射となる． □

【系 4.124】 正規で射影的な代数多様体間の有理写像 $f : X \rightsquigarrow Y$ を与える．このとき，X の余次元が 2 以上の閉集合 Z が存在し，f が射 $X \setminus Z \to Y$ により代表される． □

【定義 4.125 (正規交差因子)】 滑らかな多様体 X の余次元 1 の閉部分スキーム D は，次の条件を満たすとき，**正規交差因子** (normal crossing devisor) という：

各閉点 $P \in X$ に対して，その近傍 U と局所座標系 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ が存在して，ある整数 r $(0 \leq r \leq n)$ によって $\mathscr{O}_U(-D) = (x_1 \cdots x_r)\mathscr{O}_U$ と書ける．ただし，$r = 0$ は $P \notin D$ に対応する．

□

【定義 4.126 (埋め込み特異点解消)】 滑らかな代数多様体 X とその上の有効因子 D を考える．このとき，滑らかな代数的多様体からの射影的双有理射 $f : Y \to X$ であって，全逆像 f^*D の台が正規交差因子となるものを，組 $D \subset X$ の**埋め込み特異点解消**という． □

【定義 4.127 (クレパント)】 正規代数多様体 X において，標準因子 K_X が Cartier 因子になっていると仮定する．このとき，特異点解消 $\mu : Y \to X$ は，$K_Y = \mu^* K_X$ となるならば，**クレパント** (crepant) であるという． □

【定義 4.128 (法平坦性)】 代数多様体 X の部分多様体を C，そのイデアル層を $\mathscr{I}_C$ とする．もし，次数付き $\mathscr{O}_C$-加群層 $\bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathscr{I}_C^m / \mathscr{I}_C^{m+1}$ が局所自由層となるとき，X は C に沿って**法平坦** (normally flat) であるという． □

4.5.3 広中の定理

【定理 4.129 (広中の定理 I)】 $\mathbb{C}$ 上の代数多様体 X に対して，次のようなブローアップの列

$$Y = X_N \xrightarrow{\mu_N} X_{N-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\mu_1} X_0 = X$$

が存在する：

i) Y はなめらかである．

ii) $\mu_i : X_i \to X_{i-1}$ の中心 C_i は滑らかで，X_{i-1} の特異点集合に含まれる．

iii) X_{i-1} は C_i に沿って法平坦である．

□

【定理 4.130 (交差の正規化)】 X を滑らかな $\mathbb{C}$ 上の代数多様体，Z をその代数的閉部分集合とする．このとき，ブローアップの列

$$Y = X_N \xrightarrow{\mu_N} X_{N-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\mu_1} X_0 = X$$

が存在して，次の条件を満たす：

i) $\mu_i : X_i \to X_{i-1}$ の中心 C_i は滑らかで，Z の集合論的逆像に含まれる．

ii) 合成写像 $\mu : Y \to X$ に対して，集合論的逆像 $\mu^{-1}(Z)$ は正規交差因子となる．

□

【定理 4.131 (線形系の自由化)】 X を滑らかな $\mathbb{C}$ 上の代数多様体，$\Lambda = \{D_\lambda\}$ をその上の線形系とする．このとき，ブローアップの列の合成 $\mu : Y \to X$ が存在して，全逆像 $\mu^*\Lambda = \{\mu^* D_\lambda\}$ が自由な線形系 $\Lambda_Y = \{L_\lambda\}$ と固定部分 F に分解する：

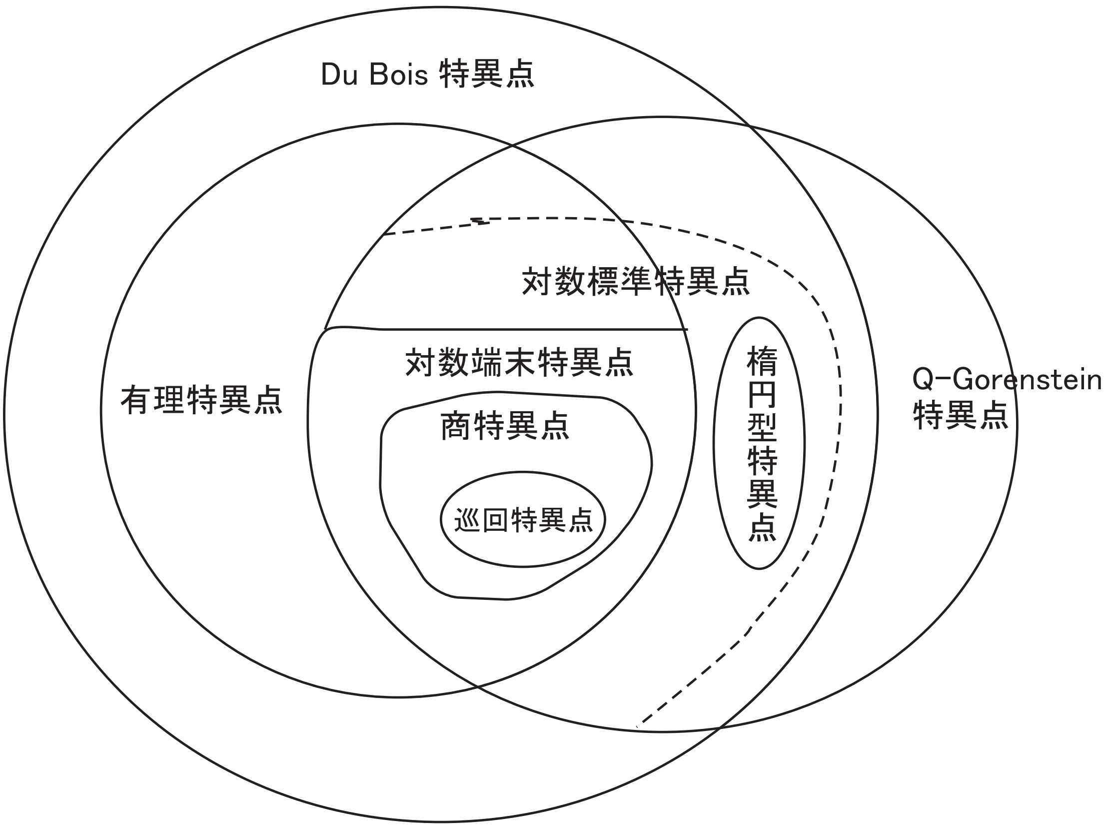
$$\mu^* D_\lambda = L_\lambda + F.$$

しかも，F の台が正規交差となるようにできる． □

【定理 4.132 (有理写像の不確定点除去)】 滑らかな射影的代数多様体間の有理写像 $\alpha : X \rightsquigarrow Z$ に対して，ブローアップの列の合成 $\mu : Y \to X$ が存在して，合成写像 $\alpha \circ \mu : Y \to Z$ が正則写像となる．

□

4.5.4　特異点の分類



4.5.4.1　Gorenstein 族

【定義 4.133 (Cohen-Macaulay 型)】　正規特異点 P において，その局所環が Cohen-Macaulay 環となるとき，**Cohen-Macaulay 型**特異点という． □

【定義 4.134 ($\mathbb{Q}$-Gorenstein 特異点)】　正規特異点 P の近傍 X において，ある正整数 r が存在し，$\omega_X^{\otimes r}$ が可逆層になるとき，(X, P) を **$\mathbb{Q}$-Gorenstein 特異点**，r の最小値を**指数** (index) という．指数

r の $\mathbb{Q}$-Gorenstein 特異点を **r-Gorenstein 特異点**という．また，1-Gorenstein でかつ Cohen-Macaulay 型となる特異点を単に **Gorenstein 特異点**という． □

【定義 4.135 (対数的特異点)】 正規な代数多様体 X とその上の $\mathbb{R}$-因子 D の組 (X, D) は，つぎの条件をみたすとき，**対数的劣末端特異点** (sub-log terminal singularity) のみをもつといい，略して **subLT**：

(1) $K_X + D$ は $\mathbb{R}$-Cartier 因子である．

(2) 非特異代数多様体からの射影的双有理正則射 $f : Y \to X$ と，Y 上の $\mathbb{R}$-因子で正規交差な台をもつもの E が存在して，$K_Y + E = f^*(K_X + D)$ かつ $E = \sum_i e_i E_i, e_i < 1(E_i$ は素因子）となる．

さらに，D が有効ならば，組 (X, D) は**対数的末端特異点** (log terminal singularity) のみをもつといい，略して **LT** であるという．

上記の条件 (2) の代わりに $e_i \leq 1$ が成り立つ場合，組 (X, D) は，**対数的劣標準特異点** (sub-log canonical singularity) のみをもつといい，略して **subLC** という．また，D が有効ならば，組 (X, D) は**対数的標準特異点** (log canonical singularity) のみをもつといい，略して **LC** であるという □

4.5.5 有理特異点

【定義 4.136 (有理特異点)】 正規な代数多様体 Y の特異点解消 $\mu : X \to Y$ において，

$$R^p \mu_* \mathscr{O}_X = 0, \quad \forall\, p > 0$$

が成り立つとき，Y は**有理特異点**のみをもつという．[< [川又 97]] □

【命題 4.137 (有理特異点の性質)】 有理特異点の局所環は Cohen-Macaulay 環となる．[< [川又 97] < Kempf G, Knudsen F, Mumford D & Saint-Donat B (1973)] □

【定理 4.138】 正規な代数多様体とその上の $\mathbb{R}$-因子の組 (X, D) が LT であるなら，X は有理特異点のみをもつ．特に，商特異点は有理特異点である．[< [川又 97]] □

4.5.6 代数曲面の特異点

4.5.6.1 極小特異点解消

【定義 4.139 (極小特異点解消)】 正規な代数曲面または複素解析曲面の特異点解消 $\mu : X \to Y$ において，例外曲線に (-1)-曲線が含まれないとき，μ は Y の**極小特異点解消** (minimal resolution of singularities) という．[< [川又 97]] □

【定理 4.140 (極小特異点解消の存在)】 任意の正規な代数曲面または複素解析曲面 Y は，同型を除いてただ 1 つの極小特異点解消をもつ．

さらに，特異点解消 $\mu : X \to Y$ が極小特異点解消であるための必要十分条件は，K_X が μ-ネフとなる，すなわち任意の例外曲線 C に対して，$(K_X \cdot C) \geq 0$ となることである．[< [川又 97]] □

【定義 4.141 (基本サイクル)】 正規な代数曲面 Y とその上の特異点 P に対して，極小特異点解消 $\mu : X \to Y$ における P 上の例外曲線たちを $C_1, \cdots, C_m$ とする．このとき，次の 2 条件を満たす有効因子 $Z = \sum_i a_i C_i$ を，特異点 (Y, P) の**基本サイクル** (fundamental cycle) という：

i) すべての i に対して，$a_i > 0$ かつ $(Z \cdot C_i) \leq 0$.

ii) 任意のゼロでない因子 $W = \sum_i b_i C_i$ に対して $(W \cdot C_i) \leq 0, \forall i$ となるならば，$W \geq Z$ となる．

基本サイクルは常に存在する．[< [川又 97]] □

【命題 4.142 (基本サイクルの数値的性質)】 正規な代数曲面の特異点 (Y, P) の極小特異点解消 $f : X \to Y$ に対する基本サイクルを Z とする．このとき，Z を X の閉部分スキームと見なすと，

$$(Z^2) + (K_X \cdot Z) \geq -2$$

が成り立つ．しかも，等号が成り立つ必要十分条件は，$H^1(Z, \mathscr{O}_Z) = 0$ で与えられる．[< [川又 97]] □

【定義 4.143 (有理特異点)】 正規な代数曲面の特異点 (Y, P) の極小特異点解消 $f : X \to Y$ に対する基本サイクル Z に対して $H^1(Z, \mathscr{O}_Z) = 0$ が成り立つとき，(Y, P) を**有理特異点** (rational singularity) という．

有理特異点は，$(Z^2) = -d$ のとき，**有理 d 重点** (rational d-uple point) であるという．$d \geq 2$ である．[< [川又 97]] □

4.5.6.2 商特異点

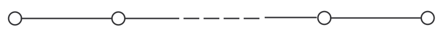
【定義 4.144 (商特異点)】 G を複素一般線形群 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ の有限部分群とする．このとき，$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ のアフィン空間 $\mathbb{C}^n$ への標準的な線形作用から誘導される G の $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ への作用に関して不変な多項式の全体 $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{\mathbb{C}}$ は，$\mathbb{C}$ 上有限生成で正規な多項式環となる．この多項式環により定義されるアフィンスキーム $X = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x_1, \cdot, x_n]^G$ を $\mathbb{A}^n/G$ で表し，**商特異点** (quotient singularity) をもつという． □

4.5.6.3 有理２重点

【定義 4.145 (A_n 型特異点)】 正の整数 n に対して，多項式

$$A_n : \quad x^2 + y^2 + z^{n+1} = 0$$

により定義される $\mathbb{A}^3$ の超曲面の原点 $P = (x, y, z)$ を A_n**-型特異点**という．この特異点の特異点解消の例外因子は (-2) 曲面のみからなり，それらの交差は A_n-型の Dynkin 図式で与えられる：

A_n: 

□

【定義 4.146 (D_n 型特異点)】 ４以上の整数 n に対して，多項式

$$D_n : \quad x^2 + y^2 z + z^{n-1} = 0$$

により定義される $\mathbb{A}^3$ の超曲面の原点 $P = (x, y, z)$ を D_n**-型特異点**という．この特異点の特異点解消の例外因子は (-2) 曲面のみからなり，それらの交差は D_n-型の Dynkin 図式で与えられる：

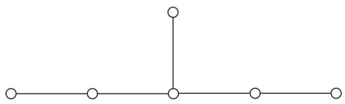
D_n: 

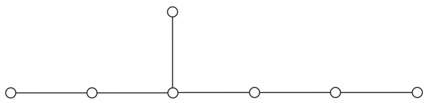
□

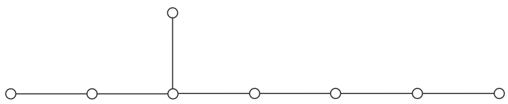
【定義 4.147 (E_n 型特異点)】 多項式

$$\begin{aligned} E_6:\ & x^2+y^3+z^4=0, \\ E_7:\ & x^2+y^3+yz^3=0, \\ E_8:\ & x^2+y^3+z^5=0 \end{aligned}$$

により定義される $\mathbb{A}^3$ の超曲面の原点 $P=(x,y,z)$ をそれぞれ **E_6-型**, **E_7-型**, **E_8-型特異点**という．この特異点の特異点解消の例外因子は (-2) 曲面のみからなり，それらの交差は次の Dynkin 図式で与えられる：

E_6: 

E_7: 

E_8: 

□

【定義 4.148 (有理２重点)】 クレパントな特異点解消をもつ正規代数曲面の特異点を，**有理２重点** (rational double point) または **Du Val 特異点**という． □

【定理 4.149 (有理２重点の特徴付け)】 正規な代数曲面 X の特異点 P に対して，次の各条件は同値である．

(0) クレパントな特異点解消をもつ．

(1) 極小特異点解消の例外因子が (-2)-曲線からなり，その Dynkin 図形が，A_n 型，D_n 型，E_n 型のいずれかの特異点と同じになる．

(2) 複素解析空間としての P の実位相近傍が存在して，A_n 型，D_n 型，E_n 型のいずれかの特異点の複素解析空間としての近傍と同型になる．

(3) ２次元の標準特異点である．

(4) $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の有限部分群によるアフィン空間 $\mathbb{C}^2$ の商特異点と複素解析的に局所同型となる．

□

【命題 4.150 (有理２重点の商特異点としての記述)】 各タイプの有理２重点は次のような $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の有限部分群 G に対応する商特異点となる：

A_n: 位数 $n+1$ の巡回群

D_n: 位数 $4n$ の２項２面体群 (binary dihedral group)

E_6: 位数 24 の２項４面体群 (binary tetrahedaral group)

E_7: 位数 48 の２項８面体群 (binary octahedral group)

E_8: 位数 120 の２項１２面体群 (binary icosahedral group)

□

4.6 代数曲面

4.6.1 双有理不変量

【定義 4.151 (種数と不正則数)】 Ω_S^q を代数的閉体 k 上の代数曲面 S の正則 q 次微分形式の層とし,

$$h^{q,p} = \dim_k H^p(S; \Omega_S^q)$$

とおく.

不正則数 (irregularity): $q(S) = h^{0,1}$

幾何種数 (geometric genus): $p_g(S) = h^{2,0}$

算術種数 (arithmetic genus): $p_a(S) = h^{0,2} - h^{0,1}$

$\chi(\mathscr{O}_S) = h^{0,2} - h^{0,1} + h^{0,0}$

□

【定義 4.152 (多重種数と小平次元)】 K_S を代数的閉体 k 上の代数曲面 S の標準因子（の定める可逆層）, $\rho_{|mK_S|}$ を完備線形系 $|mK_S|(m = 1, 2, \cdots)$ の定める有理写像

$$\rho_{|mK_S|} : H^0(S; mK_S) \rightsquigarrow \mathbb{C}P^{\dim |mK_S|}$$

とする.

m-**種数** (多重種数): $P_m = \dim H^0(S; mK_S)$

小平次元: $\kappa = \max_m \dim \mathrm{Im}\ \rho_{|mK_S|}$ ただし, $P_m = 0(\forall m)$ の時は $\kappa = -\infty$ と定める.

□

4.6.2 曲面上の交点理論

【定理 4.153 (仮想種数)】 C を滑らかな射影的代数曲面 X 上の種数 g の曲線とする．このとき，**仮想種数** (virtual genus) と呼ばれるゼロ以上の整数 $\pi(C)$ が存在して，

$$2\,\pi(C) - 2 := (C^2) + (K_X \cdot C) \geq 2g - 2$$

が成り立つ．しかも，等号が成り立つのは，C が滑らかであることと同等である．[< [川又 97]] □

【命題 4.154 ($K_C \sim 0$ 曲線)】 滑らかな射影的代数曲面 X 上の曲線 C に対して，$K_C \sim 0$ となるならば，つぎのいずれかが成り立つ：

1) C は滑らかな楕円曲線 ($g = 1$).

2) C はただ１つの特異点 P をもった有理曲線 ($g = 0$) である．しかも，X に伴う複素解析的曲面 X^h での P^h の実位相での近傍で，局所座標系 x, y を用いて，C^h が $xy = 0$（**結節点**）または $x^3 + y^2 = 0$（**尖点**）で表される．

[< [川又 97]] □

【定理 4.155 (Riemann-Roch の定理)】 滑らかな射影的代数曲面 X に対して，Riemann-Roch の定理は次のように表される：

$$\begin{aligned} \chi(X, \mathscr{O}_X(D)) &= \frac{1}{2} D(D - K_X) + \chi(X, \mathscr{O}_X), \\ \chi(X, \mathscr{O}_X) &= \frac{1}{12}\left(K_X^2 + \chi(X)\right). \end{aligned}$$

ここで，２番目の式は **Noether の公式**と呼ばれる． □

【定理 4.156 (Hodge の指数定理)】 滑らかで射影的な代数曲面 X に対して，$q([D]) = (D^2)$ で定義される２次形式 $q : N^1(X) \to \mathbb{R}$ は，符号数 $(1, \rho(X) - 1)$ をもつ．[< [川又 97]] □

【定理 4.157 (例外曲線の交点行列)】 正規な代数曲面の特異点解消 $\mu : Y \to X$ において，μ の例外曲線たちを $C_1, \cdots, C_m$ とすると，その交点行列 $[(C_i \cdot C_j)]_{i,j}$ は負定値である．[< [川又 97]] □

【定理 4.158 (代数曲線上のファイバーの交点行列)】 滑らかな代数曲面 X から滑らかな代数曲線 B への，連結なファイバーをもった射影的な射 $f : X \to B$ を与える．このとき，閉点 $P \in B$ の Cartier 因子としての引き戻しを $f^*P = \sum_i a_i C_i$ とすると，任意の因子 $D = \sum_i b_i C_i$ に対して $(D^2) \leq 0$ で，等号は D が f^*P の定数倍となる場合にのみ成り立つ．[< [川又 97]] □

4.6.3 曲面の分類と極小モデル

【定義 4.159 ((−1)-曲線)】 滑らかな代数曲面 X 上の曲線 C は，$C \cong \mathbb{P}^1$ で $(C^2) = -1$ となるとき，(−1)-**曲線**という．また，$C \cong \mathbb{P}^1$ で $(C^2) = -2$ となるとき，(−2)-**曲線**という． □

【定理 4.160 (滑らかな射影的代数曲面の粗分類)】 滑らかな射影的代数曲面 X において，次のいずれかが成り立つ：

i) 標準因子 K_X はネフになる．

ii) (−1)-曲線が存在する．

iii) X は滑らかな射影的代数曲線 B 上の $\mathbb{P}^1$ 束になる．

iv) $X \cong \mathbb{P}^2$

[< [川又 97]] □

【定義 4.161 (相対的極小モデル)】 滑らかな射影的代数曲面 X は，次の性質をもつとき**相対的に極小** (relatively minimal) であるという：

滑らかな射影的代数曲面 X' への双有理正則射 $f : X \to X'$ が存在するならば，f は同型射となる．

与えられた滑らかな射影的代数曲面 X に双有理同値な相対的極小曲面を，X の**相対的極小モデル** (relatively minimal model) という．相対的極小モデルは常に存在するが，一意的とは限らない．[< [宮西 90]] □

【定理 4.162 (Castelnuovo の縮約定理)】 滑らかな射影的代数曲面 X が (-1)-曲線 C をもつとする．このとき，もう一つの滑らかな射影的代数曲面 Y と双有理正則射 $f : Y \to X$ で，次の条件を満たすものが（同型を除いて）一意的に存在する：

i) $P = f(C)$ は 1 点となる．

ii) f は $P \in Y$ を中心とするブローアップに一致する．

[< [川又 97]] □

【命題 4.163 (縮約回数の有限性)】 Castelnuovo の縮約定理におけるブローアップ $f : X \to Y$ において，$b_2(X^h) = b_2(Y^h) + 1$, $\rho(X) = \rho(Y) + 1$ が成り立つ．[< [川又 97]] □

【定理 4.164 (双有理射の分解定理)】 $f : X \to Y$ を射影的代数曲面の間の双有理射とする．$n(f)$ を，f により 1 点につぶれる既約曲線の数とすると，f は $n(f)$ 個のブローアップの合成に分解される．[< [Har77]] □

【定理 4.165 (相対的極小モデルの存在)】 滑らかな射影的代数曲面が相対的に極小であるための必要十分条件は，(-1)-曲線を持たないことである．さらに，任意の滑らかな射影的代数曲面 X に対して，ある相対的極小モデル Y への双有理射 $f : X \to Y$ が存在する．[< [Har77]] □

【定義 4.166 (（絶対的）極小モデル)】 滑らかな射影的代数曲面 X が,（同型を除いて）ただ一つ相対的極小モデルをもつとき，それを **（絶対的）極小モデル** ((absolutely) minimal model) という．[< [宮西 90]] □

【定理 4.167 (絶対極小モデルの存在条件)】 滑らかな射影的代数曲面 X が，絶対極小モデルを持つための必要十分条件は，K_X が擬有効となることである．また，相対的極小モデル X が絶対的極小モデルであるための必要十分条件は，K_X がネフとなることである．[< [川又 97]] □

【定義 4.168 (数値的小平次元)】 滑らかで射影的な代数曲面 X の標準因子 K_X がネフのとき，**数値的小平次元** (numerical Kodaira dimension) を $\nu(X) := \nu(X, K_X)$ により定義する．H を豊富因子として

$$\begin{aligned} \nu(X) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (H \cdot K_X) = 0, \\ \nu(X) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad (H \cdot K_X) \neq 0,\ (K_X^2) = 0 \\ \nu(X) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (K_X^2) > 0. \end{aligned}$$

□

【定理 4.169 (極小曲面の分類)】 X を極小曲面，すなわち標準因子 K_X がネフとなる滑らかで射影的な代数曲面とする．このとき，次元が $\nu(X)$ に等しい正規射影的代数多様体 B および連結なファイバーをもつ全射正則射 $\pi : X \to B$ が存在する．さらに，B 上の豊富な $\mathbb{Q}$-因子 H が存在して，

$$K_X \sim_{\mathbb{Q}} \pi^* H$$

が成り立つ．詳しくは，次のいずれかが成り立つ：

1) $\nu(X) = 0$ のとき：

   1-1) **K3 曲面**: $K_X \sim 0$, $q(X) = 0$.

   1-2) **Enriques 曲面**: $K_X \not\sim 0,\ 2K_X \sim 0,\ q(X) = 0$.

   1-3) **Abel 曲面**: $K_X \sim 0,\ q(X) = 2$.

   1-4) **超楕円曲面** (hyperelliptic) または **2 重楕円曲面** (bielliptic):$K_X \not\sim 0,\ 12K_X \sim 0, q(X) = 1$.

2) $\nu(X) = 1$ のとき：**一般楕円曲面** (elliptic surface of general type): B は滑らかな代数曲線で，$\pi : X \to B$ の幾何学的一般ファイバーは楕円曲線となる．

3) $\nu(X) = 2$ のとき：**一般型曲面** (surface of general type): B は高々有理 2 重点をもつ正規な代数曲面で，K_B は豊富な Cartier 因子となる．また，π はクレパントな双有理正則射となる（$K_X = \pi^* K_B$).

□

4.6.4 有理曲面

【定義 4.170 (有理曲面)】 射影平面と双有理同値な曲面を，**有理曲面** (rational surface) という．[数学事典] □

【定理 4.171 (Castelnuovo の有理性判定条件)】 有理曲面に対して，$q = P_n = 0 (n = 1, 2, \cdots)$ である．逆に，$q = P_2 = 0$ となる曲面は有理曲面である．(この定理は，$k = \mathbb{C}$ のみでなく標数正の体に対しても成り立つ.）[数学事典] □

4.6.5 線織曲面

【定義 4.172 (線織曲面)】 滑らかな射影的代数曲面 X は，滑らかな代数曲線への全射正則射 $\pi : X \to C$ が存在し，その任意のファイバーが $\mathbb{P}^1$ と同型となるとき，C 上の**線織曲面** (ruled surface) という．(線織面の射影 π は常に，大域的切断をもつ.）[< [Har77]] □

【定義 4.173 (双有理的線織曲面)】 射影直線 $\mathbb{P}^1$ と代数曲線 C の直積 $C \times \mathbb{P}^1$ と双有理同値な曲面を，**双有理的線織曲面** (birationally ruled surface) という．[< [Har77]] □

【定理 4.174 (Enriques の線織性判定条件)】 双有理的線織曲面に対して，$P_n = 0 (n = 1, 2, \cdots)$(すなわち $\kappa = -1$) である．逆に，$P_4 = P_6 = 0$(あるいは $P_{12} = 0$) となる曲面は双有理的線織曲面である．(この定理は，$k = \mathbb{C}$ のみでなく標数正の体に対しても成り立つ.）□

【定理 4.175 (Castelnuovo-Enriques の定理)】 曲面 S が極小モデルを持つための必要十分条件は，S が双有理的線織曲面でないこと，すなわち $\kappa(S) \geq 0$ となることである．[数学事典] □

【定理 4.176 (線織曲面の構造と分類)】 $\pi : X \to C$ を C 上の線織曲面とする．

1. C 上の階数 2 の局所自由層 $\mathscr{E}$ が存在し，$X \cong \mathbb{P}(\mathscr{E})$ となる．逆に，このように書ける C 上の射影的曲面は線織曲面となる．

2. $\mathscr{E}$ と $\mathscr{E}'$ を C 上の階数 2 の局所自由層とすると，$\mathbb{P}(\mathscr{E})$ と $\mathbb{P}(\mathscr{E}')$ が C 上の線織曲面として同型となるための必要十分条件は，C 上の可逆層 $\mathscr{L}$ を用いて $\mathscr{E}' \cong \mathscr{E} \otimes \mathscr{L}$ と書けることである．

3. C の種数を g とすると，
$$p_a(X) = -q, \quad p_g(X) = 0, \quad q(X) = g.$$

4. $C_0 \subset X$ を X の大域的切断とするとき，
$$\mathrm{Pic}(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \pi^*\mathrm{Pic}(C).$$
ここで，$\mathbb{Z}$ は C_0 で生成される．また，
$$N^1(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$
生成元は，C_0 およびファイバー $F \cong \mathbb{P}^1$ で，$(C_0 \cdot F) = 1, (F^2) = 0$.

5. 表示 $X \cong \mathbb{P}(\mathscr{E})$ において，C 上の階数 2 の局所自由層 $\mathscr{E}$ を，$H^0(C, \mathscr{E}) \neq 0$ かつ任意の C 上の可逆層 $\mathscr{L}$ で $\deg \mathscr{L} < 0$ となるものに対して $H^0(C, \mathscr{E} \otimes \mathscr{L}) = 0$ という条件を満たすようとることができる．このとき，$e := -\deg \mathscr{E}$ は双有理不変量となり，X の大域的切断 C_0 に対して
$$(C_0^2) = -e$$
が成り立つ．

6. C の種数を g として，$\mathscr{E}$ を 5) のように規格化された C 上の局所自由層とするとき，次が成り立つ．

   a) $\mathscr{E}$ が 2 つの可逆層の直和に分解可能なら，$\mathscr{E} \cong \mathscr{O}_C \oplus \mathscr{L}$（$\deg\mathscr{L} < 0$）となる．特に，$e \geq 0$ で，この条件を満たす任意の e が許される．

   b) $\mathscr{E}$ が分解不可能なら，$-2g \leq e \leq 2g - 2$ となる．

[< [Har77]] $\square$

4.6.6　楕円曲面

【定義 4.177 (楕円曲面)】　曲面 S から完備非特異な代数曲線 C への全射正則写像 $\pi : S \to C$ で幾何学的一般ファイバーが楕円曲線（種数 1 の曲線）となるものが存在するとき，S は**楕円曲面**の構造をもつという．[川又雄二郎「代数多様体論」] □

4.6.7　代数的 K3 曲面

【定義 4.178 (代数的 K3 曲面)】　複素解析的 K3 曲面が代数的であるとき，**代数的 K3 曲面**という．代数的 K3 曲面 S とその上の豊富層 $\mathscr{L}$ の組 $(S, \mathscr{L})$ は，$([\mathscr{L}]^2) = 2d$ となるとき，次数 $2d$ の**偏極 K3 曲面**という．[川又雄二郎：「代数多様体論」] □

【定理 4.179 (代数的 K3 曲面の存在)】　任意の正の整数 d に対して，次数 $2d$ の K3 曲面が存在する．[Barth, W., Peters, C. and Van de Ven, A.: Compact Complex Surfaces (1984)] □

4.7　代数群

【定義 4.180】　代数多様体 G が群構造を持ち，(x, y) に xy^{-1} を対応させる写像 $G \times G \to G$ が正則写像のとき，G を**代数群**という．特に，G が既約な時，**群多様体**，完備な群多様体を **Abel 多様体**という．　□

4.7.1　Abel 多様体

4.7.1.1　Albanese 多様体

【定義 4.181】　既約代数多様体 V に対して，Abel 多様体 A と V から A への有理写像の組 (A, f) が次の条件を満たすとき，A を V の **Albanese 多様体**，f を **Albanese 写像**という：

i) f の像は A を生成する，すなわち f の像から生成される A の部分加群の閉包が A と一致する．

ii) Abel 多様体への任意の有理写像 $g : V \to B$ に対して，Abel 多様体の準同型 $h : B \to A$ と $b \in B$ が常に定まり，$g = h \circ f + b$ を満たす．

Albanese 多様体は同型を除いて一意的に存在し，f は平行移動を除いて一意的である．これらの定義で，有理写像を正則写像で置き換えると，**強い意味での Albanese 多様体**の定義となる．それは常に存在し，Albanese 多様体の商多様体である．特に，V が非特異の時，両者は一致する．[数学事典]　□

【命題 4.182】　V を非特異完備複素多様体とするとき，その Albanese 多様体 A と Albanese 写像 f は，V の適当な基点 o を固定して，o と任意の点 $x \in M$ を結ぶ曲線 γ_x にそう $\omega \in H^1(V; \Omega^1(V))$ の積分 $< x, \omega >$ から決まる，M から複素トーラスへの写像で与えられる．

$$f : V \to (H^1(V; \Omega^1(V)))^* / H_1(V; \mathbb{Z}) = A$$

[数学事典]　□

4.8 トーリック多様体

文献

- Danilov VI:”The geometry of toric varieties”, Russian Math. Survey 33, n.2, 97 (1978).
- Oda T:”Convex bodies and algebraic geometry” (Springer, 1988).
- Fulton W: ”Introduction to toric varieties” (Princeton Univ. Press, 1993).
- Ewald G: ”Combinatorial convexity and algebraic geometry”, GTM 168, Springer (1996).
- Cox D:”Recent developments in toric geometry”, AMS Proc. Symp. Pure Math. 62, 389 (1997) [alg-geom/9606016.
- Cox D:”Update on toric geometry”, Séminaires et Congrés 6, SMF 2002.
- Cox D:”Minicourse on Toric Varieties”: http://www.amherst.edu/$\tilde{\ }$dacox/.
- Batyrev VV: ”Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties”, J. Alg. Geom. 3: 493 (1994) [arXiv: alg-geom/9310003].
- Kreuzer M:”Toric Geometry and Calabi-Yau Compactifications”, hep-th/0612307.

【定義 4.183 (トーリック多様体)**】** k を代数的閉体とし，$k^* = k \backslash \{0\}$ とする．k 上局所有限生成の正規概型 X に，代数的トーラス $T = (k^*)^n$ が作用し，T と同型な X の開かつ稠密な軌道のあるとき，X を**トーラス埋め込み** (torus embedding) あるいは**トーリック多様体** (toric variety) という． □

4.8.1 構成法

【定義 4.184 (扇)**】** $N \cong \mathbb{Z}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の格子，O を $\mathbb{R}^n$ の原点として，次の条件を満たす $\mathbb{R}^n$ の O を頂点とする強凸錘の集合 Σ を**扇** (fan) と呼ぶ.

i) 錘 $\sigma \in \Sigma$ は N のベクトルで生成される.

ii) $\sigma \in \Sigma$ なら，σ のすべての面に対応する錘も Σ に含まれる.

iii) $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ なら，$\sigma_1 \cap \sigma_2 \in \Sigma$.

□

【定義 4.185 (指標群)**】** 代数的トーラス T の指標

$$\begin{aligned} \chi^m \quad &: \quad T \to k^* \\ &\quad t = (t_1, \cdots, t_n) \mapsto t_1^{m_1} \cdots t_n^{m_n} \end{aligned} \tag{4.8.1}$$

の全体 M は $\mathbb{Z}^n$ に同型な可換群となる.

正則準同型

$$\begin{aligned} \phi_u \quad &: \quad k^* \to T \\ &\quad \lambda \mapsto (\lambda^{u_1}, \cdots, \lambda^{u_n}) \end{aligned} \tag{4.8.2}$$

の全体 N は $\mathbb{Z}^n$ と同型な可換群となる.

写像の結合 $\chi^m \circ \phi_u(\lambda) = \lambda^{\langle u,m \rangle}$ は準同型 $M \times N \to \mathbb{Z}$ を定義し，この内積 $\langle u, m \rangle$ により，N と M は互いに双対となる. □

【構成 4.186 (Toric Variety)**】** $\mathbb{R}^n$ の扇 $\Sigma \Rightarrow$ Toric Variety X_Σ:

1) **扇頂点集合** Δ: Σ の１次元スケルトン

$$\Sigma^{(1)} = \{\mathbb{R}v_1, \cdots, \mathbb{R}v_r\}, \quad v_j \in \mathbb{Z}^n. \tag{4.8.3}$$

から $\mathbb{Z}^n$ の格子点の集合

$$\Delta := \{v_1, \cdots, v_r\} \tag{4.8.4}$$

が一意的に決まる.

2) **変換指数ベクトル**：Δ の線形従属関係を生成する線形独立な格子ベクトル集合 $q^{(1)}, \cdots, q^{(r-n)} \in \mathbb{Z}^r$ ，

$$q = l_1 q^{(1)} + \cdots + l_{n-r} q^{(r-n)} \ (l_k \in \mathbb{Z}) \quad \Leftrightarrow \quad q_1 v_1 + \cdots + q_r v_r = 0. \tag{4.8.5}$$

3) **除外集合** $Z \subset k^r$: P_j を $z_j = 0$ となる座標面

$$P_j = \{z = (z_1, \cdots, z_r) \in k^r \mid z_j = 0\} \quad (j = 1, \cdots, r), \tag{4.8.6}$$

部分頂点集合 $\sigma = \{v_{j_1}, \cdots, v_{j_l}\} \subset \Delta$ に対して

$$P_\sigma = P_{j_1} \cap \cdots \cap P_{j_l}, \tag{4.8.7}$$

$$\langle \sigma \rangle = \mathbb{R} v_{j_1} + \cdots + \mathbb{R} v_{j_l} \tag{4.8.8}$$

とおくとき，

$$Z = \cup_{\langle \sigma \rangle \notin \Sigma} P_\sigma. \tag{4.8.9}$$

4) 以上の要素を用いて，扇 Σ に対応するトーリック多様体 X_Σ が次で定義される：

$$X_\Sigma = (k^r - Z)/\sim; \tag{4.8.10}$$

$$(z_1, \cdots, z_r) \sim \left(\prod_l \lambda_l^{q_1^{(l)}} z_1, \cdots \prod_l \lambda_l^{q_r^{(l)}} z_r \right), \quad \lambda_1, \cdots, \lambda_{r-n} \in k^* \tag{4.8.11}$$

5) 埋め込み $T \to X_\Sigma$: 次の写像より誘導される．

$$z = (z_j) \in k^r - Z \mapsto t = \prod_{j=1}^{r} \phi_{v_j}(z_j) \in T \tag{4.8.12}$$

6) 因子 D_j:

$$D_j = (P_j - Z)/\sim . \tag{4.8.13}$$

7) アフィン開集合 U_σ ($\langle \sigma \rangle \in \Sigma$):

$$U_\sigma = \cap_{v_j \notin \sigma} (X_\Sigma - D_j) \tag{4.8.14}$$

この開集合上で，指標 χ^m は

$$\chi^m = t^m = \prod_j z_j^{\langle m, v_j\rangle}, \quad m \in M \tag{4.8.15}$$

と表されるので，正則となる条件は，

$$m \in \sigma^\vee = \{x \in M_\mathbb{R} \mid \ \langle x, v\rangle \geq 0 \ \forall v \in \langle\sigma\rangle\} \tag{4.8.16}$$

よって，U_σ 上の座標環 A_σ が

$$A_\sigma = k[\sigma^\vee \cap M] \cong \{\chi^m \mid \ m \in \sigma^\vee \cap M\} \tag{4.8.17}$$

により定義され，

$$(U_\sigma, \mathscr{O}_X|_{U_\sigma}) = (\mathrm{Spec}(A_\sigma), \tilde{A}_\sigma). \tag{4.8.18}$$

[Kreuzer M:hep-th/0612307] □

【定理 4.187 (コンパクト性と正則性)**】**

1. 扇 Σ に対応するトーリック多様体がコンパクトとなるための必要十分条件は，扇が完全，すなわち $|\Sigma| = \cup_\sigma \langle\sigma\rangle = N_\mathbb{R}$ となることである．

2. 扇 Σ に対応するトーリック多様体が非特異となるための必要十分条件は，Σ が単体的かつ基本的，すなわちすべての錐 $\langle\sigma\rangle$ が N の格子基底の一部で生成されることである．

□

4.8.2 例

【例 4.188 (射影空間 $\mathbb{C}P^n$)**】**

1) 扇：N を $\mathbb{R}^n$ の標準格子 $\mathbb{Z}^n$，$r = n+1$ として，頂点集合 Δ を

$$\Delta = \{v_0, \cdots, v_n\}] \quad v_1 = e_1, \cdots, v_n = e_n, v_0 = -\sum_{i=1}^n e_i. \tag{4.8.19}$$

と取り，扇 Σ を，$\sigma \subset \Delta$ として，

$$\sigma \in \Sigma \quad \Leftrightarrow \quad \sigma \subset \Delta - \{v_j\} \exists j \tag{4.8.20}$$

により定義する．

2) 変換指数ベクトル：

$$q = (1, 1, \cdots, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}. \tag{4.8.21}$$

よって，同一視変換は

$$(\lambda z_0, \cdots, \lambda z_n) \sim (z_0, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}. \tag{4.8.22}$$

3) 除外集合：

$$Z = (0, \cdots, 0) \in \mathbb{C}^{n+1}. \tag{4.8.23}$$

4) トーリック多様体：

$$X_\Sigma = (\mathbb{C}^{n+1} - Z)/\sim = \mathbb{C}P^n. \tag{4.8.24}$$

5) 基本因子

$$D_j = (P_j - Z)/\sim \cong [\mathbb{C}P^{n-1}]. \tag{4.8.25}$$

これらはすべて線形同値.

6) アフィン開集合：$\sigma_j = \Delta - \{v_j\}$，$U_j = U_{\sigma_j}$ は

$$\begin{aligned} &U_j = X_\Sigma - D_j = (\mathbb{C}^{n+1} - P_j)/\sim, \\ &U_j \ni [z_0 : \cdots : z_n] \cong (\zeta_1, \cdots, \zeta_n) = (z_0/z_j, \cdots, z_n/z_j). \end{aligned}$$

7) 座標環：

$$\begin{aligned} U_0 \quad &: \quad \sigma^\vee \cap M = \mathbb{Z}^+ e_1 + \cdots + \mathbb{Z}^+ e_n, \\ &\quad\ \ \zeta_1 = z_1/z_0, \cdots, \zeta_n = z_n/z_0 \Rightarrow \quad A_\sigma \cong \mathbb{Z}[\zeta_1, \cdots, \zeta_n], \\ U_l \quad &: \quad \sigma^\vee \cap M = \mathbb{Z}^+(e_1 - e_l) + \cdots + \mathbb{Z}^+(e_n - e_l) + \mathbb{Z}^+(-e_l), \\ &\quad\ \ \zeta_j = z_j/z_l\ (j \neq l), \zeta_l = z_0/z_l \Rightarrow \quad A_\sigma \cong \mathbb{Z}[\zeta_1, \cdots, \zeta_n]. \end{aligned}$$

□

【例 4.189 (Hirzeburch surfac $\mathbb{F}_n$)**】**

1) 扇：$\Delta = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ を頂点集合とする単体的扇 Σ.

$$v_0 = (0, -1), \quad v_1 = (1, 0), \quad v_2 = (-1, n), \quad v_3 = (0, 1). \tag{4.8.26}$$

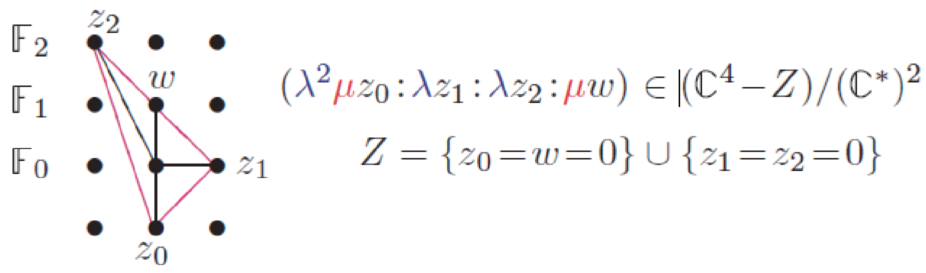


Fig. 1: The Hirzebruch surface $\mathbb{F}_2$ as blowup of $W\mathbb{P}_{211}$.

2) 除外集合：

$$Z = \{z_0 = w = 0\} \cup \{z_1 = z_2 = 0\}. \tag{4.8.27}$$

3) 同一視：線形関係

$$q^{(1)} = (1,0,0,1) : v_0 + v_3 = 0, \tag{4.8.28a}$$
$$q^{(2)} = (n,1,1,0) : nv_0 + v_1 + v_2 = 0, \tag{4.8.28b}$$

より，

$$\mathbb{F}_n = (\mathbb{C}^4 - Z)/\sim \quad \ni (\lambda^n \mu z_0 : \lambda z_1 : \lambda z_2 : \mu w). \tag{4.8.29}$$

4) 基本因子：

$$D_0 := \{(0 : z_1; z_2 : w)\}, \quad D_1 := \{(z_0 : 0 : z_2 : w)\},$$
$$D_2 := \{(z_0 : z_1 : 0 : w)\}, \quad D_3 := \{(z_0 : z_1 : z_2 : 0)\}.$$

空でない交差を持つのは，

$$D_0 \cap D_1,\ D_0 \cap D_2,\ D_1 \cap D_3,\ D_2 \cap D_3. \tag{4.8.30}$$

5) Affine 開集合：

$U_{0,1} = \mathbb{F}_n - D_2 - D_3 : \sigma = \{v_0, v_1\}$

$$\sigma^\vee \cap M = \mathbb{Z}^+ e_1 + \mathbb{Z}^+(-e_2),$$
$$\zeta_1 = \frac{z_1}{z_2}, \zeta_2 = \frac{z_0}{z_2^n z_3} \Rightarrow \quad A_1 \cong \mathbb{Z}[\zeta_1, \zeta_2]$$

$$U_{0,2} = \mathbb{F}_n - D_1 - D_3 : \sigma = \{v_0, v_2\}$$

$$\sigma^\vee \cap M = \mathbb{Z}^+(-e_1) + \mathbb{Z}^+(-ne_1 - e_2),$$
$$\zeta_1 = \frac{z_2}{z_1}, \zeta_2 = \frac{z_0}{z_1^n z_3} \Rightarrow \quad A_1 \cong \mathbb{Z}[\zeta_1, \zeta_2]$$

$$U_{1,3} = \mathbb{F}_n - D_0 - D_2 : \sigma = \{v_1, v_3\}$$

$$\sigma^\vee \cap M = \mathbb{Z}^+ e_1 + \mathbb{Z}^+ e_2,$$
$$\zeta_1 = \frac{z_1}{z_2}, \zeta_2 = \frac{z_2^n z_3}{z_0} \Rightarrow \quad A_1 \cong \mathbb{Z}[\zeta_1, \zeta_2]$$

$$U_{2,3} = \mathbb{F}_n - D_0 - D_1 : \sigma = \{v_2, v_3\}$$

$$\sigma^\vee \cap M = \mathbb{Z}^+(-e_1) + \mathbb{Z}^+(ne_1 + e_2),$$
$$\zeta_1 = \frac{z_2}{z_1}, \zeta_2 = \frac{z_1^n z_3}{z_0} \Rightarrow \quad A_0 \cong \mathbb{Z}[\zeta_1, \zeta_2]$$

□

【例 4.190 (重み付き射影空間 $\mathbb{C}P_{n11}$)**】**

1) 扇：$\Delta = \{v_0, v_1, v_2\}$ を頂点集合とする単体的扇 Σ.

$$v_0 = (0, -1), \quad v_1 = (1, 0), \quad v_2 = (-1, n). \tag{4.8.31}$$

2) 除外集合：

$$Z = \{z_0 = z_1 = z_2 = 0\}. \tag{4.8.32}$$

3) 同一視：線形関係

$$q = (n, 1, 1) : nv_0 + v_1 + v_2 = 0, \tag{4.8.33}$$

より,

$$X = (\mathbb{C}^3 - Z)/\sim \cong \mathbb{C}P_{n11} \quad \ni (\lambda^n z_0 : \lambda z_1 : \lambda z_2). \tag{4.8.34}$$

4) 基本因子：

$$D_0 := \{(0 : z_1; z_2)\}, \quad D_1 := \{(z_0 : 0 : z_2)\},$$
$$D_2 := \{(z_0 : z_1 : 0)\},$$

空でない交差を持つのは,

$$D_0 \cap D_1,\ D_0 \cap D_2,\ D_1 \cap D_2. \tag{4.8.35}$$

5) Affine 開集合：

$U_{0,1}=\mathbb{C}P_{n11}-D_2:\sigma=\{v_0,v_1\}$

$$\begin{aligned}&\sigma^\vee\cap M=\mathbb{Z}^+e_1+\mathbb{Z}^+(-e_2),\\&\zeta_1=\frac{z_1}{z_2},\zeta_2=\frac{z_0}{z_2^n}\Rightarrow\quad A_1\cong\mathbb{Z}[\zeta_1,\zeta_2]\end{aligned}$$

$U_{0,2}=\mathbb{C}P_{n11}-D_1:\sigma=\{v_0,v_2\}$

$$\begin{aligned}&\sigma^\vee\cap M=\mathbb{Z}^+(-e_1)+\mathbb{Z}^+(-ne_1-e_2),\\&\zeta_1=\frac{z_2}{z_1},\zeta_2=\frac{z_0}{z_1^n}\Rightarrow\quad A_1\cong\mathbb{Z}[\zeta_1,\zeta_2]\end{aligned}$$

$U_{1,2}=\mathbb{C}P_{n11}-D_0:\sigma=\{v_1,v_2\}$

$$\begin{aligned}&\sigma^\vee\cap M=\mathbb{Z}^+e_2+\mathbb{Z}^+(e_2+e_1)+\cdots+\mathbb{Z}^+(e_2+ne_1),\\&w_0=\frac{z_2^n}{z_0},w_1=\frac{z_1z_2^{n-1}}{z_0},\cdots,w_n=\frac{z_1^n}{z_0}\\&\Rightarrow\quad A_1\cong\mathbb{Z}[w_0,w_1,\cdots,w_n]/(w_0w_n=w_1w_{n-1}=\cdots=w_{[n/2]}w_{n-[n/2]})\end{aligned}$$

6) 特異点解消：$\mathbb{C}P_{n11}$ は $U_{1,2}$ 内の点 $(1:0:0)$ を巡回商特異点としてもつ．Hirzebruch 面 $\mathbb{F}_n$ からこの多様体への有理写像 f を

$$f:\mathbb{F}_n\ni(z_0:z_1:z_2:w)\mapsto(z_0:z_1:z_2)\in\mathbb{C}P_{n11}\tag{4.8.36}$$

により定義すると，

$$f:\mathbb{F}_n-D_3\cong\mathbb{C}P_{n11}-(1:0:0)\tag{4.8.37}$$

で，かつ

$$D_3=\{(z_0:z_1:z_2:0)\}\cong\{(1:z_1:z_2:0)\}/\mathbb{C}^*\cong\mathbb{C}P^1.\tag{4.8.38}$$

よって，$\mathbb{F}_n$ はブローアップによる $\mathbb{C}P_{n11}$ の特異点解消を与える．

□

【**例 4.191** (Conifold $\mathbb{C}P(1,1,-1,-1)$)】

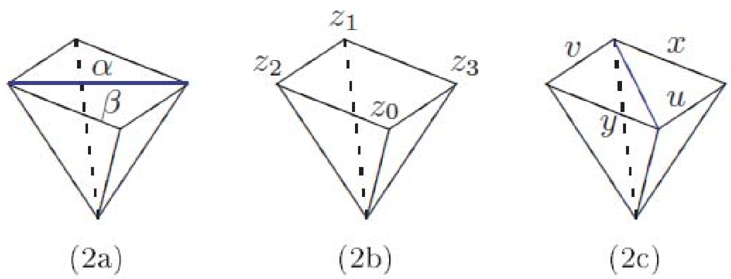


Fig. 2: Toric desingularizations of the conifold.

1) 扇：Σ を次の 4 個の頂点集合 $\Delta = \Delta_4$ から生成される 1 個の錐 $\sigma = |\Delta_4|$ とその辺で構成する：

$$v_0 = e_1, \quad v_1 = e_2, \quad v_2 = e_1 + e_3, \quad v_3 = e_2 - e_3. \qquad (4.8.39)$$

2) Δ の従属関係は

$$q = (1, 1, -1, -1) : v_0 + v_1 = v_2 + v_3 \qquad (4.8.40)$$

で，除外集合は $Z = \emptyset$ となるので，

$$X_\Sigma = \mathbb{C}P^4/\!\sim\, \cong \mathbb{C}P(1, 1, -1, -1) : (\lambda z_0 : \lambda z_1; \frac{1}{\lambda} z_2; \frac{1}{\lambda} z_3) = (z_0 : z_1 : z_2 : z_3) \qquad (4.8.41)$$

3) 基本因子：

$$D_0 := \{(0 : z_1 : z_2 : z_3)\}, \quad D_1 := \{(z_0 : 0 : z_2 : z_3)\},$$
$$D_2 := \{(z_0 : z_1 : 0 : z_3)\}, \quad D_3 := \{(z_0 : z_1 : z_2 : 0)\}.$$

4) 座標環：

$$\sigma^\vee \cap M = \mathbb{Z}^+ e_1 + \mathbb{Z}^+ e_2 + \mathbb{Z}^+(e_1 - e_3) + \mathbb{Z}^+(e_2 + e_3) \qquad (4.8.42)$$

より，

$$\begin{aligned} U_\sigma \quad : \quad & x = z_0 z_2, y = z_1 z_3, u = z_1 z_2, v = z_0 z_3 \\ & \Rightarrow \quad A_\sigma = \mathbb{Z}[x, y, u, v]/(xy = uv). \end{aligned} \qquad (4.8.43)$$

これは，$x = y = u = v = 0$ に conifold 特異点をもつ．

5) 特異点解消：Δ_4 を図 (2a) のように 2 つの単体錐

$$\sigma_\alpha = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \,, \quad \sigma_\beta = \langle v_0, v_2, v_3 \rangle \tag{4.8.44}$$

に分割して得られる扇 Σ' を考えると，除外集合が

$$Z' = \{(0:0:z_2:z_3)\} \tag{4.8.45}$$

となり，基本因子の交差は

$$D_0 \cap D_2, \quad D_0 \cap D_3, \quad D_1 \cap D_2, \quad D_1 \cap D_3. \quad D_2 \cap D_3. \tag{4.8.46}$$

また，

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^\vee \cap M &= \mathbb{Z}^+ e_1 + \mathbb{Z}^+(e_1 - e_3) + \mathbb{Z}^+(-e_1 + e_2 + e_3), \\ \sigma_\beta^\vee \cap M &= \mathbb{Z}^+ e_2 + \mathbb{Z}^+(e_2 + e_3) + \mathbb{Z}^+(e_1 - e_2 - e_3), \end{aligned}$$

より，アフィン開近傍は

$U_\alpha = X' - D_0$:

$$\begin{aligned} &\zeta_1 = z_0 z_2 = x,\ \zeta_2 = z_0 z_3 = v,\ \zeta_3 = z_1/z_0, \\ &\Rightarrow \quad A_\alpha = \mathbb{Z}[x, v, z_1/z_0] \end{aligned} \tag{4.8.47}$$

$U_\beta = X' - D_1$:

$$\begin{aligned} &\zeta_1 = z_1 z_3 = y,\ \zeta_2 = z_1 z_2 = u,\ \zeta_3 = z_0/z_1, \\ &\Rightarrow \quad A_\beta = \mathbb{Z}[y, u, z_0/z_1] \end{aligned} \tag{4.8.48}$$

X の特異点は $(P_0 \cap P_1) \cup (P_2 \cap P_3) \subset \mathbb{C}P^4$ に対応するので，X' では $x = y = u = v = 0$（$(z_0, z_1) \neq (0,0)$ は任意）と対応．これは $\mathbb{C}P^1$ と同型．

同様に，Δ_4 を次のような 2 つの単体

$$\sigma_\gamma = \{v_0, v_1, v_2\} \,, \quad \sigma_\gamma = \{v_0, v_1, v_3\} \tag{4.8.49}$$

に分割すると，除外集合が

$$Z'' = \{(z_0, z_1, 0, 0)\} \tag{4.8.50}$$

となり，別のブローアップ X'' を与える．

（注）$X' \cong X'' \cong (\mathscr{O}(-1) \oplus \mathscr{O}(-1) \to \mathbb{C}P^1)$.

□

4.8.3 性質

以下，X_Σ を $N \cong \mathbb{R}^n$ の扇 Σ に対応する非特異コンパクトトーリック多様体，$D_j (j = 1, \cdots, r)$ をその基本因子系，M を $(\mathbb{C}^*)^n = X_\Sigma \setminus \cup_j D_j$ から $\mathbb{C}^*$ への正則準同型 χ^m の集合とする．

【定義 4.192 (Chow 群)**】** 代数多様体 X の r 次元閉部分既約多様体の $\mathbb{Z}$ 係数形式和 $\Sigma_i a_i [Z_i]$ を **(代数的)**r**-輪体** (algebraic r-cycle) という．２つの r-輪体 c_1, c_2 は，それらを含む $(r+1)$ 次元部分多様体 Y とその上の有理関数 f が存在し，Y 上の因子として $c_1 - c_2 = (f)$ が成り立つとき，**有理同値** (rationally equivalent) という．X 上の r-輪体の有理同値類全体のつくる加群 $A_r(X)$ を **Chow 群** (Chow group) と呼ぶ． □

【命題 4.193 (トーリック多様体の Chow 環)**】** トーリック多様体 X_Σ に対して，

1. Chow 群 $A_k(X_\Sigma)$ は，$V_\sigma = \cap_{v \in \sigma} D_v$ $(\sigma \in \Sigma)$ により生成される．
2. $|I| \not\subset \Sigma$ となる $I \subset \Delta_\Sigma$ に対して，$R_I = \prod_{v \in I} D_v$ とおくとき，$m \in M$ として，X_Σ の Chow 環は
$$A_*(X_\Sigma) = \mathbb{Z}[D_1, \cdots, D_r] / \left\langle R_I, \sum_j \langle m, v_j \rangle D_j \right\rangle \tag{4.8.51}$$
で与えられる．
3. $A_k(X_\sigma, \mathbb{Z}) \cong H_{2k}(X_\Sigma, \mathbb{Z})$

□

【命題 4.194 (トーリック多様体の Chern 類)**】** トーリック多様体 $X = X_\Sigma$ に対して，

1. X の標準層は
$$\Omega_X^n = \mathscr{O}_X(-\sum_{j=1}^r D_j). \tag{4.8.52}$$

2. X の接バンドル T_X の全 Chern 類と全 Tod 類は

$$c(T_X) = \prod_{j=1}^{r}(1 + *[D_j])) = \sum_{\sigma\in\Sigma} *[V_\sigma], \tag{4.8.53a}$$

$$\mathrm{td}(T_X) = \prod_{j=1}^{R} \frac{*[D_j]}{1-\exp(-*[D_j])} = 1 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{12}c_1^2 c_2 + \cdots . \tag{4.8.53b}$$

ここで，輪体 c に対して $*c$ はその Poincare 双対．特に，

$$c_1(X) = \sum_{j=1}^{r} *[D_j]. \tag{4.8.54}$$

□

4.8.4　超曲面

【命題 4.195 (線バンドルの断面)**】**　X を扇 Σ に対応するトーリック多様体とする．

1. Weil 因子 $D = \sum a_j D_j$ が Cartier となるための必要十分条件は，Σ の各極大錐 σ に対し，$\langle m_\sigma, v_j\rangle = -a_j (\forall v_j \in \Delta)$ となる $m_\sigma \in M$ が存在することである．このとき，各開近傍 U_σ で

$$D|_{U_\alpha} = (\chi^{m_\sigma}). \tag{4.8.55}$$

2. X が非特異なら，Weil 因子は常に Cartier である．

3. Σ が単体的ならば，kD が Cartier となる $k \in \mathbb{N}$ が存在．

4. Cartier 因子 D に対して，区分線形な $N_{\mathbb{R}}$ 上の関数

$$\psi_D(v) = \langle m_\sigma, v\rangle \quad v \in \sigma \tag{4.8.56}$$

を support 関数という．

5. X がコンパクトで $D = \sum a_j D_j$ が Cartier のとき，

- $\mathscr{O}(D)$ が大域的断面で生成されるための必要十分条件は ψ_D が凸であることである．
- D が豊富であるための必要十分条件は，ψ_D が強凸であること，すなわち $\dim\sigma = n$ となる錐 σ と頂点 $v_j \notin \sigma$ に対して $\langle m_\sigma, v_j\rangle > -a_j$ となることである．

6. Cartier 因子 D に対して，

$$\Delta_D := \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \ \langle m, v_j\rangle \geq -a_j, \forall j\} \qquad (4.8.57)$$

は凸な格子ポリトープを定義し，その格子点は $\mathscr{O}(D)$ の大域的切断を与える．さらに

- D が大域的切断で生成されるための必要十分条件は，Δ_D が $\{m_\sigma\}$ の凸包であること．
- D が豊富であるための必要十分条件は，Δ_D が $m_\sigma(\sigma \in \Sigma^{(n)})$ を頂点とする n-次元体で，$\sigma \neq \tau \in \Sigma^{(n)}$ に対し $m_\sigma \neq m_\tau$ となることである．このとき，Σ は Δ_D の法扇となる．

7. ポリトープ Δ に対し，その極ポリトープ $\Delta^\circ \subset N_{\mathbb{R}}$ を

$$\Delta^\circ = \{y \in N_{\mathbb{R}} \mid \ \langle x, y\rangle \geq -1, \forall x \in \Delta\} \qquad (4.8.58)$$

により定義する．このとき，Δ の法扇 Σ_Δ は，Δ° の面とその共通の内点から作られる錐で生成される．

8. コンパクトでなめらかなトーリック多様体 X では，すべての T-不変な豊富因子は非常に豊富である．

8. トーリック多様体 X_Σ が射影的であるための必要十分条件は，Σ がある格子ポリトープ $\Delta \subset M_{\mathbb{R}}$ の法扇となることである．

□

【定理 4.196 (Batyrev)**】** トーリック多様体 X_Σ の超曲面 Y に対し $c_1(Y) = 0$ となるための必要十分条件は，$\mathscr{O}(D)$ の断面が Y を与える因子 D に対して，ポリトープ $\Delta_D \subset M_{\mathbb{R}}$ の極ポリトープ $\Delta_D^\circ \subset N_{\mathbb{R}}$ が，Σ の格子頂点の凸閉包 Δ^* と一致することである． □

【定義 4.197 (reflexive polytope)**】** 格子ポリトープは，その極ポリトープが再び格子ポリトープとなるとき，reflexive であるという．

□

5 Gauge Field Theories

[LastUpdate: 2002.11.16]

5.1 Fundamentals

Principal fibre bundle $P(M,G)$　局所座標系を $(\psi_\alpha, \mathscr{U}_\alpha)$，局所切断を σ_α とする：

$$\psi_\alpha : \pi^{-1}(\mathscr{U}_\alpha) \ni u \mapsto (\pi(u), \phi_\alpha(u)) \in \mathscr{U}_\alpha \times G, \tag{5.1.1}$$

$$\sigma_\alpha : \mathscr{U}_\alpha \to \pi^{-1}(\mathscr{U}_\alpha). \tag{5.1.2}$$

このとき，次が成り立つ：

$$\psi_\alpha(ug) = \psi_\alpha(u)g, \quad \phi_\alpha(ug) = \phi_\alpha(u)g, \quad \forall g \in G, \tag{5.1.3}$$

$$\psi_\alpha^{-1}(x,g) = \sigma_\alpha(x)g. \tag{5.1.4}$$

座標変換 $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ は変換関数

$$U_{\beta\alpha} : \mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta \to G, \tag{5.1.5}$$

を用いて，

$$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(x,g) = (x, U_{\beta\alpha}(x)g) \tag{5.1.6}$$

と表される．また，局所切断を用いると

$$\sigma_\beta(x) = \sigma_\alpha(x)U_{\beta\alpha}(x)^{-1} = \sigma_\alpha(x)U_{\alpha\beta}(x) \tag{5.1.7}$$

となる．

$P(M,G)$ の接続形式 ω の局所切断による引き戻しを

$$\omega_\alpha = \sigma_\alpha^* \omega, \tag{5.1.8}$$

とおくと，その座標変換に対する変換則は

$$\omega_\beta = \mathrm{ad}(U_{\alpha\beta}^{-1})\omega_\alpha + U_{\alpha\beta}^* \theta \tag{5.1.9}$$

となる．ここで，θ はリー群の標準１形式

$$\theta_g(\xi_g) = (L_{g^{-1}})_* \xi_g \tag{5.1.10}$$

である．G が行列群のとき，

$$\begin{aligned}\omega_\alpha &\mapsto A,\\ U_{\beta\alpha} &\mapsto U,\end{aligned}$$

に対して，この変換則は

$$A' = \mathrm{ad}(U)A - dUU^{-1} \tag{5.1.11}$$

と表される．

随伴ベクトルバンドル $E(M, V, G, P)$　主バンドル P の随伴ベクトルバンドルは G の左作用の定義された線形空間 V に対して，

$$E = P \times_G V \ni [u, v]; \quad [u, v] = \left\{(ug, g^{-1}v) \,\middle|\, g \in G\right\} \tag{5.1.12}$$

により定義される．P の局所座標 $(\psi_\alpha, \mathscr{U}_\alpha)$ に対応して，E の局所座標 $(\psi_{E\alpha}, \mathscr{U}_\alpha)$ が

$$\psi_{E\alpha} : \pi_E^{-1}(\mathscr{U}_\alpha) \ni [u, v] \mapsto (\pi(u), \phi_\alpha(u)v) \in \mathscr{U}_\alpha \times V \tag{5.1.13}$$

により定義される．$\psi_{E\alpha}$ は ψ_α に対応する P の局所切断 σ_α を用いて

$$\psi_{E\alpha}^{-1}(x, v) = [\sigma_\alpha(x), v] \tag{5.1.14}$$

と表される．

E の座標変換は

$$\psi_{E\beta}\circ\psi_{E\alpha}(x, v) = (x, U_{\beta\alpha}v) \tag{5.1.15}$$

となる．したがって，E の切断 Φ の座標表示を

$$\psi_{E\alpha}\circ\Phi(x) = (x, \Phi_\alpha(x)) \tag{5.1.16}$$

とおくと，Φ_α の変換則は

$$\Phi_\beta = U_{\beta\alpha}\Phi_\alpha, \tag{5.1.17}$$

あるいは，省略記法で

$$\Phi'(x) = U(x)\Phi(x) \tag{5.1.18}$$

となる．

共変微分と曲率　局所座標表示に対する省略記法のもとで，ベクトル場 Φ の共変微分は

$$D_X\Phi = X\Phi + A(X)\Phi, \tag{5.1.19}$$

あるいは，

$$D\Phi = d\Phi + A\Phi \tag{5.1.20}$$

で定義される．また，曲率形式 Ω の局所切断による引き戻し

$$F = \sigma^*\Omega \tag{5.1.21}$$

は，ゲージ場 A を用いて

$$F = dA + A \wedge A \tag{5.1.22}$$

と表される．ここで，

$$A \wedge A(X,Y) = [A(X), A(Y)] \tag{5.1.23}$$

である．これと共変微分の関係は

$$(D_X D_Y - D_Y D_X - D_{[X,Y]})\Phi = F\Phi \tag{5.1.24}$$

となる．

6 Noncommutative Geometry

[LastUpdate: 2006.10.30]

6.1 超幾何学

6.1.1 教科書とレビュー

- Kac VG: Lie superalgebras, *Adv. Math.* **26**, 8–96 (1977).
- Kostant B: *Graded manifolds, graded Lie theory and prequantization*, Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics, Lecture Notes in Mathematics 570 (Springer, 1977), 177–306.
- Batchelor M: Graded Manifoles and Supermanifolds, *Mathematical Aspects of Superspace*, eds. Seifert H-J, Clarke CJS, Rosenblum A, NATO ASI Series, Mathematical and Physical Sciences 132 (D.Reidel Pub. Company, 1984), 91–134.
- Rogers A: *Mathematical Aspects of Superspace*, eds. Seifert H-J, Clarke CJS, Rosenblum A, NATO ASI Series, Mathematical and Physical Sciences 132 (D.Reidel Pub. Company, 1984), 91–134.
- Brezin FA: *Introduction to Superanalysis*, D. Reidel Pub. Co. (1987).
- DeWitt B: *Supermanifolds*, Cambridge Univ. Press (1992).
- Bartocci C. Bruzzo U, Hernandez-Ruiperez D: *The Geometry of Supermanifolds, Mathematics and Its Applications*, Kluwer (1992).
- Deligne P, Morgan JW: *Notes on supersymmetry (following Joseph Bernstein)*, Quantum Fields ans Strings: A Course for Mathematicians, vols. 1, 2, Amer. Math. Soc. (1999).
- Deligne P, Freed DS: *Supersolutions*, Quantum Fields ans Strings: A Course for Mathematicians, vols. 1, 2, Amer. Math. Soc. (1999) [*hep-th/9901094].*
- *Tuynman GM:* Supermanifolds and Supergroups*, Kluwer Academic Pub. (2004).*

- *Goertsches O: Riemannian Supergeometry, math.DG/0604143.*

6.2 History

1966 **超空間**の導入 (Salam A, Strathdee J 1974[SS74]; Volkov DV, Akukov VP 1973[VA73]; Wess J, Zumino B 1977[WZ77])

1975 **次数付き多様体**の導入 (Berezin FA, Leites DA 1975[BL75]; Kostant B 1977[Kos77]; cf. Dell J, Smolin L 1979[DS79])

1977 **幾何学的超多様体**の導入 (DeWitt BS 1977; Batchelor M 1980[Bat80]; DeWitt BS 1984[Dew84])

1980 G^∞ **超多様体**の導入 (接層が局所自由でない) (Rogers A [Rog80])

1981 **JP 超多様体** (Jadczyk A, Pilch K 1981[JP81])

1986 **超多様体の公理** (Rothstein MJ[Rot86])

- GH^∞ **超多様体**の導入（接層は局所自由だが、節空間が一般に同型な超ベクトル空間とならない）(Rogers A [Rog86])

1987 **G-超多様体** (Bartocci C, Bruzzo U[BB87]; Bartocci C, Bruzzo U, Hernández-Ruipérez D 1989[BBHR89])

6.3 超多様体

参考文献

[ABC$^+$96] Amoros, J., Burger, M., Corlette, K., Kotschick, D. and Toledo, D.: *Fundamental groups of compact Kähler manifolds*, AMS (1996).

[Bat80] Batchelor, M.: Two approaches to supermanifods, *Trans. Am. Math. Soc.* **258**, 257–70 (1980).

[BB87] Bartocci, C. and Bruzzo, U.: Some remarks on the differential-geometric approach to supermanifolds, *J. Geom. Phys.* **4**, 391–404 (1987).

[BBHR89] Bartocci, C., Bruzzo, U. and Hernández-Ruipérez, D.: A remark on a new category of supermanifolds, *J. Geom. Phys.* **6**, 509–16 (1989).

[Ber00] Berger, M.: *Riemannian Geometry During the Second Half of the Twentieth Century*, American Mathematical Society (2000).

[BG04] Boyer, C. P. and Galicki, K.: Sasakian Geometry, Hypersurface Singularities, and Einstein Metrics, *math.DG/0405256* (2004).

[BL75] Berezin, F. and Leĭtes, D.: Supermanifolds, *Soviet Math. Dokl* **16**, 1218–22 (1975).

[Dew84] Dewitt, B.: *Supermanifold*, Cambridge Univ. Press (1984).

[DS79] Dell, J. and Smolin, L.: Graded Manifold Theory as the Geometry of Supersymmetry, *Comm. Math. Phys.* **66**, 197–221 (1979).

[Fom87] Fomenko, A. T.: *Differential Topology and Geometry (translated by D.A. Leites)*, Prenum Pub., New York (1987).

[Ham82] Hamilton, R.: Three-manifolds with positive Ricci curvature, *J. Diff. Geom.* **17**, 255–306 (1982).

[Har77] Hartshorne, R.: *Algebraic Geometry*, Springer (1977).

[Haw77] Hawking, S.: Gravitational instantons, *Phys. Lett. A* **60**, 81–83 (1977).

[Joy00] Joyce, D.: Oxford Univ. Press (2000).

[JP81] Jadczyk, A. and Pilch, K.: Superspaces and supersymmetry, *Comm. Math. Phys.* **78**, 373–90 (1981).

[Kos77] Kostant, B.: Graded manifolds, graded Lie theory and prequantization, in Bleuler, K. and Reetz, A. eds., *Differential Geometric Methods in Mathematical Physics, Lecture Notes in Mathematics 570*, 177–306, Springer Verlag (1977).

[Per02] Perelman, G.: The Entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, *arXiv:math/0211159* (2002).

[Per03a] Perelman, G.: Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds, *arXiv:math/0307245* (2003).

[Per03b] Perelman, G.: Ricci flow with surgery on three-manifolds, *arXiv:math/0303109* (2003).

[Rog80] Rogers, A.: A global theory of supermanifolds, *J. Math. Phys.* **21**, 1352–65 (1980).

[Rog86] Rogers, A.: Graded manifolds, supermanifolds and infinite-dimensional Grassmann algebras, *Comm. Math. Phys.* **105**, 375–84 (1986).

[Rot86] Rothstein, M.: The Axioms of Supermanifolds and a New Structure Arising From Them, *Trans. Amer. Math. Soc.* **297**, 159–180 (1986).

[SS74] Salam, A. and Strathdee, J.: Supergauge transformations, *Nucl. Phys. B* **76**, 477–82 (1974).

[Tau92] Taubes, C.: The existence of anti-self-dual conformal structures, *J. Diff. Geom.* **36**, 163–253 (1992).

[VA73] Volkov, D. and Akulov, V.: *Phys. Lett. B* **46**, 109 (1973).

[WZ77] Wess, J. and Zumino, B.: Superspace formulation of supergravity, *Phys. Lett. B* **66**, 361–4 (1977).

[YK84] Yano, K. and Kon, M.: *Structures on Manifolds*, World Scientific (1984).

[宮西 90] 宮西正宜：代数幾何学, 裳華房 (1990).

[川又 97] 川又雄二郎：代数多様体論, 共立出版 (1997).