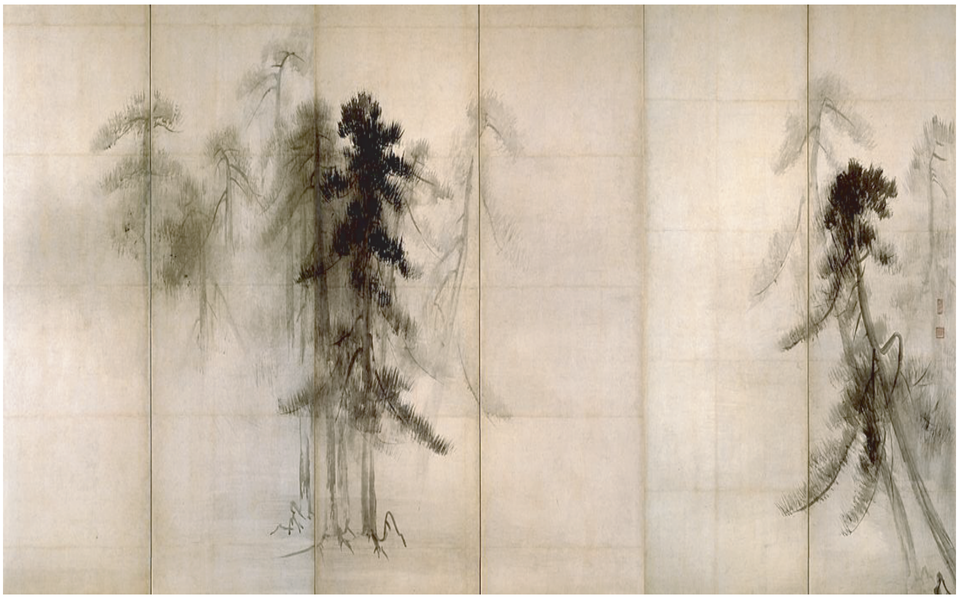
量子重力理論と宇宙論
(上巻)
–共形場理論と重力の量子論–

浜田賢二

高エネルギー加速器研究機構 (KEK)
素粒子原子核研究所
http://research.kek.jp/people/hamada/



量子重力の世界は霧に包まれた距離感のない幽玄の世界にたとえることができる。深い霧が晴れて時空が現れる。国宝松林図屏風 (長谷川等伯筆)

平成 20 年 11 月初版/平成 21 年 09 月改定/
平成 25 年 09 月再改定 (上下巻に分離)

要約

量子重力理論の目的はPlanckスケールを越えた世界を明らかにすることである。そこでは重力の量子的ゆらぎが大きく、距離の概念が失われたいわゆる背景時空独立な世界が実現していると考えられる。それは特定の時空を伝播する重力子の量子化ではなく、時空そのものの量子化を意味する。本書で紹介するくりこみ可能な量子重力理論はPlanckスケールを越えた高エネルギー世界を共形場理論を用いて記述し、そこからのズレを摂動論で定式化した理論である。

はじめに共形場理論の一般的な事柄について解説する。その後に背景時空独立な量子重力理論が特殊な共形場理論として記述できることを示す。この理論では共形不変性がゲージ対称性である一般座標不変性の一部として現れる。そのため共形変換によって結ばれる異なる背景時空がゲージ同値になって、その独立性が表現される。上巻では一般座標変換を生成するBRST演算子を構成し、物理的場の演算子や物理状態について解説する。

下巻では繰り込み理論及びその宇宙論的意義について解説する。次元正則化によるくりこみ計算を行い、共形不変性からの破れを表す結合定数が漸近自由性を示すことを見る。それはPlanckスケールを超えた紫外極限で共形不変な世界が実現することを保障する。一方でその破れを表す新しい力学的赤外スケールΛ_{QG}の存在も予言する。そのスケールをPlanck質量スケールよりも低い10^{17}GeVとすると、次のような量子重力的インフレーションモデルが構築できる：スケール不変な原始宇宙がPlanckエネルギー付近から指数関数的に膨張を始め、Λ_{QG}まで下がると量子相関が失われて、共形不変性が完全に壊れた現在の古典的なFriedmann時空に相転移する。その発展の運動方程式を求めパワースペクトルを計算してCMBの観測結果と照合する。

目 次

第1章　はじめに

広がりのない理想的な一点で表される素粒子像は重力理論と矛盾する概念である。何故なら、それは重力理論から見ればブラックホールに他ならないからである。一般的にある特定の背景時空を運動する粒子の描像は重力と相容れない。ただ、粒子の質量が Planck スケールより小さい場合は固有の Compton 波長がその質量のホライズンサイズより長くなるため、近似的に点状とみなすことができる。量子重力理論が必要とされる領域はまさに粒子描像が壊れる Planck スケールを超えた世界である。

この問題を解決するための方法はスケールそのものが存在しない世界を実現することである。すなわち、スケールの異なる世界がゲージ同値になるような世界を実現させることである。そのような性質を背景時空独立性と呼ぶ。本書で紹介する量子重力理論は Planck スケールを超えた領域でゲージ化した共形不変性をもつ特別な共形場理論として記述される理論である。

1.1　学問的背景

2001 年に NASA ケネディ宇宙センターより打ち上げられた天文衛星、Wilkinson マイクロ波異方性探査機 (Wilkinson Microwave Anisotropies Probe, WMAP) による宇宙マイクロ波背景放射 (cosmic microwave background, CMB) の観測によって宇宙論パラメータが高い精度で決定され、インフレーション理論的な考えが正しいことが強く示唆された。[1] 一方で、宇宙はなぜ膨張しているのか、インフレーションを誘起する斥力の

[1]D. Spergel et al., Astrophys. J. Suppl. **148** (2003) 175.

源は何か、まだ多くの素朴で根源的な疑問が残されている。

指数関数的膨張を意味するインフレーション理論を自然に解釈すれば、宇宙は誕生から現在までにおよそ 10^{60} 倍膨張したことになる。これは銀河団より大きなサイズがインフレーション以前では Planck 長さ内に納まっていたことを意味する。このことは WMAP が観測した CMB 異方性スペクトルの中に宇宙創生期の重力の量子的ゆらぎが記録されていることを示唆している。

このように、宇宙膨張、ビッグバン、原始ゆらぎなど、それらの起源を重力の量子効果に求めることは自然なことである。量子重力理論は時空の誕生から現在に至るまでの宇宙の歴史を理解する上で必要な 21 世紀の物理学として期待される。本書の最終目的は紫外極限で背景時空独立性をもつくりこみ可能な重力の量子論を使って WMAP の結果を説明することである。最近の研究から、時空の相転移が 10^{17}GeV で起きたと考えると多くの観測事実を簡潔に説明できることが分かってきた。

1.2　歴史的背景

ここでは、本書で紹介する繰り込み可能な量子重力理論について、その歴史も交えて簡潔にまとめる。[2] Einstein 重力理論はその作用である Ricci スカラー曲率が正定値でないことや、結合定数である Newton 定数

[2]黎明期の量子重力理論:

1. R. Utiyama and B. DeWitt, J. Math. Phys. **3** (1962) 608.
2. B. DeWitt, in Relativity, Groups and Topology, eds. B. DeWitt and C. DeWitt (Gordon and Breach, New York, 1964); Phys. Rev. **160** (1967) 1113; Phys. Rev. **162** (1967) 1195, 1239.
3. G. 't Hooft and M. Veltman, Ann. Inst. Henri Poincare **XX** (1974) 69; M. Veltman, in Methods in Field Theory, Les Houches 1975.
4. S. Weinberg, in General Relativity, an Einstein Centenary Survay, eds. S. Hawking and W. Israel (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1979).
5. S. Deser, Proceedings of the Coference on Gauge Theories and Modern Field Theories, edited by R. Arnowitt and P. Nath (MIT Press, Cambridge, 1975).
6. S. Weinberg, Proceedings of the XVIIth International Conference on High Energy Physics, edited by J. R. Smith (Rutherford Laboratory, Chilton, Didcot, 1974).

が次元をもつためにくりこみ不可能になるなど、量子論を構成する上で好ましくない性質を多くもっている。ただ、くりこみ理論自体は重力理論の基礎となる一般座標変換の下での不変性、以後は一般座標不変性と呼ぶ、と矛盾しているわけではない。

1970年代の初期の量子重力研究では、Einstein重力に高階微分作用を加えるだけで正定値でくりこみ可能な理論ができるのではないかと考えられた。[3] しかしながら、すべての重力場モードを摂動的に扱う方法ではどうしても漸近場として好ましくないゲージ不変なゴースト粒子が現れることを防ぐことができなかった。

本書で議論するくりこみ可能な量子重力理論は一部に非摂動的な方法を取り入れることでこれらの問題を解決しようとする試みである。それは、特定の背景時空を伝播する粒子描像そのものを捨ててしまうことでもある。

量子化の方法論としての大きな進歩は1980年代の後半に成された。2次元量子重力の厳密解の発見である。[4] 1970年代から1980年代前半にかけて研究された従来の量子重力理論との大きな違いは、経路積分測度からの寄与を正しく取り入れて、重力場の中の共形因子を非摂動的に取り扱ったことである。

この量子重力理論はある背景時空上の共形場理論 (conformal field theory, CFT) として記述される。通常の共形場理論との違いは共形不変性が

[3]初期の高階微分量子重力理論:

1. K. Stelle, Phys. Rev. **D16** (1977) 953; Gen. Rel. Grav. **9** (1978) 353.
2. E. Tomboulis, Phys. Lett. **70B** (1977) 361; Phys. Lett. **97B** (1980) 77.
3. E. Fradkin and A. Tseytlin, Nucl. Phys. **B201** (1982) 469; Phys. Lett. **104B** (1981) 377.
4. E. Fradkin and A. Tseytlin, Phys. Rep. **119** (1985) 233 [Review].

[4]2次元量子重力理論:

1. V. Knizhnik, A. Polyakov and A. Zamolodchikov, Mod. Phys. Lett. A **3** (1988) 819.
2. J. Distler and H. Kawai, Nucl. Phys. **B321** (1989) 509.
3. F. David, Mod. Phys. Lett. A **3** (1988) 1651.
4. N. Seiberg, Prog. Theor. Phys. Suppl. **102** (1990) 319 [Review].
5. J. Teschner, Class. Quant. Grav. **18** (2001) R153 [Review].

ゲージ対称性、すなわち一般座標不変性だということである。そのため、通常の共形場理論では真空のみが共形不変で、物理場はルールに従って変化するのに対し、量子重力では物理場もまた不変でなければならない。このように、共形変換で移り変わることができる背景時空上の理論がすべてゲージ同値となって、背景時空独立性が実現する。これは、古典重力にはない純粋に量子論的な対称性である。

この方法を4次元に応用して新しいくりこみ可能な量子重力理論が定式化された。距離を支配する共形因子は2次元量子重力のときと同様に非摂動的に量子化することで背景時空独立性を共形不変性として実現した。一方、4次元では無視できない重力場のトレースレステンソルモードのダイナミクスは高階微分のWeyl作用を加えて摂動論的に定式化した。その結合定数が無次元になることから理論はくりこみ可能になる。

Einstein重力を基礎とした従来の場の量子論では通常Planckスケールを紫外カットオフとみなしているため、特異点や紫外発散の問題、さらに宇宙項の問題を実質的に避けている。一方、この新しいくりこみ可能な量子重力理論は結合定数が漸近自由性を示すことから、量子色力学(QCD)のように紫外カットオフは必要なく、Planckスケールを越えた世界を記述することができる。

1.3　理論の優れた点

漸近自由性は、QCDにおける$\Lambda_{\rm QCD}$のように、重力の新しい力学的赤外エネルギースケール$\Lambda_{\rm QG}$が存在することを示唆している。[5] エネルギースケール$\Lambda_{\rm QG}$より十分に高いエネルギー領域ではトレースレステンソルモードの寄与が小さくなり、共形因子のゆらぎが支配的になる。このことはトレースレステンソルモードを摂動論的に扱うことを正当化するとともに、重力の量子論として次のような物理的意味をもつ：

[5] これはくりこみ可能な理論の特徴で、ストリング理論のような明白に有限な理論には存在しないスケールである。また、有効作用が非局所的になることも特徴で、この点も局所的な有効理論を与える明白に有限な理論とは異なる。

- 特異点の解消： 漸近自由性は高エネルギーで Riemann 曲率を含む Weyl 曲率テンソルが消えることを意味する。そのため、特異点のような曲率が発散する時空配置は量子論的に排除される。共形不変性の実現からも、特異点のような特別な点の存在は否定される。

- 時空の相転移： 重力場の量子相関が力学的エネルギースケールで急激に短距離になり、コヒーレンスを失って、量子的な時空から古典的な現在の時空に移行すると考えられる。

このように特異点が解消することから、情報喪失パラドクスのような非摂動的なユニタリ性の問題も議論することが可能になる。前にも述べたように、共形不変性は一般座標不変性の一部として現れるゲージ対称性である。このことから、共形代数はいわゆる Wheeler-DeWitt 拘束条件の実現である。そのため、物理演算子として共形不変なもののみが許され、物理量はその相関関数で与えられる。

一方、伝統的な S 行列は物理量ではない。ここで述べている量子重力の漸近自由性は Minkowski 時空の実現を表しているわけではないので、いわゆる漸近場の存在を意味しない。[6] そのような時空では重力子 (graviton) のような特定の背景時空のまわりの小さなゆらぎとして表される粒子的描像はもはや成り立たなくなる。

最も優れた点は、量子重力のダイナミクスのみを用いて宇宙進化のモデルを作ることができることである。理論に固有な三つの重力的スケールの大小を Planck 質量、漸近自由性に由来する力学的スケール、宇宙項の順に選ぶと、現在までの宇宙の重力的な進化はこれらのスケールによって区切られた四つの時代に分けることができる。Planck スケールを越えた領域は共形因子の量子ゆらぎが優勢な共形不変な時空の時代である。共形不変性が Planck スケールで破れ始め第二のインフレーション時代に移り、力学的スケールで長距離の相関が失われて第三の古典的な Friedmann

[6] S 行列を定義しようと思えば高エネルギーの粒子が衝突してブラックホールが出来るような過程を考えるか、あるいはブラックホールに入射して出て行く過程を考えるしかない。この場合はブラックホールから離れた場所は Einstein 理論で記述され、漸近場として重力子を定義することができる。

時空に相転移する。そして現在は宇宙項の寄与が無視できない第四の de Sitter 時空の時代と考えることができる。

量子重力に基づく初期宇宙論の優れた点は、通常用いられるスカラー (inflaton) 場のような未知な自由度を導入することなく、重力場のダイナミクスだけでインフレーションを誘起させることが出来ることである。また、Friedmann 時空に転移する際に高階微分重力場作用に含まれる余分な共形因子の自由度が物質に転化することでビックバンを説明することができる。さらに、構造形成のために必要な原始ゆらぎの起源は共形場理論から予言されるスケール不変なスペクトルとして与えられる。このように既知の場である重力場のみを用いて、最小限の自由度でもって観測と良く合う宇宙の発展モデルを構築することができる。

第2章　Minkowski共形場理論

共形場理論 (conformal field theory, CFT) が現れる場所として、ベータ関数が消える場の量子論の固定点、本書の主目的である量子重力理論の紫外極限、そして統計モデルの臨界点が挙げられる。

はじめに Minkowski 時空での共形場理論の基本的な事柄についてまとめる。Minkowski 時空では量子化の処方箋、Hamilton 演算子、Hermite 性などの場の演算子の性質、公理などが Euclid 空間での場の量子論より明瞭だからである。Euclid 空間での共形場理論は Minkowski 時空から解析接続して得られるものと考える。

一方で、作用関数や (非摂動的) 量子化が明確でないような場合、Euclid 空間での議論の方が Minkowski 時空固有の発散等を回避できて扱いやすい。また、相関関数の性質や状態の定義等が明確になり、統計力学との対応が分かりやすくなるなどの利点がある。Euclid 空間での共形場理論ついては次の章で議論する。

以下、共形場理論の基本的な性質を述べる際は一般的に D 次元で記述し、具体例を示す際は簡単のため次元を 4 として計算する。

2.1　共形変換

共形変換とは角度を変えない座標変換で、座標を $x^\mu \to x'^\mu$ と変換したとき、線素が

$$\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \to \eta_{\mu\nu}dx'^\mu dx'^\nu = \Omega(x)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{2.1.1}$$

と変換するものである。ここで、Ω は任意の関数である。Minkowski 計量は $\eta_{\mu\nu} = (-1, 1, \cdots, 1)$ を採用する。右辺を書き換えると共形変換は関

係式

$$\eta_{\mu\nu}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} = \Omega(x)\eta_{\lambda\sigma}$$

で表される。$\Omega = 1$ は Poincaré 変換に相当する。

ここで、共形変換はあくまでも背景計量 $\eta_{\mu\nu}$ 上で定義されるもので、この変換の下でこの計量自体は変化しない。一方、一般座標変換は、計量テンソル場を導入して線素を定義し、スカラー量である線素が不変に保たれるように計量も場として変換する座標変換で、共形変換とは区別しなければならない。以下、テンソル場の足の上げ下げはすべて背景計量 $\eta_{\mu\nu}$ で行う。

無限小の共形変換 $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \zeta^\mu$ を考えると、上の条件式から ζ^μ は方程式

$$\partial_\mu \zeta_\nu + \partial_\nu \zeta_\mu - \frac{2}{D}\eta_{\mu\nu}\partial_\lambda \zeta^\lambda = 0$$

を満たさなければならないことが分かる。この式のことを共形 Killing 方程式と呼び、ζ^λ を共形 Killing ベクトルと呼ぶ。このとき、任意関数は

$$\Omega = 1 + \frac{2}{D}\partial_\lambda \zeta^\lambda \tag{2.1.2}$$

と決まる。

共形 Killing 方程式を変形すると $(\eta_{\mu\nu}\partial^2 + (D-2)\partial_\mu\partial_\nu)\partial_\lambda\zeta^\lambda = 0$ を得る。この式と元の式から ζ^μ を三回微分したものはゼロになることが分かる。そのことに注意して方程式を解くと $(D+1)(D+2)/2$ 個の解が求まる。それらは自由度が D 個の並進 (translation)、$D(D-1)/2$ 個の Lorentz 変換、1 個の dilatation、D 個の特殊共形変換 (special conformal transformation) に対応して、それぞれ $\zeta^\lambda_{T,L,D,S}$ と表すと、

$$\begin{aligned} (\zeta^\lambda_T)_\mu = \delta^\lambda{}_\mu, \qquad (\zeta^\lambda_L)_{\mu\nu} = x_\mu \delta^\lambda{}_\nu - x_\nu \delta^\lambda{}_\mu, \\ \zeta^\lambda_D = x^\lambda, \qquad (\zeta^\lambda_S)_\mu = x^2 \delta^\lambda{}_\mu - 2x_\mu x^\lambda \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

で与えられる。最初の二つが Killing 方程式 $\partial_\mu\zeta_\nu + \partial_\nu\zeta_\mu = 0$ を満たす等長変換、すなわち Poincaré 変換に対応する。

有限の共形変換は、dilatation と特殊共形変換の場合、それぞれ

$$x^\mu \to x'^\mu = \lambda x^\mu, \qquad x^\mu \to x'^\mu = \frac{x^\mu + a^\mu x^2}{1 + 2a_\mu x^\mu + a^2 x^2}$$

で与えられる。これらに加えて、特殊共形変換の代わりとなる重要な変換として、共形反転 (conformal inversion)

$$x^\mu \to x'^\mu = \frac{x^\mu}{x^2}$$

を導入する。この変換と並進を組み合わせると、

$$x^\mu \to \frac{x^\mu}{x^2} \to \frac{x^\mu}{x^2} + a^\mu \to \frac{\frac{x^\mu}{x^2} + a^\mu}{\left(\frac{x^\mu}{x^2} + a^\mu\right)^2} = \frac{x^\mu + a^\mu x^2}{1 + 2a_\mu x^\mu + a^2 x^2}$$

のように特殊共形変換が導ける。

2.2　共形代数と場の変換性

並進、Lorentz 変換、dilatation、特殊共形変換の生成子をそれぞれ P_μ、$M_{\mu\nu}$、D、K_μ と書くことにする。[1] これら $(D+1)(D+2)/2$ 個の共形変換の生成子は $SO(D,2)$ 代数

$$\begin{aligned}
&[P_\mu, P_\nu] = 0, \qquad [M_{\mu\nu}, P_\lambda] = -i\left(\eta_{\mu\lambda} P_\nu - \eta_{\nu\lambda} P_\mu\right), \\
&[M_{\mu\nu}, M_{\lambda\sigma}] = -i\left(\eta_{\mu\lambda} M_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma} M_{\mu\lambda} - \eta_{\mu\sigma} M_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda} M_{\mu\sigma}\right), \\
&[D, P_\mu] = -iP_\mu, \quad [D, M_{\mu\nu}] = 0, \quad [D, K_\mu] = iK_\mu, \\
&[M_{\mu\nu}, K_\lambda] = -i\left(\eta_{\mu\lambda} K_\nu - \eta_{\nu\lambda} K_\mu\right), \quad [K_\mu, K_\nu] = 0, \\
&[K_\mu, P_\nu] = 2i\left(\eta_{\mu\nu} D + M_{\mu\nu}\right)
\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

を成す。並進と Lorentz 変換の生成子から構成される $SO(D-1,1)$ の代数は特に Poincaré 代数と呼ばれる。生成子の Hermite 性は

$$P_\mu^\dagger = P_\mu, \quad M_{\mu\nu}^\dagger = M_{\mu\nu}, \quad D^\dagger = D, \quad K_\mu^\dagger = K_\mu$$

[1] 本書では時空の次元と dilatation 生成子に同じ記号 D を使う。それらは文脈から用意に区別できる。

で与えられる。

この共形代数は一つにまとめて書くことが出来る。$SO(D,2)$ 変換の生成子を J_{ab} として、その代数

$$[J_{ab},J_{cd}]=-i\left(\eta_{ac}J_{bd}+\eta_{bd}J_{ac}-\eta_{bc}J_{ad}-\eta_{ad}J_{bc}\right)$$

を考える。ここで、生成子は Hermite 性 $J_{ab}^{\dagger}=J_{ab}$ 及び反対称性 $J_{ab}=-J_{ba}$ を満たす。計量は $\eta_{ab}=(-1,1,\cdots,1,-1)$ で与えられ、$a,b=0,1,2,\cdots,D,D+1$ と番号付けする。時空の足を $\mu,\nu=0,1,\cdots,D-1$ と選んで、

$$M_{\mu\nu}=J_{\mu\nu},\quad D=J_{D+1D},\quad P_{\mu}=J_{\mu D+1}-J_{\mu D},\quad K_{\mu}=J_{\mu D+1}+J_{\mu D}$$

と書くと、それぞれ Lorentz 変換、dilatation、並進、特殊共形変換の生成子となり、共形代数 (2.2.1) が得られる。

共形変換の下で性質の良い変換をする場を特にプライマリー場と呼ぶ。ここでは整数スピン l の場を表す対称トレースレステンソル場 $O_{\mu_1\cdots\mu_l}$ を考える。[2] 場の演算子は Hermite 性

$$O_{\mu_1\cdots\mu_l}^{\dagger}(x)=O_{\mu_1\cdots\mu_l}(x)$$

を満すものとし、その共形次元を Δ とする。このとき、プライマリー場は

$$O'_{\mu_1\cdots\mu_l}(x')=\Omega(x)^{-\frac{\Delta-l}{2}}\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x'^{\mu_l}}O_{\nu_1\cdots\nu_l}(x) \tag{2.2.2}$$

と変換する。

ここで、直交群 $SO(D-1,1)$ のベクトル表現を $D_{\mu\nu}$ と書くと、座標変換の Jacobian は $\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}=\Omega(x)^{-1/2}D_{\mu}{}^{\nu}(x)$ と分解できる。このことから、任意のスピンのプライマリー場を $O_j(x)$ と簡略し、それに作用する表現行列を $R[D]_{jk}$ と書くと、共形変換は局所的に回転とスケール変換の組み合

[2] $D=4$ の場合、これは Lorentz 群 $SO(3,1)$ の $(j,\tilde{j})$ 表現の $j=\tilde{j}=l/2$ に属するテンソル場で、$O^{\mu_1\cdots\mu_l}=\sigma^{\mu_1}_{\alpha_1\dot{\alpha}_1}\cdots\sigma^{\mu_l}_{\alpha_l\dot{\alpha}_l}O^{\alpha_1\cdots\alpha_l\dot{\alpha}_1\cdots\dot{\alpha}_l}$ と表示することが出来る。トレースレスの条件は $\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\sigma_{\mu\beta dotb}\propto\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ を用いて示すことが出来る。また、$j\neq\tilde{j}$ の場として、$(1/2,0)$ と $(1/2,0)$ のスピノル場、$(1,1/2)$ と $(1/2,1)$ の Rarita-Schwinger 場、$(1,0)$ と $(0,1)$ の二階反対称テンソル場、などがよく知られている。

わせで書くことができて、$O'_j(x') = \Omega(x)^{-\Delta/2} R[D(x)]_j{}^k O_k(x)$ と表すことができる。それらの相関関数は

$$\langle 0|O_1(x_1)\cdots O_n(x_n)|0\rangle = \langle 0|O'_1(x_1)\cdots O'_n(x_n)|0\rangle \tag{2.2.3}$$

を満たす。ここで、$|0\rangle$ は共形不変な真空である。右辺の場の引数が左辺と同じ x_j であることに注意する。

無限小変換 $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \zeta^\mu$ の下での共形変換則は、同じ引数 x をもつ O_j と O'_j の差 $\delta_\zeta O_j(x) = O_j(x) - O'_j(x)$ を ζ^μ で展開してその二次の項を無視すると得られる。プライマリーテンソル場の無限小共形変換は、$O'_j(x') = O'_j(x) + \zeta^\mu \partial_\mu O_j(x)$、$D_\nu{}^\mu = \delta_\nu{}^\mu - (\partial_\nu \zeta^\mu - \partial^\mu \zeta_\nu)/2$、$\Omega$ の式 (2.1.2) に注意すると、変換則 (2.2.2) より、

$$\begin{aligned}
\delta_\zeta O_{\mu_1\cdots\mu_l}(x) &= \left(\zeta^\nu \partial_\nu + \frac{\Delta}{D}\partial_\nu \zeta^\nu\right) O_{\mu_1\cdots\mu_l}(x) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l}\left(\partial_{\mu_j}\zeta^\nu - \partial^\nu \zeta_{\mu_j}\right) O_{\mu_1\cdots\mu_{j-1}\nu\mu_{j+1}\cdots\mu_l}(x)
\end{aligned}$$

で与えられる。

無限小変換は共形変換の生成子と場の演算子との交換子として

$$\delta_\zeta O_{\mu_1\cdots\mu_l}(x) = i\,[Q_\zeta, O_{\mu_1\cdots\mu_l}(x)]$$

と表される。ここで、Q_ζ は共形 Killing ベクトル ζ^μ に対する $(D+1)(D+2)/2$ 個の生成子の総称である。共形 Killing ベクトルの具体形 $\zeta^\lambda_{T,L,D,S}$(2.1.3) を代入すると、変換則はそれぞれ

$$\begin{aligned}
i\,[P_\mu, O_{\lambda_1\cdots\lambda_l}(x)] &= \partial_\mu O_{\lambda_1\cdots\lambda_l}(x), \\
i\,[M_{\mu\nu}, O_{\lambda_1\cdots\lambda_l}(x)] &= (x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu - i\Sigma_{\mu\nu})\, O_{\lambda_1\cdots\lambda_l}(x), \\
i\,[D, O_{\lambda_1\cdots\lambda_l}(x)] &= (x^\mu\partial_\mu + \Delta)\, O_{\lambda_1\cdots\lambda_l}(x), \\
i\,[K_\mu, O_{\lambda_1\cdots\lambda_l}(x)] &= \left(x^2\partial_\mu - 2x_\mu x^\nu \partial_\nu - 2\Delta x_\mu + 2ix^\nu \Sigma_{\mu\nu}\right) O_{\lambda_1\cdots\lambda_l}(x)
\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

となる。このときスピン項は

$$\Sigma_{\mu\nu} O_{\lambda_1\cdots\lambda_l} = i\sum_{j=1}^{l}\left(\eta_{\mu\lambda_j}\delta^\sigma{}_\nu - \eta_{\nu\lambda_j}\delta^\sigma{}_\mu\right) O_{\lambda_1\cdots\lambda_{i-1}\sigma\lambda_{i+1}\cdots\lambda_l}$$

と定義される。

スピン行列を $\Sigma_{\mu\nu}O_{\lambda_1\cdots\lambda_l} = (\Sigma_{\mu\nu})_{\lambda_1\cdots\lambda_l}{}^{\sigma_1\cdots\sigma_l}O_{\sigma_1\cdots\sigma_l}$ と表すと、それは Lorentz 生成子 $M_{\mu\nu}$ と同じ代数を満たす行列である。ベクトル場の場合は $(\Sigma_{\mu\nu})_\lambda{}^\sigma = i(\eta_{\mu\lambda}\delta_\nu{}^\sigma - \eta_{\nu\lambda}\delta_\mu{}^\sigma)$ で与えられ、一般の l の式はこれを用いて

$$(\Sigma_{\mu\nu})_{\lambda_1\cdots\lambda_l}{}^{\sigma_1\cdots\sigma_l} = \sum_{j=1}^{l}\delta_{\lambda_1}^{\sigma_1}\cdots\delta_{\lambda_{j-1}}^{\sigma_{j-1}}(\Sigma_{\mu\nu})_{\lambda_j}{}^{\sigma_j}\delta_{\lambda_{j+1}}^{\sigma_{j+1}}\cdots\delta_{\lambda_l}^{\sigma_l}$$

と表される。

プライマリー場 O が半整数のスピン 1/2 をもつフェルミオン場なら

$$\Sigma_{\mu\nu}\psi = i\frac{1}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\psi$$

で与えられる。ここで、ガンマ行列は $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -2\eta_{\mu\nu}$ で定義する。

トレースレスの条件を満たすストレステンソルが存在するとき、共形変換の生成子は共形 Killing ベクトルを用いて

$$Q_\zeta = \int d^{D-1}\mathbf{x}\zeta^\lambda T_{\lambda 0}$$

と表される。共形 Killing 方程式とトレースレス及び保存則の条件 $T^\mu{}_\mu = \partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$ を使うと $\partial_\eta Q_\zeta = 0$ が示せて、生成子が保存すること分かる。ζ^λ に $\zeta^\lambda_{T,L,D,S}$(2.1.3) を代入すると具体的な式

$$P_\mu = \int d^{D-1}\mathbf{x}T_{\mu 0}, \quad M_{\mu\nu} = \int d^{D-1}\mathbf{x}\left(x_\mu T_{\nu 0} - x_\nu T_{\mu 0}\right),$$
$$D = \int d^{D-1}\mathbf{x}x^\lambda T_{\lambda 0}, \quad K_\mu = \int d^{D-1}\mathbf{x}\left(x^2 T_{\mu 0} - 2x_\mu x^\lambda T_{\lambda 0}\right) \tag{2.2.5}$$

を得る。簡単な例として付録 D.1 に自由スカラー場の場合の共形代数と場の変換則を導出した。

最後に相関関数が満たす微分方程式を与える。共形場理論は真空 $|0\rangle$ が共形不変な理論である。すなわち、すべての生成子 Q_ζ $(= Q_\zeta^\dagger)$ に対して

$$Q_\zeta|0\rangle = \langle 0|Q_\zeta = 0$$

が成り立つ。したがって、任意の n 個の共形場を簡略して O_j $(j = 1, \cdots, n)$ と表すと、それらの相関関数は $\langle 0|\left[Q_\zeta, O_1(x_1)\cdots O_n(x_n)\right]|0\rangle = 0$ を満た

す。これより、

$$\delta_\zeta\langle 0|O_1(x_1)\cdots O_n(x_n)|0\rangle = i\sum_{j=1}^{n}\langle 0|O_1(x_1)\cdots[Q_\zeta, O_j(x_j)]\cdots O_n(x_n)|0\rangle = 0$$

が成り立つ。これは関係式 (2.2.3) の無限小版である。例えば、O_j を共形次元 Δ_j のプライマリースカラー場とし、Q_ζ として D と K_μ の場合を考えると、それぞれ変換則 (2.2.4) より

$$\sum_{j=1}^{n}\left(x_j^\mu\frac{\partial}{\partial x_j^\mu}+\Delta_j\right)\langle 0|O_1(x_1)\cdots O_n(x_n)|0\rangle = 0,$$
$$\sum_{j=1}^{n}\left(x_j^2\frac{\partial}{\partial x_j^\mu}-2x_{j\mu}x_j^\nu\frac{\partial}{\partial x_j^\nu}-2\Delta_j x_{j\mu}\right)\langle 0|O_1(x_1)\cdots O_n(x_n)|0\rangle = 0$$

を得る。

2.3 Wightman 関数と正定値性

整数スピン l のトレースレス対称プライマリーテンソル場の二点 Wightman 関数

$$W_{\mu_1\cdots\mu_l,\nu_1\cdots\nu_l}(x-y) = \langle 0|O_{\mu_1\cdots\mu_l}(x)O_{\nu_1\cdots\nu_l}(y)|0\rangle \tag{2.3.1}$$

を考える。場の共形次元を Δ とすると、それは一般的に

$$W_{\mu_1\cdots\mu_l,\nu_1\cdots\nu_l}(x) = cP_{\mu_1\cdots\mu_l,\nu_1\cdots\nu_l}(x)\frac{1}{(x^2)^\Delta}\bigg|_{x^0\to x^0-i\epsilon}$$

と表される。ここで、ϵ は無限小の UV カットオフである。関数 $P_{\mu_1\cdots\mu_l,\nu_1\cdots\nu_l}$ はプライマリーの条件から決まる [付録 B を参照]。

例えばプライマリースカラー場の 2 点 Wightman 関数は、

$$\langle 0|O(x)O(0)|0\rangle = c\frac{1}{(x^2)^\Delta}\bigg|_{x^0\to x^0-i\epsilon} = c\frac{1}{(x^2+2i\epsilon x^0)^\Delta}$$

で与えられる。ここでは $x^0\neq 0$ として、ϵ^2 は無視している。スピン 1 のプライマリーベクトル場、スピン 2 のトレースレス対称プライマリーテ

ンソル場の Wightman 関数は

$$
\begin{aligned}
\langle 0|O_\mu(x)O_\nu(0)|0\rangle &= cI_{\mu\nu}\frac{1}{(x^2)^\Delta}\bigg|_{x^0\to x^0-i\epsilon} \\
\langle 0|O_{\mu\nu}(x)O_{\lambda\sigma}(0)|0\rangle &= c\frac{1}{2}\left(I_{\mu\lambda}I_{\nu\sigma}+I_{\mu\sigma}I_{\nu\lambda}-\frac{2}{D}\eta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\sigma}\right)\frac{1}{(x^2)^\Delta}\bigg|_{x^0\to x^0-i\epsilon}
\end{aligned}
$$

と表される。ここで、座標 x^μ の関数 $I_{\mu\nu}$ は

$$
I_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}-2\frac{x^\mu x^\nu}{x^2}
$$

と定義され、関係式 $I_\mu{}^\lambda I_{\lambda\nu}=\eta_{\mu\nu}$ と $I^\mu_{\ \mu}=D-2$ を満たす。一般の整数スピン l の場合は

$$
P_{\mu_1\cdots\mu_l,\nu_1\cdots\nu_l}=\frac{1}{l!}\left(I_{\mu_1\nu_1}\cdots I_{\mu_l\nu_l}+\text{perms}\right)-\text{traces}
$$

で与えられる。ここで、perms 及び traces はテンソル場が持つ対称トレースレスの性質を反映している。

全体にかかる定数 c は物理的 (ユニタリ性) 条件から $c>0$ となる。以下では $c=1$ とする。

Wightman 関数 (2.3.1) を使って内積を定義する。任意の関数 $f_{1,2}(x)$ を導入して次の量を定義する:

$$
(f_1,f_2)=\int d^Dxd^Dy f_1^{\mu_1\cdots\mu_l *}(x)W_{\mu_1\cdots\mu_l,\nu_1\cdots\nu_l}(x-y)f_2^{\nu_1\cdots\nu_l}(y).
$$

さらに、Wightman 関数の Fourier 変換

$$
W_{\mu_1\cdots\mu_l,\nu_1\cdots\nu_l}(k)=\int d^DxW_{\mu_1\cdots\mu_l,\nu_1\cdots\nu_l}(x)e^{-ik_\mu x^\mu}
$$

を導入して、内積を運動量空間で表すと

$$
(f_1,f_2)=\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}f_1^{\mu_1\cdots\mu_l *}(k)f_2^{\nu_1\cdots\nu_l}(k)W_{\mu_1\cdots\mu_l,\nu_1\cdots\nu_l}(k)
$$

となる。ここで、$f_{1,2}(k)$ は対応する関数の Fourier 変換で、$-k^2\to\infty$ ですばやく減少するものとする。ユニタリ性を満たす物理的な理論では内積が

$$
(f,f)>0
$$

のように正になる。これを Wightman 正定値性と呼ぶ。

正定値性からスピン s のプライマリー場の共形次元 Δ に制限がついて、

$$\begin{aligned}\Delta &\geq \frac{D}{2}-1 \quad \text{for } s=0,\\ \Delta &\geq D-2+s \quad \text{for } s\neq 0\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

となる。この条件をユニタリ性バウンド (unitarity bound) と呼ぶ。以下、具体例を挙げてこの条件を考察する。

2.4　Fourier 表示と正定値条件の具体例

これ以後の三節では簡単のため $D=4$ と置いてユニタリ性の条件を考察する。

はじめに任意の共形次元 Δ を持つプライマリースカラー場を考える。その Wightman 関数 $W(x)$ の Fourier 変換 [付録 C 参照] は

$$W(k)=(2\pi)^2\frac{2\pi(\Delta-1)}{4^{\Delta-1}\Gamma(\Delta)^2}\theta(k^0)\theta(-k^2)(-k^2)^{\Delta-2}$$

で与えられる。これより内積 $(f,f)=\int d^4k|f(k)|^2W(k)/(2\pi)^4$ が正になる条件は

$$\Delta\geq 1$$

となる。下限の $\Delta=1$ は自由場の場合で、$\lim_{\Delta\to 1}(\Delta-1)\theta(-k^2)^{\Delta-2}=\delta(-k^2)$ より、

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\lim_{\Delta\to 1}(f,f)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}|f(k)|^2 2\pi\theta(-k^0)\delta(-k^2)=\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2|\mathbf{k}|}|f(\mathbf{k})|^2$$

と表され、正準量子化された自由場から直接計算したものと一致する。

次にベクトル場の場合の正定値条件を考える。ここでは、より一般的な実ベクトル場 A_μ の 2 点関数

$$\begin{aligned}&\langle 0|A_\mu(x)A_\nu(0)|0\rangle\\ &=\left(\eta_{\mu\nu}-2\alpha\frac{x_\mu x_\nu}{x^2}\right)\frac{1}{(x^2)^\Delta}\bigg|_{x^0\to x^0-i\epsilon}\\ &=\frac{1}{2\Delta}\left\{\frac{\Delta-\alpha}{2(\Delta-1)(\Delta-2)}\eta_{\mu\nu}\partial^2-\frac{\alpha}{\Delta-1}\partial_\mu\partial_\nu\right\}\frac{1}{(x^2)^{\Delta-1}}\bigg|_{x^0\to x^0-i\epsilon}\end{aligned}$$

を考える。スカラー場の Fourier 変換の式を最後の項に代入するとベクトル場の Fourier 変換が得られ、それを $W^{(\alpha)}_{\mu\nu}$ と書くと、

$$\begin{aligned} W^{(\alpha)}_{\mu\nu}(k) &= (2\pi)^2 \frac{2\pi(\Delta-1)}{4^{\Delta-1}\Gamma(\Delta)\Gamma(\Delta+1)} \theta(k^0)\theta(-k^2)(-k^2)^{\Delta-2} \\ &\quad \times \left\{ (\Delta-\alpha)\eta_{\mu\nu} - 2\alpha(\Delta-2)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right\} \end{aligned}$$

となる。

プライマリー場 O_μ は $\alpha = 1$ の場合に相当して、$W^{(1)}_{\mu\nu} = W_{\mu\nu}$ である。一方、$\alpha = \Delta$ と選ぶと A_μ は次節で導入するプライマリースカラー場 O' のデッセンダント場 $\partial_\mu O'$ とみなすことが出来る。このとき O' の共形次元は $\Delta' = \Delta - 1$ である。

Wightman 正定値条件は任意の関数 f_μ に対して $f^{\mu *}(k) f^\nu(k) W^{(\alpha)}_{\mu\nu}(k)$ が正であることを要求する。重心系 $k^\mu = (K, 0, 0, 0)$ を選んでも任意性は失われないので、この場合について評価すると

$$f^{\mu *} f^\nu W^{(\alpha)}_{\mu\nu} = C\theta(K)\theta(K^2) \left\{ [(2\Delta-3)\alpha - \Delta]|f_0|^2 + (\Delta-\alpha)|f_j|^2 \right\} K^{2(\Delta-2)}$$

ここで、係数 $C = 4(2\pi)^3(\Delta-1)/4^\Delta\Gamma(\Delta)\Gamma(\Delta+1)$ は正の数とする。したがって、正定値条件は $(2\Delta-3)\alpha - \Delta \geq 0$ かつ $\Delta - \alpha \geq 0$ で与えられる。α について解くと

$$\frac{\Delta}{2\Delta-3} \geq \alpha \geq 1$$

を得る。プライマリーベクトル場の場合、$\alpha = 1$ を代入するとよく知られたユニタリ性の条件

$$\Delta \geq 3$$

を得る。[3] 下限の $\Delta = 3$ をもつプライマリーベクトル場は $\partial^\mu O_\mu = 0$ の条件を満たす保存カレントに相当する。実際、上の式に微分を作用させると $\partial^\mu W_{\mu\nu}(x) = 0$ $(x \neq 0)$ を得る。

[3]通常のゲージ場は次元 1 なので、ユニタリ性の条件を満たさないが、ゲージ場自身はゲージ不変な物理量ではないので問題ない。一方、ゲージ不変な光子の場 $F_{\mu\nu}$ は反対称場に対するユニタリ性条件 $\Delta \geq 2$(ここでは議論しない) を満たす。

2.5 デッセンダント場と正定値性

プライマリー場 O に並進の生成子 P_μ を作用させて生成される場

$$\partial_\mu \cdots \partial_\nu O$$

をプライマリー場 O のデッセンダント (descendant) と呼ぶ。共形場理論では、通常、プライマリー場 O が物理的場であるならばそのデッセンダントもまた物理的でなければならない。すなわち、デッセンダントの 2 点関数もまた正でなければならない。ここではその条件が前節で示した条件と一致することを具体例を挙げて示す。

はじめに、$D=4$ でのプライマリースカラー場 O の第一デッセンダント $\partial_\mu O$ 及び第二デッセンダント $\partial^2 O$ の 2 点相関について議論する。先ず後者の例では

$$\langle 0|\partial^2 O(x)\partial^2 O(0)|0\rangle = 16\Delta^2(\Delta+1)(\Delta-1)\frac{1}{(x^2)^{\Delta+2}}\bigg|_{x^0\to x^0-i\epsilon}$$

を得る。$\partial^2 O$ はスカラー量なのでユニタリ性の条件は簡単に 2 点相関関数の係数の符号が正であれば良く、$\Delta > 1$ が出てくる。$\Delta = 1$ は自由スカラー場の場合で、右辺が消えるのは運動方程式 $\partial^2 O = 0$ が成り立つことを表している。

第一デッセンダントの場合は

$$\langle 0|\partial_\mu O(x)\partial_\nu O(0)|0\rangle = 2\Delta\left\{\eta_{\mu\nu} - 2(\Delta+1)\frac{x_\mu x_\nu}{x^2}\right\}\frac{1}{(x^2)^{\Delta+1}}\bigg|_{x^0\to x^0-i\epsilon}$$

を得る。この式に対して前節で議論した Wightman 正定値の条件を課すと、やはり $\Delta \geq 1$ の条件が出てくる。

次にプライマリーベクトル場 O_μ の場合を考えると、その第一デッセンダントの中でスカラー量 $\partial^\mu O_\mu$ を考えると

$$\langle 0|\partial^\mu O_\mu(x)\partial^\nu O_\nu(0)|0\rangle = 4(\Delta-1)(\Delta-3)\frac{1}{(x^2)^{\Delta+1}}\bigg|_{x^0\to x^0-i\epsilon}$$

を得る。$\Delta > 3$ のとき係数が正になることが分かる。$\Delta = 3$ は O_μ が保存するカレントの場合で、右辺が消えて $\partial^\mu O_\mu = 0$ が成り立っていることが分かる。

プライマリーテンソル場の場合も同様に、第一デッセンダント $\partial^\mu O_{\mu\nu}$ の 2 点相関は

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|\partial^\mu O_{\mu\nu}(x)\partial^\lambda O_{\lambda\sigma}(0)|0\rangle \\
&= (\Delta-4)(4\Delta-7)\left\{\eta_{\nu\sigma} - 2\frac{5\Delta-11}{4\Delta-7}\frac{x_\nu x_\sigma}{x^2}\right\}\frac{1}{(x^2)^{\Delta+1}}\bigg|_{x^0\to x^0-i\epsilon}
\end{aligned}
$$

で与えられ、スカラー量になる第二デッセンダント $\partial^\mu\partial^\nu O_{\mu\nu}$ の場合は

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|\partial^\mu\partial^\nu O_{\mu\nu}(x)\partial^\lambda\partial^\sigma O_{\lambda\sigma}(0)|0\rangle \\
&= 24\Delta(\Delta-1)(\Delta-3)(\Delta-4)\frac{1}{(x^2)^{\Delta+2}}\bigg|_{x^0\to x^0-i\epsilon}
\end{aligned}
$$

となる。後者の式からすぐに $\Delta \geq 4$ の条件が見て取れる。また、前者の式に前節で求めた Wightman 正定値条件を課すとやはりこの条件が出てくる。$\Delta = 4$ は $O_{\mu\nu}$ が保存するトレースレステンソルの場合で、右辺が消えて保存の式 $\partial^\mu O_{\mu\nu} = 0$ が成り立っているが分かる。

2.6　Feynman 伝播関数とユニタリ性

ここでは、前節で考察してきた共形次元 Δ に対するユニタリ性バウンドを少し異なる見方で説明する。

Feynman 伝播関数は Wightman 関数を用いて

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|T[O_{\mu_1\cdots\mu_l}(x)O_{\nu_1\cdots\nu_l}(0)]|0\rangle \\
&= \theta(x^0)\langle 0|O_{\mu_1\cdots\mu_l}(x)O_{\nu_1\cdots\nu_l}(0)|0\rangle + \theta(-x^0)\langle 0|O_{\nu_1\cdots\nu_l}(0)O_{\mu_1\cdots\mu_l}(x)|0\rangle
\end{aligned}
$$

と定義される。その Fourier 変換を

$$
\langle 0|T[O_{\mu_1\cdots\mu_l}(x)O_{\nu_1\cdots\nu_l}(0)]|0\rangle = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{ik_\mu x^\mu}D_{\mu_1\cdots\mu_l,\nu_1\cdots\nu_l}(k)
$$

で定義する。

スカラー場の場合

$$
\begin{aligned}
\langle 0|T[O(x)O(0)]|0\rangle &= \theta(x^0)\frac{1}{(x^2+2i\epsilon x^0)^\Delta} + \theta(-x^0)\frac{1}{(x^2-2i\epsilon x^0)^\Delta} \\
&= \frac{1}{(x^2+i\epsilon)^\Delta}
\end{aligned}
$$

となる。このとき、最後の式で $2\epsilon|x^0|$ を単に ϵ と書き換えている。この式の Fourier 変換は

$$D(k) = -i(2\pi)^2 \frac{\Gamma(2-\Delta)}{4^{\Delta-1}\Gamma(\Delta)}(k^2 - i\epsilon)^{\Delta-2}$$

で与えられる。

同様にプライマリーベクトル場の場合は

$$\langle 0|T[O_\mu(x)O_\nu(0)]|0\rangle = \frac{1}{2\Delta}\left\{\frac{1}{2(\Delta-2)}\eta_{\mu\nu}\partial^2 - \frac{1}{\Delta-1}\partial_\mu\partial_\nu\right\}\frac{1}{(x^2+i\epsilon)^{\Delta-1}}$$

で与えられ、その Fourier 変換はスカラー場の結果を代入するとすぐに求まって

$$D_{\mu,\nu}(k) = -i\frac{(2\pi)^2\Gamma(2-\Delta)}{4^{\Delta-1}\Gamma(\Delta+1)}\left\{(\Delta-1)\eta_{\mu\nu}k^2 - 2(\Delta-2)k_\mu k_\nu\right\}(k^2 - i\epsilon)^{\Delta-3}$$

となる。

プライマリースカラー場 O と外場 f との相互作用

$$I_{\rm int} = g\int d^4x\,(fO + \mathrm{H.c.})$$

を考えてみる。この相互作用による S 行列を考え、$S = 1 + iT$ とすると、$f^\dagger$ から f への遷移振幅は

$$\begin{aligned} i\langle f|T|f\rangle &= -g^2\int d^4x f^\dagger(x)\int d^4y f(y)\langle 0|T[O(x)O(y)]|0\rangle \\ &= -g^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}f^\dagger(k)f(k)D(k) \end{aligned}$$

で与えられる。

ユニタリ性は $S^\dagger S = 1$ より $2\mathrm{Im}(T) = |T|^2 \geq 0$ を要求するので、

$$\mathrm{Im}\langle f|T|f\rangle = g^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}|f(k)|^2\mathrm{Im}\left\{iD(k)\right\} \geq 0$$

の条件が出てくる。ここで、公式 $(x+i\epsilon)^\lambda - (x-i\epsilon)^\lambda = 2i\sin(\pi\lambda)\theta(-x)(-x)^\lambda$ 及び $\sin(\pi\lambda) = \pi/\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\lambda)$ を使うと、

$$\mathrm{Im}\left\{iD(k)\right\} = (2\pi)^2\frac{\pi(\Delta-1)}{4^{\Delta-1}\Gamma(\Delta)^2}\theta(-k^2)(-k^2)^{\Delta-2}$$

が出てくる。右辺は Wightman 関数の Fourier 変換と同じ形をしている [$\theta(k^0)$ が無いが、全体は 1/2 になっている]。これが正であることからユニタリ性の条件 $\Delta \geq 1$ が得られる。

第3章　Euclid 共形場理論

この章では Euclid 空間上での共形場理論を考える。Minkowski 時空と違って相関関数が扱いやすく、状態やその内積を場の演算子を用いて定義することが出来る。以下、Euclid 空間では時空の足はすべて下付きで書き、同一の足はデルタ関数で縮約するものとする。

3.1　臨界現象と共形場理論

Ising モデルのような D 次元の古典統計系を臨界点直上で連続極限をとると D 次元 Euclid 空間上の共形場理論になる。[1] ここでは、Euclid 共形場理論の基本的な構造について解説する前に、臨界現象との関係について簡単に触れることにする。

温度などの統計系の臨界現象を決める変数を T として、その臨界点を T_c とする。一般に、物理的な相関関数は非臨界点 $T \neq T_c$ のとき

$$\langle O(x)O(0)\rangle \sim e^{-|x|/\xi}$$

のように指数関数的に減衰する。ここで、ξ は相関距離である。臨界点 $T = T_c$ では $\xi \to \infty$ となり、相関関数が

$$\langle O(x)O(0)\rangle = \frac{1}{|x|^{2\Delta}}$$

のように冪の振る舞いをするようになる。これは共形不変性が現れたことを示している。臨界点直上に現れた共形場理論を表す作用を S_{CFT} と書くことにする。通常、それは不明な場合がほとんどである。共形場理論

[1] D 次元 Minkowski 時空上の共形場理論は $D-1$ 次元の量子統計系が対応する。

は、作用に頼らず、共形不変性とユニタリ性の条件から臨界現象を理解する学問でもある。

臨界現象は、臨界点からの小さな摂動を考えたとき、臨界点への近づき方を表す指数によって分類される。例えば、共形次元が $\Delta < D$ の relevant な演算子 O による摂動を考えてみる。臨界点からのズレを $t = (T - T_c)/T_c$ ($\ll 1$) とすると、作用は

$$S_{\mathrm{CFT}} \to S_{\mathrm{CFT}} + ta^{\Delta - D} \int d^D x O(x)$$

と変形される。ここで、a は紫外カットオフ長さである。このとき、相関距離は $\xi^{\Delta-D} \sim ta^{\Delta-D}$、すなわち

$$\xi \sim at^{-1/(D-\Delta)}$$

で与えられる。例えば、エネルギー演算子 $O = \varepsilon$ は relevant なスカラー場で、その共形次元を Δ_ε とすると、対応する臨界指数 ν は $\xi \sim at^{-\nu}$ で定義されるここことから、$\nu = 1/(D - \Delta_\varepsilon)$ の関係式が得られる。このように、共形場理論の場の演算子の次元を分類すると臨界指数、すなわち臨界現象が分類できる。

3.2　Euclid 共形場理論の基本構造

Euclid 空間 R^D での共形代数は $SO(D+1,1)$ で与えられ、計量を $\eta_{\mu\nu}$ から $\delta_{\mu\nu}$ に置き換えれば M^D 上の場合の (2.2.1) と同じ形になる。共形変換則も同様に (2.2.4) と同じ形になる。異なる点は生成子 P_μ と D の Hermite 性が

$$P_\mu^\dagger = K_\mu, \qquad D^\dagger = -D$$

に変わることである。

このことは $SO(D,2)$ 代数の生成子 J_{ab} を用いて次のように共形代数を導出すると分かりやすい。計量 $\eta_{ab} = (-1, 1, \cdots, 1, -1)$ を持つ $D+2$ 次

元の足 $a,b=0,1,\cdots,D,D+1$ の内、ここでは D 次元 Euclid 空間部分を $\mu,\nu=1,\cdots,D$ と選ぶ。さらに、$SO(D+1,1)$ にするために 0 成分を含む生成子に虚数単位をつけて、

$$M_{\mu\nu}=J_{\mu\nu},\quad D=iJ_{D+10},\quad P_\mu=J_{\mu D+1}-iJ_{\mu 0},\quad K_\mu=J_{\mu D+1}+iJ_{\mu 0}$$

と同定すると、J_{ab} の代数 (2.2.2) 及びその Hermite 性から上述の Euclid 空間での共形代数及び Hermite 性が得られる。

整数スピン l の共形次元 Δ を持つ対称トレースレスプライマリーテンソル場の二点相関関数を

$$\langle O_{\mu_1\cdots\mu_l}(x)O_{\nu_1\cdots\nu_l}(y)\rangle=cP_{\mu_1\cdots\mu_l,\nu_1\cdots\nu_l}\frac{1}{(x^2)^\Delta}$$

と書く。$P_{\mu_1\cdots\mu_l,\nu_1\cdots\nu_l}$ はプライマリーの条件から決まる座標 x の関数で、M^D のときと同様に Euclid 空間での $I_{\mu\nu}$ 関数

$$I_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}-2\frac{x_\mu x_\nu}{x^2}$$

を用いると、

$$P_{\mu_1\cdots\mu_l,\nu_1\cdots\nu_l}=\frac{1}{l!}\left(I_{\mu_1\nu_1}\cdots I_{\mu_l\nu_l}+\text{perms}\right)-\text{traces}$$

のように決まる。物理的な相関関数では係数 c は正の数でなければならない。以下では $c=1$ と置く。

実プライマリーテンソル場の Hermite 性は共形反転

$$x_\mu\to Rx_\mu=\frac{x_\mu}{x^2}$$

を用いて

$$O^\dagger_{\mu_1\cdots\mu_l}(x)=\frac{1}{(x^2)^\Delta}I_{\mu_1\nu_1}(x)\cdots I_{\mu_l\nu_l}(x)O_{\nu_1\cdots\nu_l}(Rx) \tag{3.2.1}$$

と定義される。

ここで、実際に、この Hermite 性が生成子の Hermite 性と矛盾しないことを見る。例えばプライマリースカラー場の共形変換 $i[P_\mu,O(x)]=\partial_\mu O(x)$

を考えると、その Hermite 共役は $i[P_\mu^\dagger, O^\dagger(x)] = \partial_\mu O^\dagger(x)$ となる。Hermite 共役場は、新しい座標 $y_\mu = x_\mu/x^2$ を導入すると、$O^\dagger(x) = (y^2)^\Delta O(y)$ と書けるので、共形変換の Hermite 共役は $P_\mu^\dagger = K_\mu$ を代入すると

$$
\begin{aligned}
i(y^2)^\Delta[K_\mu, O(y)] &= \frac{\partial y_\nu}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial y_\nu}\left\{(y^2)^\Delta O(y)\right\} \\
&= (y^2)^\Delta\left(y^2\partial_\mu - 2y_\mu y_\nu\partial_\nu - 2\Delta y_\mu\right)O(y)
\end{aligned}
$$

となる。両辺の $(y^2)^\Delta$ を除くとこれはプライマリースカラー場 O の特殊共形変換である。同様に共形変換 $i[D, O(x)] = (x_\mu\partial_\mu + \Delta)O(x)$ の Hermite 共役を考えると、Hermite 性 $D^\dagger = -D$ と矛盾しないことが分かる。

プライマリーベクトル場の場合はもう少し複雑になるが同じである。$I_{\mu\nu}(x) = I_{\mu\nu}(y)$ に注意して、$i[P_\mu, O_\nu(x)] = \partial_\mu O_\nu(x)$ の Hermite 共役を考えると

$$
\begin{aligned}
i(y^2)^\Delta I_{\nu\lambda}[K_\mu, O_\lambda(y)] &= \frac{\partial y_\nu}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial y_\nu}\left\{(y^2)^\Delta I_{\nu\lambda}O_\lambda(y)\right\} \\
&= (y^2)^\Delta\Big\{I_{\nu\lambda}\left(y^2\partial_\mu - 2y_\mu y_\sigma\partial_\sigma - 2\Delta y_\mu\right)O_\lambda(y) \\
&\quad + \left(-2\delta_{\mu\nu}y_\lambda - 2\delta_{\mu\lambda}y_\nu + 4\frac{y_\mu y_\nu y_\lambda}{y^2}\right)O_\lambda(y)\Big\}
\end{aligned}
$$

を得る。$I_{\mu\lambda}I_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\nu}$ に注意して両辺の余分な関数を取り除くとプライマリーベクトル場に対する特殊共形変換 $i[K_\mu, O_\lambda(y)] = (y^2\partial_\mu - 2y_\mu y_\sigma\partial_\sigma - 2\Delta y_\mu + 2iy_\sigma\Sigma_{\mu\sigma})O_\lambda(y)$ が得られる。ここで、スピン項は $i\Sigma_{\mu\sigma}O_\lambda = -\delta_{\mu\lambda}O_\sigma + \delta_{\lambda\sigma}O_\mu$ で与えられる。

共形反転を使って $O_{\mu_1\cdots\mu_l}$ とその共役演算子 $O^\dagger_{\mu_1\cdots\mu_l}$ との相関関数を考える。例えばプライマリースカラー場の場合は $Rx^2 = 1/x^2$ から

$$
\langle O^\dagger(x)O(0)\rangle = \frac{1}{(x^2)^\Delta}\langle O(Rx)O(0)\rangle = 1
$$

となって、座標 x に依らず正定値となる ($c = 1$ としている)。プライマリーベクトル場、テンソル場のときも同様に $I_{\mu\lambda}I_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\nu}$ を用いると

$$
\begin{aligned}
\langle O_\mu^\dagger(x)O_\nu(0)\rangle &= \delta_{\mu\nu}, \\
\langle O_{\mu\nu}^\dagger(x)O_{\lambda\sigma}(0)\rangle &= \frac{1}{2}\left(\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda} - \frac{2}{D}\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

となる。これらの性質により Euclid 空間では場の演算子を用いて状態を定義することが出来る。

プライマリー状態は共形変換の生成子に対して条件式

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu}|\{\mu_1\cdots\mu_l\},\Delta\rangle &= (\Sigma_{\mu\nu})_{\nu_1\cdots\nu_l,\mu_1\cdots\mu_l}|\{\nu_1\cdots\nu_l\},\Delta\rangle, \\ iD|\{\mu_1\cdots\mu_l\},\Delta\rangle &= \Delta|\{\mu_1\cdots\mu_l\},\Delta\rangle, \\ K_\mu|\{\mu_1\cdots\mu_l\},\Delta\rangle &= 0 \end{aligned}$$

を満たすものである。この状態は場の演算子を用いて[2]

$$|\{\mu_1\cdots\mu_l\},\Delta\rangle = O_{\mu_1\cdots\mu_l}(0)|0\rangle \tag{3.2.2}$$

と定義することができる。この関係を状態演算子対応 (state-operator correspondence) と呼ぶ。ここで、真空 $|0\rangle$ は共形変換の生成子を作用させるとすべて消える状態として定義される。この状態に P_μ を作用させて得られる状態をそのデッセンダントと呼ぶ。

この状態の Hermite 共役は、$y_\mu = Rx_\mu$ として、$I_{\mu\nu}(x) = I_{\mu\nu}(y)$ に注意すると原点での演算子の Hermite 共役が

$$\begin{aligned} O^\dagger_{\mu_1\cdots\mu_l}(0) &= \lim_{x^2\to 0}(x^2)^{-\Delta} I_{\mu_1\nu_1}\cdots I_{\mu_l\nu_l} O_{\nu_1\cdots\nu_l}(Rx) \\ &= \lim_{y^2\to\infty}(y^2)^{\Delta} I_{\mu_1\nu_1}\cdots I_{\mu_l\nu_l} O_{\nu_1\cdots\nu_l}(y) \end{aligned}$$

と書けることから、プライマリー状態 (3.2.2) の共役状態は

$$\begin{aligned} \langle\{\mu_1\cdots\mu_l\},\Delta| &= \langle 0|O^\dagger_{\mu_1\cdots\mu_l}(0) \\ &= \lim_{x^2\to\infty}(x^2)^{\Delta} I_{\mu_1\nu_1}\cdots I_{\mu_l\nu_l}\langle 0|O_{\nu_1\cdots\nu_l}(x) \end{aligned}$$

と定義される。このときノルムの正定値性は任意の対称トレースレステンソル $f_{\mu_1\cdots\mu_l}$ を用いて

$$\begin{aligned} (f,f) &= f^\dagger_{\mu_1\cdots\mu_l} f_{\nu_1\cdots\nu_l}\langle\{\mu_1\cdots\mu_l\},\Delta|\{\nu_1\cdots\nu_l\},\Delta\rangle \\ &= |f_{\mu_1\cdots\mu_l}|^2 > 0 \end{aligned}$$

と表される。

---

[2]Minkowski 時空上ではこの対応は使えない。なぜならノルムが定義できないからである。実際、スカラー状態 $|\Delta\rangle = O(0)|0\rangle$ のノルムを考えると、M^D 上では $O^\dagger(x) = O(x)$ なので、$\langle\Delta|\Delta\rangle = \langle 0|O^\dagger(0)O(0)|0\rangle = \langle 0|O(0)O(0)|0\rangle$ となって、これは発散する。

3.3　二点相関関数の再導出

この節では共形代数と Hermite 性を用いてプライマリースカラー場の R^D 上での二点相関関数を再導出してみる。スカラー場の座標依存性は並進の生成子を用いて

$$O(x) = e^{iP_\mu x_\mu} O(0) e^{-iP_\mu x_\mu}$$

と表される。この Hermite 共役は $P_\mu^\dagger = K_\mu$ より、

$$O^\dagger(x) = e^{iK_\mu x_\mu} O(\infty) e^{-iK_\mu x_\mu}$$

で与えられる。ここで、$O(\infty) = O^\dagger(0) = \lim_{x^2\to\infty}(x^2)^\Delta O(x)$ である。

相関関数はこれらの式と場の Hermite 性 (3.2.1) を用いると

$$\langle O(x)O(x')\rangle = \frac{1}{(x^2)^\Delta}\langle O^\dagger(Rx)O(x')\rangle = \frac{1}{(x^2)^\Delta}\langle\Delta|e^{-iK_\mu(Rx)_\mu}e^{iP_\nu x'_\nu}|\Delta\rangle$$

と表すことができる。プライマリー状態はそれぞれ $|\Delta\rangle = O(0)|0\rangle$ と $\langle\Delta| = \langle 0|O(\infty)$ である。指数関数を展開して評価すると、K_μ と P_ν の数が等しいときにのみ値を持つことが分かるので、上の式は

$$\langle O(x)O(x')\rangle = \frac{1}{(x^2)^\Delta}\sum_{n=0}^{\infty} C_n^\Delta(x,x')\left(\frac{x'^2}{x^2}\right)^{n/2}$$

と表すことができる。展開の係数 C_n^Δ は

$$C_n^\Delta = \frac{1}{(n!)^2}\frac{x_{\mu_1}\cdots x_{\mu_n}x'_{\nu_1}\cdots x'_{\nu_n}}{(x^2x'^2)^{n/2}}\langle\Delta|K_{\mu_1}\cdots K_{\mu_n}P_{\nu_1}\cdots P_{\nu_n}|\Delta\rangle$$

で定義される。共形代数を用いて生成子の数を減らしていくと、Gegenbauer の多項式が満たす漸化式

$$nC_n^\Delta = 2(\Delta+n-1)zC_{n-1}^\Delta - (2\Delta+n-2)C_{n-2}^\Delta$$

が得られる。ここで、$z = x\cdot x'/\sqrt{x^2x'^2}$ である。これより C_n^Δ は変数 z を持つ Gegenbauer の多項式 ($\Delta = 1/2$ は Legendre の多項式) であることが分かる。母関数の公式

$$\frac{1}{(1-2zt+t^2)^\Delta} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\Delta(z)t^n$$

を使って、z と $t=\sqrt{x'^2/x^2}$ を代入すると、良く知られた相関関数の式 $\langle O(x)O(x')\rangle = 1/(x-x')^{2\Delta}$ が得られる。

3.4　演算子積 (OPE) と三点相関関数

この節ではプライマリースカラー場 ϕ の演算子積 (operator product expansion, OPE) について考える。積の右辺に現れる場は $\phi\times\phi\sim I+T_{\mu\nu}+\sum_{l=0,2,4,\cdots}O_{\mu_1\cdots\mu_l}$ と表すことができる。ここで、I は単位演算子、$T_{\mu\nu}$ はストレステンソル (スピン 2、共形次元 D のプライマリー場) である。$O_{\mu_1\cdots\mu_l}$ は整数スピン l を持ったプライマリー場で、スカラー場の OPE には偶数スピンの場しか現れない。これらプライマリー場のほかにそのデッセンダント (プライマリー場の微分) も現れる。

プライマリースカラー場 ϕ とスピン l のプライマリーテンソル場の共形次元をそれぞれ d と Δ とし、それらの 2 点相関関数を

$$\begin{aligned}\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle &= \frac{1}{|x_{12}|^{2d}},\\ \langle O_{\mu_1\cdots\mu_l}(x_1)O_{\nu_1\cdots\nu_l}(x_2)\rangle &= \frac{1}{|x_{12}|^{2\Delta}}\left[\frac{1}{l!}\left(I_{\mu_1\nu_1}\cdots I_{\mu_l\nu_l}+\text{perms}\right)-\text{traces}\right]\end{aligned}$$

と規格化する。ここで、$(x_{12})_\mu = x_{1\mu}-x_{2\mu}$、$I_{\mu\nu}=I_{\mu\nu}(x_{12})$ である。また、三点相関関数の形は共形不変性より、全体の係数を除いて決まる。それを $f_{\Delta,l}$ として、

$$\begin{aligned}\langle\phi(x_1)\phi(x_2)O_{\mu_1\cdots\mu_l}(x_3)\rangle &= \frac{f_{\Delta,l}}{|x_{12}|^{2d-\Delta+l}|x_{13}|^{\Delta-l}|x_{23}|^{\Delta-l}}\left(Z_{\mu_1}\cdots Z_{\mu_l}-\text{traces}\right),\\ Z_\mu &= \frac{(x_{13})_\mu}{x_{13}^2}-\frac{(x_{23})_\mu}{x_{23}^2}\end{aligned}\tag{3.4.1}$$

と規格化する。$f_{\Delta,l}$ のことを構造係数又は OPE 係数と呼ぶ。

プライマリースカラー場 ϕ 同士の OPE は

$$\begin{aligned}\phi(x)\phi(y) &= \frac{1}{|x-y|^{2d}}+\sum_{l=2n}f_{\Delta,l}\left[\frac{(x-y)_{\mu_1}\cdots(x-y)_{\mu_l}}{|x-y|^{2d-\Delta+l}}O_{\mu_1\cdots\mu_l}(y)+\cdots\right]\\ &= \frac{1}{|x-y|^{2d}}+\sum_{l=2n}\frac{f_{\Delta,l}}{|x-y|^{2d-\Delta}}C_{\Delta,l}(x-y,\partial_y)O_{\Delta,l}(y)\end{aligned}$$

と表される。二列目の式では、スピンlのプライマリーテンソル場を$O_{\Delta,l}(y)$と簡略化した。一列目のドット及び係数$C_{\Delta,l}(x-y,\partial_y)$の中の微分演算子はそのデッセンダントからの寄与を表す。

ここでは、$l=0$の場合の係数$C_{\Delta,0}$を求める。OPEの両辺に$O=O_{\Delta,0}$を作用させて期待値を取ると、

$$\langle\phi(x)\phi(y)O(z)\rangle=\frac{f_{\Delta,0}}{|x-y|^{2d-\Delta}}C_{\Delta,0}(x-y,\partial_y)\langle O(y)O(z)\rangle$$

を得る。これより、関係式

$$C_{\Delta,0}(x-y,\partial_y)\frac{1}{|y-z|^{2\Delta}}=\frac{1}{|x-z|^{\Delta}|y-z|^{\Delta}}$$

が導かれる。この式の右辺をFeynmannパラメータ積分公式を用いて書き換えると

$$\begin{aligned}&\frac{\Gamma(\Delta)}{\Gamma(\frac{\Delta}{2})\Gamma(\frac{\Delta}{2})}\int_0^1 dt\frac{[t(1-t)]^{\frac{\Delta}{2}-1}}{[t(x-z)^2+(1-t)(y-z)^2]^{\Delta}}\\&=\frac{1}{B(\frac{\Delta}{2},\frac{\Delta}{2})}\int_0^1 dt[t(1-t)]^{\frac{\Delta}{2}-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\Delta)_n}{n!}\frac{[-t(1-t)(x-y)^2]^n}{([y-z+t(x-y)]^2)^{\Delta+n}}\end{aligned}$$

と書ける。$(a)_n=\Gamma(a+n)/\Gamma(a)$はPochhammer記号である。さらに、

$$\begin{aligned}(\partial^2)^n\frac{1}{(x^2)^{\Delta}}&=4^n(\Delta)_n(\Delta+1-D/2)_n\frac{1}{(x^2)^{\Delta+n}},\\\frac{1}{[(y+tx)^2]^{\Delta}}&=e^{tx\cdot\partial_y}\frac{1}{(y^2)^{\Delta}}\end{aligned}$$

を使って、$1/|y-z|^{2\Delta}$をyで微分する形に書き換える。それが左辺のように表されることから

$$\begin{aligned}C_{\Delta,0}(x-y,\partial_y)&=\frac{1}{B(\frac{\Delta}{2},\frac{\Delta}{2})}\int_0^1 dt[t(1-t)]^{\frac{\Delta}{2}-1}\\&\quad\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n n!}\frac{[t(1-t)a^2]^n}{(\Delta+1-D/2)_n}(\partial_y^2)^n e^{ta\cdot\partial_y}\Big|_{a=x-y}\end{aligned}$$

を得る。最初の数項を書き出すと

$$\begin{aligned}C_{\Delta,0}(x-y,\partial_y)&=1+\frac{1}{2}(x-y)_\mu\partial_\mu^y+\frac{\Delta+2}{8(\Delta+1)}(x-y)_\mu(x-y)_\nu\partial_\mu^y\partial_\nu^y\\&\quad-\frac{\Delta}{16(\Delta+1)(\Delta+1-D/2)}(x-y)^2\partial_y^2+\cdots\end{aligned}$$

となる。

同様にして三点相関関数の式 (3.4.1) から $l \neq 0$ の場合も計算することができる。

3.5　四点相関関数と Conformal Blocks

この節ではスカラー場の四点相関関数の性質について議論する。共形次元 Δ_j をもつプライマリースカラー場 ϕ_j の四点相関関数は共形対称性より

$$\langle\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)\phi_4(x_4)\rangle = \left(\frac{|x_{24}|}{|x_{14}|}\right)^{\Delta_{12}}\left(\frac{|x_{14}|}{|x_{13}|}\right)^{\Delta_{34}}\frac{G(u,v)}{|x_{12}|^{\Delta_1+\Delta_2}|x_{34}|^{\Delta_3+\Delta_4}}$$

の形まで簡単化することができる。ここで、$\Delta_{ij} = \Delta_i - \Delta_j$、変数 u と v は

$$u = \frac{x_{12}^2 x_{34}^2}{x_{13}^2 x_{24}^2}, \qquad v = \frac{x_{14}^2 x_{23}^2}{x_{13}^2 x_{24}^2}$$

で定義されている。

この式は ϕ_1 と ϕ_2 の間で OPE を取った形をしている。一方で、ϕ_1 と ϕ_4 の間で OPE を取っても答えは変わらないはずである。このことから右辺は (x_2, Δ_2) と (x_4, Δ_4) を入れ替えても結果は変わらない。同様に、(x_2, Δ_2) と (x_3, Δ_3) を入れ替えても結果は変わらない。この性質を交差対称性 (crossing symmetry) と呼ぶ。これより、$G(u,v)$ は $G(v,u)$ や $G(1/u, v/u)$ で表すことができる。

簡単のため以下では $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4$ の場合を考える。OPE の単位演算子に比例する部分を抜き出して $G(u,v) = 1 + \sum_{\Delta,l} f_{\Delta,l}^2 g_{\Delta,l}(u,v)$ と書くと、共形次元 d をもつプライマリースカラー場 ϕ_d 同士の四点相関関数は

$$\langle\phi_d(x_1)\phi_d(x_2)\phi_d(x_3)\phi_d(x_4)\rangle = \frac{1}{|x_{12}|^{2d}|x_{34}|^{2d}}\Big[1 + \sum_{\Delta,l} f_{\Delta,l}^2 g_{\Delta,l}(u,v)\Big]$$

と書ける。ここで、$g_{\Delta,l}(u,v)$ は conformal block と呼ばれる関数である。x_2 と x_4 の入れ替えからくる交差関係式 $v^d G(u,v) = u^d G(v,u)$ より、conformal block は

$$u^d - v^d = \sum_{\Delta,l} f_{\Delta,l}^2 \left[v^d g_{\Delta,l}(u,v) - u^d g_{\Delta,l}(v,u) \right] \tag{3.5.1}$$

を満たす。

Conformal block $g_{\Delta,l}$ を OPE から計算する。中間状態としてスカラー $(l=0)$ が飛ぶ場合からの寄与は前節で計算した OPE を使って

$$g_{\Delta,0}(u,v) = |x_{12}|^{\Delta}|x_{34}|^{\Delta} C_{\Delta,0}(x_{12},\partial_2) C_{\Delta,0}(x_{34},\partial_4) \frac{1}{|x_{24}|^{2\Delta}}$$

と表すことができる。右辺を計算すると

$$\begin{aligned}C_{\Delta,0}(x_{12},\partial_2) C_{\Delta,0}(x_{34},\partial_4) \frac{1}{|x_{24}|^{2\Delta}} &= \frac{1}{B(\frac{\Delta}{2},\frac{\Delta}{2})^2} \int_0^1 dtds [t(1-t)s(1-s)]^{\frac{\Delta}{2}-1} \\ &\times \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{n!m!} \frac{(\Delta)_{n+m}(\tilde{\Delta})_{n+m}}{(\tilde{\Delta})_n(\tilde{\Delta})_m} \frac{[t(1-t)x_{12}^2]^n[s(1-s)x_{34}^2]^m}{[(x_{24}+tx_{12}-sx_{34})^2]^{\Delta+n+m}}\end{aligned}$$

となる。ここでは $\tilde{\Delta} = \Delta + 1 - D/2$ と書くことにする。さらに、$A^2 = t(1-t)x_{12}^2$、$B^2 = s(1-s)x_{34}^2$ とすると、

$$\begin{aligned}&(x_{24}+tx_{12}-sx_{34})^2 = \Lambda^2 - A^2 - B^2, \\ &\Lambda^2 = tsx_{13}^2 + t(1-s)x_{14}^2 + s(1-t)x_{23}^2 + (1-t)(1-s)x_{24}^2\end{aligned}$$

と書けるので、これらの変数を使って右辺を書き換えると

$$\frac{1}{B(\frac{\Delta}{2},\frac{\Delta}{2})^2} \int_0^1 dtds \frac{[t(1-t)s(1-s)]^{\frac{\Delta}{2}-1}}{(\Lambda^2-A^2-B^2)^{\Delta}} F_4(\Delta,\tilde{\Delta};\tilde{\Delta},\tilde{\Delta};X,Y)$$

となる。ここで $X = -A^2/(\Lambda^2-A^2-B^2)$、$Y = -B^2/(\Lambda^2-A^2-B^2)$ である。F_4 は Appell 関数と呼ばれる変数を二つ持つ超幾何級数 (double series) で、

$$F_4(a,b;,c,d;x,y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{n!m!} \frac{(a)_{n+m}(b)_{n+m}}{(c)_n(d)_m} x^n y^m$$

と定義される。この関数は Gauss の超幾何級数 ${}_2F_1$ と

$$F_4(a,b;c,d;x,y) = (1-x-y)^{-a}{}_2F_1\left(\frac{a}{2},\frac{a+1}{2};b;\frac{4xy}{(1-x-y)^2}\right)$$

ように関係しているので、これを使うと

$$\frac{1}{B(\frac{\Delta}{2},\frac{\Delta}{2})^2}\int_0^1 dtds\frac{[t(1-t)s(1-s)]^{\frac{\Delta}{2}-1}}{(\Lambda^2)^\Delta}{}_2F_1\left(\frac{a}{2},\frac{a+1}{2};b;\frac{4A^2B^2}{\Lambda^2}\right)$$

と書くことが出来る。最後に t と s のパラメータ積分を、公式

$$\int_0^1 dt\frac{t^{a-1}(1-t)^{b-1}}{[t\alpha+(1-t)\beta]^{a+b}} = \frac{1}{\alpha^a\beta^b}B(a,b),$$
$$\int_0^1 ds\frac{s^{a-1}(1-s)^{b-1}}{(1-s\alpha)^c(1-s\beta)^d} = B(a,b)F_1(a,c,d;a+b;\alpha,\beta)$$

を使って順次行う。ここで、F_1 は変数を二つ持つ新たな超幾何級数

$$F_1(a,b,c;d;x,y) = \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{1}{n!m!}\frac{(a)_{n+m}(b)_n(c)_m}{(d)_{n+m}}x^ny^m$$

で、特別な場合、Gauss の超幾何級数と

$$F_1(a,b,c,b+c;x,y) = (1-y)^{-a}{}_2F_1\left(a,b;b+c;\frac{x-y}{1-y}\right)$$

の関係がある。これらを使うと

$$\frac{1}{|x_{13}||x_{24}|^\Delta}v'^{\frac{\Delta}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u'^n}{n!}\frac{\left(\frac{\Delta}{2}\right)_n^4}{(\Delta)_{2n}(\tilde{\Delta})_n}{}_2F_1\left(\frac{\Delta}{2}+n,\frac{\Delta}{2}+n;\Delta+2n;1-v'\right)$$

を得る。ここで、$u' = u/v$、 $v' = 1/v$ である。係数 $(\Delta)_{2n}$ は関係式 $4^n(\frac{\Delta}{2})_n(\frac{\Delta+1}{2})_n = (\Delta)_{2n}$ に由来する。

さらに新たな二変数の超幾何級数

$$G(a,b,c,d;x,y) = \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(d-a)_n(d-b)_n}{n!\ (c)_n}\frac{(a)_{n+m}(b)_{n+m}}{m!\ (d)_{2n+m}}x^ny^m$$

を導入して $g_{\Delta,0}$ を書き換える。その際、$(\frac{\Delta}{2}+n)_m = (\frac{\Delta}{2})_{n+m}/(\frac{\Delta}{2})_n$、$(\Delta+2n)_m = (\Delta)_{2n+m}/(\Delta)_{2n}$ を使う。四点相関関数は $x_3 \leftrightarrow x_4$ の下で不変であ

る、すなわち $g_{\Delta,l}(u,v) = g_{\Delta,l}(u',v')$ であることから、$g_{\Delta,0}$ を求めた後に変数を u' と v' から u と v に書き換えると最終的に

$$g_{\Delta,0}(u,v) = u^{\frac{\Delta}{2}} G\left(\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}, \Delta + 1 - \frac{D}{2}, \Delta; u, 1-v\right)$$

を得る。

偶数次元のときは conformal block $g_{\Delta,l}$ を Gauss の超幾何級数の積で表すことが出来る。新しい座標変数

$$u = z\bar{z}, \qquad v = (1-z)(1-\bar{z})$$

を導入して、公式

$$\begin{aligned} G(a,b,c-1,c;u,1-v) &= \frac{1}{z-\bar{z}}\Big[z\ {}_2F_1(a,b;c;z){}_2F_1(a-1,b-1;c-2;\bar{z}) \\ &\qquad -\bar{z}\ {}_2F_1(a,b;c;\bar{z}){}_2F_1(a-1,b-1;c-2;z)\Big] \end{aligned}$$

を使う。Gauss の超幾何級数で定義された関数

$$k_\beta(x) = x^{\frac{\beta}{2}}\ {}_2F_1\left(\frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{2}, \beta; x\right) \tag{3.5.2}$$

を導入すると、例えば $D=4$ では

$$g_{\Delta,0}(u,v)|_{D=4} = \frac{z\bar{z}}{z-\bar{z}}\left[k_\Delta(z)k_{\Delta-2}(\bar{z}) - (z \leftrightarrow \bar{z})\right]$$

と書くことが出来る。

スピンが $l \geq 1$ の場合も複雑ではあるが同様に OPE から求めることが出来る。一般の l についての conformal blocks は l についての漸化式を立てて求めることができる。結果だけを書くと、$D=4$ の場合、

$$g_{\Delta,l}(u,v)|_{D=4} = \frac{(-1)^l}{2^l}\frac{z\bar{z}}{z-\bar{z}}\left[k_{\Delta+l}(z)k_{\Delta-l-2}(\bar{z}) - (z \leftrightarrow \bar{z})\right] \tag{3.5.3}$$

で与えられる。また、2 次元の場合一般式は

$$g_{\Delta,l}(u,v)|_{D=2} = \frac{(-1)^l}{2^l}\left[k_{\Delta+l}(z)k_{\Delta-l}(\bar{z}) + (z \leftrightarrow \bar{z})\right] \tag{3.5.4}$$

で与えられる。一方、$D=3$ では l が小さい場合の式は求められているが、一般式はまだ $z=\bar{z}$ のような特別な場合しか知られていない。

3.6 Casimir 演算子と Conformal Blocks

この節では、conformal block が満たす微分方程式を Casimir 演算子を使って求め、その解を調べる。

共形代数 $SO(D+1,1)$ の生成子 J_{ab} と交換する 2 次の Casimir 演算子 $C_2 = \frac{1}{2}J^{ab}J_{ab}$ を考える。共形変換の生成子を用いて書くと

$$C_2 = \frac{1}{2}M_{\mu\nu}M_{\mu\nu} - D^2 - \frac{1}{2}\left(K_\mu P_\mu + P_\mu K_\mu\right)$$

となる。プライマリー状態はこの演算子の固有状態である。スピン l、共形次元 Δ の場合は

$$C_2|\Delta,l\rangle = C_{\Delta,l}|\Delta,l\rangle, \quad C_{\Delta,l} = \Delta(\Delta-D) + l(l+D-2)$$

となる。

ここでは、四つの異なるプライマリースカラー場の相関関数を考える。完全形を挟むとそれは

$$\langle\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)\phi_4(x_4)\rangle = \sum_{\Delta,l}\langle 0|\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)|\Delta,l\rangle\langle\Delta,l|\phi_3(x_3)\phi_4(x_4)|0\rangle$$

と書ける。そこで、関係式

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\langle 0|\left[J_{ab},\left[J^{ab},\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\right]\right]|\Delta,l\rangle &= \langle 0|\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)C_2|\Delta,l\rangle \\ &= C_{\Delta,l}\langle 0|\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)|\Delta,l\rangle\end{aligned}$$

を考えることにする。スカラー場の共形変換の式を用いて左辺を書き換えると、左辺は

$$\begin{aligned}&\Big\{(x_{12}^2\partial_\mu^1\partial_\mu^2 - 2(x_{12})_\mu(x_{12})_\nu\partial_\mu^1\partial_\nu^2 - 2\Delta_1(x_{12})_\mu\partial_\mu^2 + 2\Delta_2(x_{12})_\mu\partial_\mu^1 \\ &+ (\Delta_1+\Delta_2)(\Delta_1+\Delta_2-D)\Big\}\langle 0|\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)|\Delta,l\rangle\end{aligned}$$

と書ける。

一方、中間状態が $O_{\Delta,l}$ で与えられる四点相関関数の conformal block を前節と同じように $g_{\Delta,l}$ と書くと、その部分は

$$\begin{aligned}&\langle 0|\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)|\Delta,l\rangle\langle\Delta,l|\phi_3(x_3)\phi_4(x_4)|0\rangle \\ &= \left(\frac{x_{24}^2}{x_{14}^2}\right)^{\Delta_{12}/2}\left(\frac{x_{14}^2}{x_{13}^2}\right)^{\Delta_{34}/2}\frac{f_{\Delta,l}^2 g_{\Delta,l}(u,v)}{(x_{12}^2)^{(\Delta_1+\Delta_2)/2}(x_{34}^2)^{(\Delta_3+\Delta_4)/2}}\end{aligned}$$

と表される。このことを使うと、最終的に conformal block が満たす微分方程式は

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{D}g_{\Delta,l}(u,v)=\frac{1}{2}C_{\Delta,l}g_{\Delta,l}(u,v),\\
&\mathcal{D}=(1-u+v)u\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial}{\partial u}\right)+\left[(1-v)^2-u(1+v)\right]\frac{\partial}{\partial v}\left(v\frac{\partial}{\partial v}\right)\\
&\qquad -2(1+u-v)uv\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}-Du\frac{\partial}{\partial u}\\
&\qquad +\frac{1}{2}\left(\Delta_{12}-\Delta_{34}\right)\left[(1+u-v)\left(u\frac{\partial}{\partial u}+v\frac{\partial}{\partial v}\right)-(1-u-v)\frac{\partial}{\partial v}\right]\\
&\qquad +\frac{1}{4}\Delta_{12}\Delta_{34}(1+u-v)
\end{aligned}
$$

で与えられる。

さらに、座標変数を z と $\bar{z}$ に変換すると

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D} \;=\;& z^2(1-z)\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\bar{z}^2(1-\bar{z})\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}+\frac{1}{2}\left(\Delta_{12}-\Delta_{34}-2\right)\left(z^2\frac{\partial}{\partial z}+\bar{z}^2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\\
&+\frac{1}{4}\Delta_{12}\Delta_{34}(z+\bar{z})+(D-2)\frac{z\bar{z}}{z-\bar{z}}\left((1-z)\frac{\partial}{\partial z}-(1-\bar{z})\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)
\end{aligned}
$$

と書ける。この微分方程式の $D=4,2$ の解はそれぞれ (3.5.3) と (3.5.4) で、関数 (3.5.2) を

$$
k_\beta(x)=x^{\frac{\beta}{2}}{}_2F_1\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\Delta_{12}}{2},\frac{\beta}{2}+\frac{\Delta_{34}}{2};\beta;x\right)
$$

と置き換えたものになる。

3.7　ユニタリ性バウンドの再考

先に定義した状態を用いて、ユニタリ性の条件 (2.3.2) について再考する。ここでは、具体的に $D=4$ の場合を考える。

例えば、プライマリーベクトル状態 $|\mu,\Delta\rangle$ を考えるてみる。ユニタリ性からその内積は正定値でなければならない。それを $\langle\Delta',\mu|\nu,\Delta\rangle=\delta_{\Delta'\Delta}\delta_{\mu\nu}$ と規格化する。ユニタリ性はさらにそのデッセンダントもまた正定値で

あることを要求する。第一デッセンダント状態 $|\mu;\nu,\Delta\rangle = P_\mu|\nu,\Delta\rangle$ を考えると、その内積は共形代数を使って計算すると

$$
\begin{aligned}
\langle\mu;\lambda,\Delta'|\nu;\sigma,\Delta\rangle &= \langle\lambda,\Delta'|[K_\mu,P_\nu]|\sigma,\Delta\rangle \\
&= \langle\lambda,\Delta'|2i\left(D\delta_{\mu\nu}+M_{\mu\nu}\right)|\sigma,\Delta\rangle \\
&= 2\delta_{\Delta'\Delta}\left(\Delta\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma}-\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}+\delta_{\nu\lambda}\delta_{\mu\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

となる。ここで、Hermite 性 $P_\mu^\dagger = K_\mu$、プライマリーの条件 $K_\mu|\nu,\Delta\rangle = \langle\nu,\Delta|P_\mu = 0$ 及び $\langle\lambda,\Delta|M_{\mu\nu}|\sigma,\Delta\rangle = (\Sigma_{\mu\nu})_{\lambda\sigma}$ を使った。これは、足の組を $a=(\mu,\lambda)$、$b=(\nu,\sigma)$ とすると、16×16 の行列 $\langle a|b\rangle$ と表され、その固有値は 3 種類で、$2(\Delta-3)$ が一つ、$2(\Delta-1)$ が六つ、$2(\Delta+1)$ が九つ出てくる。これらがすべて正であることから $\Delta\geq 3$ が出てくる。

ここではより一般的に回転群 $SO(4)$ の表現を $\{r\}$ とし議論を進める。その表現に属するプライマリー状態を $|\{r\},\Delta\rangle$ と表すと、プライマリーの条件は

$$
\begin{aligned}
M_{\mu\nu}|\{r\},\Delta\rangle &= \left(\Sigma_{\mu\nu}\right)_{\{r'\},\{r\}}|\{r'\},\Delta\rangle, \\
iD|\{r\},\Delta\rangle &= \Delta|\{r\},\Delta\rangle, \\
K_\mu|\{r\},\Delta\rangle &= 0
\end{aligned}
$$

と表される。ここで、$SO(4)$ は $SU(2)\times SU(2)$ と表されることから左右の $SU(2)$ のスピンを j_1, j_2 とすると、表現 $\{r\}$ はその組み合わせ (j_1,j_2) で表すことが出来て、その次元は $(2j_1+1)(2j_2+1)$ となる。例えば、整数スピン l のトレースレス対称テンソル場 $O_{\mu_1\cdots\mu_l}$ は $j_1=j_2=l/2$ で与えられる。

プライマリー状態に P_μ を n 回作用させて生成される状態を第 n デッセンダントと呼び、

$$
|\mu_1\cdots\mu_n;\{r\},\Delta\rangle = P_{\mu_1}\cdots P_{\mu_n}|\{r\},\Delta\rangle
$$

と表す。プライマリー状態の内積が正定値で $\langle\{r'\},\Delta'|\{r\},\Delta\rangle = \delta_{\{r'\}\{r\}}\delta_{\Delta'\Delta}$ と規格化されているとすると、ユニタリ性はそのデッセンダントもすべて正定値であることを要求する。

前と同様に第一デッセンダント状態 $|\mu;\{r\},\Delta\rangle = P_\mu|\{r\},\Delta\rangle$ の内積を計算すると

$$\langle\mu;\{r'\},\Delta'|\nu;\{r\},\Delta\rangle = \delta_{\Delta'\Delta}\left(2\Delta\delta_{\{r'\}\{r\}} + 2\langle\{r'\},\Delta|iM_{\mu\nu}|\{r\},\Delta\rangle\right) \tag{3.7.1}$$

を得る。ここで、Lorentz 生成子が

$$iM_{\mu\nu} = i\frac{1}{2}\left(\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} - \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha}\right)M_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\Sigma_{\alpha\beta}\right)_{\mu\nu}M_{\alpha\beta}$$

と書けることを使うと、前々式の最後の項は、$\Sigma_{\alpha\beta}$ 行列をベクトル状態 $|\mu\rangle$ を導入して $\langle\mu|M^{\{v\}}_{\alpha\beta}|\nu\rangle = (\Sigma_{\alpha\beta})_{\mu\nu}$ と表すと、

$$2\langle\{r'\},\Delta|iM_{\mu\nu}|\{r\},\Delta\rangle = \langle\mu|\otimes\langle\{r'\},\Delta|M^{\{v\}}_{\alpha\beta}\cdot M^{\{r\}}_{\alpha\beta}|\{r\},\Delta\rangle\otimes|\nu\rangle \tag{3.7.2}$$

と書ける。これは、角運動量の合成のときと同じように解くことが出来る。$M^{\{R\}}_{\alpha\beta} = M^{\{v\}}_{\alpha\beta} + M^{\{r\}}_{\alpha\beta}$ とすると

$$\begin{aligned} M^{\{v\}}_{\alpha\beta}\cdot M^{\{r\}}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}M^{\{R\}}_{\alpha\beta}\cdot M^{\{R\}}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}M^{\{v\}}_{\alpha\beta}\cdot M^{\{v\}}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}M^{\{r\}}_{\alpha\beta}\cdot M^{\{r\}}_{\alpha\beta} \\ &= c_2(\{R\}) - c_2(\{v\}) - c_2(\{r\}) \end{aligned}$$

ここで、c_2 は $SO(4)$ 回転群の二次 Casimir 演算子である。任意の表現 $\{r\}$ を $SU(2)\times SU(2)$ の表示を使って (j_1, j_2) と表すと、ベクトル表現 $\{v\}$ は $(1/2, 1/2)$ となる。合成された状態の表現 $\{R\}$ は (J_1, J_2) で表される。ここで、$J_{1,2}$ は $j_{1,2}\pm 1/2$ の値を取る。これより、行列 (3.7.2) の固有値は二次 Casimir の値をそれぞれ代入すると $2J_1(J_1+1) + 2J_2(J_2+1) - 3 - 2j_1(j_1+1) - 2j_2(j_2+1)$ となる。この結果を使って第一デッセンダント状態の内積 (3.7.1) の固有値を求めることが出来る。

ここで知りたいのは内積 (3.7.1) の最小の固有値である。それが正であることがユニタリ性の条件になる。以下、場合分けしてそれを調べることにする。$j_1, j_2 \neq 0$ の場合、内積 (3.7.1) は $J_1 = j_1 - 1/2, J_2 = j_2 - 1/2$ のときに最小の固有値 $2\Delta - 2(j_1 + j_2 + 2)$ をもつ。これより、ユニタリ性の条件は

$$\Delta \geq j_1 + j_2 + 2 \qquad \text{for } j_1, j_2 \neq 0$$

となる。ここで、$j_1 = j_2 = l/2$ を代入すると前節で議論したスピン l 対称トレースレスプライマリーテンソル状態の場合のユニタリ性の条件 $\Delta \geq l+2$ が得られる。$j_1 = 0, j_2 \neq 0$ の場合は $J_1 = 1/2, J_2 = j_2 - 1/2$ のとき最小値 $2\Delta - 2(j_2+1)$ となる。これより、

$$\Delta \geq j_2 + 1 \qquad \text{for } j_1 = 0, j_2 \neq 0$$

を得る。j_1 と j_2 をひっくり返しても同様である。

$j_1 = j_2 = 0$ のプライマリースカラー状態の場合は最小固有値が 2Δ となり、$\Delta \geq 0$ となって前節の結果とは異なる結果を得る。スカラー状態の場合はさらに第二デッセンダント状態 $P^\mu P_\mu |\Delta\rangle$ を考える必要がある。その内積を計算すると $\langle \Delta' | K^\mu K_\mu P^\nu P_\nu | \Delta \rangle = 32\Delta(\Delta - 1)\delta_{\Delta'\Delta}$ となるので、これが正であることを要求すると、

$$\Delta \geq 1 \qquad \text{for } j_1 = j_2 = 0$$

を得る。

3.8 Conformal Bootstrap からの制限

内積の正定値性に由来するユニタリ性バウンドは共形次元の下限しか与えない。ここでは、四点相関関数に新たなユニタリ性の条件を加えて共形次元を制限する話を紹介する。

3.5 節で議論した同じスカラー場の四点相関関数の場合を考える。交差関係式 (3.5.1) より conformal block $g_{\Delta,l}$ は

$$\sum_{\Delta,l} p_{\Delta,l} F_{d,\Delta,l}(z,\bar{z}) = 1,$$
$$F_{d,\Delta,l}(z,\bar{z}) = \frac{v^d g_{\Delta,l}(u,v) - u^d g_{\Delta,l}(v,u)}{u^d - v^d} \tag{3.8.1}$$

を満たす。ここで、$p_{\Delta,l} = f^2_{\Delta,l}$ である。例えば自由スカラー場 $(d=1)$ の場合、l は偶数のみ非ゼロになって、$p_{\Delta,l} = \delta_{\Delta,l+2}\delta_{l,2n} 2^{l+1}(l!)^2/(2l)!$ で与えられる。

いま実数の場の相関関数を考えているので、物理的に怪しげな事をしていなければ、OPE 係数 $f_{\Delta,l}$ は実数になるはずである。すなわち、その二乗は正であることから

$$p_{\Delta,l} \geq 0$$

となる。この正定値条件を新たに課すと OPE の右辺に現れる場の共形次元に制限が付く。以下、具体的な結果を述べた後、その計算方法を簡単に紹介する。

例えば、$D = 4$ で共形次元 d のスカラー場同士の OPE$\phi_d \times \phi_d \sim 1 + O_\Delta + \cdots$ を考えると、その右辺に現れる最も低い共計次元をもったスカラー場にたいして

$$\Delta \leq 2 + 0.7(d-1)^{1/2} + 2.1(d-1) + 0.43(d-1)^{3/2} + o((d-1)^2) \tag{3.8.2}$$

のように上限が求められている。この条件はこの上限より高い共形次元をもったスカラー場が存在しないといっているのではない。連続的、離散的に関わらず右辺に現れるスカラー場は幾つあってもよいが、そのうちの最低次元をもつスカラー場がこの範囲に入っていなければならない事を示している。

同様の事を $D = 2$ で行うと、二次元共形場理論の厳密解と無矛盾な結果が得られる。例えば Ising 模型では ϕ_d はスピン演算子 σ、O_Δ はエネルギー演算子 ε で、それらの厳密な共形次元は離散的で、それぞれ $d = \Delta_\sigma = 1/8$ と $\Delta = \Delta_\varepsilon = 1$ で与えられる。そこで $d = 1/8$ と置いて OPE の右辺に最初に現れるスカラー場の共形次元の上限値を調べると $\Delta \leq 1$ の条件が出てくる。厳密解の値 $\Delta = 1$ はまさに許される上限値の際に現れる。さらに、その事実を使って $D = 3$ の Ising 模型の解析を行うと、格子上のモンテカルロ計算と無矛盾な結果が得られる。

その具体的な解析方法を以下に簡単に紹介する。新しい座標 $z = 1/2 + X + iY$ を導入して、X と Y についての N 次までの微分演算子

$$\Lambda[F] = \sum_{\substack{m,n=\mathrm{even} \\ 2\leq m+n\leq N}} \lambda_{m,n} \partial_X^m \partial_Y^n F|_{X=Y=0}$$

を考える。ここで、$X = Y = 0$ $(z = \bar{z} = 1/2)$ の点で評価するのは、単に数値的に計算を実行する際にその点の収束性が良いからである。この演算子を (3.8.1) に作用させると

$$\sum_{\Delta,l} p_{\Delta,l} \Lambda \left[F_{d,\Delta,l}\right] = 0 \tag{3.8.3}$$

となる。この式は、もしすべての Δ、l に対して不等式 $\Lambda[F_{d,\Delta,l}] \geq 0$ が満たされるなら、正定値の条件 $p_{\Delta,l} \geq 0$ に反することを表している。

はじめに OPE の構造が

$$\phi_d \times \phi_d \sim 1 + \sum_{\Delta \geq f} O_\Delta + \sum_{\substack{l>0 \\ l=\mathrm{even}}} \sum_{\Delta \geq D-2+l} O_{\Delta,l}$$

で与えられる場合を考える。ここで、右辺に現れるのスカラー場 O_Δ の共形次元にユニタリ性バウンドより強い制限 $\Delta \geq f$ を課している。一方、$l > 0$ のテンソル場に対してはユニタリ性バウンド以上の制限は加えていない。このとき、d と f を固定して、すべての $\Delta \geq f$ $(l = 0)$ とすべての $\Delta \geq D - 2 + l$ $(l > 0)$ に対する不等式の集合 $\Lambda[F_{d,\Delta,l}] \geq 0$ を考えたとき、もしこの無限個の不等式系を満たす有限個の解 $\lambda_{m,n}$ が存在するなら、それは $p_{\Delta,l} \geq 0$ より $\sum_{\Delta,l} p_{\Delta,l} \Lambda \left[F_{d,\Delta,l}\right] \neq 0$ となって条件式 (3.8.3) と矛盾する。従ってそのような d と f の組み合わせは正定値の条件を満たさないため禁止される。もし解がなければ逆にその d と f の組は許される。このようにして値が許される領域を調べて行く。d を固定して f を次第に大きくしていくとあるところで許容領域から禁止領域に入る。その値を $f_c(d)$ とすると、それが Δ の上限となって、ユニタリ性による許容領域が $D/2 - 1 \leq \Delta \leq f_c(d)$ となる。

実際の計算では無限個の不等式を有限個にする必要がある。l に上限を設け、各 l の Δ も離散化する。不等式系の解が有るか無いかの判定は線形計画法 (linear programing method) の応用問題である。ここでは解である $\lambda_{m,n}$ の値そのものに意味はない。このようにして得られた式が (3.8.2) である。

さらに、OPE の構造を詳しく見るために、スカラー場 O_Δ の構造を分解して考える。例えば、Δ は連続な値をとるけれども、そのうち一点だけ許

容領域内に飛び地のように選び、残りのスカラー場に対して $\Delta \geq f'$ $(\geq f_c)$ の条件を課して同様の計算を行う。すなわち、ギャップの存在を想定して計算すると、許容領域がさらに制限される。特に、許容領域内の一点として臨界値 $\Delta = f_c$ を選ぶと、三次元 Ising 模型のモンテカルロ計算と無矛盾な結果 $\Delta_\sigma = 0.5182(3)$ と $\Delta_\varepsilon = 1.413(1)$ を得ることが出来る。高次元のスカラー場、テンソル場へと制限を強めていくと、さらに詳しい構造を調べることが出来る。このようにして、離散的な OPE の構造が三次元共形場理論の場合にも (準) 解析的に見えてきている。

3.9　その他の方法 −イプシロン展開−

最後に場の量子論的方法として昔から良く知られている、Wilson-Fisher のイプシロン展開について簡単に述べる。[3] $D = 4 - \epsilon$ 次元の 4 点相互作用を持つスカラー場理論

$$S = \int d^D x \left[\frac{1}{2} (\partial \phi)^2 + \lambda \phi^4 \right]$$

を考え、次元正則化を用いてベータ関数を計算すると

$$\beta_\lambda = -\epsilon \lambda + \frac{9\lambda^2}{2\pi^2}$$

を得る。これは $\epsilon \neq 0$ のときベータ関数が消える固定点 $\lambda^* = \epsilon 2\pi^2/9$ を持つ。場の演算子 ϕ と複合場 $:\phi^2:$ の異常次元はそれぞれ $\gamma = 3\lambda^2/16\pi^4$ と $\delta = 3\lambda/2\pi^2$ で与えられる。これらから固定点上での共形次元を計算すると、

$$\begin{aligned} \Delta_\phi &= \frac{D-2}{2} + \frac{3\lambda_*^2}{16\pi^4} = \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) + \frac{\epsilon^2}{108} \\ \Delta_{\phi^2} &= D - 2 + \frac{3\lambda_*}{2\pi^2} = (2 - \epsilon) + \frac{\epsilon}{3} \end{aligned}$$

を得る。右辺の第一項は正準次元である。ここで、Ising 模型の OPE$\sigma \times \sigma \sim \varepsilon$ と $\phi \times \phi \sim \phi^2$ の比較から $\Delta_\sigma = \Delta_\phi$、$\Delta_\varepsilon = \Delta_{\phi^2}$ と同定される。三次元

[3] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Oxford Univ. Press.

Ising 模型の臨界指数は $\epsilon \to 1$ と置くと、それぞれ $\Delta_\sigma = 0.51$ と $\Delta_\varepsilon = 1.33$ を得る。これは、上記の結果と良く合っている。[4]

[4]計算は $o(\epsilon^5)$ までなされていて、その結果はさら良く合って $\Delta_\sigma = 0.5180$、$\Delta_\varepsilon = 1.4102$ となる。ただ、この方法は正しさがどこまで保障されているのか疑問が残る。

第4章　$R \times S^3$ 上の共形場理論

ここでは $R \times S^3$ のシリンダー空間上の共形場理論を考える。$R \times S^3$ 上の共形場理論では Euclid 計量でも Minkowski 計量でも同じように状態を定義することができる。

4.1　$R \times S^3$ 空間への変換

はじめに R^4 空間から $R \times S^3$ への変換を考える。R^4 の座標 x_μ の動径座標 r を $x_\mu x_\mu = r^2$ で定義し、単位 S^3 の座標を $X_\mu X_\mu = 1$ を満たす $X_\mu = x_\mu / r$ で表すと、R^4 の計量 $ds^2_{R^4} = dx_\mu dx_\mu$ は

$$ds^2_{R^4} = dr^2 + r^2 dX_\mu dX_\mu = e^{2\tau}\left(d\tau^2 + dX_\mu dX_\mu\right) = e^{2\tau} ds^2_{R\times S^3}$$

と書ける。ここで、$\tau = \log r$ とする。このように、R^4 とシリンダー $R \times S^3$ の計量 $ds^2_{R\times S^3}$ は座標変換で結びついている。

ここでは、プライマリー場を R^4 から $R \times S^3$ へ変換することを考える。はじめにプライマリースカラー場の場合を考える。スカラー場は座標 x_μ から座標 (r, X_μ) への変換では変わらず、$O(x) = O(r, X)$ である。座標 (r, X_μ) から座標 (τ, X_μ) はスケール変換になっているので、スカラー場の共形次元を Δ とすると、

$$O(x) = e^{-\Delta\tau} O(\tau, X)$$

となる。このとき、並進の変換則は

$$i\,[P_\mu, O(\tau, X)] \;=\; e^{\Delta\tau} i\,[P_\mu, O(x)] = e^{\Delta\tau}\partial_\mu O(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{\Delta\tau}\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial X_\nu}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial X_\nu}\right)e^{-\Delta\tau}O(\tau,X)\\
&= e^{-\tau}\left\{X_\mu\partial_\tau+\left(\delta_{\mu\nu}-X_\mu X_\nu\right)\partial/\partial X_\nu-\Delta X_\mu\right\}O(\tau,X)
\end{aligned}
\tag{4.1.1}
$$

となる。同様に特殊共形変換を計算すると

$$
\begin{aligned}
i\left[K_\mu,O(\tau,X)\right] &= e^{\Delta\tau}\left(x^2\partial_\mu-2x_\mu x_\nu\partial_\nu-2\Delta x_\mu\right)O(x)\\
&= e^{\tau}\left\{-X_\mu\partial_\tau+\left(\delta_{\mu\nu}-X_\mu X_\nu\right)\partial/\partial X_\nu-\Delta X_\mu\right\}O(\tau,X)
\end{aligned}
\tag{4.1.2}
$$

となる。Dilatation と Lorentz 変換はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
i\left[D,O(\tau,X)\right] &= \partial_\tau O(\tau,X),\\
i\left[M_{\mu\nu},O(\tau,X)\right] &= \left(X_\mu\frac{\partial}{\partial X_\nu}-X_\nu\frac{\partial}{\partial X_\mu}\right)O(\tau,X)
\end{aligned}
\tag{4.1.3}
$$

となる。

このように、$R\times S^3$ 上では Dilatation は動径方向 $r=e^\tau$ の発展を表す。$\tau=0$ での場の演算子 $O(0,X)$ を $O^\dagger(0,X)=O(0,X)$ の Hermite 性を満たす実 Minkowski 場とすると、任意の τ での演算子は $O(\tau,X)=e^{i\tau D}O(0,X)e^{-i\tau D}$ と表すことができる。$D^\dagger=-D$ より実スカラー場の Hermite 性は $O^\dagger(\tau,X)=e^{-i\tau D}O(0,X)e^{i\tau D}=O(-\tau,X)$ で与えられることが分かる。

これらの共形変換を S^3 上の調和関数を使ってさらに書き換える。Euler 角 $\hat{x}^j=(\alpha,\beta,\gamma)$ を導入し、その変域をそれぞれ $[0,2\pi],[0,\pi],[0,4\pi]$ として、単位 S^3 の線素を

$$
dX_\mu dX_\mu=\hat{\gamma}_{ij}d\hat{x}^i d\hat{x}^j=\frac{1}{4}\left(d\alpha^2+d\beta^2+d\gamma^2+2\cos\beta\, d\alpha d\gamma\right)
$$

と表す。このとき座標 X_μ は Euler 角を用いて

$$
\begin{aligned}
X_0 &= \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma),\quad X_1=\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{1}{2}(\alpha-\gamma),\\
X_2 &= -\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{1}{2}(\alpha-\gamma),\quad X_3=-\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)
\end{aligned}
$$

と表され、S^3 の (誘導) 計量 $\hat{\gamma}_{ij}$ は座標 X_μ を用いて

$$\hat{\gamma}_{ij}=\frac{\partial X_\mu}{\partial\hat{x}^i}\frac{\partial X_\nu}{\partial\hat{x}^j}\delta_{\mu\nu} \tag{4.1.4}$$

と書ける。

ここで、後に $R\times S^3$ 上での共形場理論を考える際に有益な単位 S^3 上のスカラー調和関数 Y_{JM} を導入する。それは $\Box_3=\hat{\nabla}^j\hat{\nabla}_j$ を S^3 上の Laplace 演算子とすると、$\Box_3 Y_{JM}=-2J(2J+2)Y_{JM}$ を満たす関数で、S^3 の回転群 $SO(4)=SU(2)\times SU(2)$ の (J,J) 表現に属し、指数 $M=(m,m')$、$m,m'=J,J-1,\cdots-J$ はその縮退度を表す。この関数は Wigner の D 関数を用いて

$$Y_{JM}=\sqrt{\frac{2J+1}{V_3}}D^J_{mm'}$$

と表すことができ、全体の係数は

$$\int d\Omega_3 Y^*_{J_1M_1}Y_{J_2M_2}=\delta_{J_1J_2}\delta_{M_1M_2}$$

と規格化して決めている。ここで、$d\Omega_3=\sqrt{\hat{\gamma}}d^3\hat{x}=\sin\beta d\alpha d\beta d\gamma/8$ は単位 S^3 の体積要素で、その体積は $V_3=\int d\Omega_3=2\pi^2$ である。Y^*_{JM} はスカラー調和関数の複素共役で、符号因子 $\epsilon_M=(-1)^{m-m'}$ を用いて $Y^*_{JM}=\epsilon_M Y_{J-M}$ と表すことができる。縮退度を表す指数 M のデルタ関数は $\delta_{MN}=\delta_{mm'}\delta_{nn'}$ で与えられる。

ここでは特に $J=1/2$ のスカラー調和関数が必要になる。Wigner の D 関数の $J=1/2$ 成分は座標 X_μ を用いて

$$D^{\frac{1}{2}}_{mm'}=\begin{pmatrix} X^0+iX^3 & X^2+iX^1 \\ -X^2+iX^1 & X^0-iX^3 \end{pmatrix}=\sqrt{2}(T_\mu)_M X_\mu$$

と表すことができる。T_μ はこの式で定義され、その複素共役を $(T^*_\mu)_M=\epsilon_M(T_\mu)_{-M}$ とすると、関係式

$$(T^*_\mu)_M(T_\mu)_N=\delta_{MN},\qquad \sum_M(T^*_\mu)_M(T_\nu)_M=\delta_{\mu\nu}$$

を満たすことが分かる。[1] この式を使うと $J=1/2$ のスカラー調和関数は

$$\frac{\sqrt{V_3}}{2}Y_{\frac{1}{2}M}=(T_\mu)_M X_\mu$$

と表すことができる。

このスカラー調和関数は次の関係式を満たすことが分かる:

$$\begin{aligned}&\frac{V_3}{4}\sum_M Y^*_{\frac{1}{2}M}Y_{\frac{1}{2}M}=1, \qquad \frac{V_3}{4}\sum_M \hat{\nabla}_i Y^*_{\frac{1}{2}M}\hat{\nabla}_j Y_{\frac{1}{2}M}=\hat{\gamma}_{ij},\\ &\frac{V_3}{4}\hat{\nabla}_i Y^*_{\frac{1}{2}M}\hat{\nabla}_j Y_{\frac{1}{2}N}=\delta_{MN}-\frac{V_3}{4}Y^*_{\frac{1}{2}M}Y_{\frac{1}{2}N}.\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

また、最初の式から $\sum_M Y^*_{1/2M}\hat{\nabla}_j Y_{1/2M}=0$ が成り立つ。これらの式はそれぞれ $X_\mu X_\mu=1$、誘導計量の式 (4.1.4)、

$$\hat{\gamma}^{ij}\frac{\partial X_\mu}{\partial\hat{x}^i}\frac{\partial X_\nu}{\partial\hat{x}^j}=\delta_{\mu\nu}-X_\mu X_\nu \tag{4.1.6}$$

及び $X_\mu dX_\mu=0$ に対応している。実際、これらの両辺に T^*_μ と T_ν を作用させると、関係式 (4.1.5) が得られる。さらに、(4.1.6) の変形版である

$$\hat{\gamma}^{ij}\frac{\partial X_\mu}{\partial\hat{x}^j}=\left(\delta_{\mu\nu}-X_\mu X_\nu\right)\frac{\partial\hat{x}^i}{\partial X_\nu} \tag{4.1.7}$$

を使うと関係式

$$\frac{\sqrt{V_3}}{2}\hat{\gamma}^{ij}\frac{\partial}{\partial\hat{x}^j}Y_{\frac{1}{2}M}=(T_\mu)_M\left(\delta_{\mu\nu}-X_\mu X_\nu\right)\frac{\partial\hat{x}^i}{\partial X_\nu}$$

が得られる。

これらの道具を使って共形代数及び共形変換を書き換える。共形代数の生成子を $(T_\mu)_M$ を用いて

$$\begin{aligned}&H=iD, \qquad R_{MN}=i(T^*_\mu)_M(T_\nu)_N M_{\mu\nu},\\ &Q_M=-i(T^*_\mu)_M K_\mu, \qquad Q^\dagger_M=i(T_\mu)_M P_\mu\end{aligned}$$

[1] 関数 T_μ は単位行列 I と Pauli 行列 σ_i を用いて、$(T_0)_M=\frac{1}{\sqrt{2}}(I)_M$、$(T_j)_M=\frac{i}{\sqrt{2}}(\sigma_j)_M$ と表すことができる。ただ、このとき T^*_μ は Hermite 共役ではないことに注意。ここでは関数の足 $M=(m,m')$ の左右を入れ替えることはない。

と表すと、H は Hermite 演算子になる。Q_M と $Q_M^\dagger$ は互いに Hermite 共役な関係で、S^3 の回転生成子は $R_{MN}^\dagger = R_{NM}$、$R_{MN} = -\epsilon_M \epsilon_N R_{-N-M}$ を満たす。このとき共形代数は

$$\begin{aligned}
\left[Q_M, Q_N^\dagger\right] &= 2\delta_{MN} H + 2R_{MN}, \\
[H, Q_M] &= -Q_M, \quad [H, R_{MN}] = 0, \\
[Q_M, Q_N] &= 0, \quad [Q_M, R_{NL}] = \delta_{ML} Q_N - \epsilon_N \epsilon_L \delta_{M-N} Q_{-L}, \\
[R_{MN}, R_{LK}] &= \delta_{MK} R_{LN} - \epsilon_M \epsilon_N \delta_{-NK} R_{L-M} \\
&\quad -\delta_{NL} R_{MK} + \epsilon_M \epsilon_N \delta_{-ML} R_{-NK}
\end{aligned} \tag{4.1.8}$$

と書き換えられる。

回転生成子 R_{MN} は Hamilton 演算子 H と交換するので共形次元がゼロの演算子である。特殊共形変換の生成子 Q_M は共形次元 -1(そのエルミート共役は 1) を持つ。

回転生成子の代数は $SU(2) \times SU(2)$ である。その 4 表現の足 $M = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\}$ を $\{1, 2, 3, 4\}$ と表示して、$A_+ = R_{31}$、$A_- = R_{31}^\dagger$、$A_3 = \frac{1}{2}(R_{11} + R_{22})$、$B_+ = R_{21}$、$B_- = R_{21}^\dagger$、$B_3 = \frac{1}{2}(R_{11} - R_{22})$ と書くと、R_{MN} だけの代数は通常の $SU(2) \times SU(2)$ 代数の形

$$\begin{aligned}
&[A_+, A_-] = 2A_3, \qquad [A_3, A_\pm] = \pm A_\pm, \\
&[B_+, B_-] = 2B_3, \qquad [B_3, B_\pm] = \pm B_\pm
\end{aligned}$$

に書き換えることができる。ここで、$A_{\pm,3}$ と $B_{\pm,3}$ は交換する。

Dilatation 及び Lorentz 変換の変換則 (4.1.3) は H と R_{MN} を用いて

$$i\,[H, O(\tau, \hat{x})] = i\partial_\tau O(\tau, \hat{x}), \qquad i\,[R_{MN}, O(\tau, \hat{x})] = \rho^\mu_{MN} \hat{\nabla}_\mu O(\tau, \hat{x})$$

と書き換えられる。ここで、$\hat{\nabla}_\mu = (\partial_\tau, \hat{\nabla}_j)$ は計量テンソルを $\hat{g}_{\mu\nu} = (1, \hat{\gamma}_{ij})$ と書いたときの共変微分である。最初の式は $R \times S^3$ 上の共形 Killing ベクトル $v^\mu = (i, 0, 0, 0)$ に対応する共形変換と見ることができる。二番目の式の $\rho^\mu_{MN} = (0, \rho^j_{MN})$ の空間成分は

$$\rho^j_{MN} = i\frac{\mathrm{V}_3}{4} \left(Y^*_{\frac{1}{2}M} \hat{\nabla}^j Y_{\frac{1}{2}N} - Y_{\frac{1}{2}N} \hat{\nabla}^j Y^*_{\frac{1}{2}M} \right) \tag{4.1.9}$$

で与えられる。ρ^j_{MN} は S^3 上の Killing 方程式 $\hat{\nabla}^i \rho^j_{MN} + \hat{\nabla}^i \rho^j_{MN} = 0$ を満たす Killing ベクトルである。足 M, N について $\rho^{j*}_{MN} = \rho^j_{NM}$、$\rho^j_{MN} = -\epsilon_M \epsilon_N \rho^j_{-N-M}$ を満たすことからこの三次元ベクトルの自由度は 6 個になる。

共形変換の生成子 Q_M とその Hermite 共役 $Q^\dagger_M$ はそれぞれ特殊共形変換と並進に相当する。それらも、K_μ と P_μ の変換則 (4.1.2) と (4.1.1) から、

$$
\begin{aligned}
i\left[Q_M, O(\tau,\hat{x})\right] &= \rho^\mu_M \hat{\nabla}_\mu O(\tau,\hat{x}) + \frac{\Delta}{4}\hat{\nabla}_\mu \rho^\mu_M O(\tau,\hat{x}), \\
i\left[Q^\dagger_M, O(\tau,\hat{x})\right] &= \tilde{\rho}^{\mu*}_M \hat{\nabla}_\mu O(\tau,\hat{x}) + \frac{\Delta}{4}\hat{\nabla}_\mu \tilde{\rho}^{\mu*}_M O(\tau,\hat{x})
\end{aligned}
$$

と書き換えられる。ここで、ベクトル ρ^μ_M は

$$
\rho^\mu_M = \left(\rho^0_M, \rho^j_M\right) = \left(i\frac{\sqrt{\mathrm{V}_3}}{2} e^\tau Y^*_{\frac{1}{2}M}, -i\frac{\sqrt{\mathrm{V}_3}}{2} e^\tau \hat{\nabla}^j Y^*_{\frac{1}{2}M}\right)
$$

で定義される。これは、Euclid$R \times S^3$ 上の共形 Killing 方程式 $\hat{\nabla}^\mu \rho^\nu_M + \hat{\nabla}^\nu \rho^\mu_M = \hat{g}^{\mu\nu}\hat{\nabla}_\lambda \rho^\lambda_M/2$ を満たす四個の共形 Killing ベクトルである。ベクトル $\tilde{\rho}^\mu_M$ も共形 Killing ベクトルで、$\tilde{\rho}^0_M(\tau,\hat{x}) = -\rho^{0*}_M(-\tau,\hat{x})$、$\tilde{\rho}^j_M(\tau,\hat{x}) = \rho^{j*}_M(-\tau,\hat{x})$ で定義される。

このように、Dilatation の H、S^3 回転の R_{MN}、特殊共形変換の Q_M 及びその共役変換である並進の $Q^\dagger_M$ に対応する共形 Killing ベクトルはそれぞれ υ^μ、ρ^μ_{MN}、 ρ^μ_M、 $\tilde{\rho}^\mu_M$ で与えられる。

次にテンソル場の場合を考える。R^4 の二つの座標系 $dx_\mu dx_\mu$ と $dr^2 + \hat{\gamma}_{ij} d\bar{x}^i d\bar{x}^j$ の間の変換は、ベクトル場を例に考えると、$O_\mu(x)dx_\mu = O_0(r,\bar{x})dr + O_j(r,\bar{x})d\bar{x}^j$ となる。。ここで、$d\bar{x}^j = r d\hat{x}^j$ である。さらに $\tau = \log r$ と変換すると $O_\mu(x)dx_\mu = e^\tau\{O_0(r,\bar{x})d\tau + O_j(r,\bar{x})d\hat{x}^j\}$ となる。座標 $(r, \bar{x}^j)$ から $ds^2_{R\times S^3}$ の座標 $(\tau, \hat{x}^j)$ への変換はスケール変換なので $O_\mu(r,\bar{x}) = e^{-\Delta\tau} O_\mu(\tau,\hat{x})$ となる。これより、

$$
\begin{aligned}
O_\mu(x) &= e^{-\Delta\tau} e^\tau \left\{O_0(\tau,\hat{x})\frac{\partial\tau}{\partial x_\mu} + O_j(\tau,\hat{x})\frac{\partial \hat{x}^j}{\partial x_\mu}\right\} \\
&= e^{-\Delta\tau}\left\{X_\mu O_0(\tau,\hat{x}) + \hat{\gamma}^{jk}\frac{\partial X_\mu}{\partial \hat{x}^k} O_j(\tau,\hat{x})\right\} \qquad (4.1.10)
\end{aligned}
$$

を得る。最後の等式は $dr = X_\mu dx_\mu$ 及び (4.1.7) からそれぞれ導かれる関係式 $\partial\tau/\partial x_\mu = e^{-\tau}X_\mu$ と

$$\frac{\partial\hat{x}^j}{\partial x_\mu} = \frac{\partial X_\nu}{\partial x_\mu}\frac{\partial\hat{x}^j}{\partial X_\nu} = e^{-\tau}(\delta_{\mu\nu} - X_\mu X_\nu)\frac{\partial\hat{x}^j}{\partial X_\nu} = \hat{\gamma}^{jk}\frac{\partial X_\mu}{\partial\hat{x}^k}$$

を使った。また、場の Hermite 性は (3.2.1) より、$O^\dagger_\mu(\tau,\hat{x}) = (-O_0(-\tau,\hat{x}), O_j(-\tau,\hat{x}))$ で与えられる。

一般的に、Euclid$R\times S^3$ 空間上の実プライマリーテンソル場 $O_{\lambda_1\cdots\lambda_l}(\tau,\hat{x})$ の変換則はこれら 15 個の共形 Killing ベクトル $\{\upsilon^\mu, \rho^\mu_{MN}, \rho^\mu_M, \tilde{\rho}^\mu_M\}$ をまとめて ρ^μ と表し、対応する生成子 $\{H, R_{MN}, Q_M, Q^\dagger_M\}$ を Q_ρ と書くと、

$$\begin{aligned} i\,[Q_\rho, O_{\lambda_1\cdots\lambda_l}] &= \left(\rho^\lambda\hat{\nabla}_\lambda + \frac{\Delta}{4}\hat{\nabla}_\lambda\rho^\lambda\right)O_{\lambda_1\cdots\lambda_l} \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}\left(\hat{\nabla}_{\lambda_i}\rho^\lambda - \hat{\nabla}^\lambda\rho_{\lambda_i}\right)O_{\lambda_1\cdots\lambda_{i-1}\lambda\lambda_{i+1}\cdots\lambda_l} \end{aligned} \tag{4.1.11}$$

で与えられる。

さらにテンソルの足を書き換えてみる。そのために、関係式

$$\sum_{M,N} h_{MN}\hat{E}^\mu_M\hat{E}^\nu_N = \hat{g}^{\mu\nu}, \qquad \hat{E}^\mu_M\hat{E}_{\mu N} = h_{MN}$$

を満たす多脚場関数

$$\hat{E}^\mu_M = (T_\mu)_M\left(X_\mu, \gamma^{jk}\frac{\partial X_\mu}{\partial\hat{x}^k}\right) = \left(\frac{\sqrt{V_3}}{2}Y_{\frac{1}{2}M}, \frac{\sqrt{V_3}}{2}\hat{\nabla}^j Y_{\frac{1}{2}M}\right)$$

を導入する。ここで、$h_{MN} = \epsilon_M\delta_{-MN}$ である。多脚場関数の複素共役は $\hat{E}^{\mu*}_M = \epsilon_M\hat{E}^\mu_{-M} = \sum_N h_{MN}\hat{E}^\lambda_N$ で与えられるので、上式は $\sum_M \hat{E}^{\mu*}_M\hat{E}^\nu_N = \hat{g}^{\mu\nu}$、$\hat{E}^{\mu*}_M\hat{E}_{\mu N} = \delta_{MN}$ と表すこともできる。この多脚場を使って場の足を

$$O_{M_1\cdots M_l} = \hat{E}^{\lambda_1}_{M_1}\cdots\hat{E}^{\lambda_l}_{M_l}O_{\lambda_1\cdots\lambda_l}$$

のように書き換える。[2] このとき、Hermite 性は (3.2.1) より

$$O^\dagger_{M_1\cdots M_l}(\tau,\hat{x}) = \sum_{N_1,\cdots N_l} I_{M_1N_1}\cdots I_{M_lN_l}\epsilon_{N_1}\cdots\epsilon_{N_l}O_{-N_1\cdots -N_l}(-\tau,\hat{x})$$

[2] 変換式 (4.1.10) より、$O_M(\tau,\hat{x}) = \hat{E}^\mu_M O_\mu(\tau,\hat{x}) = e^{\Delta\tau}(T_\mu)_M O_\mu(x)$ の関係が成り立つ。この関係式を使うとスカラー場のときと同様に $O_\mu(x)$ の共形変換則から $O_M(\tau,\hat{x})$ の共形変換則を導くことができる。

となる。ここで、

$$I_{MN} = (T_\mu^*)_M (T_\nu)_N \left(\delta_{\mu\nu} - 2X_\mu X_\nu\right) = \delta_{MN} - 2\frac{V_3}{4} Y^*_{\frac{1}{2}M} Y_{\frac{1}{2}N}$$

である。この関数は関係式 $\sum_N I_{MN} I_{NL} = \delta_{ML}$ を満たす。[3]

このとき $O_{M_1\cdots M_l}(\tau, \hat{x})$ の共形変換は[4]

$$\begin{aligned} i\left[H, O_{M_1\cdots M_l}\right] &= i\partial_\tau O_{M_1\cdots M_l}, \\ i\left[R_{MN}, O_{M_1\cdots M_l}\right] &= \left(\rho^\mu_{MN}\partial_\mu + i\Sigma_{MN}\right) O_{M_1\cdots M_l} \\ i\left[Q_M, O_{M_1\cdots M_l}\right] &= \left(\rho^\mu_M \partial_\mu + \frac{\Delta}{4}\hat{\nabla}_\mu \rho^\mu_M + \frac{1}{2}\sum_N \hat{\nabla}_\mu \rho^\mu_N \Sigma_{MN}\right) O_{M_1\cdots M_l} \\ i\left[Q^\dagger_M, O_{M_1\cdots M_l}\right] &= \left(\tilde{\rho}^\mu_M \partial_\mu + \frac{\Delta}{4}\hat{\nabla}_\mu \tilde{\rho}^\mu_M\right) O_{M_1\cdots M_l} \end{aligned}$$

と書き換えられる。ここで、$\partial_\mu = (\partial_\tau, \partial/\partial\hat{x}^j)$ は τ と Euler 角による微分である。スピン項は

$$\Sigma_{MN} O_{M_1\cdots M_l} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{N_i} \left(\Sigma_{MN}\right)_{N_i M_i} O_{M_1\cdots M_{i-1} N_i M_{i+1}\cdots M_l}$$

で与えられ、

$$(\Sigma_{MN})_{KL} = \delta_{ML}\delta_{NK} - \epsilon_K \epsilon_L \delta_{M-K}\delta_{N-L}$$

はベクトル場の場合の回転生成子である。このとき、Σ_{MN} は R_{MN} と同じ代数を満たす。また、R_{MN} の変換則から、例えば $\sum_{M,N} h_{MN} A_M B_N (= \sum_{M,N} h_{MN} A^\dagger_M B^\dagger_N)$ や $\sum_{M,N} h_{MN} A^\dagger_M B_N$ などのように、計量 h_{MN} で足を縮約するとスカラー量になる。

[3] このほか、$I^*_{MN} = I_{NM}$、$\sum_N I_{MN}\partial_j I_{NL} = -2i\rho_{jMN}$、$\sum_{L,K} I_{MK} I_{LN} \rho^*_{jLK} = -\rho_{jMN}$ などが成り立つ。

[4] R_{MN} の変換則は $\hat{E}^\lambda_M \hat{\nabla}_0 O_\lambda = \partial_\tau O_M$ と $\hat{E}^\lambda_M \hat{\nabla}_j O_\lambda = \partial_j O_M + i\sum_N \rho_{jNM} O_N$ 及び $i\rho^j_{MN}\rho_{jKL} + \hat{E}^j_L \hat{\nabla}_j \rho^k_{MN} \hat{E}^*_{kK} = i(\Sigma_{MN})_{KL}$ を使うと得られる。ここで、$i\rho_{jNM}$ は (4.1.12) で定義されている接続 1 フォームに他ならない。Q_M と $Q^\dagger_M$ の変換則は $\hat{E}^\lambda_N(\hat{\nabla}_\lambda \rho^\sigma_M - \hat{\nabla}^\sigma \rho_{\lambda M})\hat{E}^*_{\sigma L} = 2i\rho^j_M \rho_{jLN}$ と $\hat{E}^\lambda_N(\hat{\nabla}_\lambda \tilde{\rho}^\sigma_M - \hat{\nabla}^\sigma \tilde{\rho}_{\lambda M})\hat{E}^*_{\sigma L} = -2i\tilde{\rho}^j_M \rho_{jLN}$ 及び $i\rho^j_M \rho_{jLN} = \delta_{MN}\rho^0_L - \epsilon_L \delta_{M-L}\epsilon_N \rho^0_{-N}$ と $i\tilde{\rho}^j_M \rho_{jLN} = \delta_{ML}\tilde{\rho}^0_N - \epsilon_N \delta_{M-N}\epsilon_L \rho^0_{-L}$、さらに $\rho^0_M = \hat{\nabla}_\mu \rho^\mu_M/4$ と $\tilde{\rho}^0_M = -\hat{\nabla}_\mu \tilde{\rho}^\mu_M/4$ を用いると求まる。

さらに、$R \times S^3$ 上の接続１フォーム

$$\hat{\omega}_{\mu MN} = \hat{E}_M^\lambda \hat{\nabla}_\mu \hat{E}_{\lambda N}^* = (0, i\rho_{jNM}) \tag{4.1.12}$$

を導入して、共変微分を $\hat{\nabla}_\mu O_M = \partial_\mu O_M + \sum_N \hat{\omega}_{\mu MN} O_N$ と定義すると、Q_M と $Q_M^\dagger$ の共形変換は

$$\begin{aligned} i\left[Q_M, O_{M_1\cdots M_l}\right] &= \left(\rho_M^\mu \hat{\nabla}_\mu + \frac{\Delta}{4}\hat{\nabla}_\mu \rho_M^\mu + \frac{1}{4}\hat{\nabla}_\mu \rho_N^\mu \Sigma_{MN}\right) O_{M_1\cdots M_l} \\ i\left[Q_M^\dagger, O_{M_1\cdots M_l}\right] &= \left(\tilde{\rho}_M^\mu \hat{\nabla}_\mu + \frac{\Delta}{4}\hat{\nabla}_\mu \tilde{\rho}_M^\mu + \frac{1}{4}\hat{\nabla}_\mu \tilde{\rho}_N^\mu \Sigma_{MN}\right) O_{M_1\cdots M_l} \end{aligned}$$

と書き換えることができる。

状態と演算子の関係は (3.2.2) より、

$$|\{\mu_1 \cdots \mu_l\}; \Delta\rangle = \lim_{\tau \to -\infty} e^{-\Delta\tau} O_{\mu_1\cdots\mu_l}(\tau, \hat{x})|0\rangle \tag{4.1.13}$$

で与えられる。テンソルの足を $\{M_1 \cdots M_l\}$ へ変えても同様である。このとき、プライマリー状態は

$$\begin{aligned} H|\Delta, \{r\}\rangle &= \Delta|\Delta, \{r\}\rangle, \\ R_{MN}|\Delta, \{r\}\rangle &= \sum_{\{r'\}} \left(\Sigma_{MN}\right)_{\{r'\},\{r\}} |\Delta, \{r'\}\rangle, \\ Q_M|\Delta, \{r\}\rangle &= 0 \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

と定義される。ここで、$\{r\}$ は $SU(2) \times SU(2)$ のある表現で Σ_{MN} はスピン因子である。そのデッセンダント状態は $|\Delta, \{r\}\rangle$ に演算子 $Q_M^\dagger$ を作用させて生成される。

4.2 Minkowski $R \times S^3$ 上の共形代数

この節では、Minkowski$R \times S^3$ 時空上の共形代数について考える。その性質は M^4 よりも Euclid 空間上の共形代数と対応していて、前節の結果を Wick 回転することで求めることが出来る。

ここでは、実際に Minkowski$R \times S^3$ 上の共形 Killing 方程式 $\hat{\nabla}_\mu \zeta_\nu + \hat{\nabla}_\nu \zeta_\mu - \hat{g}_{\mu\nu} \hat{\nabla}_\lambda \zeta^\lambda / 2 = 0$ を解いて、15 個の共形 Killing ベクトルを求めてみる。共形 Killing 方程式を成分ごとに書くと

$$
\begin{aligned}
&3\partial_\eta \zeta_0 + \psi = 0, \qquad \partial_\eta \zeta_i + \hat{\nabla}_i \zeta_0 = 0, \\
&\hat{\nabla}_i \zeta_j + \hat{\nabla}_j \zeta_i - \frac{2}{3} \hat{\gamma}_{ij} \psi = 0
\end{aligned} \tag{4.2.1}
$$

となる。ここで、$\psi = \hat{\nabla}_i \zeta^i$ である。これらを ψ について解くと $(\Box_3 + 3)\psi = 0$ と $(\partial_\eta^2 + 1)\psi = 0$ を得る。前の式は (4.2.1) の最後の式に $\hat{\nabla}^j \hat{\nabla}^i$ を作用させると得られる。その結果を残りの共形 Killing 方程式に代入すると後の式を得る。これより、この二つの方程式を同時に満たす解は $\psi = 0$ 又は $\psi \propto e^{\pm i\eta} Y_{\frac{1}{2}M}$ と表される。

方程式 $\psi = 0$ を満たす解は、$\partial_\eta \zeta_0 = \Box_3 \zeta_0 = 0$ 及び S^3 の Killing 方程式 $\hat{\nabla}_i \zeta_j + \hat{\nabla}_j \zeta_i = 0$ を満たす解で、その一つは時間発展のベクトル $\eta^\mu = (1, 0, 0, 0)$ である。もう一つは $\zeta_0 = 0$ と $\partial_\eta \zeta_i = 0$ を同時に満たす S^3 上の Killing ベクトル

$$
\zeta^\mu_{MN} = \rho^\mu_{MN} = (0, \rho^j_{MN})
$$

である。ここで、S^3 上の Killing ベクトル ρ^j_{MN} は前節で与えた (4.1.9) と同じである。$\psi \neq 0$ の解が特殊共形変換を生成する共形 Killing ベクトル

$$
\zeta^\mu_M = \left(\zeta^0_M, \zeta^j_M \right) = \left(\frac{\sqrt{V_3}}{2} e^{i\eta} Y^*_{\frac{1}{2}M}, -i \frac{\sqrt{V_3}}{2} e^{i\eta} \hat{\nabla}^j Y^*_{\frac{1}{2}M} \right)
$$

で、その複素共役 $\zeta^{\mu *}_M$ が並進を生成する。

これらの解は、Euclid $R \times S^3$ 上の共形 Killing ベクトル ρ^μ から、$\tau = i\eta$ と Wick 回転することで得ることが出来る。Dilatation は $i[H, O_{\lambda_1 \cdots \lambda_l}] = \partial_\eta O_{\lambda_1 \cdots \lambda_l}$ となり、H は Minkowski$R \times S^3$ 上では Hamilton 演算子となる。

共形変換の生成子は共形 Killing ベクトル ζ^μ とストレステンソルを用いて

$$
Q_\zeta = \int_{S^3} d\Omega_3 \zeta^\mu T_{\mu 0} \tag{4.2.2}
$$

で与えられる。(4.2.1) 式とストレステンソルの保存則 $\hat{\nabla}^\mu T_{\mu 0} = -\partial_\eta T_{00} + \hat{\nabla}^i T_{i0} = 0$ を使うと、共形変換の生成子は $\partial_\eta Q_\zeta = -\int d\Omega_3 \psi T^\lambda{}_\lambda/3 = 0$ のように保存することが分かる。

15 個の共形 Killing ベクトル $\zeta^\mu = \{\eta^\mu, \zeta^\mu_{MN}, \zeta^\mu_M, \zeta^{\mu *}_M\}$ に対応する共形変換の生成子を前節と同じように $Q_\zeta = \{H, R_{MN}, Q_M . Q^\dagger_M\}$ と書くことにする。定義式から Hamilton 演算子と六個の S^3 回転の生成子はそれぞれ

$$H = \int_{S^3} d\Omega_3 T_{00}, \qquad R_{MN} = \int_{S^3} d\Omega_3 \zeta^j_{MN} T_{j0}$$

で与えられる。特殊共形変換の生成子はストレステンソルの保存則及び共形 Killing 方程式を使うと

$$Q_M = \sqrt{\mathrm{V}_3} P^{(+)} \int_{S^3} d\Omega_3 Y^*_{\frac{1}{2}M} T_{00} \tag{4.2.3}$$

と書ける。ここで、$P^{(+)} = e^{i\eta}(1 + i\partial_\eta)/2$ である。S^3 の空間積分を実行すると $e^{\pm i\eta}$ の関数だけが残ることが示せるので、$P^{(+)}$ はそのうちの $e^{-i\eta}$ 部分のみを選択して生成子が時間に依存しないことを保障する因子である。Q_M は四個の特殊共形変換の生成子で、その Hermite 共役 $Q^\dagger_M$ は並進の生成子である。

共形変換の生成子 $Q_\zeta = \{H, R_{MN}, Q_M . Q^\dagger_M\}$ が満たす共形代数は前節で与えた (4.1.8) と同じになる。実プライマリー対称トレースレステンソル場 $O_{\lambda_1 \cdots \lambda_l}(\eta, \hat{x})$ の共形変換は、Euclid 空間での式 (4.1.11) に於いて、計量とともに Q_ρ と ρ^μ をそれぞれ Q_ζ と ζ^μ に置き換えた形になる。また、実テンソル場の Hermite 性は通常の $O^\dagger_{\lambda_1 \cdots \lambda_l}(\eta, \hat{x}) = O_{\lambda_1 \cdots \lambda_l}(\eta, \hat{x})$ で与えられる。状態演算子対応は

$$|\{\mu_1 \cdots \mu_l\}; \Delta\rangle = \lim_{\eta \to i\infty} e^{-i\Delta\eta} O_{\mu_1 \cdots \mu_l}(\eta, \hat{x})|0\rangle \tag{4.2.4}$$

で与えられ、プライマリー状態は同じく (4.1.14) で定義される。

4.3 $R \times S^3$ 上の自由スカラー場の例

ここでは、簡単な例として、Minkowski$R \times S^3$ 上の自由スカラー場の場合を取り上げる。

共形不変なスカラー場の作用は $R \times S^3$ 上で

$$I = \int d\eta \int_{S^3} d\Omega_3 \frac{1}{2} X \left(-\partial_\eta^2 + \Box_3 - 1 \right) X$$

と書ける。作用の中で次元が不足して見える部分は S^3 の半径を 1 に取ったことによる。調和関数を使って $X \propto e^{-i\omega\eta} Y_{JM}$ と展開すると、運動方程式から分散関係 $\omega^2 - (2J+1)^2 = 0$ を得るので、スカラー場は

$$X = \sum_{J \geq 0} \sum_M \frac{1}{\sqrt{2(2J+1)}} \left\{ \varphi_{JM} e^{-i(2J+1)\eta} Y_{JM} + \varphi^\dagger_{JM} e^{i(2J+1)\eta} Y^*_{JM} \right\}$$

とモード展開される。

量子化は通常の手続きに従って行うことができる。共役運動量は $\mathsf{P}_X = \partial_\eta X$ で与えられ、場の変数 X との同時刻交換関係は $[X(\eta, \mathbf{x}), \mathsf{P}_X(\eta, \mathbf{x}')] = i\delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ と設定される。ここで、S^3 上のデルタ関数は完全系より

$$\begin{aligned} \delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= \sum_{J \geq 0} \sum_M Y^*_{JM}(\mathbf{x}) Y_{JM}(\mathbf{x}') \\ &= 8\delta(\alpha - \alpha')\delta(\cos\beta - \cos\beta')\delta(\gamma - \gamma') \end{aligned}$$

と表すことができる。このとき、生成消滅演算子の交換関係は

$$[\varphi_{J_1 M_1}, \varphi^\dagger_{J_2 M_2}] = \delta_{J_1 J_2} \delta_{M_1 M_2}$$

で与えられる。Hamilton 演算子は作用関数から

$$\begin{aligned} H &= \int_{S^3} d\Omega_3 : \left\{ \frac{1}{2} \mathsf{P}_X^2 - \frac{1}{2} X \left(\Box_3 - 1 \right) X \right\} : \\ &= \sum_{J \geq 0} \sum_M (2J+1) \varphi^\dagger_{JM} \varphi_{JM} \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

と導かれる。

共形代数の生成子　共形不変なスカラー場の背景時空上のストレステンソルは

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{3} \hat{\nabla}_\mu X \hat{\nabla}_\nu X - \frac{1}{3} X \hat{\nabla}_\mu \hat{\nabla}_\nu X - \frac{1}{6} \hat{g}_{\mu\nu} \left\{ \hat{\nabla}_\lambda X \hat{\nabla}^\lambda X + \frac{1}{6} \hat{R} X^2 \right\} + \frac{1}{6} \hat{R}_{\mu\nu} X^2$$

と計算される。トレースを取ると $T^\lambda_{\ \lambda} = \frac{1}{3}X(-\hat{\nabla}^2 + \frac{1}{6}\hat{R})X = 0$ のように運動方程式に比例して消えるので、共形変換の生成子は保存することがわかる。

ストレステンソルを代入して S^3 上の積分を実行すると生成子を求めることができる。Hamilton 演算子はすでに (4.3.1) 式で与えられたものになる。特殊共形変換の生成子は (4.2.3) 式に正規順序付けされたストレステンソルを代入すると、

$$
\begin{aligned}
Q_M &= P^{(+)} \sum_{J_1,M_1} \sum_{J_2,M_2} \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\mathrm{V}_3}{(2J_1+1)(2J_2+1)}} \int_{S^3} d\Omega_3 Y^*_{\frac{1}{2}M} Y_{J_1M_1} Y_{J_2M_2} \\
&\quad \times \Big\{ \Big[-(2J_1+1)(2J_2+1) + (2J_2+1)^2 - \frac{1}{2} \Big] \\
&\qquad \times \Big(\varphi_{J_1M_1}\varphi_{J_2M_2} e^{-i(2J_1+2J_2+2)\eta} \\
&\qquad\qquad + \epsilon_{M_1}\varphi^\dagger_{J_1-M_1}\epsilon_{M_2}\varphi^\dagger_{J_2-M_2} e^{i(2J_1+2J_2+2)\eta} \Big) \\
&\quad + \Big[(2J_1+1)(2J_2+1) + (2J_2+1)^2 - \frac{1}{2} \Big] \\
&\qquad \times \Big(\varphi_{J_1M_1}\epsilon_{M_2}\varphi^\dagger_{J_2-M_2} e^{-i(2J_1-2J_2)\eta} \\
&\qquad\qquad + \epsilon_{M_1}\varphi^\dagger_{J_1-M_1}\varphi_{J_2M_2} e^{i(2J_1-2J_2)\eta} \Big) \Big\} \\
&= \sum_{J \geq 0} \sum_{M_1,M_2} \mathbf{C}^{\frac{1}{2}M}_{JM_1,J+\frac{1}{2}M_2} \sqrt{(2J+1)(2J+2)}\, \epsilon_{M_1}\varphi^\dagger_{J-M_1}\varphi_{J+\frac{1}{2}M_2}
\end{aligned}
$$

と書ける。関数 $\mathbf{C}$ は三つのスカラー調和関数の積を S^3 上で積分して得られる $SU(2) \times SU(2)$Clebsch-Gordan 係数で、

$$
\begin{aligned}
\mathbf{C}^{JM}_{J_1M_1,J_2M_2} &= \sqrt{\mathrm{V}_3} \int_{S^3} d\Omega_3 Y^*_{JM} Y_{J_1M_1} Y_{J_2M_2} \\
&= \sqrt{\frac{(2J_1+1)(2J_2+1)}{2J+1}} C^{Jm}_{J_1m_1,J_2m_2} C^{Jm'}_{J_1m'_1,J_2m'_2} \qquad (4.3.2)
\end{aligned}
$$

で与えられる。$C^{Jm}_{J_1m_1,J_2m_2}$ は通常の Clebsch-Gordan 係数で、これより $J + J_1 + J_2$ は整数で三角不等式 $|J_1 - J_2| \leq J \leq J_1 + J_2$ 及び $M = M_1 + M_2$ を満たす。生成子 Q_M には $J = 1/2$ をもつ $\mathbf{C}$ 係数が現れる。また、$\mathbf{C}$ は実関数で、関係式 $\mathbf{C}^{JM}_{J_1M_1,J_2M_2} = \mathbf{C}^{JM}_{J_2M_2,J_1M_1} = \mathbf{C}^{J-M}_{J_1-M_1,J_2-M_2} = \epsilon_{M_2}\mathbf{C}^{J_1M_1}_{JM,J_2-M_2}$ 及び $\mathbf{C}^{JM}_{00,JN} = \delta_{MN}$ を満たす。

回転生成子は **4** 表現の足 M として前述の $\{1, 2, 3, 4\}$ を使うと、[5]

$$\begin{aligned} R_{11} &= \sum_{J>0}\sum_{M}(m+m')\varphi^{\dagger}_{JM}\varphi_{JM}, \quad R_{22} = \sum_{J>0}\sum_{M}(m-m')\varphi^{\dagger}_{JM}\varphi_{JM}, \\ R_{21} &= \sum_{J>0}\sum_{M}\sqrt{(J+1-m')(J+m')}\varphi^{\dagger}_{JM}\varphi_{J\overline{M}}, \\ R_{31} &= \sum_{J>0}\sum_{M}\sqrt{(J+1-m)(J+m)}\varphi^{\dagger}_{JM}\varphi_{J\underline{M}} \end{aligned}$$

を得る。上付及び下付の線をもった指数は $\overline{M} = (m, m'-1)$ と $\underline{M} = (m-1, m')$ で定義される。

自由スカラー場の共形次元 1 のプライマリー場として変換する。実際に生成子と場の演算子の交換関係を計算すると

$$i[Q_\zeta, X] = \zeta^\mu \hat{\nabla}_\mu X + \frac{1}{4}\hat{\nabla}_\mu \zeta^\mu X$$

を得る。例えば共形 Killing ベクトルが η^μ のときは生成子が Hamilton 演算子なので、$i[H, X] = \partial_\eta X$ と書けることがすぐに分かる。特殊共形変換の場合は変換規則の右辺に ζ^μ_M を代入して、調和関数の積の展開式 (E.3.1) を使って書き換えると左辺の交換関係 $i[Q_M, X]$ と一致することが示せる。

プライマリー状態の構成　プライマリー状態は (4.1.14) 式で定義される。その最後の条件から、プライマリー状態の構成は特殊共形変換の生成子 Q_M と交換する生成演算子を捜すことと同じにある。

[5]回転生成子は、新たな $SU(2) \times SU(2)$Clebsch-Gordan 係数 $\mathbf{G}^{JM}_{J_1(M_1y_1);J_2M_2}$(E.2.3) を導入すると、簡潔に表すことができる。この係数を使うと S^3 上の Killing ベクトルは $\zeta^j_{MN} = i(\sqrt{\mathrm{V}_3}/2)\sum_{V,y}\mathbf{G}^{1/2M}_{1/2(Vy);1/2N}Y^{j*}_{1/2(Vy)}$ のように $J = 1/2$ のベクトル調和関数 [付録 E 参照] で展開できることから、回転生成子は

$$R_{MN} = \frac{1}{2}\sum_{J\geq 0}\sum_{S_1,S_2}\sum_{V,y}\epsilon_V \mathbf{G}^{\frac{1}{2}M}_{\frac{1}{2}(-Vy);\frac{1}{2}N}\mathbf{G}^{JS_1}_{\frac{1}{2}(Vy);JS_2}\varphi^{\dagger}_{JS_1}\varphi_{JS_2}$$

と表すことが出来る。具体的な値 $\mathbf{G}^{1/2M}_{J(Vy);JN} = -\sqrt{2J(2J+2)}C^{1/2m}_{J+yv,Jn}C^{1/2m'}_{J-yv',Jn'}$ と $\mathbf{G}^{JM}_{1/2(Vy);JN} = -\sqrt{2J(2J+2)}C^{Jm}_{1/2+yv,Jn}C^{Jm'}_{1/2-yv',Jn'}$ を代入すると本文の式になる。一般的に、係数 $\mathbf{G}$ は $J = 1/2$ のときは $J_1 = J_2$ の場合にのみ値をもち、$J_1 = 1/2$ のときは $J = J_2$ のときのみ値をもつ。

スカラー場の生成モード $\varphi^\dagger_{JM}$ と Q_M との交換関係は

$$[Q_M, \varphi^\dagger_{JM_1}] = \sqrt{2J(2J+1)} \sum_{M_2} \epsilon_{M_2} \mathbf{C}^{\frac{1}{2}M}_{JM_1, J-\frac{1}{2}-M_2} \varphi^\dagger_{J-\frac{1}{2}M_2}$$

で与えられる。このように、Q_M と交換する生成モードは共形次元 1 を持つ $\varphi^\dagger_{00}$ だけである。ここでは、スカラー場に Z_2 対称性 $X \leftrightarrow -X$ を課すことにして、$\varphi^\dagger_{00}$ の偶数積だけを許すことにする。

次に生成モードの積で定義された演算子を考える。共形次元 $2L+2$ を持つ表現 J に属する生成複合演算子の一般形は

$$\Phi^{[L]\dagger}_{JN} = \sum_{K=0}^{L} \sum_{M_1, M_2} f(L,K) \mathbf{C}^{JN}_{L-KM_1, KM_2} \varphi^\dagger_{L-KM_1} \varphi^\dagger_{KM_2}$$

で与えられる。Q_M との交換関係を計算すると

$$\begin{aligned}
[Q_M, \Phi^{[L]\dagger}_{JN}] &= \sum_{K=0}^{L} \sum_{M_1, M_2} \varphi^\dagger_{L-K-\frac{1}{2}M_1} \varphi^\dagger_{KM_2} \\
&\times \sum_S \left\{ \sqrt{(2L-2K)(2L-2K+1)} f(L,K) \epsilon_S \mathbf{C}^{\frac{1}{2}M}_{L-K-\frac{1}{2}M_1, L-K-S} \mathbf{C}^{JN}_{L-KS, KM_2} \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{(2K+1)(2K+2)} f\left(L, K+\frac{1}{2}\right) \epsilon_S \mathbf{C}^{\frac{1}{2}M}_{KM_2, K+\frac{1}{2}-S} \mathbf{C}^{JN}_{K+\frac{1}{2}S, L-K-\frac{1}{2}M_1} \right\}
\end{aligned}$$

となる。

ここで、計算に役立つ交差関係式 (crossing relation) を与えて置く。四つのスカラー調和関数の積を S^3 上で空間積分した

$$\int_{S^3} d\Omega_3 Y^*_{J_1M_1} Y_{J_2M_2} Y^*_{J_3M_3} Y_{J_4M_4}$$

を考える。二つのスカラー調和関数の積は別のスカラー調和関数を用いて、

$$Y_{J_1M_1} Y_{J_2M_2} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{V}_3}} \sum_{J \geq 0} \sum_M \mathbf{C}^{JM}_{J_1M_1, J_2M_2} Y_{JM}$$

と展開できる。この式を使って積分を二通りに評価すると、交差関係式

$$\sum_{J \geq 0} \sum_M \epsilon_M \mathbf{C}^{J_1M_1}_{J_2M_2, J-M} \mathbf{C}^{J_3M_3}_{JM, J_4M_4} = \sum_{J \geq 0} \sum_M \epsilon_M \mathbf{C}^{J_1M_1}_{J_4M_4, J-M} \mathbf{C}^{J_3M_3}_{JM, J_2M_2} \quad (4.3.3)$$

を得る。

この関係式を用いると、交換子 $[Q_M, \Phi^{[L]\dagger}_{JN}]$ が消えるための条件は、$J = L$ で、L が正の整数、且つ $f(L, K)$ が漸化式

$$f\left(L, K + \frac{1}{2}\right) = -\sqrt{\frac{(2L-2K)(2L-2K+1)}{(2K+1)(2K+2)}} f(L, K)$$

を満たすときのみであることが分かる。この漸化式を解くと、L に依存した規格化定数を除いて、係数 f は

$$f(L, K) = \frac{(-1)^{2K}}{\sqrt{(2L-2K+1)(2K+1)}} \begin{pmatrix} 2L \\ 2K \end{pmatrix} \tag{4.3.4}$$

と決まる。このようにして Q_M と可換な生成複合演算子が求められ、それを $\Phi^\dagger_{LN} = \Phi^{[L]\dagger}_{LN}$ と書くことにする。$L = 0$ の演算子はすでに求めた $\Phi^\dagger_{00} = (\varphi^\dagger_{00})^2$ となる。

演算子 $\Phi^\dagger_{LN}$ を $SU(2) \times SU(2)$Clebsch-Gordan 係数を用いて組み合わせると、Q_M と可換な生成演算子の基底をつくることができる。Clebsch-Gordan 係数がもつ交差関係等により、Q_M と可換ないかなる生成演算子もそのような基本形で表すことができると思われる。このように、演算子 $\Phi^\dagger_{LN}(L \in \mathbf{Z}_{\geq 0})$ がスカラー場のプライマリー状態の基本的な構成要素を与える。

具体的にプライマリー状態と場の演算子との関係を見てみる。先ず共形次元 $2n$ をもつ最も簡単なプライマリー状態 $\varphi^{2n\dagger}_{00}|0\rangle$ は状態演算子対応 (4.2.4) により X^{2n} と対応する。共形次元 4 をもつ $\Phi^\dagger_{1M}|0\rangle$ はトレースレスストレステンソル $T_{\mu\nu}$ と対応する。[6] 同様に、プライマリー状態 $\Phi^\dagger_{LM}|0\rangle$ は偶数スピン $l = 2L$ の対称トレースレステンソル場と対応する。共形次元が $2L + 2$ で、ユニタリ性条件 (2.3.2) の下限の等式を満たすことから、そのテンソルは保存する。[7] これは自由場の場合にのみ成り立つ。

[6]具体的には、$\Phi^\dagger_{1M}|0\rangle$ は $\lim_{\eta \to i\infty} e^{-i4\eta} \sum_{M_1, M_2} \mathbf{C}^{1M}_{1/2M_1, 1/2M_2} \hat{E}^\mu_{M_1} \hat{E}^\nu_{M_2} T_{\mu\nu}|0\rangle$ と対応する。(注：$\mathbf{C}^{00}_{1/2M_1, 1/2M_2} = \epsilon_{M_2}\delta_{M_1 - M_2} = h_{M_1 M_2}$ で縮約したものは $\sum_{M_1, M_2} h_{M_1 M_2} \hat{E}^\mu_{M_1} \hat{E}^\nu_{M_2} = \eta^{\mu\nu}$ よりストレステンソルのトレースに比例するので消える。)

[7]自由場の場合、l が偶数のとき、ユニタリ条件の等式 $\Delta = 2l + 2$ を満たす対称トレー

スレステンソル $T_{\mu_1 \cdots \mu_l}$ が存在して、それは保存則 $\partial^{\mu_1} T_{\mu_1 \cdots \mu_l} = 0$ を満たす。このテンソルを用いると無限個の保存電荷 $Q_\kappa = \int d\Omega_3 \kappa^{\mu_1 \cdots \mu_{l-1}} T_{\mu_1 \cdots \mu_{l-1} 0}$ が構成できる。ここで、$\kappa^{\mu_1 \cdots \mu_{l-1}}$ は共形 Killing テンソルである。

第5章　共形異常と一般座標不変性

この章では共形異常が一般座標不変性を保障するために現れる量であることを見る。

5.1　Wess-Zumino積分可能条件

共形異常は共系不変な作用をもつ理論を考えたとき、Weyl変分 $\delta g_{\mu\nu} = 2\omega g_{\mu\nu}$ のもとで古典的には不変なのに、量子効果を含むその有効作用 Γ を考えると不変でなくなることを指す。式で表すと

$$\delta_\omega \Gamma = \int d^4x\sqrt{-g}\omega\left\{aC^2_{\mu\nu\lambda\sigma} + bG_4 + cR^2 + d\nabla^2 R + eF^2_{\mu\nu}\right\}$$

の右辺が共形異常である。ここで、$C^2_{\mu\nu\lambda\sigma}$ はWeylテンソルの二乗、G_4 はEuler密度で、それぞれ

$$\begin{aligned} C^2_{\mu\nu\lambda\sigma} &= R^2_{\mu\nu\lambda\sigma} - 2R^2_{\mu\nu} + \frac{1}{3}R^2, \\ G_4 &= R^2_{\mu\nu\lambda\sigma} - 4R^2_{\mu\nu} + R^2 \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

と定義される。係数を無次元なものに限ると、重力場だけで構成される可能な項は以上の4種類である。最後の $F^2_{\mu\nu}$ はゲージ場の場の強さの二乗で、Weyl二乗項との比較のために導入した。

共形異常は紫外発散にともなって生じる量で、右辺は紫外発散のくりこみ項(counterterm)、すなわち裸の作用(bare action)の形を指定している。ここでは、有効作用としていわゆるWess-Zumino積分可能条件(Wess-Zumino integrability condition)$[\delta_{\omega_1}, \delta_{\omega_2}] = 0$ を満たすものを考える。実

際、有効作用 (5.1.1) をさらに変分すると

$$[\delta_{\omega_1}, \delta_{\omega_2}]\,\Gamma = 24c \int d^4x\sqrt{-g}R\left(\omega_1\hat{\nabla}^2\omega_2 - \omega_2\hat{\nabla}^2\omega_1\right)$$

を得る事から $c=0$ の条件が出てくる。この条件は、重力場の共形因子についての経路積分が経路の選び方によらずに厳密に実行できることを保障するもので、曲がった時空上の場の量子論及び量子重力理論の有効作用が存在するための条件と考えることができる。

このように R^2 以外の共形異常項は積分可能になる。ここでは、実際に重力場の共形因子について積分を実行して、有効作用を求めることを考える。

5.2 Riegert-Wess-Zumino作用

時空の計量を共形因子とそれ以外に分解して、

$$g_{\mu\nu} = e^{2\phi}\bar{g}_{\mu\nu}$$

と表し、ϕ について積分することを考える。

はじめに Euler 密度を積分することを考える。ここでは、通常の Euler 密度に全微分項を加えた

$$E_4 = G_4 - \frac{2}{3}\nabla^2 R \tag{5.2.1}$$

を考える。この拡張された Euler 密度 E_4 は関係式 $\sqrt{-g}E_4 = \sqrt{-\bar{g}}(4\bar{\Delta}_4\phi + \bar{E}_4)$ を満たすことから、すぐに積分が実行できて、

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{RWZ}}(\phi,\bar{g}) &= -\frac{b_1}{(4\pi)^2}\int d^4x\int_0^\phi d\phi\sqrt{-g}E_4 \\ &= -\frac{b_1}{(4\pi)^2}\int d^4x\sqrt{-\bar{g}}\left(2\phi\bar{\Delta}_4\phi + \bar{E}_4\phi\right) \end{aligned}$$

を得る。ここで、$\sqrt{-g}\Delta_4$ は自己随伴 (self-adjoint) 条件 $\int d^4x\sqrt{-g}A\Delta_4 B = \int d^4x\sqrt{-g}(\Delta_4 A)B$ を満たす、スカラー場に対して共形不変な 4 階微分演算子で、

$$\Delta_4 = \nabla^4 + 2R^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu - \frac{2}{3}R\nabla^2 + \frac{1}{3}\nabla^\mu R\nabla_\mu \tag{5.2.2}$$

と定義される。この作用のことを Riegert-Wess-Zumino 作用と呼ぶ。このことから、以下では共形モード ϕ のことを "Riegert 場" とも呼ぶことにする。全体の係数 b_1 は実際に曲がった時空でループ補正を計算しなければ決まらない定数である。例えば、重力と共形不変に結合している自由場として、N_X 個のスカラー場、N_W 個の Weyl フェルミオン、N_A 個のゲージ場を考えると、その値は

$$b_1 = \frac{1}{360}\left(N_X + \frac{11}{2}N_W + 62N_A\right) \tag{5.2.3}$$

となる。

積分可能条件についてもう少し詳しく見てみる。曲がった時空での共形不変な場 f の作用 I は Riegert 場 ϕ に依存しないことから、$I(f,g) = I(f,\bar{g})$(スカラー場の場合は場 f も変換して ϕ の依存性を除く) が成り立つ。そのため、Riegert 場 ϕ の依存性は経路積分の測度から来る、すなわち計量 $g_{\mu\nu}(= e^{2\phi}\bar{g}_{\mu\nu})$ 上で定義された測度を計量 $\bar{g}_{\mu\nu}$ 上の測度に書き換えたときに生じる Jacobian を考慮して、$[df]_g = [df]_{\bar{g}} e^{iS(\phi,\bar{g})}$ と書くと、有効作用は

$$\begin{aligned} e^{i\Gamma(g)} &= \int [df]_g e^{iI(f,g)} \\ &= e^{iS(\phi,\bar{g})} \int [df]_{\bar{g}} e^{iI(f,\bar{g})} = e^{iS(\phi,\bar{g})} e^{i\Gamma(\bar{g})} \end{aligned}$$

と書ける。ここで、計量 $g_{\mu\nu}$ を不変に保つ変換

$$\phi \to \phi - \omega, \qquad \bar{g}_{\mu\nu} \to e^{2\omega}\bar{g}_{\mu\nu}$$

を上式に適用すると、左辺は不変で、右辺は

$$e^{iS(\phi-\omega, e^{2\omega}\bar{g})} e^{i\Gamma(e^{2\omega}\bar{g})} = e^{iS(\phi-\omega, e^{2\omega}\bar{g})} e^{iS(\omega,\bar{g})} e^{i\Gamma(\bar{g})}$$

となる。これが元の $e^{i\Gamma(g)}$ に戻るためには S は関係式

$$S(\phi-\omega, e^{2\omega}\hat{g}) + S(\omega,\hat{g}) = S(\phi,\hat{g})$$

を満たさなければならない。この関係式は Wess-Zumino 積分条件を別の形で表現したもので、$S_{\rm RWZ}$ がこの条件を満たすことは定義式 (5.2.2) より、積分領域 $[0,\phi]$ を $[0,\omega]$ と $[\omega,\phi]$ に分解すれば、明らかである。

このように、同時シフト変換 (5.2.4) の下での不変性は一般座標不変性を保障するものであり、Riegert-Wess-Zumino 作用はまさにそれを保障するために現れる。

Riegert-Wess-Zumino 作用 $S_{\rm RWZ}$ 自体は一般座標不変な形をしていない。この作用に Riegert 場 ϕ に依存しない非局所的な項を加えると一般座標不変な有効作用を得ることができる。それは有効作用の関係式 (5.2.4) の中の $\Gamma(\bar{g})$ に相当する部分を加えることで、ここでは

$$\Gamma_{\rm Riegert}(g) = S_{\rm RWZ}(\phi, \bar{g}) + \Gamma_{\rm Riegert}(\bar{g})$$

と表され、一般座標不変な有効作用は

$$\Gamma_{\rm Riegert}(g) = -\frac{b_1}{(4\pi)^2}\int d^4x\sqrt{-g}E_4\frac{1}{\Delta_4}E_4$$

で与えられる。

Riegert-Wess-Zumino 作用 $S_{\rm RWZ}$ の重要性は次章で量子論的な一般座標不変性を考えるとさらに明らかになる。

量子重力を考えたとき、Wess-Zumino 積分可能条件は重力場の共形因子の経路積分が経路の選び方によらずに厳密に実行できることを保障している。また、ここでは右辺に現れる項として 4 階微分作用項のみを考えているが、Einstein 作用や宇宙項を加えて同様の議論をするとそれらは自明に積分可能になるので作用として加えることことができる。

5.3　共形異常と物理的結合定数

次にゲージ場の項及び Weyl 二乗項について考える。最初に QED の $U(1)$ ゲージ場の場合について議論し、それを基にに Weyl 二乗項の場合について議論する。

$U(1)$ ゲージ場の共形異常 $F_{\mu\nu}^2$ を積分すると Wess-Zumino 作用 $S_{\rm QED}(\phi, \bar{g}) = -a\phi\sqrt{-g}F_{\mu\nu}^2/4$ が得られる。すなわち、この作用を ϕ で微分すれば共形異常が出てくる。その係数はすでに計算されているが、ここではそれが一般座標不変性から、ベータ関数と関係して、決まることを見る。

QED は質量項を無視すれば共形不変なので、その作用は Riegert 場 ϕ に依存しない。ϕ 依存性は測度から誘導される $S_{\rm QED}$ である。一方、有効作用の ϕ に寄らないの部分を $\Gamma_{\rm QED}(\bar{g})$ と書くと、運動量表示で、

$$\Gamma_{\rm QED}(\bar{g}) = -\frac{1}{4}\left\{1 - \frac{e_r^2}{12\pi^2}\log\left(\frac{k^2}{\mu^2}\right)\right\}\sqrt{-g}F_{\mu\nu}^2$$

と与えられる。ここで、μ は繰り込みに伴う任意スケール、$k^2 = \bar{g}^{\mu\nu}k_\mu k_\nu$ は計量 $\bar{g}_{\mu\nu}$ の空間での運動量の二乗である。$\bar{g}_{\mu\nu}$ として Minkowski 計量を選ぶと通常の QED の 1 ループの有効作用になる。これよりベータ関数は $\beta_e = e_r^3/12\pi^2$ と決まる。ここで、e_r は繰り込まれた結合定数を表す。これに Wess-Zumino 作用を加えると一般座標不変な有効作用が得られる。同時シフト変換 (5.2.4) の下で不変であることを要求すると、$k^2 \to e^{-2\omega}k^2$ に注意すると、Wess-Zumino 作用の係数は $a = e_r^2/6\pi$ と決まって

$$-\frac{1}{4}\left\{1 + \frac{e_r^2}{6\pi^2}\phi - \frac{e_r^2}{12\pi^2}\log\left(\frac{k^2}{\mu^2}\right)\right\}\sqrt{-g}F_{\mu\nu}^2$$

を得る。ここで、元々の計量 $g_{\mu\nu}(= e^{2\phi}\bar{g}_{\mu\nu})$ で定義される運動量の二乗

$$p^2 = \frac{k^2}{e^{2\phi}} \tag{5.3.1}$$

を導入すると、一般座標不変な有効作用は

$$\Gamma_{\rm QED}(g) = -\frac{1}{4}\left\{1 - \frac{e_r^2}{12\pi^2}\log\left(\frac{p^2}{\mu^2}\right)\right\}\sqrt{-g}F_{\mu\nu}^2$$

と求まる。このように、ゲージ場の共形異常は繰り込みの共形不変性を破るスケール μ に伴って現れる非局所項を一般座標不変な形に保つために表れる。宇宙論では、p を物理的運動量、k を共動運動量 (comoving momentum) と呼ぶ。

同様にして、Weyl 二乗項の場合について考える。ここでは新しい無次元の結合定数 t を導入した Weyl 作用 $-(1/t^2)\int d^4x\sqrt{-g}C_{\mu\nu\lambda\sigma}^2$ を考える。この作用はゲージ場と同様に共形不変であることから、$\bar{g}_{\mu\nu}$ だけで書ける。ここでは曲がった時空上の共形不変な場の量子論を考え、それによる Weyl 作用への量子補正を計算すると、有効作用は

$$\Gamma_{\rm Weyl}(g) \quad = \quad -\left\{\frac{1}{t_r^2} + \beta_0\log\left(\frac{k^2}{\mu^2}\right) - 2\beta_0\phi\right\}\sqrt{-g}C_{\mu\nu\lambda\sigma}^2 \tag{5.3.2}$$

で与えられる。右辺の第二項は$\bar{g}_{\mu\nu}$上の場の理論として計算した量である。例えば、トレースレステンソル場$h_{\mu\nu}$を導入して、計量$\bar{g}_{\mu\nu}$をMinkowski時空の回りで$\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + th_{\mu\nu}$と展開すると、重力場との相互作用は$I_{\rm int} = \int d^4x t h_{\mu\nu} T^{\mu\nu}/2$で与えられる。ここで、$T^{\mu\nu}$は共形不変な場のストレステンソルで、トレースレスの条件を満たす。この相互作用を用いて$h_{\mu\nu}$の2点相関関数を計算すると第二項が得られる。係数β_0は

$$\beta_0 = \frac{1}{240(4\pi)^2}\left(N_X + 3N_W + 12N_A\right)$$

と計算され、結合定数tのベータ関数が$\beta_t = -\beta_0 t_r^3$と求まって、漸近自由性を示す。

第三項が同時シフト変換(5.2.4)の下で不変になるために現れるWess-Zumino作用で、一般座標不変な有効作用は物理的運動量pで表されたランニング結合定数

$$\bar{t}_r^2(p) = \frac{1}{\beta_0 \log(p^2/\Lambda_{\rm QG}^2)} \tag{5.3.3}$$

を用いると、

$$\Gamma_{\rm Weyl}(g) = -\frac{1}{\bar{t}_r^2(p)}\sqrt{-g}C_{\mu\nu\lambda\sigma}^2 \tag{5.3.4}$$

の形にまとめることができる。ここで、$\Lambda_{\rm QG} = \mu \exp(-1/2\beta_0 t_r^2)$は新しい重力の赤外スケールである。

背景時空(例えばMinkowski時空)上での共形不変な場のストレステンソル$T^{\mu\nu}$とすると、重力場との相互作用は$I_{\rm int} = t\int d^4x\sqrt{-\hat{g}}h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}/2$で与えられるので、ストレステンソルの2点相関関数の係数はβ_0に比例する。

最後に注意すべき点として、量子重力あるいは重力と結合した量子場理論には必ず共形異常が現れるが、第6章で議論するように、これは一般座標不変性を保障するために必要な項であって、ゲージ理論に於ける「量子異常」とは区別して考えなければならない。[1]

[1] また、Adler-Bardeen定理のような1ループ計算が厳密になるという定理も共形異常には存在しない。

量子重力に現れる共形異常は結合定数に依存する部分と依存しない部分に分けて考える必要がある。先にも述べたように、結合定数 t によらない最低次の共形異常 (Riegert 作用) はむしろその名に反して共形不変性を保障するために現れる。一方、結合定数に依存した共形異常は通常の共形不変性の破れを表す量で、その係数はベータ関数で与えられる。このように、t の高次の摂動項は $t=0$ で与えられる共形場理論からのズレの度合いを表している。

第6章　量子重力と共形場理論

量子重力の作用を決めるために、次の三つの基本条件を課す:

- 一般座標不変性/背景時空独立性
- 有限性
- 4 次元時空

最初に挙げた一般座標不変性は Einstein 重力理論の基本原理の一つであり、この対称性が量子論でも成り立つと考える。重力の量子論は計量場の経路積分として定義されるので、一般座標不変性は厳密には背景時空独立性として表される。

物理的に意味のある量は有限でなければならない。二番目の条件は量子重力ではくりこみ可能性のことを指すとともに、時空に特異点が存在しないことも意味している。また、いくつかの高次元時空のモデルが提案されているが、4 次元時空は知られている量子場のくりこみ可能性を保障する次元であり、観測からも余剰次元の存在を示唆する事実もないことから、時空は 4 次元とする[1]。

6.1　量子重力の作用

量子重力は一般座標不変な無次元の作用 I による重み e^{iI} を計量場について経路積分することで定義される。本書で議論するくりこみ可能な重

[1]最近の実験によって Einstein 理論に宇宙項を加える必要があることが確かめられた。これは、ニュートリノの質量と同様に、対称性によって否定されない項は存在することを示唆している。量子重力の作用を決めるに当たって、上記の三つの条件から排除されない項はすべて考えることにする。

力の量子論は

$$I = \int d^4x\sqrt{-g}\left\{-\frac{1}{t^2}C^2_{\mu\nu\lambda\sigma} - bG_4 + \frac{1}{\hbar}\left(\frac{1}{16\pi G}R - \Lambda + \mathcal{L}_{\mathrm{M}}\right)\right\} \quad (6.1.1)$$

で定義される。最初の二項は (5.1.1) で導入した共形不変な Weyl 作用と Euler 項で、t は量子重力のダイナミクスを支配する無次元の結合定数である。Euler 項に比例した発散を取り除くために係数 b を導入している。また、Euler 項は運動項を含まないことから、この定数は独立な結合定数ではなく他の結合定数を用いて展開される。

定数 G と Λ はそれぞれ Newton 定数と宇宙項を表す。$\hbar$ は換算 Planck 定数で、光速 c は 1 としている。また、前章で述べたように、Wess-Zumino 積分可能条件を満たさない R^2 作用は理論から排除する。

重力場は、ゲージ場などとは異なり、無次元の場である。重力場の 4 階微分作用は 4 次元では完全に無次元な量になる。そのため、$\hbar$ は Einstein 項など二階微分以下の作用の前にのみ現れ、4 階微分重力作用の前には現れない。このことは本質的で、4 階微分重力場作用が純粋に量子論的なダイナミクスを記述するものであることを表している。

作用 I から分かるように Planck エネルギースケールを越えた領域では共形不変な 4 階微分作用が支配的になる。その領域で Weyl 作用の前に現れる結合定数 t による展開を考える。それは $C_{\mu\nu\lambda\sigma} = 0$ を満たす共形平坦 (conformal flat) な配置のまわりで摂動展開することを意味する。そこで共形因子をくくりだして重力場を

$$g_{\mu\nu} = e^{2\phi}\bar{g}_{\mu\nu}, \quad \bar{g}_{\mu\nu} = (\hat{g}e^{th})_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\nu} + th_{\mu\nu} + \frac{t^2}{2}h_{\mu\lambda}h^{\lambda}{}_{\nu} + \cdots \quad (6.1.2)$$

と展開する。ここで、$h_{\mu\nu}$ はトレースレステンソル場で、$h^{\mu}{}_{\mu} = \hat{g}^{\mu\nu}h_{\mu\nu} = 0$ を満たす。背景場 $\hat{g}_{\mu\nu}$ は計算を遂行するために実用上人為的に導入された非力学的計量である。共形因子は正定値になるように指数関数の形で与えられ、その指数である Riegert 場 ϕ は共形平坦の条件から何も制限を受けないことから、新たな結合定数を導入することなく厳密に取り扱う。

共形因子の運動項や相互作用項は前章で見たように測度から Wess-Zumino

作用として誘導される。[2] 一般座標不変な $g_{\mu\nu}$ の測度を非力学的な背景時空 $\hat{g}_{\mu\nu}$ 上で定義された実用的な測度に書き換える際に、一般座標不変性を保障するヤコビアンとして現れる。このため経路積分は

$$\begin{aligned} e^{i\Gamma} &= \int [dgdf]_g \exp\{iI(f,g)\} \\ &= \int [d\phi dhdf]_{\hat{g}} \exp\{iS(\phi,\bar{g}) + iI(f,g)\} \end{aligned} \tag{6.1.3}$$

と書き換えることができる。作用 S が測度から誘導された Wess-Zumino 作用と呼ばれる量で、共形異常を積分して得られる量である。f は共形不変な運動項をもつ物質場を表している。Wess-Zumino 作用は結合定数 t による展開のゼロ次から現れて、それが ϕ 場の運動項を含む Riegert-Wess-Zumino 作用 (5.2.2) である。

ここでは、経路積分の定義式 (6.1.3) に従って、重力場の量子化を考える。はじめに、トレースレステンソル場の性質について述べることにする。前章で議論したように、結合定数 t のベータ関数 $\beta_t = -\beta_0 t_r^3$ への物質場の寄与は負となって、$h_{\mu\nu}$ 場は漸近自由性を示す。さらに、重力場からの１ループの寄与を加えると

$$\beta_0 = \frac{1}{(4\pi)^2}\left\{\frac{197}{60} + \frac{1}{240}\left(N_X + 3N_W + 12N_A\right)\right\}$$

を得る。最初の項が ϕ と $h_{\mu\nu}$ からの寄与 $-1/15$ と $199/30$ の合計で、それぞれ Riegert-Wess-Zumino 作用及び Weyl 作用から導かれる。この漸近自由性は紫外極限で $C_{\mu\nu\lambda\sigma} = 0$ を満たす共形平坦な時空のまわりで摂動展開することを正当化している。

Riegert-Wess-Zumino 作用の前の係数 b_1 は結合定数 t の最低次 (ゼロ次)

---

[2]作用 I にはトレースレステンソル場のダイナミクスを支配する Weyl 作用は含まれているけれども、共形因子のそれが存在しない。通常は共形因子のダイナミクスを扱うために共形不変でない R^2 作用を運動項として導入するが、この作用には問題がある。歴史的には R^2 作用を下にバウンドされた正しい符号で加えると１ループレベルの計算で漸近自由性を示さないため、正しい摂動論が構成できないことが指摘されている。しかし、ここでは R^2 作用が経路積分可能条件を満たさないことから最初から排除している。

で、

$$b_1 = \frac{769}{180} + \frac{1}{360}\left(N_X + \frac{11}{2}N_W + 62N_A\right) \tag{6.1.4}$$

と計算されている。最初の項が重力場からの寄与で、内訳は $-7/90$ が Riegert 場 ϕ から 87/20 がトレースレステンソル場からの寄与である。このことは、Riegert-Wess-Zumino 作用が正定値であることを表している。[3]

ここで、漸近自由性の意味について簡単に述べておく。先ず、この漸近自由性は自由場の存在を意味するものでないことに注意しなければならない。トレースレステンソル場のゆらぎは小さくなるが、距離を支配する共形因子のゆらぎは大きく非摂動的なままである。それは高エネルギー領域で共形不変な時空が実現することを表している。以下で述べるように、この共形不変性は理論が背景計量 $\hat{g}_{\mu\nu}$ の選び方によらないことを意味する背景時空独立性を実現したもので、量子論的な一般座標不変性と同等である[4]。

また、漸近自由性は時空の特異点が排除されることを意味する。なぜなら、短距離になると Riemann 曲率を含む Weyl 曲率テンソルがゼロになることを意味しているので、Schwarzschild 解のような Riemann 曲率が発散する時空は量子論的に排除される。

以下では、結合定数 t が消える極限のみを考える。このとき、背景時空 $\hat{g}_{\mu\nu}$ 上で定義された 4 次元量子重力の作用は

$$I_{\mathrm{4DQG}} = S_{\mathrm{RWZ}}(\phi, \hat{g}) + I(f, g)|_{t\to 0} \tag{6.1.5}$$

で与えられる。Weyl 作用は t^2 で割って定義されていることから、$h_{\mu\nu}$ の二次の運動項のみが残る。また、この極限では計量 $\bar{g}_{\mu\nu}$ は背景時空 $\hat{g}_{\mu\nu}$ となるので、トレースレステンソル場とその他の量子場との相互作用項は

[3] Euclid 計量で議論すると分かりすい。重みが e^{-I} となり、正定値性は $I > 0$ と表される。Weyl 作用は Euclid 計量では $I = (1/t^2)\int \sqrt{g} C^2_{\mu\nu\lambda\sigma}$ となりこの条件を満たしている。

[4] トレースレステンソル場は摂動的に扱っているのでこのモードについては背景時空独立といえないが、漸近自由性はそれが紫外極限で重要でないことを表している

消える。また、この章では次元を持った Planck 質量や宇宙項、物質場の質量項などは無視する。

この極限で背景時空独立性が実現する。Riegert 場で積分しているので $\phi \to \phi - \omega$ と積分変数を変えても理論は不変である。一方、理論は同時シフト変換の下でも不変であるから、背景時空を $\hat{g}_{\mu\nu} \to e^{2\omega}\hat{g}_{\mu\nu}$ と変換しても理論は不変になる。

6.2　一般座標不変性と共形不変性

一般座標変換は反変ベクトル (contravariant vector)ξ^μ を用いて

$$\delta_\xi g_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda}\nabla_\nu \xi^\lambda + g_{\nu\lambda}\nabla_\mu \xi^\lambda$$

と定義される。計量場 $g_{\mu\nu}$ を (6.1.2) のように共形因子 $e^{2\phi}$ と計量 $\bar{g}_{\mu\nu}$ に分解すると、一般座標変換は

$$\begin{aligned} \delta_\xi \phi &= \xi^\lambda \partial_\lambda \phi + \frac{1}{4}\hat{\nabla}_\lambda \xi^\lambda, \\ \delta_\xi \bar{g}_{\mu\nu} &= \bar{g}_{\mu\lambda}\bar{\nabla}_\nu \xi^\lambda + \bar{g}_{\nu\lambda}\bar{\nabla}_\mu \xi^\lambda - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\hat{\nabla}_\lambda \xi^\lambda \end{aligned}$$

と書ける。ここで、$\bar{\nabla}_\lambda \xi^\lambda = \hat{\nabla}_\lambda \xi^\lambda$ が成り立つことを使っている。さらに二番目の式の両辺をトレースレステンソル場について展開すると変換則

$$\begin{aligned} \delta_\xi h_{\mu\nu} &= \frac{1}{t}\left(\hat{\nabla}_\mu \xi_\nu + \hat{\nabla}_\nu \xi_\mu - \frac{1}{2}\hat{g}_{\mu\nu}\hat{\nabla}_\lambda \xi^\lambda\right) + \xi^\lambda \hat{\nabla}_\lambda h_{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{1}{2}h_{\mu\lambda}\left(\hat{\nabla}_\nu \xi^\lambda - \hat{\nabla}^\lambda \xi_\nu\right) + \frac{1}{2}h_{\nu\lambda}\left(\hat{\nabla}_\mu \xi^\lambda - \hat{\nabla}^\lambda \xi_\mu\right) + \cdots \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

を得る。このとき座標変換の共変ベクトル (covariant vector) は背景計量を用いて $\xi_\mu = \hat{g}_{\mu\nu}\xi^\nu$ と定義される。

結合定数 t が消える極限での一般座標変換は良く知られた Weyl 作用のゲージ変換と共形変換に分けることができる。前者はゲージ変数を $\kappa = \xi/t$ と置き換えて、$t \to 0$ の極限をとると

$$\delta_\kappa h_{\mu\nu} = \hat{\nabla}_\mu \kappa_\nu + \hat{\nabla}_\nu \kappa_\mu - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\hat{\nabla}_\lambda \kappa^\lambda \tag{6.2.2}$$

と $\delta_\kappa \phi = 0$ が得られる。

ゲージ変換 (6.2.2) を通常通りゲージ固定しても、まだ共形 Killing 方程式

$$\hat{\nabla}_\mu \zeta_\nu + \hat{\nabla}_\nu \zeta_\mu - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\hat{\nabla}_\lambda \zeta^\lambda = 0 \tag{6.2.3}$$

を満たすゲージ自由度 $\xi^\mu = \zeta^\mu$ が残る。このとき、トレースレステンソル場の変換 (6.2.1) の最低次の項が消えて、一般座標変換は

$$\begin{aligned}
\delta_\zeta \phi &= \zeta^\lambda \partial_\lambda \phi + \frac{1}{4}\hat{\nabla}_\lambda \zeta^\lambda, \\
\delta_\zeta h_{\mu\nu} &= \zeta^\lambda \hat{\nabla}_\lambda h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} h_{\mu\lambda}\left(\hat{\nabla}_\nu \zeta^\lambda - \hat{\nabla}^\lambda \zeta_\nu\right) + \frac{1}{2} h_{\nu\lambda}\left(\hat{\nabla}_\mu \zeta^\lambda - \hat{\nabla}^\lambda \zeta_\mu\right)
\end{aligned} \tag{6.2.4}$$

となる。第一式は共形次元ゼロのスカラー場の共形変換にシフト項が付いたものである。第二式は共形次元ゼロのトレースレステンソル場の共形変換に他ならない。

この共形変換は背景時空 $\hat{g}_{\mu\nu}$ 上で定義されている。通常の共形場理論と異なり、この共形変換はゲージ変換であり、Riegert 場及びトレースレステンソル場はゲージ場であって、それ自身が物理的場ではないことである。したがって、通常のゲージ場と同様、これらの場自身が共形次元に対するユニタリ性の条件 (2.3.2) を満たす必要はない。

背景時空独立性はこのように共形変換で移り変わることが出来るすべての背景時空上の理論がゲージ同値になる対称性として表される。

6.3 重力場の量子化

量子化を実行するために、背景計量場 $\hat{g}_{\mu\nu}$ を選ぶ必要がある。漸近自由性から結合定数 t が消える極限では Weyl テンソルがゼロになる時空が選ばれることから背景時空は共形平坦でなければばならない。以下、この章では背景時空 $\hat{g}_{\mu\nu}$ として Minkowski 時空 $\eta_{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$ を採用する。

この節ではRiegert場とトレースレステンソル場の量子化を行う。その際、ゲージ変換 (6.2.2) の自由度 κ^μ は完全に固定して、共形変換 (6.2.4) のゲージ自由度 ζ^μ だけが残るようにする。

6.3.1 Riegert 場

Riegert-Wess-Zumino作用 (5.2.2) は、Minkowski背景時空では、$-(b_1/8\pi^2)\times\int d^4x\phi\partial^4\phi$ で与えられる。このとき Riegert 場 ϕ に比例した項は消える。その項の寄与は次節で導入するストレステンソルに現れる。

高階微分場である重力場をDiracの処方箋に従って正準量子化する。ここでは共形モードについて議論する。新しい変数

$$\chi = \partial_\eta \phi \tag{6.3.1}$$

を導入すると Riegert 場の作用は

$$S_{\rm RWZ} = \int d^4x \left\{ -\frac{b_1}{8\pi^2}\left[(\partial_\eta\chi)^2 + 2\chi\partial\!\!\!/^2\chi + \left(\partial\!\!\!/^2\phi\right)^2 \right] + v\left(\partial_\eta\phi - \chi\right) \right\}$$

のように2階微分の作用関数に書き換えることができる。最後の項はLagrange未定定数 (Lagrange multiplier) である。これより χ、ϕ、v の正準共役運動量 P_χ、P_ϕ、P_v を求め、Poisson括弧

$$\begin{aligned} &\{\chi(\eta,\mathbf{x}), \mathsf{P}_\chi(\eta,\mathbf{x}')\}_{\rm P} = \{\phi(\eta,\mathbf{x}), \mathsf{P}_\phi(\eta,\mathbf{x}')\}_{\rm P} \\ &= \{v(\eta,\mathbf{x}), P_v(\eta,\mathbf{x}')\}_{\rm P} = \delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \end{aligned}$$

を設定する。

新しい場 χ は時間について2階微分なので通常の運動量変数 $\mathsf{P}_\chi = -(b_1/4\pi^2)\partial_\eta\chi$ を持つが、ϕ と v はそれぞれ1階及び0階微分なので拘束条件[5]

$$\varphi_1 = \mathsf{P}_\phi - v \simeq 0, \qquad \varphi_2 = \mathsf{P}_v \simeq 0$$

[5]Lagrange 未定定数項を $(v\partial_\eta\phi - \phi\partial_\eta v)/2$ のように対称化して考えると、拘束条件は $\varphi_1 = \mathsf{P}_\phi - v/2$ と $\varphi_2 = \mathsf{P}_v + \phi/2$ になるが結果は同じである。

になる。拘束条件は六つの変数、ϕ、χ、v 及びその共役運動量 P_ϕ、P_χ、P_v、が張る位相空間のなかの部分空間を表す。弱い等式はそれらが部分位相空間上で等式として成り立つことを意味している。

拘束条件の間の Poisson 括弧は

$$C_{ab} = \{\varphi_a, \varphi_b\}_{\mathrm{P}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。ここでは簡単のため 3 次元デルタ関数を 1 と表している。$\det C_{ab} \neq 0$ を満たすことから、これらは第 2 種拘束条件と呼ばれるものである。第二種拘束条件を扱うために Dirac の処方箋に従って Dirac 括弧

$$\{F, G\}_{\mathrm{D}} = \{F, G\}_{\mathrm{P}} - \{F, \varphi_a\}_{\mathrm{P}} C^{-1}_{ab} \{\varphi_b, G\}_{\mathrm{P}}$$

を導入する。Dirac 括弧は Poisson 括弧が満たす基本的な性質を満たしている。任意関数 F にたいして拘束条件が $\{F, \varphi_a\}_{\mathrm{D}} = 0$ を満たすことから、Dirac 括弧は部分位相空間上の Poisson 括弧と見ることができる。F として Hamilton 関数を代入するとこれは拘束条件が時間発展しないことを表し、最初に $\varphi_a = 0$ と置けば 0 が保たれることを意味する。したがって、Dirac 括弧を使えば拘束条件は厳密な等式としてゼロと置くことができる。

部分位相空間の四つの変数の間の Dirac 括弧は

$$\{\chi(\eta, \mathbf{x}), \mathsf{P}_\chi(\eta, \mathbf{x}')\}_{\mathrm{D}} = \{\phi(\eta, \mathbf{x}), \mathsf{P}_\phi(\eta, \mathbf{x}')\}_{\mathrm{D}} = \delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

で与えられ、Hamilton 関数は

$$H = \int d^3\mathbf{x} \left\{ -\frac{2\pi^2}{b_1} \mathsf{P}_\chi^2 + \mathsf{P}_\phi \chi + \frac{b_1}{8\pi^2} \left[2\chi \partial\!\!\!/^2 \chi + \left(\partial\!\!\!/^2 \phi \right)^2 \right] \right\} \tag{6.3.2}$$

と書ける。これより運動方程式は

$$\begin{aligned} \partial_\eta \phi &= \{\phi, H\}_{\mathrm{D}} = \chi, \qquad \partial_\eta \chi = \{\chi, H\}_{\mathrm{D}} = -\frac{4\pi^2}{b_1} \mathsf{P}_\chi, \\ \partial_\eta \mathsf{P}_\chi &= \{\mathsf{P}_\chi, H\}_{\mathrm{D}} = -\mathsf{P}_\phi - \frac{b_1}{2\pi^2} \partial\!\!\!/^2 \chi, \\ \partial_\eta \mathsf{P}_\phi &= \{\mathsf{P}_\phi, H\}_{\mathrm{D}} = -\frac{b_1}{4\pi^2} \partial\!\!\!/^4 \phi \end{aligned} \tag{6.3.3}$$

となる。

正準量子化は Dirac 括弧を交換子に置き換えて

$$[\phi(\eta,\mathbf{x}),\mathsf{P}_\phi(\eta,\mathbf{x}')]=[\chi(\eta,\mathbf{x}),\mathsf{P}_\chi(\eta,\mathbf{x}')]=i\delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \tag{6.3.4}$$

と設定する。その他の交換子は消える。運動量変数は (6.3.3) より

$$\mathsf{P}_\chi=-\frac{b_1}{4\pi^2}\partial_\eta\chi, \qquad \mathsf{P}_\phi=-\partial_\eta\mathsf{P}_\chi-\frac{b_1}{2\pi^2}\partial\!\!\!/^2\chi \tag{6.3.5}$$

で与えられる。

Riegert 場の運動方程式は $\partial^4\phi=0$ で与えられる。運動量変数を用いて表すと $\partial_\eta\mathsf{P}_\phi=-(b_1/4\pi^2)\partial\!\!\!/^4\phi$ となる。その解は $k_\mu x^\mu=-\omega\eta+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}$ とすると、$e^{ik_\mu x^\mu}$ と $\eta e^{ik_\mu x^\mu}$ 及びその複素共役で与えられる。ここで、$\omega=|\mathbf{k}|$ である。

Riegert 場はこれらの解を用いて展開される。場を消滅及び生成部分に分けて $\phi=\phi_<+\phi_>$ と書くと

$$\phi_<(x)=\frac{\pi}{\sqrt{b_1}}\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\omega^{3/2}}\left\{a(\mathbf{k})+i\omega\eta b(\mathbf{k})\right\}e^{ik_\mu x^\mu}$$

ここで、$\phi_>=\phi_<^\dagger$ である。これを変数の定義式 (6.3.1) と (6.3.5) に代入すると、それぞれの変数の消滅部分は

$$\begin{aligned}
\chi_<(x) &= -i\frac{\pi}{\sqrt{b_1}}\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\omega^{1/2}}\left\{a(\mathbf{k})+(-1+i\omega\eta)b(\mathbf{k})\right\}e^{ik_\mu x^\mu}, \\
\mathsf{P}_{\chi<}(x) &= \frac{\sqrt{b_1}}{4\pi}\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\omega^{1/2}\left\{a(\mathbf{k})+(-2+i\omega\eta)b(\mathbf{k})\right\}e^{ik_\mu x^\mu}, \\
\mathsf{P}_{\phi<}(x) &= -i\frac{\sqrt{b_1}}{4\pi}\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\omega^{3/2}\left\{a(\mathbf{k})+(1+i\omega\eta)b(\mathbf{k})\right\}e^{ik_\mu x^\mu}
\end{aligned}$$

となる。正準交換関係 (6.3.4) から各モードの交換関係

$$\begin{aligned}
\left[a(\mathbf{k}),a^\dagger(\mathbf{k}')\right] &= \delta_3(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), \\
\left[a(\mathbf{k}),b^\dagger(\mathbf{k}')\right] &= \left[b(\mathbf{k}),a^\dagger(\mathbf{k}')\right]=\delta_3(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), \\
\left[b(\mathbf{k}),b^\dagger(\mathbf{k}')\right] &= 0
\end{aligned}$$

を得る。Hamilton 演算子はモードを使って表すと

$$H=\int d^3\mathbf{k}\omega\left\{a^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k})+b^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k})-b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k})\right\}$$

となる。ここで、Hamilton 演算子は (6.3.2) を正規順序付けしたものである。

6.3.2　トレースレステンソル場

トレースレステンソル場を量子化するために、ゲージ対称性 $\delta_\kappa h_{\mu\nu}$ (6.2.2) を固定する必要がある。ここでは、Coulomb ゲージ固定条件 $\partial_i h^i{}_\mu=0$ を課し、さらに残りのゲージ自由度を使って非力学的自由度である $h_{00}(=h^i{}_i)$ 成分を取り除く、輻射ゲージ固定条件

$$h_{00}=0,\quad h_{0j}=\mathsf{h}_j,\quad h_{ij}=\mathsf{h}_{ij}$$

を採用する。ここで、h_j と h_{ij} はそれぞれ $\partial^i\mathsf{h}_i=0$ と $\partial^i\mathsf{h}_{ij}=\mathsf{h}^i{}_i=0$ を満たす横波ベクトルモードと横波トレースレステンソルモードである。

この輻射ゲージでは κ^μ のすべてのゲージ自由度が固定され、残りのゲージ自由度は共形変換の ζ^μ(6.2.4) だけが残る。

Riegert 場のときと同様に、Dirac の処方箋に従って量子化を行うために、横波トレースレステンソルモードに対して新しい変数

$$\mathsf{u}_{ij}=\partial_\eta\mathsf{h}_{ij}$$

を導入する。一方、横波ベクトルモードは時間について 2 階微分なので新たな変数を導入する必要はない。新しい変数 u_{ij} を使うと、Weyl 作用は

$$\begin{aligned}
I &= \int d^4x\left\{-\frac{1}{2}\mathsf{h}^{ij}\left(\partial_\eta^4-2\not{\partial}^2\partial_\eta^2+\not{\partial}^4\right)\mathsf{h}_{ij}+\mathsf{h}^j\not{\partial}^2\left(-\partial_\eta^2+\not{\partial}^2\right)\mathsf{h}_j\right\}\\
&= \int d^4x\Big\{-\frac{1}{2}\partial_\eta\mathsf{u}^{ij}\partial_\eta\mathsf{u}_{ij}-\mathsf{u}^{ij}\not{\partial}^2\mathsf{u}_{ij}-\frac{1}{2}\not{\partial}^2\mathsf{h}^{ij}\not{\partial}^2\mathsf{h}_{ij}+\lambda^{ij}\left(\partial_\eta\mathsf{h}_{ij}-\mathsf{u}_{ij}\right)\\
&\qquad\qquad +\partial_\eta\mathsf{h}^j\not{\partial}^2\partial_\eta\mathsf{h}_j+\not{\partial}^2\mathsf{h}^j\not{\partial}^2\mathsf{h}_j\Big\}
\end{aligned}$$

と書き換えることができる。ここで、λ^{ij} は Lagrange 未定乗数である。

拘束条件を解いて未定乗数 λ^{ij} を取り除くと、正準変数 u_{ij}、 h_{ij}、 h_j とそれらの共役運動量

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}_{\mathsf{u}}^{ij} &= -\partial_\eta \mathsf{u}^{ij}, \qquad \mathsf{P}_{\mathsf{h}}^{ij} = -\partial_\eta \mathsf{P}_{\mathsf{u}}^{ij} - 2\partial\!\!\!/^2 \mathsf{u}^{ij}, \\
\mathsf{P}^j &= 2\partial\!\!\!/^2 \partial_\eta \mathsf{h}^j
\end{aligned}
$$

で張られる位相空間が得られる。それらの正準交換関係は

$$
\begin{aligned}
\left[\mathsf{h}^{ij}(\eta,\mathbf{x}), \mathsf{P}_{\mathsf{h}}^{kl}(\eta,\mathbf{y})\right] &= \left[\mathsf{u}^{ij}(\eta,\mathbf{x}), \mathsf{P}_{\mathsf{u}}^{kl}(\eta,\mathbf{y})\right] = i\delta_3^{ij,kl}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \\
\left[\mathsf{h}^{i}(\eta,\mathbf{x}), \mathsf{P}^{j}(\eta,\mathbf{y})\right] &= i\delta_3^{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),
\end{aligned}
\tag{6.3.6}
$$

と設定される。ここで、デルタ関数は $\delta_3^{ij}(\mathbf{x}) = \Delta^{ij}\delta_3(\mathbf{x})$ と $\delta_3^{ij,kl}(\mathbf{x}) = \Delta^{ij,kl}\delta_3(\mathbf{x})$ で与えられ、通常のデルタ関数に作用する微分演算子はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
\Delta_{ij} &= \delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\partial\!\!\!/^2}, \\
\Delta_{ij,kl} &= \frac{1}{2}\left(\Delta_{ik}\Delta_{jl} + \Delta_{il}\Delta_{jk} - \Delta_{ij}\Delta_{kl}\right)
\end{aligned}
$$

で定義される。これらは、横波とトレースの条件 $\partial^i \Delta_{ij} = 0$、 ${\Delta^j}_j = 2$、$\partial^i \Delta_{ij,kl} = 0$、${\Delta^i}_{i,kl} = 0$ 及び関係式 $\Delta_{ik}{\Delta^k}_j = \Delta_{ij}$、$\Delta_{ij,kl}{\Delta^{kl,}}_{mn} = \Delta_{ij,mn}$ を満たす。

Hamilton 演算子は

$$
\begin{aligned}
H &= \int d^3\mathbf{x} : \Big\{ -\frac{1}{2}\mathsf{P}_{\mathsf{u}}^{ij}\mathsf{P}^{\mathsf{u}}_{ij} + \mathsf{P}_{\mathsf{h}}^{ij}\mathsf{u}_{ij} + \mathsf{u}^{ij}\partial\!\!\!/^2\mathsf{u}_{ij} + \frac{1}{2}\partial\!\!\!/^2\mathsf{h}^{ij}\partial\!\!\!/^2\mathsf{h}_{ij} \\
&\qquad + \frac{1}{4}\mathsf{P}^j\partial\!\!\!/^{-2}\mathsf{P}_j - \partial\!\!\!/^2\mathsf{h}^j\partial\!\!\!/^2\mathsf{h}_j \Big\} :
\end{aligned}
$$

と求まる。ここで、$\partial\!\!\!/^{-2} = 1/\partial\!\!\!/^2$ で、: : は正規順序付けすることを表す。

横波トレースレステンソルモードの運動方程式は $\partial^4 \mathsf{h}^{ij} = 0$ で与えられる。運動量変数を使って表すと $\partial_\eta \mathsf{P}_{\mathsf{h}}^{ij} = -\partial\!\!\!/^4 \mathsf{h}^{ij}$ になる。Riegert 場と同様、消滅演算子と生成演算子に分けて、$\mathsf{h}^{ij} = \mathsf{h}_<^{ij} + \mathsf{h}_>^{ij}$ と書くと、消滅演算子部分は

$$
\mathsf{h}_<^{ij}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{2\omega^{3/2}} \left\{ \mathsf{c}^{ij}(\mathbf{k}) + i\omega\eta\,\mathsf{d}^{ij}(\mathbf{k}) \right\} e^{ik_\mu x^\mu}
$$

と展開される。生成演算子部分は $\mathsf{h}^{ij}_{>} = \mathsf{h}^{ij\dagger}_{<}$ となる。一方、横波ベクトルモードの運動方程式は $\partial\!\!\!/^2\partial^2\mathsf{h}^j = 0$、運動量変数では $\partial_\eta\mathsf{P}^j = 2\partial\!\!\!/^4\mathsf{h}^j$ と時間について二階微分なので、$\mathsf{h}^j = \mathsf{h}^j_< + \mathsf{h}^j_>$、$\mathsf{h}^j_> = \mathsf{h}^{j\dagger}_<$ とすると

$$\mathsf{h}^j_<(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{2\omega^{3/2}}\mathsf{e}_j(\mathbf{k})e^{ik_\mu x^\mu}$$

と展開される。その他の変数の消滅演算子部分は

$$\begin{aligned}
\mathsf{u}^{ij}_<(x) &= -i\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{2\omega^{1/2}}\left\{\mathsf{c}^{ij}(\mathbf{k}) + (-1+i\omega\eta)\mathsf{d}^{ij}(\mathbf{k})\right\}e^{ik_\mu x^\mu}, \\
\mathsf{P}^{ij}_{\mathsf{u}<}(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\frac{\omega^{1/2}}{2}\left\{\mathsf{c}^{ij}(\mathbf{k}) + (-2+i\omega\eta)\mathsf{d}^{ij}(\mathbf{k})\right\}e^{ik_\mu x^\mu}, \\
\mathsf{P}^{ij}_{\mathsf{h}<}(x) &= -i\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\frac{\omega^{3/2}}{2}\left\{\mathsf{c}^{ij}(\mathbf{k}) + (1+i\omega\eta)\mathsf{d}^{ij}(\mathbf{k})\right\}e^{ik_\mu x^\mu}, \\
\mathsf{P}^{j}_{<}(x) &= i\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\omega^{3/2}\mathsf{e}^j(\mathbf{k})e^{ik_\mu x^\mu}
\end{aligned}$$

で与えられる。

これらの式を正準交換関係 (6.3.6) に代入すると各モードの交換関係

$$\begin{aligned}
\left[\mathsf{c}^{ij}(\mathbf{k}), \mathsf{c}^{kl\dagger}(\mathbf{k}')\right] &= \delta_3^{ij,kl}(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), \\
\left[\mathsf{c}^{ij}(\mathbf{k}), \mathsf{d}^{kl\dagger}(\mathbf{k}')\right] &= \left[\mathsf{d}^{ij}(\mathbf{k}), \mathsf{c}^{kl\dagger}(\mathbf{k}')\right] = \delta_3^{ij,kl}(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), \\
\left[\mathsf{d}^{ij}(\mathbf{k}), \mathsf{d}^{kl\dagger}(\mathbf{k}')\right] &= 0, \\
\left[\mathsf{e}^{i}(\mathbf{k}), \mathsf{e}^{j\dagger}(\mathbf{k}')\right] &= -\delta_3^{ij}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')
\end{aligned}$$

を得る。ここで、デルタ関数の運動量表示 $\delta_3^{ij}(\mathbf{k})$ と $\delta_3^{ij,kl}(\mathbf{k})$ は通常のデルタ関数 $\delta_3(\mathbf{k})$ に関数

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}_{ij}(\mathbf{k}) &= \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2}, \\
\tilde{\Delta}_{ij,kl}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{2}\left\{\tilde{\Delta}_{ik}(\mathbf{k})\tilde{\Delta}_{jl}(\mathbf{k}) + \tilde{\Delta}_{il}(\mathbf{k})\tilde{\Delta}_{jk}(\mathbf{k}) - \tilde{\Delta}_{ij}(\mathbf{k})\tilde{\Delta}_{kl}(\mathbf{k})\right\}
\end{aligned}$$

をそれぞれ掛けたものである。

交換関係をさらに簡単にするために、分極ベクトル $\varepsilon^i_{(a)}$ $(a=1,2)$ 及び分極テンソル $\varepsilon^{ij}_{(a)}$ $(a=1,2)$ を導入する。それぞれ横波条件 $k_i\varepsilon^i_{(a)} = 0$ と横波

トレースレス条件 $k_i\varepsilon^{ij}_{(a)}(\mathbf{k})=\varepsilon^{\ i}_{(a)i}(\mathbf{k})=0$ を満たし、$\sum_{a=1}^2\varepsilon^i_{(a)}(\mathbf{k})\varepsilon^j_{(a)}(\mathbf{k})=\tilde{\Delta}^{ij}(\mathbf{k})$、$\varepsilon^j_{(a)}(\mathbf{k})\varepsilon_{(b)j}(\mathbf{k})=\delta_{ab}$ 及び $\sum_{a=1}^2\varepsilon^{ij}_{(a)}(\mathbf{k})\varepsilon^{kl}_{(a)}(\mathbf{k})=\tilde{\Delta}^{ij,kl}(\mathbf{k})$、$\varepsilon^{ij}_{(a)}(\mathbf{k})\varepsilon_{(b)ij}(\mathbf{k})=\delta_{ab}$ と規格化されている。これらを用いると各モードは

$$
\begin{aligned}
\mathsf{c}^{ij}(\mathbf{k}) &= \sum_{a=1}^2\varepsilon^{ij}_{(a)}(\mathbf{k})\mathsf{c}_{(a)}(\mathbf{k}), \quad \mathsf{d}^{ij}(\mathbf{k})=\sum_{a=1}^2\varepsilon^{ij}_{(a)}(\mathbf{k})\mathsf{d}_{(a)}(\mathbf{k}), \\
\mathsf{e}^{j}(\mathbf{k}) &= \sum_{a=1}^2\varepsilon^{j}_{(a)}(\mathbf{k})\mathsf{e}_{(a)}(\mathbf{k})
\end{aligned}
$$

と展開され、交換関係は

$$
\begin{aligned}
\left[\mathsf{c}_{(a)}(\mathbf{k}),\mathsf{c}^\dagger_{(b)}(\mathbf{k}')\right] &= \delta_{ab}\delta_3(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), \\
\left[\mathsf{c}_{(a)}(\mathbf{k}),\mathsf{d}^\dagger_{(b)}(\mathbf{k}')\right] &= \left[\mathsf{d}_{(a)}(\mathbf{k}),\mathsf{c}^\dagger_{(b)}(\mathbf{k}')\right]=\delta_{ab}\delta_3(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), \\
\left[\mathsf{d}_{(a)}(\mathbf{k}),\mathsf{d}^\dagger_{(b)}(\mathbf{k}')\right] &= 0, \\
\left[\mathsf{e}_{(a)}(\mathbf{k}),\mathsf{e}^\dagger_{(b)}(\mathbf{k}')\right] &= -\delta_{ab}\delta_3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')
\end{aligned}
$$

で与えられる。Hamilton 演算子は

$$
H=\sum_{a=1}^2\int d^3\mathbf{k}\omega\left\{\mathsf{c}^\dagger_{(a)}(\mathbf{k})\mathsf{d}_{(a)}(\mathbf{k})+\mathsf{d}^\dagger_{(a)}(\mathbf{k})\mathsf{c}_{(a)}(\mathbf{k})-\mathsf{d}^\dagger_{(a)}(\mathbf{k})\mathsf{d}_{(a)}(\mathbf{k})-\mathsf{e}^\dagger_{(a)}(\mathbf{k})\mathsf{e}_{(a)}(\mathbf{k})\right\}
$$

と書き換えられる。

6.4　一般座標変換の生成子

共形変換の形をした一般座標変換 δ_ζ(6.2.4) の生成子を導出する。ここでは Riegert 場の変換の生成子を導出する。トレーステンソル場の変換の生成子については煩雑なので付録 D.2 にまとめる。

量子重力はいま背景時空上の場の量子論として定義されているので、ストレステンソルはその作用 $I_{\rm 4DQG}$ を背景時空で変分して、

$$
T^{\mu\nu}=\frac{2}{\sqrt{-\hat{g}}}\frac{\delta I_{4DQG}}{\delta\hat{g}_{\mu\nu}}
$$

と定義される。このとき、足の上げ下げは $\hat{T}_{\mu\nu}=\hat{g}_{\mu\lambda}\hat{g}_{\nu\sigma}\hat{T}^{\lambda\sigma}$ のように背景計量場を用いて行われる。変分の後、背景時空を Minkowski 計量にする。

Riegert 場のストレステンソルは

$$
\begin{aligned}
T_{\mu\nu} \;=\;& -\frac{b_1}{8\pi^2}\Big\{-4\partial^2\phi\partial_\mu\partial_\nu\phi + 2\partial_\mu\partial^2\phi\partial_\nu\phi + 2\partial_\nu\partial^2\phi\partial_\mu\phi + \frac{8}{3}\partial_\mu\partial_\lambda\phi\partial_\nu\partial^\lambda\phi \\
& -\frac{4}{3}\partial_\mu\partial_\nu\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi + \eta_{\mu\nu}\left(\partial^2\phi\partial^2\phi - \frac{2}{3}\partial^2\partial^\lambda\phi\partial_\lambda\phi - \frac{2}{3}\partial_\lambda\partial_\sigma\phi\partial^\lambda\partial^\sigma\phi\right) \\
& -\frac{2}{3}\partial_\mu\partial_\nu\partial^2\phi + \frac{2}{3}\eta_{\mu\nu}\partial^4\phi\Big\}
\end{aligned}
$$

で与えられる。ここで、最後の二つの線形項は Riegert-Wess-Zumino 作用 (5.2.2) の第二項を変分して導かれる。トレースレスの条件と保存則は運動方程式を用いてそれぞれ $T^\lambda{}_\lambda = -(b_1/4\pi^2)\partial^4\phi = 0$ 及び $\partial^\mu T_{\mu\nu} = -(b_1/4\pi^2)\partial^4\phi\partial_\nu\phi = 0$ のように成り立つ。

四つの正準変数を用いると、(00) 成分は

$$
\begin{aligned}
T_{00} \;=\;& -\frac{2\pi^2}{b_1}\mathsf{P}_\chi^2 + \mathsf{P}_\phi\chi - \mathsf{P}_\chi\not\partial^2\phi - \partial_k\mathsf{P}_\chi\partial^k\phi \\
& +\frac{b_1}{8\pi^2}\left(\frac{2}{3}\chi\not\partial^2\chi - \frac{4}{3}\partial_k\chi\partial^k\chi + \not\partial^2\phi\not\partial^2\phi - \frac{2}{3}\partial_k\not\partial^2\phi\partial^k\phi - \frac{2}{3}\partial_k\partial_l\phi\partial^k\partial^l\phi\right) \\
& +\frac{1}{3}\not\partial^2\mathsf{P}_\chi + \frac{b_1}{12\pi^2}\not\partial^4\phi
\end{aligned}
$$

と表される。$(0j)$ 成分は

$$
\begin{aligned}
T_{0j} \;=\;& \frac{2}{3}\mathsf{P}_\chi\partial_j\chi - \frac{1}{3}\partial_j\mathsf{P}_\chi\chi + \mathsf{P}_\phi\partial_j\phi \\
& +\frac{b_1}{8\pi^2}\left(4\partial_j\chi\not\partial^2\phi - \frac{8}{3}\partial_k\chi\partial_j\partial^k\phi - 2\chi\partial_j\not\partial^2\phi + 2\not\partial^2\chi\partial_j\phi + \frac{4}{3}\partial_j\partial_k\chi\partial^k\phi\right) \\
& -\frac{1}{3}\partial_j\mathsf{P}_\phi - \frac{b_1}{12\pi^2}\partial_j\not\partial^2\chi
\end{aligned}
$$

となる。

これらの式を定義式 (2.2.5) に代入して、正規順序付けを行うと共形変換の生成子 Q_ζ が求まる。先ず、並進の生成子として

$$
P_0 = H = \int d^3\mathbf{x}\mathcal{A}, \qquad P_j = \int d^3\mathbf{x}\mathcal{B}_j
$$

を得る。ここで、局所演算子 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}_j$ は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} \;=\;& -\frac{2\pi^2}{b_1}:\mathsf{P}_\chi^2: + :\mathsf{P}_\phi\chi: + \frac{b_1}{8\pi^2}\left(2:\chi\not\partial^2\chi: + :\not\partial^2\phi\not\partial^2\phi:\right), \\
\mathcal{B}_j \;=\;& :\mathsf{P}_\chi\partial_j\chi: + :\mathsf{P}_\phi\partial_j\phi:
\end{aligned}
$$

で与えられる。Lorentz 変換の生成子は

$$
\begin{aligned}
M_{0j} &= \int d^3\mathbf{x}\,\{-\eta\mathcal{B}_j - x_j\mathcal{A} - :\mathsf{P}_\chi\partial_j\phi:\}\,, \\
M_{ij} &= \int d^3\mathbf{x}\,\{x_i\mathcal{B}_j - x_j\mathcal{B}_i\}
\end{aligned}
$$

となる。 Dilatation と特殊共形変換の生成子は

$$
D = \int d^3\mathbf{x}\left\{\eta\mathcal{A} + x^k\mathcal{B}_k + :\mathsf{P}_\chi\chi: + \mathsf{P}_\phi\right\}
$$

と

$$
\begin{aligned}
K_0 &= \int d^3\mathbf{x}\Big\{\left(\eta^2+\mathbf{x}^2\right)\mathcal{A} + 2\eta x^k\mathcal{B}_k + 2\eta :\mathsf{P}_\chi\chi: + 2x^k :\mathsf{P}_\chi\partial_k\phi: \\
&\qquad -\frac{b_1}{4\pi^2}\left(2:\chi^2: + :\partial_k\phi\partial^k\phi:\right) + 2\eta\mathsf{P}_\phi + 2\mathsf{P}_\chi\Big\}, \\
K_j &= \int d^3\mathbf{x}\Big\{\left(-\eta^2+\mathbf{x}^2\right)\mathcal{B}_j - 2x_jx^k\mathcal{B}_k - 2\eta x_j\mathcal{A} - 2x_j :\mathsf{P}_\chi\chi: \\
&\qquad -2\eta :\mathsf{P}_\chi\partial_j\phi: - \frac{b_1}{2\pi^2} :\chi\partial_j\phi: - 2x_j\mathsf{P}_\phi\Big\}
\end{aligned}
$$

で与えられる。ここで、M_{0j}、D、K_μ は定義式に時間変数 η を含んでいるけれども、時間依存性はなく $\partial_\eta M_{0j} = \partial_\eta D = \partial_\eta K_\mu = 0$ のように保存する。生成子 D と K_μ の線形項は変換 $\delta_\zeta\phi$(6.2.4) のシフト項を生成する。

6.5 共形変換と場の演算子

前節で求めた生成子を用いて、場の演算子の変換則について調べる。そのために、先ず計算の方法について述べる。簡単な練習問題として、スカラー場の場合を付録 D.1 に与えている。

ここでは、Hermite 演算子を考える。二つの Hermite 演算子 A と B の演算子積 (operator product) は

$$
A(x)B(y) = \langle 0|A(x)B(y)|0\rangle + :A(x)B(y):
$$

と表すことができる。短距離で発散する部分、すなわち二点相関関数は

$$
\langle 0|A(x)B(y)|0\rangle = [A_<(x), B_>(y)]
$$

で与えられる。前で定義したように、$A_<$ は演算子 A の消滅部分、$B_>$ は演算子 B の生成部分である。 $:A(x)B(y):=:B(y)A(x):$ であることから、二つの演算子の交換関係は

$$[A(x), B(y)] = \langle 0|A(x)B(y)|0\rangle - \langle 0|B(y)A(x)|0\rangle$$

と表すことができる。右辺の第二項は $\langle 0|B(y)A(x)|0\rangle = \langle 0|A(x)B(y)|0\rangle^\dagger$ と書けることから、交換関係は右辺が実関数ならば消える。

Riegert 場の演算子積を計算する。短距離で発散する項は

$$\begin{aligned}\langle 0|\phi(x)\phi(x')|0\rangle &= \frac{\pi^2}{b_1}\int_{\omega>z}\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\omega^3}\left\{1+i\omega\left(\eta-\eta'\right)\right\}e^{-i\omega(\eta-\eta'-i\epsilon)+i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \\ &= -\frac{1}{4b_1}\log\left\{\left[-(\eta-\eta'-i\epsilon)^2+(\mathbf{x}-\mathbf{x}')^2\right]z^2e^{2\gamma-2}\right\} \\ &\quad -\frac{1}{4b_1}\frac{i\epsilon}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\log\frac{\eta-\eta'-i\epsilon-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{\eta-\eta'-i\epsilon+|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \end{aligned} \tag{6.5.1}$$

と計算される。ここで、ϵ は紫外発散を正則化するための紫外カットオフパラメータである。[6] さらに、Riegert 場が無次元であることから生じる赤外発散を処理するために無限小の質量スケール z を導入した。これは作用に仮の質量項を加えることに相当するが、それは一般座標不変でないために z 依存性は一般座標不変な量を考えたときには現れない。[7] 上記の積分は $z \ll 0$ で実行したものである。一方、紫外カットオフ ϵ は有限のままにして、すべての計算を実行した後にゼロに取る。

ほかの場の変数を含む二点相関関数はその展開式から直接求めることも出来るし、(6.5.1) を場の変数の定義式に従って微分することで得ることも出来る。それらの結果を用いて

$$\begin{aligned}[\phi(\eta,\mathbf{x}), \mathsf{P}_\phi(\eta,\mathbf{x}')] &= \langle 0|\phi(\eta,\mathbf{x})\mathsf{P}_\phi(\eta,\mathbf{x}')|0\rangle - \langle 0|\phi(\eta,\mathbf{x})\mathsf{P}_\phi(\eta,\mathbf{x}')|0\rangle^\dagger \\ &= i\frac{1}{\pi^2}\frac{\epsilon}{[(\mathbf{x}-\mathbf{x}')^2+\epsilon^2]^2}\end{aligned}$$

[6] 紫外カットオフ ϵ は、積分表示で、指数関数の位相のところにしか入っていないことに注意。このように正則化することで、正しい正準交換関係が得られる。

[7] Einstein 作用や宇宙定数項はここで採用している計量の展開 (6.1.2) では Riegert 場の指数関数が現れてここで述べている通常の質量項にはならない。

を計算することが出来る。最後の項は

$$\delta_3(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\epsilon\omega} = \frac{1}{\pi^2}\frac{\epsilon}{(\mathbf{x}^2+\epsilon^2)^2} \tag{6.5.2}$$

のように正則化されたデルタ関数である。χ と P_χ の交換子も上と同じ結果になる。一方、その他の交換子は ϵ が有限のままでゼロになり、正準交換関係が正しく成り立っていることが分かる。

複合演算子に対して Wick の演算子積展開を行うと、公式

$$\begin{aligned}
&[:AB(x):, :\prod_k C_k(y):] \\
&= \sum_i [A(x), C_i(y)] :B(x) \prod_{k(\neq i)} C_k(y): + \sum_i [B(x), C_i(y)] :A(x) \prod_{k(\neq i)} C_k(y): \\
&\quad + \sum_{i,j(i\neq j)} \{\langle 0|A(x)C_i(y)|0\rangle\langle 0|B(x)C_j(y)|0\rangle - \mathrm{H.c.}\} :\prod_{k(\neq i,j)} C_k(y):
\end{aligned}$$

を得る。最後の項は量子補正を表す項で、H.c. は { } 内の最初の項の Hermite 共役を表す。量子補正項はそれが実数ならば消える。

この演算子展開を使って生成子を含む複合演算子が成す代数を計算することが出来る。自由スカラー場の場合 [付録 D.1] と比べて、Riegert 場の場合はより複雑な量子補正関数が現れるが、すべて相殺して共形代数 (2.2.1) が閉じることを示すことが出来る。

ここでは有限の量子補正項が現れる場の変換則についてのみ考えることにする。複合演算子 $:\phi^n:$ の変換則を考える。生成子に現れる局所演算子 $\mathcal{A}$ との同時刻交換関係を計算すると

$$\begin{aligned}
[\mathcal{A}(\mathbf{x}), :\phi^n(\mathbf{y}):] &= -in\delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) :\chi\phi^{n-1}(\mathbf{y}): \\
&= -i\delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\partial_\eta :\phi^n(\mathbf{y}):
\end{aligned} \tag{6.5.3}$$

を得る。ここでは時間依存性を省いて場の演算子を表記した。これ以後も同時刻交換関係を考えるときは簡単のため書かないことにする。

局所演算子 $\mathcal{B}_j$ との交換関係には量子補正項が現れて、

$$\begin{aligned}
[\mathcal{B}_j(\mathbf{x}), :\phi^n(\mathbf{y}):] &= -i\delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\partial_j :\phi^n(\mathbf{y}): \\
&\quad + i\frac{1}{2b_1} n(n-1) e_j(\mathbf{x}-\mathbf{y}) :\phi^{n-2}(\mathbf{x}):
\end{aligned} \tag{6.5.4}$$

となる。ここで、量子補正を表す関数 $e_j(\mathbf{x})$ は

$$e_j(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^2}\frac{\epsilon x_j[1-h(\mathbf{x})]}{\mathbf{x}^2(\mathbf{x}^2+\epsilon^2)^2}, \quad h(\mathbf{x}) = \frac{i\epsilon}{2|\mathbf{x}|}\log\frac{i\epsilon+|\mathbf{x}|}{i\epsilon-|\mathbf{x}|}$$

で与えられ、関数 h は $h^\dagger(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})$ と $\lim_{\mathbf{x}\to 0} h(\mathbf{x}) = 1$ を満たす。

共形変換の生成子は保存する (時間に依存しない) ので、その代数は同時刻交換関係を用いて計算することが出来る。交換関係 (6.5.3) と (6.5.4) 及び $[:\mathsf{P}_\chi \partial_j \phi(\mathbf{x}):, :\phi^n(\mathbf{y}):] = 0$ から、並進及び Lorentz 変換は

$$\begin{aligned} i[P_\mu, :\phi^n(x):] &= \partial_\mu :\phi^n(x):, \\ i[M_{\mu\nu}, :\phi^n(x):] &= (x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) :\phi^n(x): \end{aligned}$$

となる。ここで、量子補正は Lorentz 生成子の反対称性により消える。それは、e_j が奇関数であることに注意して、$\int d^3\mathbf{x}\ e_j(\mathbf{x}) = 0$ 及び

$$\int d^3\mathbf{x}\ x_i e_j(\mathbf{x}) = \frac{1}{3}\delta_{ij}\int_0^\infty 4\pi x^2 dx \frac{1}{\pi^2}\frac{\epsilon[1-h(x)]}{(x^2+\epsilon^2)^2} = \frac{1}{6}\delta_{ij} \qquad (6.5.5)$$

を満たすことから示せる。

同様にして、dilatation 及び特殊共形変換は

$$\begin{aligned} i[D, :\phi^n(x):] &= x^\mu\partial_\mu :\phi^n(x): + n :\phi^{n-1}(x): - \frac{1}{4b_1} n(n-1) :\phi^{n-2}(x):, \\ i[K_\mu, :\phi^n(x):] &= \left(x^2\partial_\mu - 2x_\mu x^\nu \partial_\nu\right) :\phi^n(x): \\ &\quad -2x_\mu \left(n :\phi^{n-1}(x): - \frac{1}{4b_1} n(n-1) :\phi^{n-2}(x):\right) \end{aligned}$$

と計算される。ここで、$:\phi^{n-1}:$ 項はこれらの生成子の中の P_ϕ について線形な項との交換子から導かれる。それぞれの変換の最後の $1/b_1$ を含む項は量子補正である。D や K_0 のそれは積分公式 (6.5.5) を用いて計算できる。K_j はその公式を発展させた

$$\int d^3\mathbf{x}\ \left\{\mathbf{x}^2 e_j(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - 2x_j x^k e_k(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right\} = -y_j$$

を用いて計算される。

ここで、$n=1$ の変換則は Riegert 場の一般座標変換 (6.2.4) で $i[Q_\zeta, \phi] = \delta_\zeta \phi$ となる。このときは量子補正項は現れない。

最も簡単なプライマリースカラー場は

$$\mathcal{V}_\alpha(x) =: e^{\alpha\phi(x)} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} :\phi^n(x): \tag{6.5.6}$$

で与えられる。新たに導入した指数 α のことを Riegert 電荷と呼ぶ。上で求めた $:\phi^n:$ の変換則より、$\mathcal{V}_\alpha$ の共形変換は

$$\begin{aligned}
&i[P_\mu, \mathcal{V}_\alpha(x)] = \partial_\mu \mathcal{V}_\alpha(x), \qquad i[M_{\mu\nu}, \mathcal{V}_\alpha(x)] = (x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)\,\mathcal{V}_\alpha(x), \\
&i[D, \mathcal{V}_\alpha(x)] = (x^\mu\partial_\mu + h_\alpha)\,\mathcal{V}_\alpha(x), \\
&i[K_\mu, \mathcal{V}_\alpha(x)] = \left(x^2\partial_\mu - 2x_\mu x^\nu\partial_\nu - 2x_\mu h_\alpha\right)\mathcal{V}_\alpha(x)
\end{aligned}$$

と計算され、共形次元は

$$h_\alpha = \alpha - \frac{\alpha^2}{4b_1} \tag{6.5.7}$$

となる。この $1/b_1$ に比例した第二項が量子補正である。

次に、微分演算子を含む Lorentz スカラー場について考える。微分を二つもつ場の演算子は

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^1_\beta &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{n!} :\phi^n\partial^2\phi: = :e^{\beta\phi}\left(\frac{4\pi^2}{b_1}\mathsf{P}_\chi + \bar{\partial}^2\phi\right):, \\
\mathcal{R}^2_\beta &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{n!} :\phi^n\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi: = :e^{\beta\phi}\left(-\chi^2 + \partial_k\phi\partial^k\phi\right):
\end{aligned}$$

の二つである。これらは並進及び Lorentz 変換については通常のスカラー場の変換則を満たす。Dilatation の変換則は

$$i[D, \mathcal{R}^{1,2}_\beta(x)] = (x^\mu\partial_\mu + h_\beta + 2)\,\mathcal{R}^{1,2}_\beta(x)$$

となり、特殊共形変換はそれぞれ

$$\begin{aligned}
i[K_\mu, \mathcal{R}^1_\beta(x)] &= \left\{x^2\partial_\mu - 2x_\mu x^\lambda\partial_\lambda - 2x_\mu(h_\beta + 2)\right\}\mathcal{R}^1_\beta(x) + 4 :\partial_\mu\phi e^{\beta\phi}(x):, \\
i[K_\mu, \mathcal{R}^2_\beta(x)] &= \left\{x^2\partial_\mu - 2x_\mu x^\lambda\partial_\lambda - 2x_\mu(h_\beta + 2)\right\}\mathcal{R}^2_\beta(x) - 4\frac{h_\beta}{\beta} :\partial_\mu\phi e^{\beta\phi}(x):
\end{aligned}$$

で与えられる。ここで、h_β は (6.5.7) 式で定義される。これらより、二つを組み合わせた場の演算子

$$\mathcal{R}_\beta = \mathcal{R}^1_\beta + \frac{\beta}{h_\beta}\mathcal{R}^2_\beta =: e^{\beta\phi}\left(\partial^2\phi + \frac{\beta}{h_\beta}\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi\right): \tag{6.5.8}$$

を考えると、$\mathcal{R}_\beta$ は共形変換の下で

$$\begin{aligned}
&i[P_\mu, \mathcal{R}_\beta(x)] = \partial_\mu \mathcal{R}_\beta(x), \qquad i[M_{\mu\nu}, \mathcal{R}_\beta(x)] = (x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)\,\mathcal{R}_\beta(x), \\
&i[D, \mathcal{R}_\beta(x)] = \left(x^\lambda\partial_\lambda + h_\beta + 2\right)\mathcal{R}_\beta(x), \\
&i[K_\mu, \mathcal{R}_\beta(x)] = \left\{x^2\partial_\mu - 2x_\mu x^\lambda\partial_\lambda - 2x_\mu\,(h_\beta + 2)\right\}\mathcal{R}_\beta(x)
\end{aligned}$$

のように変換する共形次元 $h_\beta + 2$ をもつプライマリースカラー場になる。

さらにこれを一般化すると、微分を $2m$ 階含むスカラー場

$$\mathcal{R}^{[m]}_\gamma =: e^{\gamma\phi}\left(\partial^2\phi + \frac{\gamma}{h_\gamma}\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi\right)^m :$$

は共形次元 $h_\gamma + 2m$ をもつプライマリースカラーとなる。ここで、$m = 0, 1$ はそれぞれ $\mathcal{V}_\alpha$ と $\mathcal{R}_\beta$ に相当する。

6.6 物理的場の演算子

量子重力では共形不変性は一般座標不変性、すなわちゲージ不変性として現れるので、通常の共形場理論と違い、真空だけでなく場の演算子も共形変換の下で不変にならなければならない。そのような物理的場の演算子は一般座標不変性の条件

$$[Q_\zeta, \int d^4x \mathcal{O}(x)] = 0 \tag{6.6.1}$$

を満たすもので与えられる。この物理的条件を満たす場の演算子は共形次元 4 をもつプライマリースカラー場である。このとき、すべての共形 Killing ベクトル ζ^μ に対して

$$i[Q_\zeta, \mathcal{V}_\alpha(x)] = \partial_\mu\left\{\zeta^\mu \mathcal{V}_\alpha(x)\right\}$$

が成り立つことから物理条件を満たすことが分かる。一方、テンソル場はスピン項が存在するために満たさない。プライマリー場のデッセンダントも変換則が乱れているので条件を満たさない。

物理的演算子 $\mathcal{O}$ の最も簡単な例は $h_\alpha = 4$ を持つ演算子 $\mathcal{V}_\alpha$(6.5.6) である。条件式 $h_\alpha = 4$ を解くと Riegert 電荷は

$$\alpha = 2b_1 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{b_1}} \right) \tag{6.6.2}$$

と決まる。このとき、二つある解のうち、重力場と結合している物質場の数を無限大 (ラージ N 極限) にする古典極限 $b_1 \to \infty$ で α が正準値 4 に近づく、すなわち $\mathcal{V}_\alpha$ が古典的な体積要素 $\sqrt{-g}$ に近づく方を選んでいる。この値を持つ $\mathcal{V}_\alpha$ のことを量子論的な宇宙項演算子と呼ぶ。ここで、(6.1.4) より $b_1 > 4$ なので、α は実数で与えられ、この演算子は重力理論から期待されるように実演算子となる。

同様に、$h_\beta = 2$ を持つプライマリスカラー場 $\mathcal{R}_\beta$ は物理条件を満たす。条件式を解いて、古典極限 $b_1 \to \infty$ で正準値 2 になる解を求めると Riegert 電荷は

$$\beta = 2b_1 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2}{b_1}} \right) \tag{6.6.3}$$

と決まる。この解を持つ $\mathcal{R}_\beta$ を量子論的な Ricci スカラーと呼ぶ。実際、古典極限で $\beta \to 2$、$\beta/h_\beta \to 1$ となって定義式 (6.5.8) から古典的な Ricci スカラー $\sqrt{-g}R$ が得られることが分かる。

一般的には、$h_\gamma = 4 - 2m$ を満たす Riegert 電荷 $\gamma = 2b_1(1 - \sqrt{1-(4-2m)/b_1})$ を持つプライマリースカラー場 $\mathcal{R}_\gamma^{[m]}$ は Ricci スカラーの m 乗 $\sqrt{-g}R^m$ に相当する物理的演算子である。

6.7 BRST 演算子

この節では一般座標変換 (6.2.4) の BRST 演算子を考える。BRST 変換は 15 個のゲージ変数 ζ^μ をゲージゴースト c^μ に置き換えた変換である。

ゲージゴーストは 15 個の Grassmann モード、c_-^λ、 $\mathrm{c}^{\mu\nu}$、 c、 c_+^λ を用いて

$$
\begin{aligned}
c^\lambda &= \mathrm{c}_-^\mu \left(\zeta_T^\lambda\right)_\mu + \mathrm{c}^{\mu\nu}\left(\zeta_L^\lambda\right)_{\mu\nu} + \mathrm{c}\zeta_D^\lambda + \mathrm{c}_+^\mu\left(\zeta_S^\lambda\right)_\mu \\
&= \mathrm{c}_-^\lambda + 2x_\mu \mathrm{c}^{\mu\lambda} + x^\lambda \mathrm{c} + x^2 \mathrm{c}_+^\lambda - 2x^\lambda x_\mu \mathrm{c}_+^\mu
\end{aligned}
$$

と展開される。ここで、$\mathrm{c}^{\mu\nu}$ は反対称で、ゲージゴーストは Hermite 演算子である。c と $\mathrm{c}^{\mu\nu}$ は無次元で、c_-^μ と c_+^μ はそれぞれ次元 -1 と 1 を持つ。

同時にゲージゴーストと同じ性質を持った 15 個の反ゴーストモード b_-^λ、$\mathrm{b}^{\mu\nu}$、b、b_+^λ を導入する。ゲージゴーストとの反交換関係を

$$
\begin{aligned}
&\{\mathrm{c},\mathrm{b}\} = 1, \qquad \{\mathrm{c}^{\mu\nu},\mathrm{b}^{\lambda\sigma}\} = \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\lambda}, \\
&\{\mathrm{c}_-^\mu,\mathrm{b}_+^\nu\} = \{\mathrm{c}_+^\mu,\mathrm{b}_-^\nu\} = \eta^{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

と設定すると、ゲージゴースト部分の共形代数 (2.2.1) の生成子は

$$
\begin{aligned}
P_{\mathrm{gh}}^\mu &= i\left(-2\mathrm{b}\mathrm{c}_+^\mu + \mathrm{b}_+^\mu \mathrm{c} + \mathrm{b}^\mu{}_\lambda \mathrm{c}_+^\lambda + 2\mathrm{b}_+^\lambda \mathrm{c}^\mu{}_\lambda\right), \\
M_{\mathrm{gh}}^{\mu\nu} &= i\left(\mathrm{b}_+^\mu \mathrm{c}_-^\nu - \mathrm{b}_+^\nu \mathrm{c}_-^\mu + \mathrm{b}_-^\mu \mathrm{c}_+^\nu - \mathrm{b}_-^\nu \mathrm{c}_+^\mu + \mathrm{b}^{\mu\lambda}\mathrm{c}^\nu{}_\lambda - \mathrm{b}^{\nu\lambda}\mathrm{c}^\mu{}_\lambda\right), \\
D_{\mathrm{gh}} &= i\left(\mathrm{b}_-^\lambda \mathrm{c}_{+\lambda} - \mathrm{b}_+^\lambda \mathrm{c}_{-\lambda}\right), \\
K_{\mathrm{gh}}^\mu &= i\left(2\mathrm{b}\mathrm{c}_-^\mu - \mathrm{b}_-^\mu \mathrm{c} + \mathrm{b}^\mu{}_\lambda \mathrm{c}_-^\lambda + 2\mathrm{b}_-^\lambda \mathrm{c}^\mu{}_\lambda\right)
\end{aligned}
$$

で与えられる。以下、ゲージゴースト部分には “gh” をつける。

これらの生成子を用いると、BRST 変換の生成子は

$$
\begin{aligned}
Q_{\mathrm{BRST}} &= \mathrm{c}_-^\mu\left(P_\mu + \frac{1}{2}P_\mu^{\mathrm{gh}}\right) + \mathrm{c}^{\mu\nu}\left(M_{\mu\nu} + \frac{1}{2}M_{\mu\nu}^{\mathrm{gh}}\right) + \mathrm{c}\left(D + \frac{1}{2}D^{\mathrm{gh}}\right) \\
&\quad + \mathrm{c}_+^\mu\left(K_\mu + \frac{1}{2}K_\mu^{\mathrm{gh}}\right) \\
&= \mathrm{c}\left(D + D^{\mathrm{gh}}\right) + \mathrm{c}^{\mu\nu}\left(M_{\mu\nu} + M_{\mu\nu}^{\mathrm{gh}}\right) - \mathrm{b}N - \mathrm{b}^{\mu\nu}N_{\mu\nu} + \hat{Q}
\end{aligned}
$$

と定義される。ここで、P_μ、$M_{\mu\nu}$、D、K_μ はゲージゴースト部分以外の共形変換の生成子の和である。その他の演算子は

$$
\begin{aligned}
&N = 2i\mathrm{c}_+^\mu \mathrm{c}_{-\mu}, \qquad N^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left(\mathrm{c}_+^\mu \mathrm{c}_-^\nu + \mathrm{c}_-^\mu \mathrm{c}_+^\nu\right) + i\mathrm{c}^{\mu\lambda}\mathrm{c}^\nu{}_\lambda, \\
&\hat{Q} = \mathrm{c}_-^\mu P_\mu + \mathrm{c}_+^\mu K_\mu
\end{aligned}
$$

で与えられる。BRST 演算子の冪ゼロ性は生成子 P_μ、$M_{\mu\nu}$、D、K_μ が満たす共形代数を用いて

$$Q^2_{\rm BRST} = \hat{Q}^2 - ND - 2i{\rm c}^\mu_+ {\rm c}^\nu_- M_{\mu\nu} = 0$$

と示すことが出来る。BRST 演算子と反ゴーストとの反交換関係は

$$\{Q_{\rm BRST}, {\rm b}\} = D + D_{\rm gh}, \qquad \{Q_{\rm BRST}, {\rm b}^{\mu\nu}\} = 2\left(M^{\mu\nu} + M^{\mu\nu}_{\rm gh}\right),$$
$$\{Q_{\rm BRST}, {\rm b}^\mu_-\} = K^\mu + K^\mu_{\rm gh}, \qquad \{Q_{\rm BRST}, {\rm b}^\mu_+\} = P^\mu + P^\mu_{\rm gh}$$

で与えられることから、冪ゼロ性は $[Q_{\rm BRST}, D+D_{\rm gh}] = 0$ 等を表している。

BRST 変換は一般座標変換のゲージ自由度 ζ^μ をゲージゴースト場に置き換えたものになる。 Riegert 場の BRST 変換はその共形変換則からすぐに

$$i[Q_{\rm BRST}, \phi(x)] = c^\mu \partial_\mu \phi(x) + \frac{1}{4}\partial_\mu c^\mu(x)$$

と導ける。前節で求めた $\mathcal{V}_\alpha$ や $\mathcal{R}_\beta$ のようなプライマリースカラー場 $\mathcal{O}$ の BRST 変換はその共形次元を Δ とすると、

$$i[Q_{\rm BRST}, \mathcal{O}(x)] = c^\mu \partial_\mu \mathcal{O}(x) + \frac{\Delta}{4}\partial_\mu c^\mu \mathcal{O}(x)$$

と変換することが分かる。これより、前に示したように、$\Delta = 4$ のとき、

$$i[Q_{\rm BRST}, \int d^4x \mathcal{O}(x)] = \int d^4x \partial_\mu \{c^\mu \mathcal{O}(x)\} = 0$$

のように BRST 不変になる。これは物理条件 (6.6.1) を書き換えたものである。

ゲージゴースト場を使うと BRST 不変な局所演算子を構成することが出来る。完全反対称テンソルで足をつぶしたゲージゴーストの関数

$$\omega = \frac{1}{4!}\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} c^\mu c^\nu c^\lambda c^\sigma$$

を導入する。ゲージゴースト場の BRST 変換は

$$i\{Q_{\rm BRST}, c^\mu(x)\} = c^\nu \partial_\nu c^\mu(x)$$

で与えられることから、関数 ω は

$$i[Q_{\mathrm{BRST}}, \omega(x)] = c^\mu \partial_\mu \omega(x) = -\omega \partial_\mu c^\mu(x)$$

と変換する。このとき二番目の等式で $c^\mu \omega = 0$ を使った。この交換関係を使うと、ω と共形次元 $\Delta = 4$ のプライマリースカラー場の積は

$$i[Q_{\mathrm{BRST}}, \omega \mathcal{O}(x)] = \frac{1}{4}(\Delta - 4)\,\omega \partial_\mu c^\mu \mathcal{O}(x) = 0$$

のように BRST 不変な局所演算子になる。

このように、BRST 不変な場の演算子は共形次元が 4 のプライマリースカラー場で与えられる。一方、プライマリーテンソル場やデッセンダント場全般は、スピン項の存在や良い変換性をもたないことのため BRST 不変にならないので、一般座標不変な物理演算子から排除される。

6.8　相関関数と物理的共形次元

共形不変性は一般座標不変性と同等である。ゼロモード p が純虚数であることは物理場がスカラー曲率のような一般座標不変な実数の複合場であることを表している。相関関数を求めるためには、Riegert 電荷をもった物理場をポテンシャル項として作用に加えて議論する必要がある。

ここでは、宇宙項演算子を加えた系を考える。経路積分することを考えて、Euclid 空間に Wick 回転すると、作用は $S_{\mathrm{RWZ}} + \mu V_\alpha$ と表される。ここで、μ は宇宙項に相当し、$V_\alpha = \int d^4x \mathcal{V}_\alpha$ である。一般の演算子は $O_\gamma = \int d^4x \mathcal{O}_\gamma$ と書くことにする。この系では Riegert 場の定数モード σ を考慮する必要がある。$\phi \to \phi + \sigma$ とシフトして σ に依存する部分を見てみると、空間の Euler 数が $\int d^4x\sqrt{\hat{g}}\hat{G}_4/32\pi^2 = 2$ であることから、作用の σ 依存性はは $S_{\mathrm{RWZ}} \to S_{\mathrm{RWZ}} + 4b_1\sigma$ と導ける。場の演算子の依存性は、$A = e^{\alpha\sigma}$ として、$O_\gamma \to A^{\gamma/\alpha} O_\gamma$ と表される。このとき、相関関数は σ を先に積分することによって

$$\begin{aligned} \langle\langle O_{\gamma_1} \cdots O_{\gamma_n} \rangle\rangle &= \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty \frac{dA}{A} A^{-s} \langle O_{\gamma_1} \cdots O_{\gamma_n} e^{-\mu A V_\alpha} \rangle \\ &= \mu^s \frac{\Gamma(-s)}{\alpha} \langle O_{\gamma_1} \cdots O_{\gamma_n} (V_\alpha)^s \rangle \end{aligned} \tag{6.8.1}$$

と表すことが出来る。ここで、

$$s = \frac{4b_1}{\alpha} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{\alpha}$$

である。$\langle \cdots \rangle$ は自由場表示での相関関数を表す。2 次元では相関関数を計算する方法が開発されているが、4 次元量子重力ではまだその方法は確立していない。

相関関数の計算は難しいけれども、その振る舞いを規定する場 $\mathcal{O}_n = \mathcal{A}_n e^{\gamma_n \phi}$ の物理的な共形次元は次のように計算することができる。ここで、$\mathcal{A}_n$ は偶数 n 個の微分を含む演算子である。その物理的共形次元を Δ_n として定数 Weyl スケール変換 $d^4x\mathcal{O}_n \to \omega^{4-\Delta_n} d^4x\mathcal{O}_n$ を考える。距離の基準となる $n=0$ の宇宙項演算子のスケーリング次元をゼロとすると、Weyl スケール変換は Riegert 場のゼロモードのシフト $\phi_0 \to \phi_0 + (4/\gamma_0)\ln\omega$ として表される。ゼロモード因子 $e^{\gamma_n \phi_0}$ をもつ物理場 $\mathcal{O}_n$ $(n > 0)$ はこの変換の下で $d^4x\mathcal{O}_n \to \omega^{4\gamma_n/\gamma_0} d^4x\mathcal{O}_n$ と変換することからそのスケーリング次元は

$$\Delta_n = 4 - 4\frac{\gamma_n}{\gamma_0}$$

で与えられることが分かる。この物理的次元はラージ N の古典極限 $b_1 \to \infty$ で $\Delta_n \to n$ のように正準値である微分の数になる。

これら一般座標不変な物理状態は正と負の計量のモードが混じり合った状態として記述され、負計量のモードが単独で現れることはない。この点が 1970 年代に研究された高階微分量子重力との大きな違いの一つである。当時は、すべての重力場を摂動的に扱っていたことから、ゲージ対称性として (6.2.2) のように場に依存しない変換だけを考慮していた。そのため、結合定数が消える極限では正と負の計量のモードがゲージ変換で混じることなく、ゲージ不変な漸近場として負のモードが現れてユニタリ性を壊していた。一方、ここでは共形因子を厳密に扱ったことにより、一般座標不変性をあらわす共形不変性が正と負のモードを結びつけて、負のモードが単独で現れることを禁止している。

このことから、ユニタリ性にとって大事なのは重力場作用の全体の符号の正しさであって、個々にはゲージ不変でない各モードの符号ではない。いま考えている量子重力の作用は下にバウンドされた正しい符号をもっているので、経路積分が正しく定義される。このように、物理場の実数性を破るような要因が存在しないことから、その 2 点相関関数の振幅はユニタリ性の条件である正の数となることが期待される。特に $n = 2$ のスカラー曲率に相当する演算子の 2 点相関関数は宇宙初期のスケール不変なスペクトルを与えると考えられる。

結合定数が大きくなるとさらに相互作用によっても正と負のモードが混じり始める。一方、共形不変性は破れ始め、いわゆる漸近場を定義することのできる古典的な時空が現れる。この場合は 1970 年代の Lee と Wick の議論が適用できて、負計量のモードは相互作用によってその伝播関数の極が虚数となり、現実の世界には現れないことが示せる。このように負計量のモードは量子論的なバーチャル状態として、特異点の解消やくりこみ可能性を保障するために存在するゴーストで、現実の世界に現れることはないと考えられる。それは、4 階微分量子重力作用が (6.1.1) のように $\hbar$ を含まないことからも示唆される。

第7章　量子重力の物理状態

この章では量子重力の物理状態を求める。そのためには背景時空として $R \times S^3$ のシリンダー時空を採用すると便利である。Minkowski 時空 M^4 と $R \times S^3$ は共形変換で移れる。量子重力は共形変換として表された一般座標変換 (6.2.4) の下で不変なので、どちちらの背景時空で計算しても結果は同じである (背景時空独立性)。

7.1　$R \times S^3$ 上での正準量子化

背景時空 $R \times S^3$ の計量は S^3 の半径を 1 として Euler 角 $x^i = (\alpha, \beta, \gamma)$ を用いると[1]

$$
\begin{aligned}
ds^2_{R\times S^3} &= \hat{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -d\eta^2 + \hat{\gamma}_{ij} dx^i dx^j \\
&= -d\eta^2 + \frac{1}{4}(d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 + 2\cos\beta d\alpha d\gamma)
\end{aligned}
$$

と表示される。このとき、曲率は

$$
\hat{R}_{ijkl} = (\hat{\gamma}_{ik}\hat{\gamma}_{jl} - \hat{\gamma}_{il}\hat{\gamma}_{jk}), \quad \hat{R}_{ij} = 2\hat{\gamma}_{ij}, \quad \hat{R} = 6
$$

及び $\hat{C}^2_{\mu\nu\lambda\sigma} = \hat{G}_4 = 0$ となる。空間体積要素は

$$
d\Omega_3 = d^3\hat{x}\sqrt{\hat{\gamma}} = \frac{1}{8}\sin\beta d\alpha d\beta d\gamma
$$

で定義され、体積は

$$
\mathrm{V}_3 = \int d\Omega_3 = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} d\beta \int_0^{4\pi} d\gamma \frac{1}{8}\sin\beta = 2\pi^2
$$

で与えられる。

[1] 第三章では Euler 角もハット付きの $\hat{x}^j$ で表したけれども、ここでは簡単のためハットをはずしている。

三次元球面上の調和関数　量子場は S^3 上の調和関数を用いてモード展開される。n 階の対称横波トレースレス (symmetric transverse traceless, ST^2) テンソル調和関数は回転群 $SU(2) \times SU(2)$ の表現 $(J+\varepsilon_n, J-\varepsilon_n)$ を用いて分類され、それを $Y^{i_1\cdots i_n}_{J(M\varepsilon_n)}$ と記述する。ここで、$\varepsilon_n = \pm n/2$ は分極を表す指数である。調和関数はラプラシアンの固有関数で、固有値方程式

$$\Box_3 Y^{i_1\cdots i_n}_{J(M\varepsilon_n)} = \{-2J(2J+2)+n\} Y^{i_1\cdots i_n}_{J(M\varepsilon_n)}$$

を満たす。ここで、$\Box_3 = \hat{\gamma}^{ij}\hat{\nabla}_i\hat{\nabla}_j$ は S^3 上のラプラシアンである。$J(\geq n/2)$ は整数及び半整数で与えられ、$M=(m,m')$ は各分極についての表現の縮退度を表す指数で、

$$\begin{aligned} m &= -J-\varepsilon_n,\ -J-\varepsilon_n+1, \cdots, J+\varepsilon_n-1,\ J+\varepsilon_n, \\ m' &= -J+\varepsilon_n,\ -J+\varepsilon_n+1, \cdots, J-\varepsilon_n-1,\ J-\varepsilon_n \end{aligned}$$

の値を取る。これより縮退度は $n>0$ の場合は分極を考慮して $2(2J+n+1)(2J-n+1)$ になる。$n=0$ のスカラー調和関数の場合は $(2J+1)^2$ で与えられる。

ST^2 テンソル調和関数の複素共役及び規格化は

$$\begin{aligned} & Y^{i_1\cdots i_n *}_{J(M\varepsilon_n)} = (-1)^n \epsilon_M Y^{i_1\cdots i_n}_{J(-M\varepsilon_n)}, \\ & \int_{S^3} d\Omega_3 Y^{i_1\cdots i_n *}_{J_1(M_1\varepsilon^1_n)} Y_{i_1\cdots i_n J_2(M_2\varepsilon^2_n)} = \delta_{J_1J_2}\delta_{M_1M_2}\delta_{\varepsilon^1_n\varepsilon^2_n} \end{aligned}$$

で与えられる。ここで、二番目のクロネッカーデルタは $\delta_{M_1M_2} = \delta_{m_1m_2}\delta_{m'_1m'_2}$ である。符号因子は

$$\epsilon_M = (-1)^{m-m'}$$

と定義され、$\epsilon_M^2 = 1$ を満たす。以下では階数 n が 4 以下の調和関数に対して

$$y = \varepsilon_1 = \pm\frac{1}{2}, \quad x = \varepsilon_2 = \pm 1, \quad z = \varepsilon_3 = \pm\frac{3}{2}, \quad w = \varepsilon_4 = \pm 2$$

という分極指数を導入する。

スカラー場の量子化　自由スカラー場の $R \times S^3$ 上での量子化はすでに第 3 章 3.4 節で与えられている。

ゲージ場の量子化　ゲージ場を量子化するためにゲージ固定をする必要がある。Coulomb ゲージ $\hat{\nabla}^i A_i = 0$ を採用すると $R \times S^3$ 上の作用は

$$I = \int d\eta \int_{S^3} d\Omega_3 \left\{ \frac{1}{2} A^i \left(-\partial_\eta^2 + \Box_3 - 2 \right) A_i - \frac{1}{2} A_0 \Box_3 A_0 \right\}$$

となる。ここで、ゲージ場の反変ベクトルは $A^i = \hat{\gamma}^{ij} A_j$ と定義されている。ゲージ場 A_0 の作用は時間微分を含まないので非力学的変数であることから、残りのゲージ自由度を使ってさらに $A_0 = 0$ のゲージを取る。二つの条件を満たすゲージのことを輻射ゲージと呼ぶ。

横波ゲージ場をベクトル調和関数を使って $A^i \propto e^{-i\omega\eta} Y^i_{J(my)}$ と展開すると、スカラー場のときと同じ分散関係 $\omega^2 - (2J+1)^2 = 0$ を得る。これより、ゲージ場は

$$A^i = \sum_{J \geq \frac{1}{2}} \sum_{M,y} \frac{1}{\sqrt{2(2J+1)}} \left\{ q_{JM} e^{-i(2J+1)\eta} Y^i_{J(My)} + q^\dagger_{JM} e^{i(2J+1)\eta} Y^{i*}_{J(My)} \right\}$$

のようにモード展開される。共役運動量は $\mathsf{P}^i_A = \partial_\eta A^i$ となるので同時刻交換関係は $[A^i(\eta, \mathbf{x}), \mathsf{P}^j_A(\eta, \mathbf{y})] = i\delta_3^{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ と設定される。ここで、S^3 上のデルタ関数は完全系より $\delta_3^{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \sum_{J \geq \frac{1}{2}} \sum_{M,y} Y^{i*}_{J(My)}(\mathbf{x}) Y^j_{J(My)}(\mathbf{y})$ と表される。これより、生成消滅演算子が満たす交換関係は

$$[q_{J_1(M_1 y_1)}, q^\dagger_{J_2(M_2 y_2)}] = \delta_{J_1 J_2} \delta_{M_1 M_2} \delta_{y_1 y_2}$$

と規格化され、ゲージ場の Hamilton 演算子は

$$\begin{aligned} H &= \int_{S^3} d\Omega_3 : \left\{ \frac{1}{2} \mathsf{P}^i_A \mathsf{P}^A_i - \frac{1}{2} A^i \left(\Box_3 - 2 \right) A_i \right\} : \\ &= \sum_{J \geq \frac{1}{2}} \sum_{M,y} (2J+1) q^\dagger_{J(My)} q_{J(My)} \end{aligned} \tag{7.1.1}$$

となる。

重力場の正準量子化　Weyl 作用を扱うにはゲージ固定をする必要がある。そのために、ここではトレースレステンソル場をさらにモード分解して、

$$h_{00} = h, \qquad h_{0i} = h_i, \qquad h_{ij} = h^{\mathbf{tr}}_{ij} + \frac{1}{3}\hat{\gamma}_{ij} h$$

と書く。ここで、$h^{\mathbf{tr}}_{ij}$ は空間のトレースレス条件 $(h^{\mathbf{tr}i}{}_i = 0)$ を満たす成分である。このときトレースレステンソル場の一般座標変換は

$$\delta_\kappa h = \frac{3}{2}\partial_\eta \kappa_0 + \frac{1}{2}\hat{\nabla}_k \kappa^k, \qquad \delta_\kappa h_i = \partial_\eta \kappa_i + \hat{\nabla}_i \kappa_0,$$
$$\delta_\kappa h^{\mathbf{tr}}_{ij} = \hat{\nabla}_i \kappa_j + \hat{\nabla}_j \kappa_i - \frac{2}{3}\hat{\gamma}_{ij}\hat{\nabla}_k \kappa^k$$

と分解される。

ここでは一般座標変換の四つの自由度を用いて横波ゲージ条件 $\hat{\nabla}^i h_i = \hat{\nabla}^i h^{\mathbf{tr}}_{ij} = 0$ を課す。すなわち、横波ベクトル成分を h^{T}_i 及び横波トレースレス成分を h^{TT}_{ij} と記述すると、この横波ゲージ条件は $h_i = h^{\mathrm{T}}_i, \qquad h^{\mathbf{tr}}_{ij} = h^{\mathrm{TT}}_{ij}$ と表すことができる。

Riegert-Wess-Zumino 作用と横波ゲージでゲージ固定した Weyl 作用は $R \times S^3$ 上で

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{4DQG}} \;\; = \;\; \int d\eta \int_{S^3} d\Omega_3 \Big\{ & -\frac{2b_1}{(4\pi)^2}\phi\left(\partial_\eta^4 - 2\Box_3\partial_\eta^2 + \Box_3^2 + 4\partial_\eta^2\right)\phi \\ & -\frac{1}{2}h^{\mathrm{TT}}_{ij}\left(\partial_\eta^4 - 2\Box_3\partial_\eta^2 + \Box_3^2 + 8\partial_\eta^2 - 4\Box_3 + 4\right)h^{ij}_{\mathrm{TT}} \\ & + h^{\mathrm{T}}_i\left(\Box_3 + 2\right)\left(-\partial_\eta^2 + \Box_3 - 2\right)h^i_{\mathrm{T}} \\ & -\frac{1}{27}h\left(16\Box_3 + 27\right)\Box_3 h \Big\} \end{aligned} \tag{7.1.2}$$

となる。

スカラー的な場 h の作用は時間微分を含まないので力学的な自由度ではない。ここではさらに $\delta_\kappa(\hat{\nabla}^i h_i) = \delta_\kappa(\hat{\nabla}^i h^{\mathbf{tr}}_{ij}) = 0$ を満たす残りのゲージ自由度を使って $h = 0$ のゲージを取る。実際、$\Box_3 \kappa_0 = 0$ を満たすゲージ自由度 $\kappa_0(\eta)$ が残るので、それを使って消すことができる。横波条件とこの条件を合わせて輻射ゲージと呼ぶことにする。

ここではさらに $(\Box_3 + 2)h^{\mathrm{T}}_i = 0$ を満たす非力学的な横波ベクトルモードを取り除く。このモードは $J = 1/2$ ベクトル調和関数で書けて、条件

式は

$$h_i^{\mathrm{T}}|_{J=\frac{1}{2}} = 0 \tag{7.1.3}$$

と表すことができる。この条件を加えた輻射ゲージを輻射$^+$ゲージと呼ぶことにする。このとき、一般座標変換の残りのゲージ自由度は共形 Killing ベクトルの自由度と同じになる。詳しくは次節で共形代数の生成子を構成する際に述べる。

前章と同様に Dirac の処方箋に従って正準量子化する。新しい変数 $\chi = \partial_\eta \phi$(6.3.1) を用いて Riegert 場の作用を書き換えると

$$I = \int d\eta \int_{S^3} d\Omega_3 \left\{ -\frac{b_1}{8\pi^2} \left[(\partial_\eta \chi)^2 + 2\chi \Box_3 \chi - 4\chi^2 + (\Box_3 \phi)^2 \right] + v(\partial_\eta \phi - \chi) \right\}$$

となる。ここで、次元が不足して見える項は曲率からの寄与で、S^3 の半径を 1 としていることによる。拘束条件を解いて得られる部分位相空間の四つの変数の間の Dirac 括弧をを交換子に置き換えると

$$[\chi(\eta, \mathbf{x}), \mathsf{P}_\chi(\eta, \mathbf{y})] = [\phi(\eta, \mathbf{x}), \mathsf{P}_\phi(\eta, \mathbf{y})] = i\delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

を得る。ここで、運動量変数は

$$\mathsf{P}_\chi = -\frac{b_1}{4\pi^2} \partial_\eta \chi, \qquad \mathsf{P}_\phi = -\partial_\eta \mathsf{P}_\chi - \frac{b_1}{2\pi^2} \Box_3 \chi + \frac{b_1}{\pi^2} \chi$$

で与えられる。Hamilton 演算子は

$$H = \int d\Omega_3 : \left\{ -\frac{2\pi^2}{b_1} \mathsf{P}_\chi^2 + \mathsf{P}_\phi \chi + \frac{b_1}{8\pi^2} \left[2\chi \Box_3 \chi - 4\chi^2 + (\Box_3 \phi)^2 \right] \right\} :$$

と書ける。

Riegert-Wess-Zumino 作用 (7.1.2) から Riegert 場の運動方程式を導いて $\phi \propto e^{-i\omega\eta} Y_{JM}$ を代入すると分散関係 $\{\omega^2 - (2J)^2\}\{\omega^2 - (2J+2)^2\} = 0$ を得る。これより Riegert 場は

$$\begin{aligned} \phi \;\; = \;\; & \frac{\pi}{2\sqrt{b_1}} \Big\{ 2(\hat{q} + \hat{p}\eta) Y_{00} \\ & + \sum_{J \geq \frac{1}{2}} \sum_M \frac{1}{\sqrt{J(2J+1)}} \left(a_{JM} e^{-i2J\eta} Y_{JM} + a_{JM}^\dagger e^{i2J\eta} Y_{JM}^* \right) \\ & + \sum_{J \geq 0} \sum_M \frac{1}{\sqrt{(J+1)(2J+1)}} \left(b_{JM} e^{-i(2J+2)\eta} Y_{JM} + b_{JM}^\dagger e^{i(2J+2)\eta} Y_{JM}^* \right) \Big\} \end{aligned}$$

と展開される。ここで、$Y_{00}=1/\sqrt{\mathrm{V}_3}=1/\sqrt{2}\pi$ である。正準交換関係から展開係数の間の交換関係は

$$[\hat{q},\hat{p}]=i,\quad [a_{J_1M_1},a^\dagger_{J_2M_2}]=\delta_{J_1J_2}\delta_{M_1M_2},\quad [b_{J_1M_1},b^\dagger_{J_2M_2}]=-\delta_{J_1J_2}\delta_{M_1M_2}$$

で与えられる。これより a_{JM} は正計量、b_{JM} は負計量をもつことが分かる。

Hamilton 演算子は

$$H=\frac{1}{2}\hat{p}^2+b_1+\sum_{J\geq 0}\sum_{M}\{2Ja^\dagger_{JM}a_{JM}-(2J+2)b^\dagger_{JM}b_{JM}\} \tag{7.1.4}$$

となる。ここで、エネルギーシフト項 b_1 は 2 次元量子重力のとき同じように座標系に依存したカシミア項で、前出の定義式からは出てこない。ここでは簡単のため次の節で求める $R\times S^3$ 上の共形代数が閉じるように決めている。

横波トレースレス場 h^{TT}_{ij} も高階微分場なので共形モード場と同様に Dirac の処方箋に従って量子化する。横波ベクトル場 h^{T}_i は 2 階微分なので通常の量子化を行う。テンソル及びベクトル調和関数を用いて場をそれぞれ $h^{ij}_{\mathrm{TT}}\propto e^{-i\omega\eta}Y^{ij}_{J(Mx)}$ と $h^i_{\mathrm{T}}\propto e^{-i\omega\eta}Y^i_{J(My)}$ で展開すると、ゲージ固定した作用 (7.1.2) からそれぞれ分散関係 $\{\omega^2-(2J)^2\}\{\omega^2-(2J+2)^2\}=0$ と $(2J-1)(2J+3)\{\omega^2-(2J+1)^2\}=0$ を得る。これらより場は[2]

$$\begin{aligned}
h^{ij}_{\mathrm{TT}} &= \frac{1}{4}\sum_{J\geq 1}\sum_{M,x}\frac{1}{\sqrt{J(2J+1)}}\Big\{c_{J(Mx)}e^{-i2J\eta}Y^{ij}_{J(Mx)}+c^\dagger_{J(Mx)}e^{i2J\eta}Y^{ij*}_{J(Mx)}\Big\}\\
&\quad +\frac{1}{4}\sum_{J\geq 1}\sum_{M,x}\frac{1}{\sqrt{(J+1)(2J+1)}}\Big\{d_{J(Mx)}e^{-i(2J+2)\eta}Y^{ij}_{J(Mx)}\\
&\qquad\qquad +d^\dagger_{J(Mx)}e^{i(2J+2)\eta}Y^{ij*}_{J(Mx)}\Big\},\\
h^i_{\mathrm{T}} &= \frac{1}{2}\sum_{J\geq 1}\sum_{M,y}\frac{i}{\sqrt{(2J-1)(2J+1)(2J+3)}}\Big\{e_{J(My)}e^{-i(2J+1)\eta}Y^i_{J(My)}\\
&\qquad\qquad -e^\dagger_{J(My)}e^{i(2J+1)\eta}Y^{i*}_{J(My)}\Big\}
\end{aligned} \tag{7.1.5}$$

[2] h^i_{T} の展開に虚数単位を用いているのは、次節で求める共形変換の生成子 Q_M の規格化に合わせるためである。

と展開される。先に述べたように、ベクトル場の $J=1/2$ モードは $(\Box_3+2)h^i_{\mathrm{T}}|_{J=1/2}=0$ をみたすモードで、ゲージ条件として落している。この展開の下で交換関係は

$$[c_{J_1(M_1x_1)},c^\dagger_{J_2(M_2x_2)}]=-[d_{J_1(M_1x_1)},d^\dagger_{J_2(M_2x_2)}]=\delta_{J_1J_2}\delta_{M_1M_2}\delta_{x_1x_2},$$
$$[e_{J_1(M_1y_1)},e^\dagger_{J_2(M_2y_2)}]=-\delta_{J_1J_2}\delta_{M_1M_2}\delta_{y_1y_2}$$

と規格化され、$c_{J(Mx)}$ は正計量、$d_{J(Mx)}$ 及び $e_{J(My)}$ は負計量になる。Hamilton 演算子は

$$\begin{aligned} H &= \sum_{J\geq 1}\sum_{M,x}\{2Jc^\dagger_{J(Mx)}c_{J(Mx)}-(2J+2)d^\dagger_{J(Mx)}d_{J(Mx)}\} \\ &\quad -\sum_{J\geq 1}\sum_{M,y}(2J+1)e^\dagger_{J(My)}e_{J(My)} \end{aligned} \tag{7.1.6}$$

で与えられる。

7.2 共形変換の生成子

ここでは一般座標変換/共形変換の生成子 $Q_\zeta=\{H,R_{MN},Q_M,Q^\dagger_M\}$ を求める。スカラー場の場合はすでに第三章 3.4 節で求めたので、以下ではそれを参照して、その他の場の生成子を求める。

ゲージ場　ゲージ場のストレステンソルは

$$T_{\mu\nu}=F_{\mu\lambda}F_\nu{}^\lambda-\frac{1}{4}\hat{g}_{\mu\nu}F_{\lambda\sigma}F^{\lambda\sigma}$$

で与えられる。ここで、$F^\mu{}_\nu=\hat{g}^{\mu\lambda}F_{\lambda\nu}$ である。このテンソルは自明にトレースレスになる。

輻射ゲージ $A_0=\hat{\nabla}^iA_i=0$ のもとで、定義式にストレステンソルを代入して共形変換の生成子を求める。Hamilton 演算子はすでに (7.1.1) で求めたものになる。特殊共形変換の生成子は

$$\begin{aligned} Q_M &= \sum_{J\geq\frac{1}{2}}\sum_{M_1,y_1,M_2,y_2}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}M}_{J(M_1y_1),J+\frac{1}{2}(M_2y_2)}\sqrt{(2J+1)(2J+2)} \\ &\qquad\qquad \times(-\epsilon_{M_1})q^\dagger_{J(-M_1y_1)}q_{J+\frac{1}{2}(M_2y_2)} \end{aligned}$$

となる。新たに導入された $SU(2)\times SU(2)$Clebsch-Gordan 係数 $\mathbf{D}$ は

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}M}_{J(M_1y_1),J+\frac{1}{2}(M_2y_2)} &= \sqrt{V_3}\int_{S^3} d\Omega_3 Y^{*}_{\frac{1}{2}M} Y^{i}_{J(M_1y_1)} Y_{iJ+\frac{1}{2}(M_2y_2)} \\ &= \sqrt{J(2J+3)}\, C^{\frac{1}{2}m}_{J+y_1m_1,\ J+\frac{1}{2}+y_2m_2} C^{\frac{1}{2}m'}_{J-y_1m_1',\ J+\frac{1}{2}-y_2m_2'}\end{aligned}$$

と定義される。係数 $\mathbf{D}$ の一般的な式は付録 E.2 に与えてある。S^3 回転の生成子については、その具体的な式は以下の議論に於いてあまり重要ではないので省略する。

Riegert 場　Riegert-Wess-Zumino 作用を背景時空について変分すると、Riegert 場のストレステンソル

$$\begin{aligned}T_{\mu\nu} = -\frac{b_1}{8\pi^2}\Big\{ & -4\hat{\nabla}^2\phi\hat{\nabla}_\mu\hat{\nabla}_\nu\phi + 2\hat{\nabla}_\mu\hat{\nabla}^2\phi\hat{\nabla}_\nu\phi + 2\hat{\nabla}_\nu\hat{\nabla}^2\phi\hat{\nabla}_\mu\phi \\ & +\frac{8}{3}\hat{\nabla}_\mu\hat{\nabla}_\lambda\phi\hat{\nabla}_\nu\hat{\nabla}^\lambda\phi - \frac{4}{3}\hat{\nabla}_\mu\hat{\nabla}_\nu\hat{\nabla}_\lambda\phi\hat{\nabla}^\lambda\phi + 4\hat{R}_{\mu\lambda\nu\sigma}\hat{\nabla}^\lambda\phi\hat{\nabla}^\sigma\phi \\ & +4\hat{R}_{\mu\lambda}\hat{\nabla}^\lambda\phi\hat{\nabla}_\nu\phi + 4\hat{R}_{\nu\lambda}\hat{\nabla}^\lambda\phi\hat{\nabla}_\mu\phi - \frac{4}{3}\hat{R}_{\mu\nu}\hat{\nabla}_\lambda\phi\hat{\nabla}^\lambda\phi - \frac{4}{3}\hat{R}\hat{\nabla}_\mu\phi\hat{\nabla}_\nu\phi \\ & -\frac{2}{3}\hat{\nabla}_\mu\hat{\nabla}_\nu\hat{\nabla}^2\phi - 4\hat{R}_{\mu\lambda\nu\sigma}\hat{\nabla}^\lambda\hat{\nabla}^\sigma\phi + \frac{14}{3}\hat{R}_{\mu\nu}\hat{\nabla}^2\phi + 2\hat{R}\hat{\nabla}_\mu\hat{\nabla}_\nu\phi \\ & -4\hat{R}_{\mu\lambda}\hat{\nabla}^\lambda\hat{\nabla}_\nu\phi - 4\hat{R}_{\nu\lambda}\hat{\nabla}^\lambda\hat{\nabla}_\mu\phi - \frac{1}{3}\hat{\nabla}_\mu\hat{R}\hat{\nabla}_\nu\phi - \frac{1}{3}\hat{\nabla}_\nu\hat{R}\hat{\nabla}_\mu\phi \\ & +\hat{g}_{\mu\nu}\Big[\hat{\nabla}^2\phi\hat{\nabla}^2\phi - \frac{2}{3}\hat{\nabla}^\lambda\hat{\nabla}^2\phi\hat{\nabla}_\lambda\phi - \frac{2}{3}\hat{\nabla}^\lambda\hat{\nabla}^\sigma\phi\hat{\nabla}_\lambda\hat{\nabla}_\sigma\phi - \frac{8}{3}\hat{R}_{\lambda\sigma}\hat{\nabla}^\lambda\phi\hat{\nabla}^\sigma\phi \\ & +\frac{2}{3}\hat{R}\hat{\nabla}^\lambda\phi\hat{\nabla}_\lambda\phi + \frac{2}{3}\hat{\nabla}^4\phi + 4\hat{R}_{\lambda\sigma}\hat{\nabla}^\lambda\hat{\nabla}^\sigma\phi - 2\hat{R}\hat{\nabla}^2\phi + \frac{1}{3}\hat{\nabla}^\lambda\hat{R}\hat{\nabla}_\lambda\phi\end{aligned}$$

を得る。そのトレースは $T^\lambda_{\ \lambda} = -(b_1/4\pi^2)\times\hat{\Delta}_4\phi = 0$ のように $R\times S^3$ 上の Riegert 場の運動方程式に比例して消える。

Hamilton 演算子はすでに (7.1.4) 式で与えられている。特殊共形変換の生成子は定義式に従って求めると

$$\begin{aligned}Q_M &= \left(\sqrt{2b_1} - i\hat{p}\right) a_{\frac{1}{2}M} \\ &\quad + \sum_{J\geq 0}\sum_{M_1,M_2} \mathbf{C}^{\frac{1}{2}M}_{JM_1,J+\frac{1}{2}M_2}\Big\{\alpha(J)\epsilon_{M_1} a^{\dagger}_{J-M_1} a_{J+\frac{1}{2}M_2} \\ &\qquad + \beta(J)\epsilon_{M_1} b^{\dagger}_{J-M_1} b_{J+\frac{1}{2}M_2} + \gamma(J)\epsilon_{M_2} a^{\dagger}_{J+\frac{1}{2}-M_2} b_{JM_1}\Big\}\end{aligned}$$

となる。ここで、係数 $\mathbf{C}$ はスカラー場のときに導入した (4.3.2) 式と同じである。その他の係数は

$$\alpha(J) = \sqrt{2J(2J+2)}, \quad \beta(J) = -\sqrt{(2J+1)(2J+3)}, \quad \gamma(J) = 1 \tag{7.2.1}$$

で与えられる。回転生成子の具体的な式は以下の議論で使わないので省略する。

ここで、計算に役立つ式として、$SU(2) \times SU(2)$Clebsch-Gordan 係数の間に成り立つ交差関係式 (4.3.3) を使うと、Q_M と $Q_N^\dagger$ の交換関係の非対角成分が消えることが簡単に示せる。また、次の節で物理状態を求める際にも有用である。

Riegert 場の共形変換は、生成子と場の演算子との交換関係を用いて

$$i[Q_\zeta, \phi] = \zeta^\mu \hat{\nabla}\phi + \frac{1}{4}\hat{\nabla}_\mu \zeta^\mu \tag{7.2.2}$$

と表すことができる。特殊共形変換の場合はスカラー場のときに使用した調和関数の積の展開式 (E.3.1) を使うと容易に示すことができる。

トレースレステンソル場　最後に輻射 $^+$ ゲージでのトレースレステンソル場の共形変換の生成子を与える。

その前に、前節で述べた輻射 $^+$ ゲージ固定条件について注釈する。通常の輻射ゲージ条件 $\hat{\nabla}^i h_i = \hat{\nabla}^i h^{\mathbf{tr}}_{ij} = 0$ と $h = 0$ を保つ残りのゲージ自由度は方程式 $\delta_\kappa h = (3\partial_\eta \kappa_0 + \tilde{\psi})/2 = 0$、$\delta_\kappa(\hat{\nabla}_i h^i) = \partial_\eta \tilde{\psi} + \square_3 \kappa_0 = 0$、$\delta_\kappa(\hat{\nabla}^i h^{\mathbf{tr}}_{ij}) = (\square_3 + 2)\kappa_j + \hat{\nabla}_j \tilde{\psi}/3 = 0$ で表される。ここで、$\tilde{\psi} = \hat{\nabla}_\lambda \kappa^\lambda$ である。これらの式は残りのゲージ自由度が共形 Killing ベクトルで張られる 15 個のゲージ自由度よりも広いことを表している。すなわち、二番目の方程式は共形 Killing 方程式 (4.2.1) の二番目の条件よりも弱く、S^3 の Killing 方程式の解として $\partial_\eta \kappa^i \neq 0$ を満たすものが存在して、任意の時間の関数を $f(\eta)$ とすると $\kappa^\mu = (0, f(\eta) Y^i_{1/2(My)})$ の解が許されることが分かる。このゲージ自由度を使って h^{T}_i の $J = 1/2$ の自由度を取り除くことができ、ゲージ固定条件 (7.1.3) を課すことができる。輻射 $^+$ ゲージ固定後の残りの一般座標変換の自由度は共形 Killing ベクトルと同じになり、それが共形変換の自由度になる。

Hamilton 演算子 H はすでに (7.1.6) で与えている。特殊共形変換の生成子は結果のみを書くと

$$
\begin{aligned}
Q_M \;=\; & \sum_{J\geq 1}\sum_{M_1,x_1,M_2,x_2} \mathbf{E}^{\frac{1}{2}M}_{J(M_1x_1),J+\frac{1}{2}(M_2x_2)}\Big\{\alpha(J)\epsilon_{M_1}c^{\dagger}_{J(-M_1x_1)}c_{J+\frac{1}{2}(M_2x_2)} \\
&\quad +\beta(J)\epsilon_{M_1}d^{\dagger}_{J(-M_1x_1)}d_{J+\frac{1}{2}(M_2x_2)}+\gamma(J)\epsilon_{M_2}c^{\dagger}_{J+\frac{1}{2}(-M_2x_2)}d_{J(M_1x_1)}\Big\} \\
& +\sum_{J\geq 1}\sum_{M_1,x_1,M_2,y_2} \mathbf{H}^{\frac{1}{2}M}_{J(M_1x_1);J(M_2y_2)}\Big\{A(J)\epsilon_{M_1}c^{\dagger}_{J(-M_1x_1)}e_{J(M_2y_2)} \\
&\qquad\qquad +B(J)\epsilon_{M_2}e^{\dagger}_{J(-M_2y_2)}d_{J(M_1x_1)}\Big\} \\
& +\sum_{J\geq 1}\sum_{M_1,y_1,M_2,y_2} \mathbf{D}^{\frac{1}{2}M}_{J(M_1y_1),J+\frac{1}{2}(M_2y_2)}C(J)\epsilon_{M_1}e^{\dagger}_{J(-M_1y_1)}e_{J+\frac{1}{2}(M_2y_2)}
\end{aligned}
$$

となる。係数 $\alpha(J)$、$\beta(J)$、$\gamma(J)$ は Riegert 場のときと同じ (7.2.1) 式になる。さらに

$$
A(J)=\sqrt{\frac{4J}{(2J-1)(2J+3)}},\qquad B(J)=\sqrt{\frac{2(2J+2)}{(2J-1)(2J+3)}},
$$
$$
C(J)=\sqrt{\frac{(2J-1)(2J+1)(2J+2)(2J+4)}{2J(2J+3)}}
$$

の係数が現れる。また、新たな $SU(2)\times SU(2)$Clebsch-Gordan 係数

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}^{\frac{1}{2}M}_{J(M_1x_1),J+\frac{1}{2}(M_2x_2)} &= \sqrt{\mathrm{V}_3}\int_{S^3} d\Omega_3 Y^{*}_{\frac{1}{2}M}Y^{ij}_{J(M_1x_1)}Y_{ijJ+\frac{1}{2}(M_2x_2)} \\
&= \sqrt{(2J-1)(J+2)}\,C^{\frac{1}{2}m}_{J+x_1m_1,J+\frac{1}{2}+x_2m_2}C^{\frac{1}{2}m'}_{J-x_1m'_1,J+\frac{1}{2}-x_2m'_2}, \\
\mathbf{H}^{\frac{1}{2}M}_{J(M_1x_1);J(M_2y_2)} &= \sqrt{\mathrm{V}_3}\int_{S^3} d\Omega_3 Y^{*}_{\frac{1}{2}M}Y^{ij}_{J(M_1x_1)}\hat{\nabla}_i Y_{jJ(M_2y_2)} \\
&= -\sqrt{(2J-1)(2J+3)}\,C^{\frac{1}{2}m}_{J+x_1m_1,J+y_2m_2}C^{\frac{1}{2}m'}_{J-x_1m'_1,J-y_2m'_2}
\end{aligned}
$$

が必要になる。これらの係数の一般的な式は (E.2.2) と (E.2.4) で与えられる。

この生成子は、定義に従って Weyl 作用のストレステンソルから直接求めるのではなく、六つの係数 α、β、γ、A、B、C の値をあらかじめ指定せずに、共形代数が閉じるようにそれらの値を決定して求めた。その際、ベクトル及びテンソル調和関数の積の展開にたいして成り立つ交差関係

式を使うと計算が簡単になる。また、係数の符号やすでに示したモード展開式 (7.1.5) 等の決まりごとは以下で述べる共形変換の式と合うように決めている。

正計量のモード $c_{J(Mx)}$ と負計量のモード $d_{J(Mx)}$、$e_{J(My)}$ の間の交差項が存在することは、共形代数が閉じるためには負計量のテンソル及びベクトルモードが必要であることを表している。それは、Einstein 理論のような正計量のテンソルモードだけからなる理論では共形代数は閉じないことを示している。このように、量子論的な一般座標不変性を現す共形不変性が実現するためには負計量のモードを含む高階微分重力場が必要である。

7.3 BRST 演算子と物理状態の条件

共形 Killing 方程式 $\hat{\nabla}_\mu c_\nu + \hat{\nabla}_\nu c_\mu - \hat{g}_{\mu\nu}\hat{\nabla}_\lambda c^\lambda/2 = 0$ を満たすゲージゴースト場 c^μ は 15 個の Grassmann モード c、 c_{MN}、 c_M、 $\mathrm{c}_M^\dagger$ を用いて

$$c^\mu = \mathrm{c}\eta^\mu + \sum_M \left(\mathrm{c}_M^\dagger \zeta_M^\mu + \mathrm{c}_M \zeta_M^{\mu*} \right) + \sum_{M,N} \mathrm{c}_{MN} \zeta_{MN}^\mu$$

と展開される。ここで、c は Hermite 演算子、c_{MN} は関係式 $\mathrm{c}_{MN}^\dagger = \mathrm{c}_{NM}$、$\mathrm{c}_{MN} = -\epsilon_M \epsilon_N \mathrm{c}_{-N-M}$ を満たす六個のモードである。これらの関係式より $\sum_M \mathrm{c}_{MM} = 0$ が、Grassmann 性より $\sum_M \epsilon_M \mathrm{c}_{-M}\mathrm{c}_M = 0$ が成り立つ。さらに同じ性質をもつ反ゴーストモード b、 b_{MN}、 b_M、 $\mathrm{b}_M^\dagger$ を導入して、反交換関係

$$\{\mathrm{b}, \mathrm{c}\} = 1, \qquad \{\mathrm{b}_{MN}, \mathrm{c}_{LK}\} = \delta_{ML}\delta_{NK} - \epsilon_M \epsilon_N \delta_{-MK}\delta_{-NL},$$
$$\{\mathrm{b}_M^\dagger, \mathrm{c}_N\} = \{\mathrm{b}_M, \mathrm{c}_N^\dagger\} = \delta_{MN}$$

を設定する。

これらを使って共形代数 (4.1.8) を満たす 15 個の生成子

$$H^{\mathrm{gh}} = \sum_M \left(\mathrm{c}_M^\dagger \mathrm{b}_M - \mathrm{c}_M \mathrm{b}_M^\dagger \right),$$

$$
\begin{aligned}
R^{\rm gh}_{MN} &= -{\rm c}_M {\rm b}^\dagger_N + {\rm c}^\dagger_N {\rm b}_M + \epsilon_M \epsilon_N \left({\rm c}_{-N} {\rm b}^\dagger_{-M} - {\rm c}^\dagger_{-M} {\rm b}_{-N} \right) \\
&\quad - \sum_L \left({\rm c}_{LM} {\rm b}_{LN} - {\rm c}_{NL} {\rm b}_{ML} \right), \\
Q^{\rm gh}_M &= -2{\rm c}_M {\rm b} - {\rm c}{\rm b}_M - \sum_L \left(2{\rm c}_{LM} {\rm b}_L + {\rm c}_L {\rm b}_{ML} \right), \\
Q^{\rm gh\dagger}_M &= 2{\rm c}^\dagger_M {\rm b} + {\rm c}{\rm b}^\dagger_M + \sum_L \left(2{\rm c}_{ML} {\rm b}^\dagger_L + {\rm c}^\dagger_L {\rm b}_{LM} \right) \qquad (7.3.1)
\end{aligned}
$$

を構成することが出来る。以下ではこのゴースト部分を含めた共形変換の生成子を

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} &= H + H^{\rm gh}, \qquad \mathcal{R}_{MN} = R_{MN} + R^{\rm gh}_{MN}, \\
\mathcal{Q}_M &= Q_M + Q^{\rm gh}_M, \qquad \mathcal{Q}^\dagger_M = Q^\dagger_M + Q^{\rm gh\dagger}_M
\end{aligned}
$$

と表すことにする。ここで、H、R_{MN}、Q_M、$Q^\dagger_M$ は前節で求めた生成子の和である。

背景時空 $R \times S^3$ 上で定義された一般座標変換 (6.2.4) の BRST 演算子は

$$
\begin{aligned}
Q_{\rm BRST} &= {\rm c}H + \sum_M \left({\rm c}^\dagger_M Q_M + {\rm c}_M Q^\dagger_M \right) + \sum_{M,N} {\rm c}_{MN} R_{MN} \\
&\quad + \frac{1}{2}{\rm c}H^{\rm gh} + \frac{1}{2}\sum_M \left({\rm c}^\dagger_M Q^{\rm gh}_M + {\rm c}_M Q^{\rm gh\dagger}_M \right) + \frac{1}{2}\sum_{M,N} {\rm c}_{MN} R^{\rm gh}_{MN}
\end{aligned}
$$

で与えられる。さらに変形すると

$$
Q_{\rm BRST} = {\rm c}\mathcal{H} + \sum_{M,N} {\rm c}_{MN} \mathcal{R}_{MN} - {\rm b}M - \sum_{M,N} {\rm b}_{MN} Y_{MN} + \hat{Q}
$$

と書き換えることが出来る。ここで、$\mathcal{H}$ と $\mathcal{R}_{MN}$ は上で定義したすべてのモードを含む生成子である。その他の演算子項は

$$
\begin{aligned}
M &= 2\sum_M {\rm c}^\dagger_M {\rm c}_M, \qquad Y_{MN} = {\rm c}^\dagger_M {\rm c}_N + \sum_L {\rm c}_{ML} {\rm c}_{LN}, \\
\hat{Q} &= \sum_M \left({\rm c}^\dagger_M Q_M + {\rm c}_M Q^\dagger_M \right)
\end{aligned}
$$

で定義される。この式を使うと冪ゼロ性は、共形代数 (4.1.8) を用いて、

$$
\begin{aligned}
Q^2_{\rm BRST} &= \hat{Q}^2 - M\mathcal{H} - 2\sum_{M,N} {\rm c}^\dagger_M {\rm c}_N \left[\mathcal{R}_{MN} + \sum_L \left({\rm c}_{LM} {\rm b}_{LN} - {\rm c}_{NL} {\rm b}_{ML} \right) \right] \\
&= \hat{Q}^2 - MH - 2\sum_{M,N} {\rm c}^\dagger_M {\rm c}_N R_{MN} = 0
\end{aligned}
$$

と示すことが出来る。

BRST 演算子と反ゴーストモードの反交換関係は

$$
\begin{aligned}
\{Q_{\mathrm{BRST}}, \mathrm{b}\} &= \mathcal{H}, \qquad \{Q_{\mathrm{BRST}}, \mathrm{b}_{MN}\} = 2\mathcal{R}_{MN}, \\
\{Q_{\mathrm{BRST}}, \mathrm{b}_M\} &= \mathcal{Q}_M, \qquad \left\{Q_{\mathrm{BRST}}, \mathrm{b}_M^\dagger\right\} = \mathcal{Q}_M^\dagger
\end{aligned}
$$

で与えられことから、冪ゼロ性はすべてのモードを含む共形変換の生成子と BRST 演算子が $[Q_{\mathrm{BRST}}, \mathcal{H}] = [Q_{\mathrm{BRST}}, \mathcal{R}_{MN}] = [Q_{\mathrm{BRST}}, \mathcal{Q}_M] = [Q_{\mathrm{BRST}}, \mathcal{Q}_M^\dagger] = 0$ のように交換することを表している。

BRST 変換は一般座標変換のゲージ変数 ζ^μ をゲージゴースト場 c^μ に置き換えたもので与えられる。それはいま BRST 演算子との交換関係を用いて、

$$
i\left[Q_{\mathrm{BRST}}, \phi\right] = c^\mu \hat{\nabla}_\mu \phi + \frac{1}{4} \hat{\nabla}_\mu c^\mu
$$

のように表される。その他の場についても同様である。ゲージゴースト場の場合は反交換関係を用いて

$$
i\left\{Q_{\mathrm{BRST}}, c^\mu\right\} = c^\nu \hat{\nabla}_\nu c^\mu
$$

で与えられる。

物理状態は BRST 不変な状態として表される。以下では、それを $|\Psi\rangle$ として、

$$
Q_{\mathrm{BRST}} |\Psi\rangle = 0
$$

を満たす状態を構成することを考える。

はじめに、真空状態をいくつか定義する。ゲージゴースト部分とその他の部分に分けて、先ず後者について a_{JM} や b_{JM} などの消滅演算子及び Riegert 場のゼロモード $\hat{p}$ で消える Fock 真空を $|0\rangle$ と書く。さらに、ゲージゴースト部分を除いた共形変換の生成子 H、R_{MN}、Q_M、$Q_M^\dagger$ のすべてに対して消える共形不変な真空を

$$
|\Omega\rangle = e^{-2b_1 \phi_0(0)} |0\rangle
$$

と書くことにする。ここで、$\phi_0(0) = \hat{q}/\sqrt{2b_1}$ である。真空 $\Omega\rangle$ 及びその Hermite 共役 $\langle\Omega|$ はどちらも背景電荷として Riegert 電荷 $-2b_1$ を持つ。そのため共形不変な真空がもつ全背景電荷は $-4b_1$ である。この電荷は Riegert-Wess-Zumino 作用の線形項に由来する。

ゴースト部分のすべての生成子 (7.3.1) に対して消える共形不変な真空を $|0\rangle_{\mathrm{gh}}$ と書くことにする。これはすべての反ゴーストに対して消えるが、ゴーストに対しては消えない真空である。一方、消滅演算子 c_M と b_M を作用させると消える Fock 真空は共形不変な真空を用いて $\prod_M \mathrm{c}_M|0\rangle_{\mathrm{gh}}$ と表される。

Hamilton 演算子 H はゴーストの c と c_{MN}、反ゴーストの b と b_{MN} を含まない。そのため、ゴースト真空 $\prod \mathrm{c}_M|0\rangle_{\mathrm{gh}}$ は縮退している。縮退の相棒はこの真空に c や $\prod \mathrm{c}_{MN}$ を掛けたものである。その内積構造については後で議論する。

便宜のため、Riegert 電荷 γ を持つ Fock 真空

$$|\gamma\rangle = e^{\gamma\phi_0(0)}|\Omega\rangle \otimes \prod_M \mathrm{c}_M|0\rangle_{\mathrm{gh}}$$

を導入する。この状態は $\mathcal{H}|\gamma\rangle = (h_\gamma - 4)|\gamma\rangle$ を満たす。ここで、-4 はゴースト部分に由来する。また、$i\hat{p}|\gamma\rangle = (\gamma/\sqrt{2b_1} - \sqrt{2b_1})|\gamma\rangle$ を使った。

物理状態はこの Fock 真空に $a^\dagger_{JM}$ や $b^\dagger_{JM}$ などの生成演算子、ゴースト系の生成演算子 $\mathrm{c}^\dagger_M$ と $\mathrm{b}^\dagger_M$ 及びゼロモード $\hat{p}$ を掛けて構成される。ゼロモード $\hat{p}$ については適当な数に置き換えても良い。Fock 真空は b と b_{MN} を掛けると消えること、及び $\{Q_{\mathrm{BRST}}, \mathrm{b}\} = \mathcal{H}$、$\{Q_{\mathrm{BRST}}, \mathrm{b}_{MN}\} = 2\mathcal{R}_{MN}$ が成り立つことより、物理状態として単に

$$\mathcal{H}|\Psi\rangle = \mathcal{R}_{MN}|\Psi\rangle = 0, \quad \mathrm{b}|\Psi\rangle = \mathrm{b}_{MN}|\Psi\rangle = 0 \tag{7.3.2}$$

を満たす部分空間を考えればよいことが分かる。この部分空間上では、BRST 不変な状態は $\hat{Q}$ 不変な状態と同じになる。

部分空間 7.3.2) 上で構成される物理状態として、しばらくの間

$$|\Psi\rangle = \mathcal{A}\left(\hat{p}, a^\dagger_{JM}, b^\dagger_{JM}, \cdots\right)|\gamma\rangle \tag{7.3.3}$$

の形をしたものを考える。ここで、ドットはゴーストモードを除くその他の生成演算子を表している。演算子 $\mathcal{A}$ と Riegert 電荷 γ は BRST 不変の条件から決める。$\mathcal{A}$ の中にゴーストモードを含む場合については後で議論する。

状態 (7.3.3) に対して $\mathrm{c}_M|\Psi\rangle = 0$ が成り立つことから、$\hat{Q}$ 不変の条件は

$$\hat{Q}|\Psi\rangle = \sum_M \mathrm{c}_M^\dagger Q_M|\Psi\rangle = 0$$

と表される。さらに、(7.3.2) の中の Hamilton 演算子と回転不変の条件を加えると BRST 不変な状態の条件

$$(H-4)|\Psi\rangle = R_{MN}|\Psi\rangle = Q_M|\Psi\rangle = 0 \qquad (7.3.4)$$

を得る。このとき $Q_M^\dagger$ の条件は必要ない。この条件は、第三章で述べたように、BRST 不変な様態が共形次元 4 を持つプライマリースカラーで与えられることを表している。

BRST 不変の条件 (7.3.4) は演算子 $\mathcal{A}$ が代数

$$[H, \mathcal{A}] = l\mathcal{A}, \quad [R_{MN}, \mathcal{A}] = 0, \quad [Q_M, \mathcal{A}] = 0$$

を満たすことを要求する。ここで、$l(\geq 0)$ は $\mathcal{A}$ の共形次元である。Fock 真空 $|\gamma\rangle$ が持つ Riegert 電荷は Hamilton 演算子の条件より $h_\gamma + l - 4 = 0$ を満たさなければならない。Riegert 電荷として古典極限 $b_1 \to \infty$ で正準値 $4-l$ に近づく解を選ぶと γ は各 l に対して

$$\gamma_l = 2b_1\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4-l}{b_1}}\right) \qquad (7.3.5)$$

で与えられる。γ_0 と γ_2 はそれぞれ前出の α と β に相当する。

7.4 物理状態の構成

物理状態の条件より $\mathcal{A}$ は特殊共形変換の生成子 Q_M と交換する演算子でなければならない。そこで、まずはじめに Q_M と交換する生成演算子

の組み合わせを捜すことにする。各場についてそのような演算子を求めてから、それらを回転不変になるように組み合わせて、最後にHamilton演算子条件を満たすように物理状態を求める。

スカラー場の場合は Q_M と交換する生成演算子の基本的な構成要素はすでに第三章3.4節で求められていて、

$$\Phi_{LN}^{\dagger} = \sum_{K=0}^{L} \sum_{M_1,M_2} f(L,K) \mathbf{C}_{L-KM_1,KM_2}^{LN} \varphi_{L-KM_1}^{\dagger} \varphi_{KM_2}^{\dagger}$$

で与えられる。ここで、L は正の整数、係数 $f(L,K)$ は (4.3.4) で与えられる。

同様にして、Riegert場の場合について考える。Riegert場のゼロモードと生成子 Q_M の交換関係は

$$[Q_M, \hat{q}] = -a_{\frac{1}{2}M}, \qquad [Q_M, \hat{p}] = 0$$

で与えられる。$a_{1/2M}^{\dagger}$ と $a_{JM}^{\dagger}$ $(J \geq 1)$ モードとの交換関係は

$$\begin{aligned} \left[Q_M, a_{\frac{1}{2}M_1}^{\dagger}\right] &= \left(\sqrt{2b_1} - i\hat{p}\right) \delta_{M,M_1} \\ \left[Q_M, a_{JM_1}^{\dagger}\right] &= \alpha \left(J - \frac{1}{2}\right) \sum_{M_2} \mathbf{C}_{JM_1,J-\frac{1}{2}M_2}^{\frac{1}{2}M} \epsilon_{M_2} a_{J-\frac{1}{2}-M_2}^{\dagger} \end{aligned}$$

となる。$b_{JM}^{\dagger}$ $(J \geq 0)$ モードとの交換関係は

$$\begin{aligned} \left[Q_M, b_{JM_1}^{\dagger}\right] &= -\gamma(J) \sum_{M_2} \mathbf{C}_{JM_1,J+\frac{1}{2}M_2}^{\frac{1}{2}M} \epsilon_{M_2} a_{J+\frac{1}{2}-M_2}^{\dagger} \\ &\quad -\beta \left(J - \frac{1}{2}\right) \sum_{M_2} \mathbf{C}_{JM_1,J-\frac{1}{2}M_2}^{\frac{1}{2}M} \epsilon_{M_2} b_{J-\frac{1}{2}-M_2}^{\dagger} \end{aligned}$$

である。

スカラー場のときと同じように生成子 Q_M と交換する共形次元が $2L$ の生成複合演算子を求めると、$L(\geq 1)$ が整数のとき

$$S_{LN}^{\dagger} = \chi(\hat{p}, L) a_{LN}^{\dagger} + \sum_{K=\frac{1}{2}}^{L-\frac{1}{2}} \sum_{M_1,M_2} x(L,K) \mathbf{C}_{L-KM_1,KM_2}^{LN} a_{L-KM_1}^{\dagger} a_{KM_2}^{\dagger},$$

$$\mathcal{S}^{\dagger}_{L-1N} = \psi(\hat{p}) b^{\dagger}_{L-1N} + \sum_{K=\frac{1}{2}}^{L-\frac{1}{2}} \sum_{M_1,M_2} x(L,K) \mathbf{C}^{L-1N}_{L-KM_1,KM_2} a^{\dagger}_{L-KM_1} a^{\dagger}_{KM_2}$$
$$+ \sum_{K=\frac{1}{2}}^{L-1} \sum_{M_1,M_2} y(L,K) \mathbf{C}^{L-1N}_{L-K-1M_1,KM_2} b^{\dagger}_{L-K-1M_1} a^{\dagger}_{KM_2}$$

の二種類を得る。各係数は

$$x(L,K) = \frac{(-1)^{2K}}{\sqrt{(2L-2K+1)(2K+1)}} \sqrt{\begin{pmatrix} 2L \\ 2K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2L-2 \\ 2K-1 \end{pmatrix}},$$
$$y(L,K) = -2\sqrt{(2L-2K-1)(2L-2K+1)}\, x(L,K)$$

で与えられる。 ゼロモード $\hat{p}$ に依存した演算子は

$$\chi(\hat{p},L) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2b_1} - i\hat{p})}{\sqrt{(2L-1)(2L+1)}}, \qquad \psi(\hat{p}) = -\sqrt{2}(\sqrt{2b_1} - i\hat{p})$$

となる。L が半整数の場合は存在しない。これら二種類の生成複合演算子が Riegert 場部分の物理的状態の基本的な構成要素となる。それらを表 7.1 にまとめた。

rank of tensor index	0
creation op.	$S^{\dagger}_{LN}$
	$\mathcal{S}^{\dagger}_{L-1N}$
weight ($L \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$)	$2L$

表 7.1: Riegert 場部分の物理状態の構成要素。

生成子 Q_M と交換するトレースレステンソル場の生成演算子は横波トレースレス場 h^{TT}_{ij} の最低次の正計量モード $c^{\dagger}_{1(Mx)}$ だけであることが分かる。スカラー場、Riegert 場の時と同様に、Q_M と可換な生成複合演算子は、具体的な $SU(2) \times SU(2)$Clebsch-Gordan 係数の値は知らなくても、三角不等式と交差関係式を用いて分類をすることができる。この場合階数が 4 までのテンソルの足を持った複合演算子が現れる。表 7.2 にトレー

rank of tensor index	0	1	2	3	4
creation op.	$A^\dagger_{LN}$	$B^\dagger_{L-\frac{1}{2}(Ny)}$	$c^\dagger_{1(Nx)}$	$D^\dagger_{L-\frac{1}{2}(Nz)}$	$E^\dagger_{L(Nw)}$
	$\mathcal{A}^\dagger_{L-1N}$				$\mathcal{E}^\dagger_{L-1(Nw)}$
weight ($L \in \mathbf{Z}_{\geq 3}$)	$2L$	$2L$	2	$2L$	$2L$

表 7.2: トレースレステンソル場部分の物理状態の構成要素。

スレステンソル場の物理的状態の構成要素をまとめた。具体的な式は付録 G に記した。

これらの構成要素を用いるとプライマリー状態を構成することが出来る。例えば、Riegert 場の最低次のスカラー演算子

$$\mathcal{S}^\dagger_{00} = -\sqrt{2}(\sqrt{2b_1} - i\hat{p})b^\dagger_{00} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_M \epsilon_M a^\dagger_{\frac{1}{2}-M} a^\dagger_{\frac{1}{2}M}$$

を用いると、共形次元 2 のプライマリースカラー状態 $\mathcal{S}^\dagger_{00}|\Omega\rangle$ を構成できる。これは、共形因子部分は除いて、Ricci スカラー R と対応している。次にくる構成要素はそれぞれ九個の独立成分を持った

$$\begin{aligned}
S^\dagger_{1N} &= \sqrt{\frac{2}{3}}(\sqrt{2b_1} - i\hat{p})a^\dagger_{1N} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{M_1,M_2}\mathbf{C}^{1N}_{\frac{1}{2}M_1,\frac{1}{2}M_2} a^\dagger_{\frac{1}{2}M_1} a^\dagger_{\frac{1}{2}M_2}, \\
\mathcal{S}^\dagger_{1N} &= -\sqrt{2}(\sqrt{2b_1} - i\hat{p})b^\dagger_{1N} - 4b^\dagger_{00}a^\dagger_{1N} - \sqrt{2}\sum_{M_1,M_2}\mathbf{C}^{1N}_{\frac{3}{2}M_1,\frac{1}{2}M_2} a^\dagger_{\frac{3}{2}M_1} a^\dagger_{\frac{1}{2}M_2} \\
&\quad + \frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{M_1,M_2}\mathbf{C}^{1N}_{1M_1,1M_2} a^\dagger_{1M_1} a^\dagger_{1M_2} + 4\sum_{M_1,M_2}\mathbf{C}^{1N}_{\frac{1}{2}M_1,\frac{1}{2}M_2} b^\dagger_{\frac{1}{2}M_1} a^\dagger_{\frac{1}{2}M_2}
\end{aligned}$$

である。これらを真空に作用させると対称トレースレスプライマリーテンソルに対応する状態が得られる。共形次元 2 の状態 $S^\dagger_{1N}|\Omega\rangle$ は $R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R/4$ と対応し、共形次元 4 の状態 $\mathcal{S}^\dagger_{1N}|\Omega\rangle$ は Riegert 場のストレステンソルと対応している。

また、トレースレステンソル場の最低次の構成要素を用いると共形次元 2 のプライマリーテンソル状態 $c^\dagger_{1(Nx)}|\Omega\rangle$ を得る。これは 10 個の独立成分をもつ Weyl テンソル $C_{\mu\nu\lambda\sigma}$ に対応する。$x = \pm 1$ が自己双対と反自己双対成分を表す。共形次元 4 のプライマリー状態は $\mathbf{E}^{1N}_{1(N_1x_1),1(N_2x_2)} c^\dagger_{1(N_1x_1)} c^\dagger_{1(N_2x_2)}|\Omega\rangle$ で与えられ、トレースレステンソル場のストレステンソルに対応する。

ここで例として上げたプライマリー状態のいくつかはユニタリ性の条件 (2.3.2) を満たしていない。それは高階微分場に特徴的な性質ではあるが、ここではむしろそれらがゲージに依存した状態であるということの方が大きな理由である。[3] 実際、これらの状態はまだ H と R_{MN} の条件を満たしていないので、量子重力のゲージ不変な物理状態ではない。

物理状態 (7.3.3) は上で求めた構成要素を用いて

$$|\Psi\rangle = \mathcal{A}(\Phi^\dagger, S^\dagger, \mathcal{S}^\dagger, \cdots)|\gamma\rangle$$

と表される。ここで、構成要素のテンソルの足は $\mathcal{A}$ が S^3 回転不変になるように $SU(2)\times SU(2)$Clebsch-Gordan 係数を用いてすべて縮約する。演算子 $\mathcal{A}$ の共形次元 l は構成要素がすべて偶数次元を持つことから偶数で与えられる。それは、対応する場の演算子の微分の数を表す。最後に l に対して Hamilton 演算子条件を満たすように Riegert 電荷を (7.3.5) と決めると物理状態が構成できる。

例として共形次元 l が 4 以下の物理状態について見てみる。恒等演算子 $\mathcal{A}=I$ が量子重力の衣を着た状態は $|\gamma_0\rangle$ で与えられる。これは物理的な体積要素 $\sqrt{-g}$ に相当する。$l=2$ の状態は

$$\Phi^\dagger_{00}|\gamma_2\rangle, \qquad \mathcal{S}^\dagger_{00}|\gamma_2\rangle$$

で与えられる。右は $\sqrt{-g}X^2$、左はスカラー曲率 $\sqrt{-g}R$ にそれぞれ相当する。$l=4$ の状態は、$\gamma_4=0$ であることを考慮して、

$$\begin{gathered}(\Phi^\dagger_{00})^2|\Omega\rangle, \qquad \Phi^\dagger_{00}\mathcal{S}^\dagger_{00}|\Omega\rangle, \qquad \mathcal{S}^\dagger_{00}\mathcal{S}^\dagger_{00}|\Omega\rangle, \\ \sum_N \epsilon_N S^\dagger_{1-N}S^\dagger_{1N}|\Omega\rangle, \qquad \sum_{N,x}\epsilon_N c^\dagger_{1(-Nx)}c^\dagger_{1(Nx)}|\Omega\rangle\end{gathered}$$

で与えられる。それぞれの物理状態は、$\sqrt{-g}X^4$、$\sqrt{-g}RX^2$、$\sqrt{-g}R^2$、$\sqrt{-g}(R_{\mu\nu}-g_{\mu\nu}R/4)^2$、$\sqrt{-g}C^2_{\mu\nu\lambda\sigma}$ に相当する。

[3]例えば通常の $U(1)$ ゲージ場 A_μ はプライマリーベクトル場であるが、共形次元は 1 でユニタリ性の条件を満たさない。これはゲージ場がゲージに依存した場だからである。ゲージ不変なプライマリー場は $F_{\mu\nu}$ で、これはユニタリ性の条件を満たす。

最後にゴーストの生成モード $\mathrm{c}_M^\dagger$ と $\mathrm{b}_M^\dagger$ を含む物理状態について議論する。例えば $l=2$ の場合、上記以外に BRST 不変な状態として

$$\left\{-\left(\sqrt{2b_1}-i\hat{p}\right)^2\sum_M \epsilon_M \mathrm{b}_{-M}^\dagger \mathrm{c}_M^\dagger + \hat{h}\sum_M \epsilon_M a_{\frac{1}{2}-M}^\dagger a_{\frac{1}{2}M}^\dagger\right\}|\gamma_2\rangle \qquad (7.4.1)$$

が存在する。ここで、$\hat{h}=\hat{p}^2/2+b_1$ である。しかしながら、これはすでに上で与えた物理状態と BRST 同等になることが分かる。

そのことを示すために $\mathcal{H}|\Upsilon\rangle=\mathcal{R}_{MN}|\Upsilon\rangle=\mathrm{b}|\Upsilon\rangle=\mathrm{b}_{MN}|\Upsilon\rangle=0$ を満たす新たな状態

$$|\Upsilon\rangle=\left(\sqrt{2b_1}-i\hat{p}\right)\sum_M \epsilon_M \mathrm{b}_{-M}^\dagger a_{\frac{1}{2}M}^\dagger|\gamma_2\rangle$$

を導入する。この状態に BRST 演算子を掛けると

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{BRST}}|\Upsilon\rangle \;=\; & \left\{-\left(\sqrt{2b_1}-i\hat{p}\right)^2\sum_M \epsilon_M \mathrm{b}_{-M}^\dagger \mathrm{c}_M^\dagger + 4\left(\sqrt{2b_1}-i\hat{p}\right)b_{00}^\dagger \right. \\ & \left. +2\hat{h}\sum_M \epsilon_M a_{\frac{1}{2}-M}^\dagger a_{\frac{1}{2}M}^\dagger\right\}|\gamma_2\rangle \end{aligned}$$

となる。これより、$\hat{h}|\beta\rangle=2|\beta\rangle$ に注意すると、BRST 不変な状態 (7.4.1) は

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathcal{S}_{00}^\dagger|\gamma_2\rangle+Q_{\mathrm{BRST}}|\Upsilon\rangle$$

と書けて、物理状態 $\mathcal{S}_{00}|\gamma_2\rangle$ と BRST 同等であることが示せる。

一般に、$\mathcal{A}$ にゴーストモードが含まれる物理状態は標準形 (7.3.3) で与えられる物理状態と BRST 同等になると思われる。そのため、本書では標準形のみを考えることにする。

7.5　物理場の演算子

この節では前章で議論した BRST 不変な物理的場の演算子を $R\times S^3$ 上で再考する。前に述べたように、BRST 不変な物理場はプライマリース

カラー場から構成される。そのような演算子を求めるために先ず Riegert 場の n 乗演算子

$$:\phi^n:=:(\phi_> + \phi_0 + \phi_<)^n:=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\phi_>^{n-k}\left(\phi_0+\phi_<\right)^k$$

の変換則について議論する。ここで、$\phi_0=(\hat{q}+\eta\hat{p})/\sqrt{2b_1}$ はゼロモード、$\phi_<$ は消滅演算子部分、$\phi_>(=\phi_<^\dagger)$ は生成演算子部分である。 $n=1$ の場合は Riegert 場の一般座標変換 (7.2.2) である。

時間発展 (dilatation に相当) と S^3 回転の変換則は

$$i\left[H,:\phi^n:\right]=\partial_\eta:\phi^n:,\qquad i\left[R_{MN},:\phi^n:\right]=\hat{\nabla}_j\left(\zeta^j_{MN}:\phi^n:\right)$$

で与えられる。これらの変換則に量子補正は現れない。これらに対して特殊共形変換にはゼロモード部分から量子補正項が現れる。Riegert 場の各パートは特殊共形変換の下で

$$\begin{aligned} i\left[Q_M,\phi_>\right] &= \zeta^\mu_M\hat{\nabla}_\mu\phi_> + \zeta^0_M\partial_\eta\phi_0+\frac{1}{4}\hat{\nabla}_\mu\zeta^\mu_M, \\ i\left[Q_M,\phi_0+\phi_<\right] &= \zeta^\mu_M\hat{\nabla}_\mu\phi_< \end{aligned}$$

と変換するこに注意すると、

$$i\left[Q_M,:\phi^n:\right]=\zeta^\mu_M\hat{\nabla}_\mu:\phi^n:+\frac{n}{4}\hat{\nabla}_\mu\zeta^\mu_M:\phi^{n-1}:-\frac{1}{16b_1}n(n-1)\hat{\nabla}_\mu\zeta^\mu_M:\phi^{n-2}:$$

を得る。右辺の最後の項が量子補正で、ゼロモードの交換関係 $[\phi_0,\partial_\eta\phi_0]=i/2b_1$ から

$$\begin{aligned} \partial_\eta\left(\phi_0+\phi_<\right)^k &= k\partial_\eta\phi_<\left(\phi_0+\phi_<\right)^{k-1}+k\partial_\eta\phi_0\left(\phi_0+\phi_<\right)^{k-1} \\ &\quad +i\frac{1}{4b_1}k(k-1)\left(\phi_0+\phi_<\right)^{k-2} \end{aligned}$$

が成り立つこと、及び関係式 $i\zeta^0_M=\hat{\nabla}_\mu\zeta^\mu_M/4$ を使うと出てくる。

これらの変換則から最も簡単なプライマリースカラー場は

$$\mathcal{V}_\alpha=:e^{\alpha\phi}:=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}:\phi^n:=e^{\alpha\phi_>}e^{\alpha\phi_0}e^{\alpha\phi_<}$$

で与えられることが分かる。ここで、ゼロモード項は $e^{\alpha\phi_0} = e^{\hat{q}\alpha/\sqrt{2b_1}} e^{\eta\hat{p}\alpha/\sqrt{2b_1}} e^{-i\eta\alpha^2/4b_1}$ と定義される。その変換則は $i[H, \mathcal{V}_\alpha] = \partial_\eta \mathcal{V}_\alpha$、$i[R_{MN}, \mathcal{V}_\alpha] = \hat{\nabla}_j(\zeta^j_{MN}\mathcal{V}_\alpha)$、

$$i\left[Q_M, \mathcal{V}_\alpha\right] = \zeta^\mu_M \hat{\nabla}_\mu \mathcal{V}_\alpha + \frac{h_\alpha}{4}\hat{\nabla}_\mu \zeta^\mu_M \mathcal{V}_\alpha,$$

で与えられる。共形次元 h_α は前章で求めた $h_\alpha = \alpha - \alpha^2/4b_1$(6.5.7) で与えられる。$\mathcal{V}_\alpha$ が Hermite 演算子になるように Riegert 電荷 α を実数とすると、並進 $Q^\dagger_M$ の変換則は右辺の ζ^μ_M を $\zeta^{\mu *}_M$ に置き換えたものになる。これらの変換則は BRST 演算子を用いると一つの式

$$i\left[Q_{\rm BRST}, \mathcal{V}_\alpha\right] = c^\mu \hat{\nabla}_\mu \mathcal{V}_\alpha + \frac{h_\alpha}{4}\hat{\nabla}_\mu c^\mu \mathcal{V}_\alpha$$

で表される。

これより、$h_\alpha = 4$ を持つプライマリースカラー演算子 $\mathcal{V}_\alpha$ を時空体積で積分したものは

$$i\left[Q_{\rm BRST}, \int d\Omega_4 \mathcal{V}_\alpha\right] = \int d\Omega_4 \hat{\nabla}_\mu \left(c^\mu \mathcal{V}_\alpha\right) = 0$$

のように BRST 不変になる。ここで、$d\Omega_4 = d\eta d\Omega_3$ は時空体積要素である。この条件は場の演算子が 15 個すべての生成子と交換することと同等である。さらに、前と同様に完全反対称テンソルで足をつぶしたゲージゴースト場の関数 $\omega = (1/4!) \times \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} c^\mu c^\nu c^\lambda c^\sigma$ を導入すると、この関数が BRST 変換の下で $i[Q_{\rm BRST}, \omega] = -\omega \hat{\nabla}_\mu c^\mu$ と変換することから、積 $\omega\mathcal{V}_\alpha$ は

$$i\left[Q_{\rm BRST}, \omega\mathcal{V}_\alpha\right] = \frac{1}{4}\left(h_\alpha - 4\right)\omega \hat{\nabla}_\mu c^\mu \mathcal{V}_\alpha = 0$$

のように局所的に BRST 不変な場の演算子になる。Riegert 電荷は前章の (6.6.2) で求めた $\alpha = 2b_1(1 - \sqrt{1 - 4/b_1})$ で与えられる。この値を持つ $\mathcal{V}_a$ は量子補正を含んだ物理的時空体積要素である。

次に、Ricci スカラー曲率に相当する場の演算子を考える。微分を二つ持つプライマリースカラー場は

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\beta &= \, :e^{\beta\phi}\left(\hat{\nabla}^2\phi + \frac{\beta}{h_\beta}\hat{\nabla}_\mu\phi\hat{\nabla}^\mu\phi - \frac{h_\beta}{\beta}\right): \\ &= \mathcal{R}^1_\beta + \frac{\beta}{h_\beta}\mathcal{R}^2_\beta - \frac{h_\beta}{\beta}\mathcal{V}_\beta\end{aligned}$$

で与えられる。ここで、$\mathcal{R}_\beta^{1,2}$ は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_\beta^1 &= \hat{\nabla}^2\phi_> V_\beta + V_\beta \hat{\nabla}^2 \phi_<, \\
\mathcal{R}_\beta^2 &= -\frac{1}{4}\partial_\eta\phi_0\partial_\eta\phi_0 V_\beta - \frac{1}{2}\partial_\eta\phi_0 V_\beta \partial_\eta\phi_0 - \frac{1}{4}V_\beta\partial_\eta\phi_0\partial_\eta\phi_0 \\
&\quad -\partial_\eta\phi_0\left(\partial_\eta\phi_> V_\beta + V_\beta\partial_\eta\phi_<\right) - \left(\partial_\eta\phi_> V_\beta + V_\beta\partial_\eta\phi_<\right)\partial_\eta\phi_0 \\
&\quad +\hat{\nabla}_\mu\phi_>\hat{\nabla}^\mu\phi_> V_\beta + 2\hat{\nabla}_\mu\phi_> V_\beta \hat{\nabla}^\mu\phi_< + V_\beta\hat{\nabla}_\mu\phi_<\hat{\nabla}^\mu\phi_<
\end{aligned}
$$

で与えられる。この演算子 $\mathcal{R}_\beta$ は共形次元 $h_\beta + 2$ のプライマリースカラー場として変換することから、BRST 変換の下で

$$
i\left[Q_{\mathrm{BRST}}, \mathcal{R}_\beta\right] = c^\mu \hat{\nabla}_\mu \mathcal{R}_\beta + \frac{h_\beta + 2}{4}\hat{\nabla}_\mu c^\mu \mathcal{R}_\beta
$$

と変換することが分かる。

したがって、$h_\beta = 2$ のとき、$\mathcal{R}_\beta$ の時空体積積分、及び場の積 $\omega\mathcal{R}_\beta$ は BRST 不変になる。Riegert 電荷は (6.6.3) 式の $\beta = 2b_1(1 - \sqrt{1 - 2/b_1})$ で与えられる。この値を持つ $\mathcal{R}_\beta$ が量子論的な Ricci スカラー曲率で、古典極限 $b_1 \to \infty$ で通常の $d^4x\sqrt{-g}R = d\Omega_4 e^{2\phi}(-6\hat{\nabla}^2\phi - 6\hat{\nabla}_\mu\phi\hat{\nabla}^\mu\phi + 6)$ を -6 で割ったものに近づく。

7.6 状態演算子対応と内積

この節では先ず物理場演算子と状態の対応について明らかにした後、内積の構造について議論する。一般的に、BRST 不変の条件 $[Q_{\mathrm{BRST}}, \omega\mathcal{O}_\gamma] = 0$ を満たす Riegert 電荷 γ を持った物理場 $\mathcal{O}_\gamma$ を考えたとき、ゴースト部分は別にして、状態演算子対応は

$$
\lim_{\eta \to i\infty} e^{-4i\eta}\mathcal{O}_\gamma|\Omega\rangle = |\mathcal{O}_\gamma\rangle
$$

で与えられる。

例えば前節で求めた量子論的宇宙項演算子 $\mathcal{V}_\alpha$ は $h_\alpha = 4$ に注意すると

$$
|\mathcal{V}_\alpha\rangle = \lim_{\eta \to i\infty} e^{-4i\eta}\mathcal{V}_\alpha|\Omega\rangle = \lim_{\eta \to i\infty} e^{i(-4+h_\alpha)\eta} e^{\alpha\phi_>} e^{\frac{\alpha}{\sqrt{2b_1}}\hat{q}}|\Omega\rangle = e^{\alpha\phi_0(0)}|\Omega\rangle
$$

となる。量子論的 Ricci スカラー曲率演算子 $\mathcal{R}_\beta$ では $h_\beta = 2$ に注意すると

$$\begin{aligned}|\mathcal{R}_\beta\rangle &= \lim_{\eta\to i\infty} e^{-4i\eta}\mathcal{R}_\beta|\Omega\rangle \\ &= \lim_{\eta\to i\infty} e^{i(-4+h_\beta)\eta}\left\{\hat{\nabla}^2\phi_> - 2i\partial_\eta\phi_> + \frac{\beta}{h_\beta}\hat{\nabla}_\mu\phi_>\hat{\nabla}^\mu\phi_>\right\}e^{\beta\phi_>}e^{\frac{\beta}{\sqrt{2b_1}}\hat{q}}|\Omega\rangle \\ &= -\frac{\beta}{2\sqrt{2}b_1}\mathcal{S}^\dagger_{00}e^{\beta\phi_0(0)}|\Omega\rangle\end{aligned}$$

となる。ここで、$\mathcal{S}^\dagger_{00}$ は前々節で求めた Q_M と交換する物理状態の構成要素の一つである。

ゴーストの関数 ω は $\eta\to i\infty$ の極限で最も発散する項が $\omega\propto e^{-4i\eta}\prod_M \mathrm{c}_M$ のように振舞うことから、ゴースト部分も含めた状態演算子対応は

$$\lim_{\eta\to i\infty}\omega\mathcal{O}_\gamma|\Omega\rangle\otimes|0\rangle_{\mathrm{gh}} \propto |\mathcal{O}_\gamma\rangle\otimes\prod_M \mathrm{c}_M|0\rangle_{\mathrm{gh}}$$

で与えられることが分かる。右辺は前々節で議論した物理状態である。

次に、内積を定義するために物理状態 $|\mathcal{O}_\gamma\rangle\otimes\prod\mathrm{c}_M|0\rangle_{\mathrm{gh}}$ の共役状態について考える。状態 $|\mathcal{O}_\gamma\rangle$ の共役を $\langle\tilde{\mathcal{O}}_\gamma|$ と書くと、それは通常の Hermite 共役 $\langle\mathcal{O}_\gamma|$ にはならない。なぜなら、通常の内積 $\langle\mathcal{O}_\gamma|\mathcal{O}_\gamma\rangle$ は、Riegert 電荷 γ が実数で且つ真空が背景電荷 $-4b_1$ をもつことから合計の Riegert 電荷が $2\gamma-4b_1\neq 0$ となって保存しない (ゼロモードが相殺しない) ために、規格化できないからである。[4]

物理状態 $\langle\tilde{O}_\gamma|$ は双対関係 $h_\gamma = h_{4b_1-\gamma}$ を用いて定義される。再び物理演算子 $\mathcal{V}_\alpha$ と $\mathcal{R}_\beta$ を考える。これらに共役な BRST 不変な場は

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{V}}_\alpha &= \mathcal{V}_{4b_1-\alpha}, \\ \tilde{\mathcal{R}}_\beta &= -\frac{b_1}{4}\mathcal{R}_{4b_1-\beta} = -\frac{b_1}{4}\left(\mathcal{R}^1_{4b_1-\beta} + \frac{4b_1-\beta}{h_\beta}\mathcal{R}^2_{4b_1-\beta} - \frac{h_\beta}{4b_1-\beta}\mathcal{V}_{4b_1-\beta}\right)\end{aligned}$$

に ω を掛けたもので与えられる。対応する共役状態は

$$\begin{aligned}\langle\tilde{\mathcal{V}}_\alpha| &= \lim_{\eta\to -i\infty} e^{4i\eta}\langle\Omega|\tilde{\mathcal{V}}_\alpha = \langle\Omega|e^{(4b_1-\alpha)\phi_0(0)}, \\ \langle\tilde{\mathcal{R}}_\beta| &= \lim_{\eta\to -i\infty} e^{4i\eta}\langle\Omega|\tilde{\mathcal{R}}_\beta = \frac{4b_1-\beta}{8\sqrt{2}}\langle\Omega|e^{(4b_1-\beta)\phi_0(0)}\mathcal{S}_{00}\end{aligned}$$

[4] もし Riegert 電荷が $\gamma = ip$ のように純虚数で、真空が背景電荷を持たなければ状態はその Hermite 共役と通常通り $\langle\mathcal{O}_{-ip}|\mathcal{O}_{ip}\rangle = 1$ のように規格化できる。

で定義される。これらを用いると内積が定義できて

$$\langle\tilde{\mathcal{V}}_\alpha|\mathcal{V}_\alpha\rangle = 1, \qquad \langle\tilde{\mathcal{R}}_\beta|\mathcal{R}_\beta\rangle = 1$$

と規格化される。このとき、場の演算子がもつ Riegert 電荷の合計 $4b_1$ が真空が持つ背景電荷と相殺してゼロモードが消え、$\langle\Omega|e^{4b_1\phi_0(0)}|\Omega\rangle = 1$ となることを使った。

ゴースト真空とその Hermite 共役の内積は ${}_{\rm gh}\langle 0|0\rangle_{\rm gh} = {}_{\rm gh}\langle 0|\prod {\rm c}_M^\dagger \prod {\rm c}_M|0\rangle_{\rm gh} = 0$ のように消えることが分かる。これは内積にゴーストモードの反交換関係 $\{{\rm b},{\rm c}\} = 1$ や $\{{\rm b}_{MN},{\rm c}_{LK}\} = \delta_{ML}\delta_{NK} - \epsilon_M\epsilon_N\delta_{-MK}\delta_{-NL}$ を挿入するとすぐに示すことが出来る。そのためゴースト状態の内積は Hermite 演算子 $\vartheta = i{\rm c}\prod {\rm c}_{MN}$ を挿入して

$${}_{\rm gh}\langle 0|\prod {\rm c}_M^\dagger \vartheta \prod {\rm c}_M|0\rangle_{\rm gh} = 1$$

のように規格化される。このように物理状態 $|\mathcal{O}_\gamma\rangle \otimes \prod {\rm c}_M|0\rangle_{\rm gh}$ の共役は $\langle\tilde{\mathcal{O}}_\gamma| \otimes {}_{\rm gh}\langle 0|\prod {\rm c}_M^\dagger\vartheta$ で与えられる。

付 録 A

A.1 曲率に関する公式

本書で採用する Christoffel 記号及び Riemann 曲率テンソルの定義は

$$\begin{aligned} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu} \right), \\ R^{\lambda}{}_{\mu\sigma\nu} &= \partial_\sigma \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}, \end{aligned}$$

である。Ricci テンソルは $R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}$、Ricci スカラーは $R = R^{\mu}{}_{\mu}$ で定義される。共変微分は Christoffel 記号を用いて表すと

$$\nabla_\mu A^{\sigma_1 \cdots \sigma_m}_{\lambda_1 \cdots \lambda_n} = \partial_\mu A^{\sigma_1 \cdots \sigma_m}_{\lambda_1 \cdots \lambda_n} - \sum_{j=1}^{n} \Gamma^{\nu_j}_{\mu\lambda_j} A^{\sigma_1 \cdots \sigma_m}_{\lambda_1 \cdots \nu_j \cdots \lambda_n} + \sum_{j=1}^{m} \Gamma^{\sigma_j}_{\mu\nu_j} A^{\sigma_1 \cdots \nu_j \cdots \sigma_m}_{\lambda_1 \cdots \lambda_n}$$

となり、その交換関係は

$$\left[\nabla_\mu, \nabla_\nu \right] A_{\lambda_1 \cdots \lambda_n} = \sum_{j=1}^{n} R_{\mu\nu\lambda_j}{}^{\sigma_j} A_{\lambda_1 \cdots \sigma_j \cdots \lambda_n}$$

を満たす。付録 A では断らない限り次元は任意の D とする。

Riemann 曲率テンソルは関係式

$$\begin{aligned} R^{\mu}{}_{\nu\lambda\sigma} + R^{\mu}{}_{\lambda\sigma\nu} + R^{\mu}{}_{\sigma\nu\lambda} &= 0, \\ \nabla_\rho R^{\mu}{}_{\nu\lambda\sigma} + \nabla_\lambda R^{\mu}{}_{\nu\sigma\rho} + \nabla_\sigma R^{\mu}{}_{\nu\rho\lambda} &= 0 \end{aligned}$$

を満たす。二番目の式はBianchiの恒等式である。これより、関係式 $\nabla_\mu R^{\mu}{}_{\lambda\nu\sigma} = \nabla_\nu R_{\lambda\sigma} - \nabla_\sigma R_{\lambda\nu}$ と $\nabla_\mu R^{\mu}{}_{\nu} = \nabla_\nu R/2$ が得られる。

変分公式　曲率の変分公式は

$$
\begin{aligned}
\delta g^{\mu\nu} &= -g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} \delta g_{\lambda\sigma}, \\
\delta\sqrt{-g} &= \frac{1}{2}\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}, \\
\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\nabla_\mu \delta g_{\nu\sigma} + \nabla_\nu \delta g_{\mu\sigma} - \nabla_\sigma \delta g_{\mu\nu} \right), \\
\delta R^{\lambda}{}_{\mu\sigma\nu} &= \nabla_\sigma \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} \\
&= \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \Big\{ \nabla_\sigma \nabla_\mu \delta g_{\nu\rho} + \nabla_\sigma \nabla_\nu \delta g_{\mu\rho} - \nabla_\sigma \nabla_\rho \delta g_{\mu\nu} - \nabla_\nu \nabla_\mu \delta g_{\sigma\rho} \\
&\qquad - \nabla_\nu \nabla_\sigma \delta g_{\mu\rho} + \nabla_\nu \nabla_\rho \delta g_{\mu\sigma} \Big\}, \\
\delta R_{\mu\nu} &= \delta R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} \\
&= \frac{1}{2} \Big\{ \nabla_\mu \nabla^\lambda \delta g_{\lambda\nu} + \nabla_\nu \nabla^\lambda \delta g_{\lambda\mu} - \nabla^2 \delta g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \left(g^{\lambda\sigma} \delta g_{\lambda\sigma} \right) \Big\} \\
&\quad - R^{\lambda}{}_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\nu} \delta g_{\lambda\sigma} + \frac{1}{2} \left(R_\mu{}^\lambda \delta g_{\lambda\nu} + R_\nu{}^\lambda \delta g_{\lambda\mu} \right), \\
\delta R &= \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \\
&= -R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \nabla^\mu \nabla^\nu \delta g_{\mu\nu} - \nabla^2 \left(g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \right)
\end{aligned}
$$

で与えられる。その他、微分を含む場の変分公式として、

$$
\begin{aligned}
\delta(\nabla_\mu A) &= \nabla_\mu \delta A, \\
\delta(\nabla_\mu \nabla_\nu A) &= \nabla_\mu \nabla_\nu \delta A - \frac{1}{2} \nabla^\lambda A \left(\nabla_\mu \delta g_{\nu\lambda} + \nabla_\nu \delta g_{\mu\lambda} - \nabla_\lambda \delta g_{\mu\nu} \right), \\
\delta(\nabla^2 A) &= \nabla^2 \delta A - \delta g_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu A - \nabla^\mu A \nabla^\nu \delta g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \nabla^\lambda A \nabla_\lambda (g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu})
\end{aligned}
$$

などが有用である。ここで、A は任意のスカラー場である。

曲率の Weyl 変換則　Weyl 変換 $\delta_\omega g_{\mu\nu} = 2\omega g_{\mu\nu}$ による曲率の変分は

$$
\delta_\omega \sqrt{-g} R = (D-2)\omega \sqrt{-g} R - 2(D-1)\sqrt{-g} \nabla^2 \omega
$$

となる。曲率の 2 乗の変分は

$$
\begin{aligned}
\delta_\omega \sqrt{-g} R^{\mu\nu\lambda\sigma} R_{\mu\nu\lambda\sigma} &= (D-4)\omega \sqrt{g} R^{\mu\nu\lambda\sigma} R_{\mu\nu\lambda\sigma} - 8\sqrt{-g} R^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \omega, \\
\delta_\omega \sqrt{g} R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} &= (D-4)\omega \sqrt{g} R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - 2\sqrt{-g} R \nabla^2 \omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& & -2(D-2)\sqrt{-g}R^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\omega, \\
\delta_\omega\sqrt{-g}R^2 &=& (D-4)\omega\sqrt{g}R^2-4(D-1)\sqrt{g}R\nabla^2\omega, \\
\delta_\omega\sqrt{-g}\nabla^2 R &=& (D-4)\omega\sqrt{-g}\nabla^2 R+(D-6)\sqrt{-g}\nabla^\lambda R\nabla_\lambda\omega \\
& & -2\sqrt{-g}R\nabla^2\omega-2(D-1)\sqrt{g}\nabla^4\omega, \\
\delta_\omega\sqrt{-g}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &=& (D-4)\omega\sqrt{-g}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

で与えられる。これらより、Wess-Zumino 積分可能条件を D 次元に一般化した式は

$$
\begin{aligned}
[\delta_{\omega_1},\delta_{\omega_2}]\Gamma &=& 2\{4\eta_1+D\eta_2+4(D-1)\eta_3+(D-4)\eta_4\} \\
& & \times\int d^Dx\sqrt{-g}R\omega_{[1}\nabla^2\omega_{2]}
\end{aligned}
$$

で与えられる。

Euler 関係式　$D=2$ のとき Euler 関係式

$$
R_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R
$$

が成り立つ。$D=4$ では Euler 関係式

$$
R_{\mu\lambda\sigma\rho}R_\nu{}^{\lambda\sigma\rho}-2R_{\mu\lambda\nu\sigma}R^{\lambda\sigma}-2R_{\mu\lambda}R_\nu{}^\lambda+R_{\mu\nu}R=\frac{1}{4}g_{\mu\nu}G_4
$$

が成り立つ。

モード分解と展開式　計量場を $g_{\mu\nu}=e^{2\phi}\bar{g}_{\mu\nu}$ のように共形モードとトレースレステンソルモードに分解すると、曲率は

$$
\begin{aligned}
\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} &=& \bar{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}+\bar{g}^\lambda{}_\mu\bar{\nabla}_\nu\phi+\bar{g}^\lambda{}_\nu\bar{\nabla}_\mu\phi-\bar{g}_{\mu\nu}\bar{\nabla}^\lambda\phi, \\
R^\lambda{}_{\mu\sigma\nu} &=& \bar{R}^\lambda{}_{\mu\sigma\nu}+\bar{g}^\lambda{}_\nu\bar{\Delta}_{\mu\sigma}-\bar{g}^\lambda{}_\sigma\bar{\Delta}_{\mu\nu}+\bar{g}_{\mu\sigma}\bar{\Delta}^\lambda{}_\nu-\bar{g}_{\mu\nu}\bar{\Delta}^\lambda{}_\sigma \\
& & +(\bar{g}^\lambda{}_\nu\bar{g}_{\mu\sigma}-\bar{g}^\lambda{}_\sigma\bar{g}_{\mu\nu})\bar{\nabla}_\rho\phi\bar{\nabla}^\rho\phi, \\
R_{\mu\nu} &=& \bar{R}_{\mu\nu}-(D-2)\bar{\Delta}_{\mu\nu}-\bar{g}_{\mu\nu}\left\{\bar{\nabla}^2\phi+(D-2)\bar{\nabla}_\lambda\phi\bar{\nabla}^\lambda\phi\right\}, \\
R &=& e^{-2\phi}\left\{\bar{R}-2(D-1)\bar{\nabla}^2\phi-(D-1)(D-2)\bar{\nabla}_\lambda\phi\bar{\nabla}^\lambda\phi\right\}
\end{aligned}
$$

と展開される。ここで、$\bar{\Delta}_{\mu\nu} = \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu \phi - \bar{\nabla}_\mu \phi \bar{\nabla}_\nu \phi$ である。

さらに、計量場 $\bar{g}_{\mu\nu} = (\hat{g}e^h)_{\mu\nu}$ を $h_{\mu\nu}$ で展開すると、

$$
\begin{aligned}
\bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} &= \hat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} + \hat{\nabla}_{(\mu} h^\lambda{}_{\nu)} - \frac{1}{2}\hat{\nabla}^\lambda h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\hat{\nabla}_{(\mu}(h^2)^\lambda{}_{\nu)} - \frac{1}{4}\hat{\nabla}^\lambda (h^2)_{\mu\nu} \\
&\quad - h^\lambda{}_\sigma \hat{\nabla}_{(\mu} h^\sigma{}_{\nu)} + \frac{1}{2} h^\lambda{}_\sigma \hat{\nabla}^\sigma h_{\mu\nu} + o(h^3), \\
\bar{R} &= \hat{R} - \hat{R}_{\mu\nu} h^{\mu\nu} + \hat{\nabla}_\mu \hat{\nabla}_\nu h^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\hat{\nabla}^\lambda h^\mu{}_\nu \hat{\nabla}_\lambda h^\nu{}_\mu + \frac{1}{2}\hat{R}^\sigma{}_{\mu\lambda\nu} h^\lambda{}_\sigma h^{\mu\nu} \\
&\quad + \frac{1}{2}\hat{\nabla}_\nu h^\nu{}_\mu \hat{\nabla}_\lambda h^{\lambda\mu} - \hat{\nabla}_\mu (h^\mu{}_\nu \hat{\nabla}^\lambda h^\nu{}_\lambda) + o(h^3), \\
\bar{R}_{\mu\nu} &= \hat{R}_{\mu\nu} - \hat{R}^\sigma{}_{\mu\lambda\nu} h^\lambda{}_\sigma + \hat{R}^\lambda_{(\mu} h_{\nu)\lambda} + \hat{\nabla}_{(\mu} \hat{\nabla}^\lambda h_{\nu)\lambda} - \frac{1}{2}\hat{\nabla}^2 h_{\mu\nu} \\
&\quad - \frac{1}{2} h^\lambda_{(\mu} \hat{\nabla}^2 h_{\nu)\lambda} - \frac{1}{2}\hat{\nabla}^\lambda h^\sigma{}_\mu \hat{\nabla}_\sigma h_{\nu\lambda} - \frac{1}{4}\hat{\nabla}_\mu h^\lambda{}_\sigma \hat{\nabla}_\nu h^\sigma{}_\lambda \\
&\quad - \frac{1}{2}\hat{\nabla}_\lambda (h^\lambda{}_\sigma \hat{\nabla}_{(\mu} h^\sigma{}_{\nu)}) + \frac{1}{2}\hat{\nabla}_\lambda (h^\sigma_{(\mu} \hat{\nabla}_{\nu)} h^\lambda{}_\sigma) + \frac{1}{2}\hat{\nabla}_\lambda (h^\lambda{}_\sigma \hat{\nabla}^\sigma h_{\mu\nu}) + o(h^3)
\end{aligned}
$$

を得る。ここで、$a_{(\mu} b_{\nu)} = (a_\mu b_\nu + a_\nu b_\mu)/2$ である。$\bar{R} = \bar{g}^{\mu\nu}\bar{R}_{\mu\nu}$、$\bar{g}^{\mu\nu} = \hat{g}^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \cdots$ に注意して、$[\hat{\nabla}_\lambda, \hat{\nabla}_\nu] h^\lambda{}_\mu = h^\lambda{}_\sigma \hat{R}^\sigma{}_{\mu\nu\lambda} + h_{\mu\sigma}\hat{R}^\sigma{}_\nu$ を使うと $\bar{R}_{\mu\nu}$ から $\bar{R}$ を導くことができる。

A.2 曲がった時空上のフェルミオン

計量場は多脚場を用いて $g_{\mu\nu} = e^\alpha_\mu e_{\nu\alpha}$ と表される。以下では任意の D 次元を考え、断らない限り α、β、γ、δ は Lorentz の脚、μ、ν、λ、σ は Einstein の脚とする。ガンマ行列はアルファベットによらずすべて Lorentz の脚を持つものとし、反交換関係 $\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = -2\eta^{\alpha\beta}$ で定義される。Einstein の脚を持つガンマ行列は導入せず、多脚場を用いて $e^\mu_\alpha \gamma^\alpha$ と表す。フェルミオン ψ の Dirac 共役 (adjoint) は Lorentz の脚のガンマ行列を使って $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ と定義される。

共変微分 共変微分の一般的な式は

$$
D_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{2}\omega_{\mu\alpha\beta}\Sigma^{\alpha\beta}
$$

で与えられる。ここで、接続１フォーム (connection 1-form)$\omega_\mu dx^\mu$ は

$$\omega_{\mu\alpha\beta} = e^\nu_\alpha \nabla_\mu e_{\nu\beta} = e^\nu_\alpha \left(\partial_\mu e_{\nu\beta} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} e_{\lambda\beta}\right)$$

と定義される量で、Lorentz の脚について反対称性 $\omega_{\mu\alpha\beta} = -\omega_{\mu\beta\alpha}$ が成り立つ。$\Sigma^{\alpha\beta}$ は Lorentz 生成子で交換関係

$$\left[\Sigma^{\alpha\beta}, \Sigma^{\gamma\delta}\right] = \eta^{\beta\gamma}\Sigma^{\alpha\delta} - \eta^{\alpha\gamma}\Sigma^{\beta\delta} + \eta^{\beta\delta}\Sigma^{\gamma\alpha} - \eta^{\delta\alpha}\Sigma^{\gamma\beta}$$

を満たす。この交換関係より共変微分は

$$\begin{aligned}[D_\mu, D_\nu] &= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \omega_{\nu\alpha\beta} - \partial_\nu \omega_{\mu\alpha\beta} + [\omega_\mu, \omega_\nu]_{\alpha\beta}\right)\Sigma^{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2} R_{\mu\nu\alpha\beta}\Sigma^{\alpha\beta}\end{aligned}$$

を満たす。

Lorentz 生成子はスカラー場に対しては $\Sigma^{\alpha\beta} = 0$ である。ゲージ場に作用する場合は、Einstein の脚を使って $\Sigma^{\mu\nu} = e^\mu_\alpha e^\nu_\beta \Sigma^{\alpha\beta}$ と書くと、$(\Sigma^{\mu\nu})_{\lambda\sigma} = g^\mu{}_\lambda g^\nu{}_\sigma - g^\mu{}_\sigma g^\nu{}_\lambda$ で与えられ、共変微分は $D_\mu = \nabla_\nu$ となる。フェルミオンに作用する場合はガンマ行列を用いて

$$\Sigma^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4}\left[\gamma^\alpha, \gamma^\beta\right]$$

で与えられる。

Weyl 不変性　質量ゼロのフェルミオンは任意の次元で共形不変になる。無限小 Weyl 変換 $\delta_\omega g_{\mu\nu} = 2\omega g_{\mu\nu}$ を考えると、多脚場及びフェルミオンは

$$\delta_\omega e^\mu_\alpha = -\omega e^\mu_\alpha, \quad \delta_\omega e_{\mu\alpha} = \omega e_{\mu\alpha}, \quad \delta_\omega \psi = \frac{1-D}{2}\omega\psi, \quad \delta_\omega \bar{\psi} = \frac{1-D}{2}\omega\bar{\psi}$$

と変換する。このとき、各量の変換は

$$\begin{aligned}\delta_\omega \omega_{\mu\alpha\beta} &= \left(e_{\mu\alpha} e^\lambda_\beta - e_{\mu\beta} e^\lambda_\alpha\right)\partial_\lambda \omega, \\ \delta_\omega\left(e^\mu_\alpha \gamma^\alpha D_\mu \psi\right) &= -\frac{D+1}{2}\omega e^\mu_\alpha \gamma^\alpha D_\mu \psi\end{aligned}$$

となる。二番目の式では $\gamma_\alpha \Sigma^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(D-1)\gamma^\beta$ を使った。これより、フェルミオンの運動項は

$$\delta_\omega\left(\sqrt{-g}\bar{\psi} e^\mu_\alpha \gamma^\alpha D_\mu \psi\right) = \left(D\omega + \frac{1-D}{2}\omega - \frac{D+1}{2}\omega\right)\sqrt{-g}\bar{\psi} e^\mu_\alpha \gamma^\alpha D_\mu \psi = 0$$

のように任意の D 次元で Weyl 不変であることが示せる。

接続１フォームの展開式　摂動計算のさいに用いる接続１フォームの平坦な背景場のまわりでの展開式を記す。フェルミオンは共形不変なので共形モード場の依存性は除いて考える。

共形モード依存性を除いた多脚場はトレースレステンソル場で展開すると

$$
\begin{aligned}
\bar{e}_{\mu\alpha} &= (e^{\frac{1}{2}h})_{\mu\alpha} = \eta_{\mu\alpha} + \frac{1}{2}h_{\mu\alpha} + \frac{1}{8}(h^2)_{\mu\alpha} + \cdots, \\
\bar{e}_\alpha^\mu &= (e^{-\frac{1}{2}h})_\alpha^\mu = \delta_\alpha^\mu - \frac{1}{2}h_\alpha^\mu + \frac{1}{8}(h^2)_\alpha^\mu + \cdots
\end{aligned}
$$

となる。ここで、$\bar{e}_\mu^\alpha \bar{e}_{\nu\alpha} = \bar{g}_{\mu\nu}$、$\bar{e}_\alpha^\mu \bar{e}_{\mu\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ である。いま平坦な背景時空のまわりで展開しているので、右辺に現れた量の脚はすべて Lorentz の脚とみなすことができる。この式を使うと展開式

$$
\begin{aligned}
\bar{\omega}_{\mu\alpha\beta} &= \bar{e}_a^\nu \left(\partial_\mu \bar{e}_{\nu\beta} - \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \bar{e}_{\lambda\beta}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\partial_\alpha h_{\mu\beta} - \partial_\beta h_{\mu\alpha}\right) - \frac{1}{8}\left(h_\alpha^\lambda \partial_\mu h_{\lambda\beta} - h_\beta^\lambda \partial_\mu h_{\lambda\alpha}\right) \\
&\quad -\frac{1}{4}\left(h_{\mu\lambda}\partial_\alpha h_\beta^\lambda - h_{\mu\lambda}\partial_\beta h_\alpha^\lambda\right) + \frac{1}{4}\left(h_\alpha^\lambda \partial_\lambda h_{\mu\beta} - h_\beta^\lambda \partial_\lambda h_{\mu\alpha}\right) \\
&\quad +o(h^3)
\end{aligned}
$$

を得る。

付 録B

B.1　二点相関関数の $P_{\mu_1\cdots\mu_l,\nu_1\cdots\nu_l}$ の構造

ここではEuclid空間で議論する。Minkowski空間での表式は計量を $\eta_{\mu\nu}$ に戻して $x^0 \to x^0 - i\epsilon$ と置き換えると得られる。

ここでは共形反転

$$x'_\mu = (Rx)_\mu = \frac{x_\mu}{x^2}$$

を使って二点相関関数の形を決めることにする。この変換は $\Omega(x) = 1/x^4$ を与える。二回行うと元に戻るので $R^2 = I$ である。これより逆変換は $x_\mu = (Rx')_\mu$ と書くことが出来る。

実プライマリースカラー場は共形反転の下で

$$O'(x') = \Omega(x)^{-\Delta/2} O(x) = x^{2\Delta} O(x)$$

と変換する。[1] 引数を x に戻すと $O'(x) = (1/x^2)^\Delta O(Rx)$ と書くこともできる。ここでは O' の引数を x' のままで議論することにする。この変換則を用いて真空が共形不変であるための条件式 $\langle O'(x')O'(y')\rangle = \langle O(x')O(y')\rangle$(2.2.3) を書き換えると関係式

$$(x^2y^2)^\Delta \langle O(x)O(y)\rangle = \langle O(Rx)O(Ry)\rangle$$

が得られる。ここで、

$$\frac{1}{(Rx-Ry)^2} = \frac{x^2y^2}{(x-y)^2}$$

[1] Euclid空間では共形反転の O' は Hermite 共役 $O^\dagger$ と同定されるので、この式は場が実場であることを表している。

に注意すると、この関係式の解は全体の係数は除いて

$$\langle O(x)O(y)\rangle = \frac{1}{(x-y)^{2\Delta}}$$

で与えられることが分かる。

プライマリーベクトル場は共形反転の下で

$$O'_\mu(x') = \Omega(x)^{-(\Delta-1)/2}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}O_\nu(x) = x^{2\Delta}I_{\mu\nu}(x)O_\nu(x)$$

と変換する。ここで、$I_{\mu\nu}(x) = \delta_{\mu\nu} - 2x_\mu x_\nu/x^2$ である。これより共形不変性の条件式 $\langle O'_\mu(x')O'_\nu(y')\rangle = \langle O_\mu(x')O_\nu(y')\rangle$ は

$$(x^2y^2)^\Delta I_{\mu\lambda}(x)I_{\nu\sigma}(y)\langle O_\lambda(x)O_\sigma(y)\rangle = \langle O_\mu(Rx)O_\nu(Ry)\rangle$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} I_{\mu\lambda}(x)I_{\nu\sigma}(y)I_{\lambda\sigma}(x-y) &= I_{\mu\nu}(x-y) + 2\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2}\left(\frac{x_\mu x_\nu}{x^2} - \frac{y_\mu y_\nu}{y^2}\right) \\ &= I_{\mu\nu}(Rx-Ry) \end{aligned}$$

に注意すると、解が全体の係数を除いて

$$\langle O_\mu(x)O_\nu(y)\rangle = \frac{I_{\mu\nu}(x-y)}{(x-y)^{2\Delta}}$$

で与えられることが分かる。これより $P_{\mu,\nu} = I_{\mu\nu}$ が求まる。一般のプライマリーテンソル場も場合も同様である。

付 録C

C.1 Wightman関数のFourier変換

D 次元 Euclid 空間では共形次元 Δ を持つスカラー場の Wightman2 点関数 $\langle O(x)O(0)\rangle$ 及びその Fourier 変換は

$$\frac{1}{(x^2)^{\Delta}} = \frac{(2\pi)^{\frac{D}{2}}\Gamma(\frac{D}{2}-\Delta)}{4^{\Delta-\frac{D}{4}}\Gamma(\Delta)}\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}e^{ik\cdot x}\left(k^2\right)^{\Delta-\frac{D}{2}} \tag{C.1.1}$$

で与えられる。

これを用いて Minkowski 時空での Wightman 関数の Fourier 変換を求める。以下ではEuclid空間での積 $k\cdot x$ は $\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+k^Dx^D$ と書き換え、$k\cdot x$ は Minkowski時空での積とする。D 番目の座標を $x^D=-ix^0-\epsilon$ と書き換えると (C.1.1) 式の左辺はMinkowski時空での Wightman関数 $\langle 0|O(x)O(0)|0\rangle$ になるので、右辺を書き換えること

$$\begin{aligned}\frac{1}{\{-(x^0-i\epsilon)^2+\mathbf{x}^2\}^{\Delta}} &= \frac{(2\pi)^{\frac{D}{2}}\Gamma(\frac{D}{2}-\Delta)}{4^{\Delta-\frac{D}{4}}\Gamma(\Delta)}\int\frac{d^{D-1}\mathbf{k}}{(2\pi)^{D-1}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ &\quad\times\int\frac{dk^D}{2\pi}e^{k^D(x^0-i\epsilon)}\left\{\mathbf{k}^2+(k^D)^2\right\}^{\Delta-\frac{D}{2}}\end{aligned} \tag{C.1.2}$$

となる。次に k^D の積分路を複素平面に拡大する。位相因子 $e^{-i\epsilon k^D}$ があるので、k^D の虚数部が無限大になる領域はゼロになるため、積分路は複素平面の下半面に広げることが出来る。$k^D=\pm i|\mathbf{k}|$ に極があって、Δ が整数でないことから、上半面の $k^D=i|\mathbf{k}|$ から $i\infty$ まで、及び下半面の $k^D=-i|\mathbf{k}|$ から $-i\infty$ まで、虚軸上にカットが生じる。そのため、$-\infty<k^D<\infty$ の積分路はカットを避けた虚軸の下半分の左右をなぞる積分路に変更することが出来る (自由場 $\Delta=D/2-1$ の場合は極の留数だけを拾う)。$k^D=-ik^0$

と書くと

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk^D}{2\pi}e^{k^D(x^0-i\epsilon)}\left\{\mathbf{k}^2+(k^D)^2\right\}^{\Delta-\frac{D}{2}}$$
$$=-i\int_0^{\infty}\frac{dk^0}{2\pi}e^{-ik^0x^0-\epsilon k^0)}\left\{\left[\mathbf{k}^2-(k^0+io)^2\right]^{\Delta-\frac{D}{2}}-\left[\mathbf{k}^2-(k^0-io)^2\right]^{\Delta-\frac{D}{2}}\right\}$$

と書き換えることが出来る。ここで、カットを避けるために新たな正の無限小 o を導入した。さらに公式

$$\begin{aligned}(x+io)^\lambda-(x-io)^\lambda &= \begin{cases}0 & \text{for } x>0\\ 2i|x|^\lambda\sin\pi\lambda & \text{for } x<0\end{cases}\\ &= 2i(-x)^\lambda\theta(-x)\sin\pi\lambda\end{aligned}$$

を使って被積分関数を $[\mathbf{k}^2-(k^0+io)^2]^{\Delta-D/2}-[\mathbf{k}^2-(k^0-io)^2]^{\Delta-D/2}=-2i(-k^2)^{\Delta-D/2}\theta(-k^2)\sin\pi(\Delta-D/2)$ と変形する。ここで、$k^2=\mathbf{k}^2-(k^0)^2$ である。これより (C.1.2) 式の右辺は

$$\begin{aligned}&-2\sin\pi\left(\Delta-\frac{D}{2}\right)\frac{(2\pi)^{\frac{D}{2}}\Gamma(\frac{D}{2}-\Delta)}{4^{\Delta-\frac{D}{4}}\Gamma(\Delta)}\int\frac{d^{D-1}\mathbf{k}}{(2\pi)^{D-1}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\\ &\qquad\times\int_0^\infty\frac{dk^0}{2\pi}e^{-ik^0x^0}(-k^2)^{\Delta-\frac{D}{2}}\theta(-k^2)\\ &=\frac{(2\pi)^{\frac{D}{2}+1}}{4^{\Delta-\frac{D}{4}}\Gamma(\Delta)\Gamma(\Delta-\frac{D}{2}+1)}\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}e^{ik\cdot x}\theta(k^0)\theta(-k^2)(-k^2)^{\Delta-\frac{D}{2}}\end{aligned}$$

となる。ここで、ガンマ関数の公式 $\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\lambda)=\pi/\sin\pi\lambda$ と $\Gamma(\lambda+1)=\lambda\Gamma(\lambda)$ を使った。これから第二章で導入したスカラー場の Fourier 変換の式 $W(k)$ が読み取れる。

付 録 D

D.1 M^4 上の自由スカラー場の共形代数

簡単な例として自由スカラー場について共形代数と場の変換則を導出する。共形不変なスカラー場の作用は

$$I = -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-\hat{g}}\left(\hat{g}^{\mu\nu}\partial_\mu X\partial_\nu X + \frac{1}{6}\hat{R}X^2\right)$$

で与えられる。ここで、背景時空計量は Minkowski 計量 $\hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ とする。正準運動量および正準交換関係は $\mathsf{P}_X = \partial_\eta X$ と $[X(\eta,\mathbf{x}), \mathsf{P}_X(\eta,\mathbf{x}')] = i\delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ で与えられる。スカラー場を $X = X_< + X_>$、$X_> = X_<^\dagger$ のように生成および消滅演算子部分に分けて後者を

$$X_<(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\varphi(\mathbf{k})e^{ik_\mu x^\mu}$$

と展開する。このとき、モード演算子は正準交換関係より $[\varphi(\mathbf{k}), \varphi^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta_3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$ を満たす。2 点相関関数 (Wightman 関数) は $\langle 0|X(x)X(0)|0\rangle = [X_<(x), X_>(0)]$ と表され

$$\langle 0|X(x)X(0)|0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2|\mathbf{k}|}e^{-i|\mathbf{k}|(\eta-i\epsilon)+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{-(\eta-i\epsilon)^2+\mathbf{x}^2}$$

となる。ここで、ϵ は UV カットオフである。

ストレステンソルは背景場計量 $\hat{g}_{\mu\nu}$ による作用の変分、$T^{\mu\nu} = (2/\sqrt{-\hat{g}})\times \delta I/\delta\hat{g}_{\mu\nu}$、で定義される。変分を実行した後、Minkowski 計量に置き換えると

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{3}\partial_\mu X\partial_\nu X - \frac{1}{3}X\partial_\mu\partial_\nu X - \frac{1}{6}\eta_{\mu\nu}\partial^\lambda X\partial_\lambda X$$

を得る。このストレステンソルは運動方程式を使うとトレースレスの条件を満たすことが分かる。これより共形変換の生成子は場の演算子を用いて

$$
\begin{aligned}
P_0 &= H = \int d^3\mathbf{x}\mathcal{A}, \qquad P_j = \int d^3\mathbf{x}\mathcal{B}_j, \\
M_{0j} &= \int d^3\mathbf{x}\left(-\eta\mathcal{B}_j - x_j\mathcal{A}\right), \qquad M_{ij} = \int d^3\mathbf{x}\left(x_i\mathcal{B}_j - x_j\mathcal{B}_i\right), \\
D &= \int d^3\mathbf{x}\left(\eta\mathcal{A} + x^k\mathcal{B}_k + :\mathsf{P}_X X:\right), \\
K_0 &= \int d^3\mathbf{x}\left\{\left(\eta^2+\mathbf{x}^2\right)\mathcal{A} + 2\eta x^k\mathcal{B}_k + 2\eta :\mathsf{P}_X X: + \frac{1}{2} :X^2:\right\}, \\
K_j &= \int d^3\mathbf{x}\left\{\left(-\eta^2+\mathbf{x}^2\right)\mathcal{B}_j - 2x_j x^k\mathcal{B}_k - 2\eta x_j\mathcal{A} - 2x_j :\mathsf{P}_X X:\right\}
\end{aligned}
$$

と表される。ここで、場の変数 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}_j$ はそれぞれエネルギー密度と運動量密度で、

$$
\mathcal{A} = \frac{1}{2} :\mathsf{P}_X^2: - \frac{1}{2} :X \partial^2 X:, \qquad \mathcal{B}_j =:\mathsf{P}_X\partial_j X:
$$

で与えられる。

共形変換の生成子は保存するので、時間に依存しない。そのため、共形代数は同時刻交換関係を用いて計算することが出来る。同時刻での 2 点相関関数

$$
\begin{aligned}
\langle 0|X(\mathbf{x})X(\mathbf{x}')|0\rangle &= \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')^2+\epsilon^2}, \\
\langle 0|X(\mathbf{x})\mathsf{P}_X(\mathbf{x}')|0\rangle &= i\frac{1}{2\pi^2}\frac{\epsilon}{[(\mathbf{x}-\mathbf{x}')^2+\epsilon^2]^2}, \\
\langle 0|\mathsf{P}_X(\mathbf{x})\mathsf{P}_X(\mathbf{x}')|0\rangle &= -\frac{1}{2\pi^2}\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')^2-3\epsilon^2}{[(\mathbf{x}-\mathbf{x}')^2+\epsilon^2]^3}
\end{aligned}
$$

を用いると、場の変数 X と P_X の同時刻交換関係は

$$
\begin{aligned}
[X(\eta,\mathbf{x}),\mathsf{P}_X(\eta,\mathbf{x}')] &= \langle 0|X(\eta,\mathbf{x})\mathsf{P}_X(\eta,\mathbf{x}')|0\rangle - \langle 0|X(\eta,\mathbf{x})\mathsf{P}_X(\eta,\mathbf{x}')|0\rangle^\dagger \\
&= i\frac{1}{\pi^2}\frac{\epsilon}{[(\mathbf{x}-\mathbf{x}')^2+\epsilon^2]^2}
\end{aligned}
$$

と表され、X や P_X 同士は消える。最後の項は正則化された 3 次元の δ 関数で

$$
\delta_3(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\epsilon\omega} = \frac{1}{\pi^2}\frac{\epsilon}{(\mathbf{x}^2+\epsilon^2)^2}.
$$

と定義される。

同様にして、場の変数の $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}_j$ の間の同時刻交換関係は

$$
\begin{aligned}
[\mathcal{A}(\mathbf{x}),\mathcal{A}(\mathbf{y})] &= \frac{1}{2} i \bar{\partial}_x^2 \delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \left(:\mathsf{P}_X(\mathbf{x})X(\mathbf{y}): - :X(\mathbf{x})\mathsf{P}_X(\mathbf{y}):\right), \\
[\mathcal{B}_j(\mathbf{x}),\mathcal{B}_k(\mathbf{y})] &= i\partial_k^x \delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) :\partial_j X(\mathbf{x})\mathsf{P}_X(\mathbf{y}): + i\partial_j^x \delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) :\mathsf{P}_X(\mathbf{x})\partial_k X(\mathbf{y}):, \\
[\mathcal{A}(\mathbf{x}),\mathcal{B}_j(\mathbf{y})] &= i\partial_j^x \delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) :\mathsf{P}_X(\mathbf{x})\mathsf{P}_X(\mathbf{y}): - \frac{1}{2} i \delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) :\bar{\partial}^2 X \partial_j X(\mathbf{y}): \\
&\quad - \frac{1}{2} i \bar{\partial}_x^2 \delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) :X(\mathbf{x})\partial_j X(\mathbf{y}): - i\frac{2}{\pi^2} f_j(\mathbf{x}-\mathbf{y})
\end{aligned}
$$

と計算される。さらに、生成子の中に含まれるその他の場の変数との同時刻交換関係は

$$
\begin{aligned}
[\mathcal{A}(\mathbf{x}), :\mathsf{P}_X X(\mathbf{y}):] &= -i\delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{x}) \left(:\mathsf{P}_X^2(\mathbf{y}): + \frac{1}{2} :X \bar{\partial}^2 X(\mathbf{y}): \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} i \bar{\partial}_x^2 \delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) :X(\mathbf{x})X(\mathbf{y}): + i\frac{10}{\pi^2} f(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \\
[\mathcal{B}_j(\mathbf{x}), :\mathsf{P}_X X(\mathbf{y}):] &= -i\delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{x})\mathcal{B}_j(\mathbf{y}) + i\partial_j^x \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) :\mathsf{P}_X(\mathbf{x})X(\mathbf{y}):
\end{aligned}
$$

で与えられる。ここで、量子補正を表す関数 f_j と f は

$$
f_j(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^2} \frac{\epsilon x_j (\mathbf{x}^2 - \epsilon^2)}{(\mathbf{x}^2+\epsilon^2)^6} \qquad f(\mathbf{x}) = -\frac{1}{40\pi^2} \frac{\epsilon(5\mathbf{x}^2 - 3\epsilon^2)}{(\mathbf{x}^2+\epsilon^2)^5}
$$

で与えられ、$f_j(\mathbf{x}) = \partial_j f(\mathbf{x})$ の関係を満たす。これらの関数の空間積分は、ϵ を有限の値にしたままで、

$$
\int d^3\mathbf{x} f_j(\mathbf{x}) = 0, \quad \int d^3\mathbf{x} f(\mathbf{x}) = 0, \quad \int d^3\mathbf{x} x^j f(\mathbf{x}) = 0
$$

を満たす。一方、積分 $\int d^3\mathbf{x}\mathbf{x}^2 f(\mathbf{x}) = -1/160\epsilon^2$ は $\epsilon \to 0$ で発散する。[1]

つぎに、複合場 $:X^n:$ の変換則を求める。この演算子と生成子の中に現れる場の変数との同時刻交換関係は

$$
\begin{aligned}
[\mathcal{A}(\mathbf{x}), :X^n(\mathbf{y}):] &= -i\delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\partial_\eta :X^n(\mathbf{y}):, \\
[\mathcal{B}_j(\mathbf{x}), :X^n(\mathbf{y}):] &= -i\delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\partial_j :X^n(\mathbf{y}):
\end{aligned}
$$

[1] 関数 f は δ 関数を用いて $f(\mathbf{x}) = (-1/320) \times \bar{\partial}^2 \left(\delta_3(\mathbf{x})/\mathbf{x}^2\right)$ と表すことが出来る。このとき、δ 関数の異なる式 $\pi^2\delta_3(\mathbf{x}) = 4\epsilon^3/(\mathbf{x}^2+\epsilon^2)^3$ を使っている。

$$
\begin{aligned}
& & & +i\frac{1}{2\pi^2}n(n-1)g_j(\mathbf{x}-\mathbf{y}):X^{n-2}(\mathbf{y}):, \\
[:\mathsf{P}_X X(\mathbf{x}):,:X^n(\mathbf{y}):] &=& & -in\delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{y}):X^n(\mathbf{y}): \\
& & & +i\frac{3}{2\pi^2}n(n-1)g(\mathbf{x}-\mathbf{y}):X^{n-2}(\mathbf{y}):
\end{aligned}
$$

と計算される。量子補正関数 g_j と g は

$$
g_j(\mathbf{x})=\frac{1}{\pi^2}\frac{\epsilon x_j}{(\mathbf{x}^2+\epsilon^2)^4} \qquad g(\mathbf{x})=-\frac{1}{6\pi^2}\frac{\epsilon}{(\mathbf{x}^2+\epsilon^2)^3}
$$

で定義され、$g_j(\mathbf{x})=\partial_j g(\mathbf{x})$ の関係を満たす。

これらより、演算子 $:X^n:$ の変観測を計算すると、量子補正項はすべて消えて、

$$
\begin{aligned}
i\,[P_\mu,:X^n(x):] &= \partial_\mu :X^n(x):, \\
i\,[M_{\mu\nu},:X^n(x):] &= (x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu):X^n(x):, \\
i\,[D,:X^n(x):] &= (x^\mu\partial_\mu + n):X^n(x):, \\
i\,[K_\mu,:X^n(x):] &= \left(x^2\partial_\mu - 2x_\mu x^\nu\partial_\nu - 2x_\mu n\right):X^n(x):
\end{aligned}
$$

のように変換することが示せる。これより、$:X^n:$ は共形次元 n のプライマリースカラー場であることが分かる。

D.2 M^4 上のトレーステンソル場の生成子

この付録では輻射ゲージでのトレースレステンソル場の共形変換の生成子を書き下す。それは、定義式 (2.2.5) に従って、Weyl 作用から導かれるストレステンソルを用いて導出される。

並進の生成子は

$$
P_0=H=\int d^3\mathbf{x}\ \mathcal{A}, \qquad P_j=\int d^3\mathbf{x}\ \mathcal{B}_j
$$

と表される。エネルギー密度 $\mathcal{A}$ 及び運動量密度 $\mathcal{B}_j$ は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= -\frac{1}{2}:\mathsf{P}_{\mathsf{u}}^{kl}\mathsf{P}^{\mathsf{u}}_{kl}:+:\mathsf{P}_{\mathsf{h}}^{kl}\mathsf{u}_{kl}:+:\mathsf{u}^{kl}\partial\!\!\!/^2\mathsf{u}_{kl}:+\frac{1}{2}:\partial\!\!\!/^2\mathsf{h}^{kl}\partial\!\!\!/^2\mathsf{h}_{kl}: \\
&\quad +\frac{1}{4}:\mathsf{P}^k\partial\!\!\!/^{-2}\mathsf{P}_k:-:\partial\!\!\!/^2\mathsf{h}^k\partial\!\!\!/^2\mathsf{h}_k:, \\
\mathcal{B}_j &= :\mathsf{P}_{\mathsf{u}}^{kl}\partial_j\mathsf{u}_{kl}:+:\mathsf{P}_{\mathsf{h}}^{kl}\partial_j\mathsf{h}_{kl}:+:\mathsf{P}^k\partial_j\mathsf{h}_k:
\end{aligned}
$$

で与えられる。Lorentz 変換の生成子は

$$M_{0j} = \int d^3\mathbf{x}\ \{-\eta\mathcal{B}_j - x_j\mathcal{A} - \mathcal{C}_j\}, \qquad M_{ij} = \int d^3\mathbf{x}\ \{x_i\mathcal{B}_j - x_j\mathcal{B}_i + \mathcal{C}_{ij}\}$$

で与えられる。ここで、新たな演算子 $\mathcal{C}_j$ と $\mathcal{C}_{ij}$ は

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_j &= :\mathsf{P}_{\mathsf{u}}^{kl}\partial_j\mathsf{h}_{kl}: + :\mathsf{P}_{\mathsf{u}}{}^{k}{}_{j}\not\partial^{-2}\mathsf{P}_k: +2:\mathsf{P}_{\mathsf{h}}{}^{k}{}_{j}\mathsf{h}_k: + :\mathsf{h}^{k}{}_{j}\mathsf{P}_k: +2:\mathsf{u}^{k}{}_{j}\not\partial^{2}\mathsf{h}_k:, \\
\mathcal{C}_{ij} &= 2\left(:\mathsf{P}_{\mathsf{u}}{}^{k}{}_{i}\mathsf{u}_{kj}: - :\mathsf{P}_{\mathsf{u}}{}^{k}{}_{j}\mathsf{u}_{ki}:\right) + 2\left(:\mathsf{P}_{\mathsf{h}}{}^{k}{}_{i}\mathsf{h}_{kj}: - :\mathsf{P}_{\mathsf{h}}{}^{k}{}_{j}\mathsf{h}_{ki}:\right) \\
&\quad + :\mathsf{P}_i\mathsf{h}_j: - :\mathsf{P}_j\mathsf{h}_i:
\end{aligned}$$

で定義される。

Dilatation の生成子は

$$D = \int d^3\mathbf{x}\ \left\{\eta\mathcal{A} + x^k\mathcal{B}_k + :\mathsf{P}_{\mathsf{u}}^{kl}\mathsf{u}_{kl}:\right\}$$

で与えられる。特殊共形変換の生成子は

$$K_0 = -\eta^2 P_0 + 2\eta D + N_0, \qquad K_j = \eta^2 P_j + 2\eta M_{0j} + N_j$$

となる。ここで、$N_0 = \int d^3\mathbf{x}\ \mathbf{x}^2 T_{00}$ と $N_j = \int d^3\mathbf{x}\ (\mathbf{x}^2 T_{0j} - 2x_j x^k T_{0k})$ は

$$\begin{aligned}
N_0 &= \int d^3\mathbf{x}\ \Big\{\mathbf{x}^2\mathcal{A} + 2x^k\mathcal{C}_k - 2:\mathsf{u}^{kl}\mathsf{u}_{kl}: - :\partial^m\mathsf{h}^{kl}\partial_m\mathsf{h}_{kl}: \\
&\qquad -\frac{5}{4}:\not\partial^{-2}\mathsf{P}^k\not\partial^{-2}\mathsf{P}_k: -4:\partial^k\mathsf{h}^l\partial_k\mathsf{h}_l:\Big\}, \\
N_j &= \int d^3\mathbf{x}\ \Big\{\mathbf{x}^2\mathcal{B}_j - 2x_j x^k\mathcal{B}_k + 2x^k\mathcal{C}_{kj} - 2x_j:\mathsf{P}_{\mathsf{u}}^{kl}\mathsf{u}_{kl}: \\
&\qquad -2:\mathsf{u}^{kl}\partial_j\mathsf{h}_{kl}: +2:\not\partial^{-2}\mathsf{P}^k\partial_j\mathsf{h}_k: -4:\mathsf{P}_{\mathsf{u}}{}^{k}{}_{j}\mathsf{h}_k: \\
&\qquad -4:\mathsf{u}^{k}{}_{j}\not\partial^{-2}\mathsf{P}_k: +4:\mathsf{h}^{k}{}_{j}\not\partial^{2}\mathsf{h}_k:\Big\}
\end{aligned}$$

で与えられる。

付 録E

E.1 S^3 上のテンソル調和関数

S^3 上の対称・横波・トレースレステンソル調和関数 (ST^2 tensor harmonics) を定義するために座標系を導入する。まず、R^4 を表す二つの座標系として、$x^{\bar{\mu}}$ $(\bar{\mu} = \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3})$ で表される直交座標系と、$x^\mu = (x^0, x^i)$ で表される球座標系を導入する。ここで、$i = 1, 2, 3$ 及び $x^0 = r = (x^{\bar{\mu}} x_{\bar{\mu}})^{1/2}$ である。R^4 空間はそれぞれの座標系の計量を使って

$$ds^2_{R^4} = \delta_{\bar{\mu}\bar{\nu}} dx^{\bar{\mu}} dx^{\bar{\nu}} = dr^2 + r^2 \hat{\gamma}_{ij} dx^i dx^j$$

と表される。$\hat{\gamma}_{ij}$ は単位 S^3 の計量である。Euler 角を使って S^3 の座標を $x^i = (\alpha, \beta, \gamma)$ と表すと、二つの座標系をつなぐ関係式は

$$\begin{aligned}
x^{\bar{0}} &= r \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{1}{2}(\alpha + \gamma), \qquad & x^{\bar{1}} &= r \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{1}{2}(\alpha - \gamma), \\
x^{\bar{2}} &= -r \sin\frac{\beta}{2} \cos\frac{1}{2}(\alpha - \gamma), \qquad & x^{\bar{3}} &= -r \cos\frac{\beta}{2} \sin\frac{1}{2}(\alpha + \gamma)
\end{aligned}$$

で与えられる。

ST^2 テンソル調和関数　ST^2 テンソル調和関数を Clebsch-Gordan 係数と Wigner$D$ 関数を用いて定義する。一般的に、D 関数は座標の足について対称トレースレスなテンソル $\tau_{\bar{\mu}_1 \cdots \bar{\mu}_n}$ を用いて

$$D^J_{mm'} = \frac{1}{r^{2J}} x^{\bar{\mu}_1} \cdots x^{\bar{\mu}_{2J}} (\tau_{\bar{\mu}_1 \cdots \bar{\mu}_{2J}})_{mm'}$$

と表すことができる。ここで、複素共役は $(\tau_{\bar{\mu}_1 \cdots \bar{\mu}_n})^*_{mm'} = \epsilon_M (\tau_{\bar{\mu}_1 \cdots \bar{\mu}_n})_{-m-m'}$ と定義される。

S^3 のアイソメトリーである $SU(2)\times SU(2)$ の (J,J) 表現に属するスカラー調和関数はWigner$D$ 関数を用いて

$$Y_{JM}=\sqrt{\frac{2J+1}{\mathrm{V}_3}}D^J_{mm'}$$

と表すことができる。その複素共役は $Y^*_{JM}=\epsilon_M Y_{J-M}$ で与えられる。

次に空間の足をもつ調和関数を考える。先ずはじめに R^4 の直交座標系を用いてそれらを表すことにする。分極パラメータ $y=\pm1/2$ を持つ $SU(2)\times SU(2)$ の $(J+y,J-y)$ 表現に属するベクトル調和関数は

$$Y^{\bar\mu}_{J(My)}=\frac{1}{\sqrt2}\frac{1}{r}\sum_{S,T}C^{J+ym}_{Js,\frac12 t}C^{J-ym'}_{Js',\frac12 t'}Y_{JS}(\tau^{\bar\mu})_{tt'}$$

と表さる。分極 $x=\pm1$ を持つ $(J+x,J-x)$ 表現に属するテンソル調和関数は

$$Y^{\bar\mu\bar\nu}_{J(Mx)}=\frac12\frac{1}{r^2}\sum_{S,T}C^{J+xm}_{Js,1t}C^{J-xm'}_{Js',1t'}Y_{JS}(\tau^{\bar\mu\bar\nu})_{tt'}$$

と表すことができる。ここで、$\tau_{\bar\mu}$ と $\tau_{\bar\mu\bar\nu}$ は D 関数の一般式で用いたもので、それぞれ $(\tau^{\bar\mu})^*_{mm'}(\tau_{\bar\mu})_{nn'}=2\delta_{MN}$ 及び $(\tau^{\bar\mu\bar\nu})^*_{mm'}(\tau_{\bar\mu\bar\nu})_{nn'}=4\delta_{MN}$ と規格化されている。複素共役はそれぞれ $Y^{\bar\mu *}_{J(My)}=-\epsilon_M Y^{\bar\mu}_{J(-My)}$ と $Y^{\bar\mu\bar\nu *}_{J(Mx)}=\epsilon_M Y^{\bar\mu\bar\nu}_{J(-Mx)}$ で与えられ、全体の係数は

$$\int_{S^3}d\Omega_3 Y^{\bar\mu *}_{J_1(M_1y_1)}Y_{\bar\mu J_2(M_2y_2)}=\frac{1}{r^2}\delta_{J_1J_2}\delta_{M_1M_2}\delta_{y_1y_2},$$
$$\int_{S^3}d\Omega_3 Y^{\bar\mu\bar\nu *}_{J_1(M_1x_1)}Y_{\bar\mu\bar\nu J_2(M_2x_2)}=\frac{1}{r^4}\delta_{J_1J_2}\delta_{M_1M_2}\delta_{x_1x_2}$$

と規格化されている。

これらの調和関数は関係式

$$x_{\bar\mu}Y^{\bar\mu}_{J(My)}=x_{\bar\mu}Y^{\bar\mu\bar\nu}_{J(Mx)}=0 \tag{E.1.1}$$

を満たす。

極座標表示でのベクトル、テンソル調和関数は座標変換

$$Y_{\mu J(My)}=\frac{\partial x^{\bar\mu}}{\partial x^\mu}Y_{\bar\mu J(My)},\qquad Y_{\mu\nu J(Mx)}=\frac{\partial x^{\bar\mu}}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^{\bar\nu}}{\partial x^\nu}Y_{\bar\mu\bar\nu J(Mx)}$$

を行うことで得られる。このとき関係式 (E.1.1) は、球座標に変換した際、$r(=x^0)$ 座標を含む成分が $0=x^{\bar{\mu}}Y_{\bar{\mu}}=x^{\bar{\mu}}(\partial x^{\mu}/x^{\bar{\mu}})Y_{\mu}=r\partial(x^{\mu}/\partial r)Y_{\mu}=Y_r$ のように消えることを表している。すなわち、極座標に変換すると

$$Y^{r}_{J(My)}=0,\qquad Y^{rr}_{J(Mx)}=Y^{ri}_{J(Mx)}=0$$

となって、S^3 の座標成分のみが得られる。このことを用いると、たとえば

$$Y^{\bar{\mu}}Y_{\bar{\mu}}=\left(\frac{1}{r^2}\right)Y^iY_i,\qquad Y^{\bar{\mu}\bar{\nu}}Y_{\bar{\mu}}Y_{\bar{\nu}}=\left(\frac{1}{r^4}\right)Y^{ij}Y_iY_j$$

のような規格化や $SU(2)\times SU(2)$Clebsch-Gordan 係数を計算する際に現れるスカラー量は、S^3 上の具体的な表示が分からなくても、R^4 座標での調和関数の表示を用いて計算することができる。

一般的に分極パラメータ $\varepsilon_n=\pm n/2$ を持つ $(J+\varepsilon_n,J-\varepsilon_n)$ 表現に属する n 階のテンソル調和関数は

$$Y^{\bar{\mu}_1\cdots\bar{\mu}_n}_{J(M\varepsilon_n)}\propto\sum_{S,T}C^{J+\epsilon_n m}_{Js,\frac{n}{2}t}C^{J-\varepsilon_n m'}_{Js',\frac{n}{2}t'}Y_{JS}(\tau^{\bar{\mu}_1\cdots\bar{\mu}_n})_{tt'},$$

と表すことができ、その複素共役は $Y^{\bar{\mu}_1\cdots\bar{\mu}_n *}_{J(M\epsilon_n)}=(-1)^n\epsilon_M Y^{\bar{\mu}_1\cdots\bar{\mu}_n}_{J(-M\epsilon_n)}$ で与えられる。

最後に、上記の処方で求めたベクトル調和関数の Euler 角による表示を記しておく。分極 $y=1/2$ の場合は

$$\begin{aligned}
Y_{\alpha J(M\frac{1}{2})} &= \frac{i}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{(2J+2m+1)(2J-2m+1)}{(2J+1)\mathrm{V}_3}}D^{J-\frac{1}{2}}_{mm'},\\
Y_{\beta J(M\frac{1}{2})} &= \frac{1}{\sqrt{2}(2J+1)}\frac{1}{\sin\beta}\left\{m\sqrt{\frac{(2J+2m'+1)(2J-2m'+1)}{(2J+1)\mathrm{V}_3}}D^{J+\frac{1}{2}}_{mm'}\right.\\
&\qquad\left.-m'\sqrt{\frac{(2J+2m+1)(2J-2m+1)}{(2J+1)\mathrm{V}_3}}D^{J-\frac{1}{2}}_{mm'}\right\},\\
Y_{\gamma J(M\frac{1}{2})} &= \frac{i}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{(2J+2m'+1)(2J-2m'+1)}{(2J+1)\mathrm{V}_3}}D^{J+\frac{1}{2}}_{mm'},
\end{aligned}\tag{E.1.2}$$

分極 $y=-\frac{1}{2}$ の場合は

$$Y_{\alpha J(M-\frac{1}{2})} = \frac{i}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{(2J+2m+1)(2J-2m+1)}{(2J+1)\mathrm{V}_3}}D^{J+\frac{1}{2}}_{mm'},$$

$$Y_{\beta J(M-\frac{1}{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}(2J+1)}\frac{1}{\sin\beta}\Biggl\{m'\sqrt{\frac{(2J+2m+1)(2J-2m+1)}{(2J+1)\mathrm{V}_3}}D^{J+\frac{1}{2}}_{mm'} \\ -m\sqrt{\frac{(2J+2m'+1)(2J-2m'+1)}{(2J+1)\mathrm{V}_3}}D^{J-\frac{1}{2}}_{mm'}\Biggr\},$$

$$Y_{\gamma J(M-\frac{1}{2})} = \frac{i}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{(2J+2m'+1)(2J-2m'+1)}{(2J+1)\mathrm{V}_3}}D^{J-\frac{1}{2}}_{mm'} \qquad \text{(E.1.3)}$$

と表される。

E.2 $SU(2)\times SU(2)$Clebsch-Gordan係数

$SU(2)\times SU(2)$Clebsch-Gordan 係数は ST^2 テンソル調和関数の三つの積の S^3 上の積分で定義される。ここでは、本文中で定義されている **C** 以外の係数の一般式を挙げる。

係数 D

$$\mathbf{D}^{JM}_{J_1(M_1y_1),J_2(M_2y_2)} = \sqrt{\mathrm{V}_3}\int_{S^3} d\Omega_3 Y^*_{JM} Y^i_{J_1(M_1y_1)} Y_{iJ_2(M_2y_2)}$$
$$= -\sqrt{\frac{2J_1(2J_1+1)(2J_1+2)2J_2(2J_2+1)(2J_2+2)}{2J+1}}$$
$$\times\left\{\begin{array}{ccc} J & J_1 & J_2 \\ \frac{1}{2} & J_2+y_2 & J_1+y_1 \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{ccc} J & J_1 & J_2 \\ \frac{1}{2} & J_2-y_2 & J_1-y_1 \end{array}\right\}$$
$$\times C^{Jm}_{J_1+y_1m_1,J_2+y_2m_2} C^{Jm'}_{J_1-y_1m'_1,J_2-y_2m'_2}. \qquad \text{(E.2.1)}$$

この係数は $M = M_1 + M_2$ と三角不等 $|J_1 - J_2| \le J \le J_1 + J_2$ を満たす。ここで、$J + J_1 + J_2$ は整数。不等号の低い側 (高い側) の等式は $y_1 = y_2$ $(y_1 \neq y_2)$ の場合に成り立つ。

係数 E

$$\mathbf{E}^{JM}_{J_1(M_1x_1),J_2(M_2x_2)} = \sqrt{\mathrm{V}_3}\int_{S^3} d\Omega_3 Y^*_{JM} Y^{ij}_{J_1(M_1x_1)} Y_{ijJ_2(M_2x_2)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{(2J_1-1)(2J_1+1)(2J_1+3)(2J_2-1)(2J_2+1)(2J_2+3)}{2J+1}} \\
&\quad \times \left\{ \begin{matrix} J & J_1 & J_2 \\ 1 & J_2+x_2 & J_1+x_1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} J & J_1 & J_2 \\ 1 & J_2-x_2 & J_1-x_1 \end{matrix} \right\} \\
&\quad \times C^{Jm}_{J_1+x_1 m_1, J_2+x_2 m_2} C^{Jm'}_{J_1-x_1 m'_1, J_2-x_2 m'_2}. \qquad \text{(E.2.2)}
\end{aligned}
$$

この係数は $M = M_1 + M_2$ と三角不等式 $|J_1 - J_2| \leq J \leq J_1 + J_2$ を満たす。ここで、$J + J_1 + J_2$ は整数。不等号の低い側 (高い側) の等式は $x_1 = x_2$ $(x_1 \neq x_2)$ の場合に成り立つ。

係数 G

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{G}^{JM}_{J_1(M_1 y_1);J_2 M_2} = \sqrt{\mathrm{V}_3} \int_{S^3} d\Omega_3 Y^*_{JM} Y^i_{J_1(M_1 y_1)} \hat{\nabla}_i Y_{J_2 M_2} \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2J_1(2J_1+1)(2J_1+2)(2J_2+1)}{2J+1}} \sum_{K=J_2\pm\frac{1}{2}} 2K(2K+1)(2K+2) \\
&\quad \times \left\{ \begin{matrix} J & J_1 & K \\ \frac{1}{2} & J_2 & J_1+\frac{1}{2} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} J & J_1 & K \\ \frac{1}{2} & J_2 & J_1-\frac{1}{2} \end{matrix} \right\} C^{Jm}_{J_1+y_1 m_1, J_2 m_2} C^{Jm'}_{J_1-y_1 m'_1, J_2 m'_2}. \\
&\qquad \text{(E.2.3)}
\end{aligned}
$$

この係数は $M = M_1 + M_2$ と三角不等式 $|J_1 - J_2| + \frac{1}{2} \leq J \leq J_1 + J_2 - \frac{1}{2}$ を満たす。ここで、$J + J_1 + J_2$ は半整数である。

係数 H

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{H}^{JM}_{J_1(M_1 x_1);J_2(M_2 y_2)} = \sqrt{\mathrm{V}_3} \int_{S^3} d\Omega_3 Y^*_{JM} Y^{ij}_{J_1(M_1 x_1)} \hat{\nabla}_i Y_{j J_2(M_2 y_2)} \\
&= -\frac{3}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(2J_1-1)(2J_1+1)(2J_1+3)2J_2(2J_2+1)(2J_2+2)}{2J+1}} \\
&\quad \times \sum_{K=J_2\pm\frac{1}{2}} 2K(2K+1)(2K+2) \\
&\quad \times \left\{ \begin{matrix} K & 1 & J_2+y_2 \\ \frac{1}{2} & J_2 & \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} K & 1 & J_2-y_2 \\ \frac{1}{2} & J_2 & \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} J & J_1+x_1 & J_2+y_2 \\ 1 & K & J_1 \end{matrix} \right\} \\
&\quad \times \left\{ \begin{matrix} J & J_1-x_1 & J_2-y_2 \\ 1 & K & J_1 \end{matrix} \right\} C^{Jm}_{J_1+x_1 m_1, J_2+y_2 m_2} C^{Jm'}_{J_1-x_1 m'_1, J_2-y_2 m'_2}. \qquad \text{(E.2.4)}
\end{aligned}
$$

この係数は $M = M_1 + M_2$ と三角不等式 $|J_1 - J_2| + \frac{1}{2} \le J \le J_1 + J_2 - \frac{1}{2}$ を満たす。ここで、$J + J_1 + J_2$ は半整数。不等号の低い側 (高い側) の等式は $x_1 = 2y_2$ $(x_1 \ne 2y_2)$ で成り立つ。

E.3　S^3 上の調和関数の積の公式

$$
\begin{aligned}
Y^*_{\frac{1}{2}M} Y_{JN} &= \frac{1}{\sqrt{\mathrm{V}_3}} \left\{ \sum_S \mathbf{C}^{\frac{1}{2}M}_{JN,J+\frac{1}{2}S} Y^*_{J+\frac{1}{2}S} + \sum_S \mathbf{C}^{\frac{1}{2}M}_{JN,J-\frac{1}{2}S} Y^*_{J-\frac{1}{2}S} \right\}, \\
\hat{\nabla}^i Y^*_{\frac{1}{2}M} \hat{\nabla}_i Y_{JN} &= \frac{1}{\sqrt{\mathrm{V}_3}} \Big\{ -2J \sum_S \mathbf{C}^{\frac{1}{2}M}_{JN,J+\frac{1}{2}S} Y^*_{J+\frac{1}{2}S} \\
&\qquad + (2J+2) \sum_S \mathbf{C}^{\frac{1}{2}M}_{JN,J-\frac{1}{2}S} Y^*_{J-\frac{1}{2}S} \Big\} \qquad \text{(E.3.1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& Y^*_{\frac{1}{2}M} Y^i_{J(Ny)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\mathrm{V}_3}} \Big\{ \sum_{V,y'} \mathbf{D}^{\frac{1}{2}M}_{J(Ny),J+\frac{1}{2}(Vy')} Y^{i*}_{J+\frac{1}{2}(Vy')} + \sum_{V,y'} \mathbf{D}^{\frac{1}{2}M}_{J(Ny),J-\frac{1}{2}(Vy')} Y^{i*}_{J-\frac{1}{2}(Vy')} \\
&\qquad + \frac{1}{2J(2J+2)} \sum_S \mathbf{G}^{\frac{1}{2}M}_{J(Ny);JS} \hat{\nabla}^i Y^*_{JS} \Big\}, \\
& \hat{\nabla}^j Y^*_{\frac{1}{2}M} \hat{\nabla}_j Y^i_{J(Ny)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\mathrm{V}_3}} \Big\{ -2J \sum_{V,y'} \mathbf{D}^{\frac{1}{2}M}_{J(Ny),J+\frac{1}{2}(Vy')} Y^{i*}_{J+\frac{1}{2}(Vy')} \\
&\qquad + (2J+2) \sum_{V,y'} \mathbf{D}^{\frac{1}{2}M}_{J(Ny),J-\frac{1}{2}(Vy')} Y^{i*}_{J-\frac{1}{2}(Vy')} \\
&\qquad + \frac{2}{2J(2J+2)} \sum_S \mathbf{G}^{\frac{1}{2}M}_{J(Ny);JS} \hat{\nabla}^i Y^*_{JS} \Big\} \qquad \text{(E.3.2)}
\end{aligned}
$$

E.4　Clebsch-Gordan 係数及び Wigner$D$ 関数を含む公式

通常の Clebsch-Gordan 係数 $C^{c\gamma}_{a\alpha,b\beta}$ は三角不等式 $|a-b| \le c \le a+b$ と条件 $\alpha + \beta = \gamma$ を満たすときに値を持つ。ここで、a、b、c は非負の整数

又は半整数で、$a+b+c$、$a+\alpha$、$b+\beta$、$c+\gamma$ は非負の整数になる。この係数は $C^{a\alpha}_{a\alpha,00}=C^{a+ba+b}_{aa,bb}=1$ と規格化され、関係式

$$C^{c\gamma}_{a\alpha,b\beta}=(-1)^{a+b-c}C^{c-\gamma}_{a-\alpha,b-\beta}=(-1)^{a+b-c}C^{c\gamma}_{b\beta,a\alpha}=(-1)^{b+\beta}\sqrt{\frac{2c+1}{2a+1}}C^{a-\alpha}_{c-\gamma,b\beta} \tag{E.4.1}$$

を満たす。以下の公式は文献 D. Varshalovich, A. Moskalev and V. Khersonskii, *Quantum Theory of Angular Momentum* (World Scientific, Singapore, 1988) を参照。

Clebsch-Gordan 係数及び $6j$ 記号を含む公式

$$\sum_{\alpha,\beta}C^{c\gamma}_{a\alpha,b\beta}C^{c'\gamma'}_{a\alpha,b\beta}=\delta_{cc'}\delta_{\gamma\gamma'}, \tag{E.4.2}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha,\beta,\delta}(-1)^{a-\alpha}C^{c\gamma}_{b\beta,a\alpha}C^{e\epsilon}_{b\beta,d\delta}C^{f\varphi}_{d\delta,a-\alpha}\\&=(-1)^{a+b+e+f}\sqrt{(2c+1)(2f+1)}C^{e\epsilon}_{c\gamma,f\varphi}\begin{Bmatrix}a&b&c\\e&f&d\end{Bmatrix},\end{aligned} \tag{E.4.3}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{\psi,\kappa,\rho,\sigma,\tau}(-1)^{\psi+\kappa+\rho+\sigma+\tau}C^{a\alpha}_{p\psi,q\kappa}C^{b\beta}_{q\kappa,r\rho}C^{c\gamma}_{r\rho,s\sigma}C^{d\delta}_{s\sigma,t\tau}C^{e\varepsilon}_{t\tau,p-\psi}\\&=(-1)^{-a-b-2c-2p-2r-t+\alpha+\delta}\sqrt{(2a+1)(2d+1)}\\&\quad\times\sum_{x,y}\sum_{\xi,\eta}(-1)^{\xi+\eta}(2x+1)(2y+1)C^{b\beta}_{a\alpha,x\xi}C^{e\varepsilon}_{x\xi,y\eta}C^{c-\gamma}_{y\eta,d-\delta}\\&\quad\times\begin{Bmatrix}a&b&x\\r&p&q\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}x&e&y\\t&r&p\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}y&c&d\\s&t&r\end{Bmatrix}.\end{aligned} \tag{E.4.4}$$

$$\sum_x(-1)^{p+q+x}(2x+1)\begin{Bmatrix}a&b&x\\c&d&p\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}a&b&x\\d&c&q\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}a&c&q\\b&d&p\end{Bmatrix}. \tag{E.4.5}$$

Wigner$D$ 関数の公式

$$D^{J*}_{mm'}=(-1)^{m-m'}D^J_{-m-m'}, \tag{E.4.6}$$

$$D^{J_1}_{m_1m'_1}D^{J_2}_{m_2m'_2}=\sum_{J=|J_1-J_2|}^{J_1+J_2}\sum_{m,m'}C^{Jm}_{J_1m_1,J_2m_2}C^{Jm'}_{J_1m'_1,J_2m'_2}D^J_{mm'}, \tag{E.4.7}$$

$$\sum_{m_1,m'_1}\sum_{m_2,m'_2}C^{Jm}_{J_1m_1,J_2m_2}C^{J'm'}_{J_1m'_1,J_2m'_2}D^{J_1}_{m_1m'_1}D^{J_2}_{m_2m'_2}=\delta_{JJ'}\{J_1J_2J\}D^J_{mm'}, \tag{E.4.8}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{m_1,m'_1}\sum_{m_2,m'_2}\sum_{m_3,m'_3}C^{Jm}_{Kn,J_3m_3}C^{Kn}_{J_1m_1,J_2m_2}C^{J'm'}_{K'n',J_3m'_3}C^{K'n'}_{J_1m'_1,J_2m'_2}\\&\times D^{J_1}_{m_1m'_1}D^{J_2}_{m_2m'_2}D^{J_3}_{m_3m'_3}=\delta_{JJ'}\delta_{KK'}\{J_1J_2K\}\{KJ_3J\}D^J_{mm'},\end{aligned} \tag{E.4.9}$$

$$\begin{aligned}\Box_3D^J_{mm'} &= 4\left\{\partial_\beta^2+\cot\beta\partial_\beta+\frac{1}{\sin^2\beta}\left(\partial_\alpha^2-2\cos\beta\partial_\alpha\partial_\gamma+\partial_\gamma^2\right)\right\}D^J_{mm'}\\ &= -4J(J+1)D^J_{mm'},\end{aligned} \tag{E.4.10}$$

$$\int_{S^3}d\Omega_3D^{J_1*}_{m_1m'_1}D^{J_2}_{m_2m'_2}=\frac{\mathrm{V}_3}{2J_1+1}\delta_{J_1J_2}\delta_{m_1m_2}\delta_{m'_1m'_2}, \tag{E.4.11}$$

$$\sum_{m'=-J}^{J}D^{J*}_{m_1m'}D^J_{m_2m'}=\delta_{m_1m_2}. \tag{E.4.12}$$

ここで、D 関数はすべて同一点の $D^J_{mm'}(\alpha,\beta,\gamma)$ である。$\{J_1J_2J_3\}$ は $J_1+J_2+J_3$ が整数で $|J_1-J_2|\leq J_3\leq J_1+J_2$ を満たすときは1、それ以外は消える量である。また、$\{J_1J_2J_3\}$ は J_1、J_2、J_3 の並べ替えても値は変わらない。

$J=1/2$ と $J=1$ の Wigner$D$ 関数の具体形は Euler 角を用いて

$$\begin{aligned}D^{\frac{1}{2}}_{mm'}&=\begin{pmatrix}\cos\frac{\beta}{2}e^{-\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)} & -\sin\frac{\beta}{2}e^{-\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)}\\ \sin\frac{\beta}{2}e^{\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)} & \cos\frac{\beta}{2}e^{\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)}\end{pmatrix},\\ D^1_{mm'}&=\begin{pmatrix}\frac{1+\cos\beta}{2}e^{-i(\alpha+\gamma)} & -\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}e^{-i\alpha} & \frac{1-\cos\beta}{2}e^{-i(\alpha-\gamma)}\\ \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}e^{-i\gamma} & \cos\beta & -\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}e^{i\gamma}\\ \frac{1-\cos\beta}{2}e^{i(\alpha-\gamma)} & \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}e^{i\alpha} & \frac{1+\cos\beta}{2}e^{i(\alpha+\gamma)}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{E.4.13}$$

と表される。

付 録F

F.1 ゲージ固定と共形変換の修正項(Fradkin-Palchik 項)

この付録では共形変換とゲージ固定条件の関係ついて議論する。はじめに$U(1)$ゲージ場の場合について述べる。輻射ゲージ$A_0 = \hat{\nabla}^i A_i = 0$では横波成分の共形変換は

$$\delta_\zeta A_i = \zeta^0 \partial_\eta A_i + \zeta^j \hat{\nabla}_j A_i + \frac{1}{3}\psi A_i + \frac{1}{2}\left(\hat{\nabla}_i \zeta^j - \hat{\nabla}^j \zeta_i\right) A_j \tag{F.1.1}$$

となる。この変換の下でゲージ固定された作用は不変になる。しかし、この変換は横波の条件を保存しない。また、ゲージ場の時間成分の変換が

$$\delta_\zeta A_0 = \hat{\nabla}^i (\zeta^0 A_i) \tag{F.1.2}$$

となってやはり輻射ゲージを保存しないことが分かる。

横波成分の共形変換 (F.1.1) と時間成分の共形変換 (F.1.2) の中で輻射ゲージを保存しないのは特殊共形変換の場合で、共形 Killing ベクトルがη^μとζ^μ_{MN}の場合は保存される。以下ではζ^μ_Mを代入して先ず横波成分の変換則を見てみることにする。調和関数の積の展開式 (E.3.2) を使って (F.1.1) 式の右辺を展開すると

$$\delta_{\zeta_M} A_i = i[Q_M, A_i] + \hat{\nabla}_i \tilde{\lambda}_M \tag{F.1.3}$$

のように特殊共形変換の生成子と場の演算子との交換関係にさらに余分

な項が現れることが分かる。ここで、スカラー関数 $\tilde{\lambda}_M$ は

$$\tilde{\lambda}_M = \frac{i}{2}\sum_{J\geq\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2(2J+1)}}\sum_{N,y}\sum_{S}\Big\{-\frac{1}{2J}q_{J(Ny)}e^{-i2J\eta}\mathbf{G}^{\frac{1}{2}M}_{J(Ny);JS} + \frac{1}{2J+2}q^{\dagger}_{J(Ny)}e^{i(2J+2)\eta}(-\epsilon_N)\mathbf{G}^{\frac{1}{2}M}_{J(-Ny);JS}\Big\}Y^{*}_{JS}$$

で与えられる。このゲージ固定に伴う共形変換の余分な項を Fradkin-Palchik 項と呼ぶ。

余分な項はゲージ変換の形をしているので、特殊共形変換に伴うゲージ変換として $\delta_{\tilde{\lambda}_M}A_\mu = \hat{\nabla}_\mu\tilde{\lambda}_M$ を定義すると (F.1.3) 式は $\delta_{\zeta_M}A_i - \delta_{\tilde{\lambda}_M}A_i = i[Q_M, A_i]$ と書くことができる。さらに、時間成分の変換を計算すると

$$\delta_{\zeta_M}A_0 - \delta_{\tilde{\lambda}_M}A_0 = \hat{\nabla}^i(\zeta^0_M A_i) - \partial_\eta\tilde{\lambda}_M = 0$$

となることが分かる。

このように、閉じた共形代数を構成する生成子 Q_ζ が生成する変換は通常の共形変換 δ_ζ とそれに伴うモードに依存したゲージ変換 $\delta_{\tilde{\lambda}}$ を組み合わせた変換として $\delta^{\mathrm{T}}_\zeta = \delta_\zeta - \delta_{\tilde{\lambda}}$ と表すことができ、特殊共形変換 Q_M 及びそのエルミート共役に対して $\tilde{\lambda}_M$ 及びそのエルミート共役を当て、その他の変換に対してはゲージ変数をゼロとすればよい。交換関係を用いて書くと輻射ゲージ条件を保存するこの共形変換は

$$\delta^{\mathrm{T}}_\zeta A_i = i[Q_\zeta A_i], \qquad \delta^{\mathrm{T}}_\zeta A_0 = 0$$

とまとめることができる。

トレースレステンソル場の共形変換とその生成子との関係はゲージ場のときと同様のことが成り立つ。輻射 $^+$ ゲージでの共形変換は

$$\begin{aligned}
\delta_\zeta h^{\mathrm{TT}}_{ij} &= \zeta^0\partial_\eta h^{\mathrm{TT}}_{ij} + \zeta^k\hat{\nabla}_k h^{\mathrm{TT}}_{ij} + \frac{1}{2}\left(\hat{\nabla}_i\zeta^k - \hat{\nabla}^k\zeta_i\right)h^{\mathrm{TT}}_{kj} \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\hat{\nabla}_j\zeta^k - \hat{\nabla}^k\zeta_j\right)h^{\mathrm{TT}}_{ki} + h^{\mathrm{T}}_i\hat{\nabla}_j\zeta^0 + h^{\mathrm{T}}_j\hat{\nabla}_i\zeta^0 - \frac{2}{3}\gamma_{ij}\hat{\nabla}_k\left(\zeta^0 h^k_{\mathrm{T}}\right), \\
\delta_\zeta h^{\mathrm{T}}_i &= \zeta^0\partial_\eta h^{\mathrm{T}}_i + \zeta^k\hat{\nabla}_k h^{\mathrm{T}}_i + \frac{1}{2}\left(\hat{\nabla}_i\zeta^k - \hat{\nabla}^k\zeta_i\right)h^{\mathrm{T}}_k + \hat{\nabla}^k\left(\zeta^0 h^{\mathrm{TT}}_{ik}\right), \\
\delta_\zeta h &= 2\hat{\nabla}^k\left(\zeta^0 h^{\mathrm{T}}_k\right)
\end{aligned}$$

と書ける。これだけでは輻射 $^+$ ゲージは保存されないが、共形 Killing ベクトル ζ^μ に伴って、モードに依存したパラメータ $\tilde{\kappa}$ をもつ適当なゲージ変換 (6.2.2) を定義し、それらを組み合わせた変換 $\delta^{\mathrm{T}}_\zeta = \delta_\zeta - \delta_{\tilde{\kappa}}$ を考えると、

$$\delta^{\mathrm{T}}_\zeta h^{\mathrm{TT}}_{ij} = i[Q_\zeta, h^{\mathrm{TT}}_{ij}], \qquad \delta^{\mathrm{T}}_\zeta h^{\mathrm{T}}_i = i[Q_\zeta, h^{\mathrm{T}}_i], \qquad \delta^{\mathrm{T}}_\zeta h = 0$$

のように輻射 $^+$ ゲージを保つ共形変換を定義することができる。$\tilde{\kappa}^\mu$ は特殊共形変換の場合にのみ値をもって、その式は少し複雑なのでここでは省略するが、ゲージ場のときと同様にして求めることができる。

付 録G

G.1 ゲージ場及びWeyl部分の物理状態の構成要素

ゲージ場の生成モード $q^\dagger_{J(My)}$ と特殊共形変換の生成子 Q_M との交換関係は

$$\left[Q_M, q^\dagger_{J(M_1y_1)}\right] = -\sqrt{2J(2J+1)} \sum_{M_2,y_2} \epsilon_{M_2} \mathbf{D}^{\frac{1}{2}M}_{J(M_1y_1),J-\frac{1}{2}(-M_2y_2)} q^\dagger_{J-\frac{1}{2}(M_2y_2)}$$

で与えられる。これより $J=1/2$ の最低次のモード $q^\dagger_{1/2(My)}$ は Q_M と交換することが分かる。その他の生成モードは単独では交換しないのでそれらの双一次式を考えると、Q_M 不変な生成演算子として

$$\begin{aligned}
\Psi^\dagger_{LN} &= \sum_{K=\frac{1}{2}}^{L-\frac{1}{2}} \sum_{M_1,y_1,M_2,y_2} f(L,K)\mathbf{D}^{LN}_{L-K(M_1y_1),K(M_2y_2)} q^\dagger_{L-K(M_1y_1)} q^\dagger_{K(M_2y_2)}, \\
\Upsilon^\dagger_{L(Nx)} &= \sum_{K=\frac{1}{2}}^{L-\frac{1}{2}} \sum_{M_1,y_1,M_2,y_2} f(L,K)\mathbf{F}^{L(Nx)}_{L-K(M_1y_1),K(M_2y_2)} q^\dagger_{L-K(M_1y_1)} q^\dagger_{K(M_2y_2)}
\end{aligned}$$

を得る。ここで、$f(L,K)$ は (4.3.4) で与えられる。新しい $SU(2)\times SU(2)$Clebsch-Gordan 係数は $\mathbf{F}^{J(Mx)}_{J_1(M_1y_1),J_2(M_2y_2)} = \sqrt{\mathrm{V}_3}\int_{S^3} d\Omega_3 Y^{ij*}_{J(Mx)} Y_{iJ_1(M_1y_1)} Y_{jJ_2(M_2y_2)}$ で定義される。L は整数で、半整数の場合は存在しない。また、$L=1$ の場合は $q^\dagger_{1/2(My)}$ のみを用いて表されるので、$L\geq 2$ が新しい演算子である。まとめると、以下の表 G.1 のようになる。

次に、表 7.2 に示したトレースレステンソル場の結果についてまとめる。特殊共形変換の生成子 Q_M と各モード $c^\dagger_{J(Mx)}$、$d^\dagger_{J(Mx)}$、$e^\dagger_{J(My)}$ との交

rank of tensor index	0	1	2
creation op.	$\Psi^\dagger_{LN}$	$q^\dagger_{\frac{1}{2}(Ny)}$	$\Upsilon^\dagger_{L(Nx)}$
level ($L \in \mathbf{Z}_{\geq 2}$)	$2L+2$	2	$2L+2$

表 G.1: ゲージ場部分の物理状態の構成要素。

換関係は

$$
\begin{aligned}
\left[Q_M, c^\dagger_{J(M_1x_1)}\right] &= \alpha\left(J-\frac{1}{2}\right)\sum_{M_2,x_2}\epsilon_{M_2}\mathbf{E}^{\frac{1}{2}M}_{J(M_1x_1),J-\frac{1}{2}(-M_2x_2)}c^\dagger_{J-\frac{1}{2}(M_2x_2)}, \\
\left[Q_M, d^\dagger_{J(M_1x_1)}\right] &= -\gamma(J)\sum_{M_2,x_2}\epsilon_{M_2}\mathbf{E}^{\frac{1}{2}M}_{J(M_1x_1),J+\frac{1}{2}(-M_2x_2)}c^\dagger_{J+\frac{1}{2}(M_2x_2)} \\
&\quad -\beta\left(J-\frac{1}{2}\right)\sum_{M_2,x_2}\epsilon_{M_2}\mathbf{E}^{\frac{1}{2}M}_{J(M_1x_1),J-\frac{1}{2}(-M_2x_2)}d^\dagger_{J-\frac{1}{2}(M_2x_2)} \\
&\quad -B(J)\sum_{M_2,y_2}\epsilon_{M_2}\mathbf{H}^{\frac{1}{2}M}_{J(M_1x_1);J(-M_2y_2)}e^\dagger_{J(M_2y_2)}, \\
\left[Q_M, e^\dagger_{J(M_1y_1)}\right] &= -A(J)\sum_{M_2,x_2}\epsilon_{M_2}\mathbf{H}^{\frac{1}{2}M}_{J(-M_2x_2);J(M_1y_1)}c^\dagger_{J(M_2x_2)} \\
&\quad -C\left(J-\frac{1}{2}\right)\sum_{M_2,y_2}\epsilon_{M_2}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}M}_{J(M_1y_1),J-\frac{1}{2}(-M_2y_2)}e^\dagger_{J-\frac{1}{2}(M_2y_2)}
\end{aligned}
$$

となる。

物理状態の構成要素となる Q_M と交換する生成演算子で、二階のテンソル調和関数の足を持つものは、表 7.2 に示したように、最低次の正定値モード $c^\dagger_{1(Mx)}$ だけである。

次に、スカラー調和関数の足を持つものは、L を正の整数として

$$
\begin{aligned}
A^\dagger_{LN} &= \sum_{K=1}^{L-1}\sum_{M_1,x_1}\sum_{M_2x_2}x(L,K)\mathbf{E}^{LN}_{L-K(M_1x_1),K(M_2,x_2)}c^\dagger_{L-K(M_1x_1)}c^\dagger_{K(M_2x_2)}, \\
\mathcal{A}^\dagger_{L-1N} &= \sum_{K=1}^{L-1}\sum_{M_1,x_1}\sum_{M_2x_2}x(L,K)\mathbf{E}^{L-1N}_{L-K(M_1x_1),K(M_2,x_2)}c^\dagger_{L-K(M_1x_1)}c^\dagger_{K(M_2x_2)} \\
&\quad +\sum_{K=1}^{L-2}\sum_{M_1,x_1}\sum_{M_2x_2}y(L,K)\mathbf{E}^{L-1N}_{L-K-1(M_1x_1),K(M_2,x_2)}d^\dagger_{L-K-1(M_1x_1)}c^\dagger_{K(M_2x_2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{K=1}^{L-\frac{3}{2}}\sum_{M_1,x_1}\sum_{M_2y_2} w(L,K)\mathbf{H}^{L-1N}_{L-K-\frac{1}{2}(M_1x_1);K(M_2,y_2)} c^\dagger_{L-K-\frac{1}{2}(M_1x_1)} e^\dagger_{K(M_2y_2)} \\
&+\sum_{K=1}^{L-2}\sum_{M_1,y_1}\sum_{M_2y_2} v(L,K)\mathbf{D}^{L-1N}_{L-K-1(M_1y_1),K(M_2y_2)} e^\dagger_{L-K-1(M_1y_1)} e^\dagger_{K(M_2y_2)}
\end{aligned}
$$

の二つで与えられる。ここで、新しい係数は

$$
\begin{aligned}
w(L,K) &= -2\sqrt{2}\sqrt{\frac{(2L-2K-1)(2L-2K+1)}{2K(2K-1)(2K+3)}}x(L,K), \\
v(L,K) &= -\sqrt{\frac{(2K-1)(2K+2)(2L-2K-3)(2L-2K)}{(2K+3)(2L-2K+1)}}x\left(L,K+\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

で与えられる。L が半整数の場合は存在しない。また、$L=1$ が存在しないのは明らかである。$L=2$ は存在するけれども、$c^\dagger_{1(Mx)}$ だけで表されるので自明に Q_M 不変になる。したがって、$L \geq 3$ が新しい Q_M 不変な生成演算子である。

その他に、一、三、四階のテンソル調和関数の足を持った構成要素が存在する。それらを記述するために新たに n 階のテンソル調和関数を含む Clebsch-Gordan 係数 ${}^n\mathbf{E}$ と ${}^n\mathbf{H}$ を導入する。$n=2$ の係数は

$$
\begin{aligned}
{}^2\mathbf{E}^{J(Mx)}_{J_1(M_1x_1),J_2(M_2x_2)} &= \sqrt{\mathrm{V}_3}\int_{S^3} d\Omega_3 Y^{ij*}_{J(Mx)} Y_i{}^k{}_{J_1(M_1x_1)} Y_{jkJ_2(M_2x_2)}, \\
{}^2\mathbf{H}^{J(Mx)}_{J_1(M_1x_1);J_2(M_2y_2)} &= \sqrt{\mathrm{V}_3}\int_{S^3} d\Omega_3 Y^{ij*}_{J(Mx)} Y_i{}^k{}_{J_1(M_1x_1)} \hat{\nabla}_{(j} Y_{k)J_2(M_2y_2)}
\end{aligned}
$$

で定義される。$n=1$ の係数 ${}^1\mathbf{E}^{J(My)}_{J_1(M_1x_1),J_2(M_2x_2)}$ と ${}^1\mathbf{H}^{J(My)}_{J_1(M_1x_1);J_2(M_2y_2)}$ はこれらの式の最初の $Y^{ij}_{J(Mx)}$ を $\hat{\nabla}^{(i}Y^{j)}_{J(My)}$ に置き換えたものである。$n=4$ の係数は

$$
\begin{aligned}
{}^4\mathbf{E}^{J(Mw)}_{J_1(M_1x_1),J_2(M_2x_2)} &= \sqrt{\mathrm{V}_3}\int_{S^3} d\Omega_3 Y^{ijkl*}_{J(Mw)} Y_{ijJ_1(M_1x_1)} Y_{klJ_2(M_2x_2)}, \\
{}^4\mathbf{H}^{J(Mw)}_{J_1(M_1x_1);J_2(M_2y_2)} &= \sqrt{\mathrm{V}_3}\int_{S^3} d\Omega_3 Y^{ijkl*}_{J(Mw)} Y_{ijJ_1(M_1x_1)} \hat{\nabla}_{(k} Y_{l)J_2(M_2y_2)}
\end{aligned}
$$

である。$n=3$ の係数 ${}^3\mathbf{E}^{J(Mz)}_{J_1(M_1x_1),J_2(M_2x_2)}$ と ${}^3\mathbf{H}^{J(Mz)}_{J_1(M_1x_1);J_2(M_2y_2)}$ はこれらの式の最初の $Y^{ijkl}_{J(Mw)}$ を $\hat{\nabla}^{(i}Y^{jkl)}_{J(Mz)}$ に置き換えたものである。

$n\ =\ 1$ のベクトル調和関数の足を持つ構成要素は、$L(\geq\ 3)$ を整数として、

$$\begin{aligned}B^\dagger_{L-\frac{1}{2}(Ny)} &= \sum_{K=1}^{L-1}\sum_{M_1,x_1}\sum_{M_2,x_2} x(L,K)^1\mathbf{E}^{L-\frac{1}{2}(Ny)}_{L-K(M_1x_1),K(M_2x_2)}c^\dagger_{L-K(M_1x_1)}c^\dagger_{K(M_2x_2)}\\ &+\sum_{K=1}^{L-\frac{3}{2}}\sum_{M_1,x_1}\sum_{M_2,y_2} w(L,K)^1\mathbf{H}^{L-\frac{1}{2}(Ny)}_{L-K-\frac{1}{2}(M_1x_1);K(M_2y_2)}c^\dagger_{L-K-\frac{1}{2}(M_1x_1)}e^\dagger_{K(M_2y_2)}\end{aligned}$$

で与えられる。

三階のテンソルの足を持つものは、$L(\geq 3)$ を整数として、

$$\begin{aligned}D^\dagger_{L-\frac{1}{2}(Nz)} &= \sum_{K=1}^{L-1}\sum_{M_1,x_1}\sum_{M_2,x_2} x(L,K)^3\mathbf{E}^{L-\frac{1}{2}(Nz)}_{L-K(M_1x_1),K(M_2x_2)}c^\dagger_{L-K(M_1x_1)}c^\dagger_{K(M_2x_2)}\\ &+\sum_{K=1}^{L-\frac{3}{2}}\sum_{M_1,x_1}\sum_{M_2,y_2} w(L,K)^3\mathbf{H}^{L-\frac{1}{2}(Nz)}_{L-K-\frac{1}{2}(M_1x_1);K(M_2y_2)}c^\dagger_{L-K-\frac{1}{2}(M_1x_1)}e^\dagger_{K(M_2y_2)}\end{aligned}$$

で与えられる。

四階のテンソルの足を持つものは、$L(\geq 3)$ を整数として、

$$E^\dagger_{L(Nw)} = \sum_{K=1}^{L-1}\sum_{M_1,x_1}\sum_{M_2,x_2} x(L,K)^4\mathbf{E}^{L(Nw)}_{L-K(M_1x_1),K(M_2x_2)}c^\dagger_{L-K(M_1x_1)}c^\dagger_{K(M_2x_2)},$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^\dagger_{L-1(Nw)} &= \sum_{K=1}^{L-1}\sum_{M_1,x_1}\sum_{M_2,x_2} x(L,K)^4\mathbf{E}^{L-1(Nw)}_{L-K(M_1x_1),K(M_2x_2)}c^\dagger_{L-K(M_1x_1)}c^\dagger_{K(M_2x_2)}\\ &+\sum_{K=1}^{L-2}\sum_{M_1,x_1}\sum_{M_2,x_2} y(L,K)^4\mathbf{E}^{L-1(Nw)}_{L-K-1(M_1x_1),K(M_2x_2)}d^\dagger_{L-K-1(M_1x_1)}c^\dagger_{K(M_2x_2)}\\ &-\sum_{K=1}^{L-\frac{3}{2}}\sum_{M_1,x_1}\sum_{M_2,y_2} w(L,K)^4\mathbf{H}^{L-1(Nw)}_{L-K-\frac{1}{2}(M_1x_1);K(M_2y_2)}c^\dagger_{L-K-\frac{1}{2}(M_1x_1)}e^\dagger_{K(M_2y_2)}\end{aligned}$$

の二つで与えられる。

付 録H　参考文献

共形場理論に関する本

- E. Fradkin and M. Palchik, *Conformal Quantum Field Theory in D-dimensions* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996)
- P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Senechal, *Conformal Field Theory* (Springer, New York, 1997).

ユニタリ性の条件 (unitarity bound)

- G. Mack, *All Unitary Ray Representations of the Conformal Group $SU(2,2)$ with Positive Energy*, Commun. Math. Phys. **55** (1977) 1.
- S. Minwalla, *Restrictions imposed by Superconformal Invariance on Quantum Field Theories*, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 781.
- B. Grinstein, K. Intriligator and I. Rothstein, *Comments on Unparticle*, Phys. Lett. **B662** (2008) 367.
- D. Dorigoni and S. Rychkov, *Scale Invariance + Unitarity $\Rightarrow$ Conformal Invariance?*, arXiv.0910.1087.

Conformal Bootstrap に関する原論文

- A. Polyakov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **66** (1974) 23.
- S. Ferrara, A. Grillo and R. Gatto, Ann. Phys. **76** (1973) 161.
- G. Mack, Nucl. Phys. **B118** (1977) 445.

Conformal Blocksの一般式の導出

- F. Dolan and H. Osborn, *Conformal Four Point Functions and the Operator Product Expansion*, Nucl. Phys. **B599** (2001) 459.
- F. Dolan and H. Osborn, *Conformal Partial Wave and the Operator Product Expansion*, Nucl. Phys. **B678** (2004) 491.
- F. Dolan and H. Osborn, *Conformal Partial Waves: Further Mathematical Results*, arXiv:1108.6194.

Conformal Bootstrapからの制限

- R. Rattazzi, V. Rychkov, E. Tonni and A. Vichi, *Bounding Scalar Operator Dimensions in 4D CFT*, JHEP **0812** (2008) 031.
- V. Rychkov and A. Vichi, *Universal Constraints on Conformal Operator Dimensions*, Phys. Rev. **D80** (2009) 045006.
- S. El-Showk, M. Paulos, D. Poland, S. Rychkov, D. Simmons-Duffin and A. Vichi, *Solving the 3D Ising Model with the Conformal Bootstrap*, Phys. Rev. **D86** (2012) 025022.

OPEの収束性など

- D. Pappadopulo, S. Rychkov, J. Espin and R. Rattazzi, *OPE Convergence in Conformal Field Theory*, Phys. Rev. **D86** (2012) 105043.
- M. Hogervorst and S. Rychkov, *Radial Coordinates for Conformal Blocks*, arXiv:1303.1111.

共形異常に関する原論文

- D. Capper and M. Duff, Nuovo Cimento Soc. Ital. Fis. A **23** (1974) 173.
- S. Deser, M. Duff and C. Isham, Nucl. Phys. **B111** (1976) 45.
- M. Duff, Nucl. Phys. **B125** (1977) 334.
- L. Bonora, P. Cotta-Ramusino and C. Reina, Phys. Lett. **B126** (1983) 305.

共形因子のダイナミクスと量子重力

- R. Riegert, *A Non-Local Action for the Trace Anomaly*, Phys. Lett. **134B** (1984) 56.
- I. Antoniadis and E. Mottola, *4D Quantum Gravity in the Conformal Sector*, Phys. Rev. D **45** (1992) 2013.
- I. Antoniadis, P. Mazur and E. Mottola, *Conformal Symmetry and Central Charges in Four Dimensions*, Nucl. Phys. **B388** (1992) 627.
- I. Antoniadis, P. Mazur and E. Mottola, *Physical States of the Quantum Conformal Factor*, Phys. Rev. D **55** (1997) 4770.

量子重力 (共形因子＋テンソルモード) と M^4 上の共形場理論

- K. Hamada and F. Sugino, *Background-metric Independent Formulation of 4D Quantum Gravity*, Nucl. Phys. B553 (1999) 283
- K. Hamada, *Background-Free Quantum Gravity based on Conformal Gravity and Conformal Field Theory on M^4*, Phys. Rev. D85 (2012) 024028.

- K. Hamada, *BRST Invariant Higher Derivative Operators in 4D Quantum Gravity based on CFT*, Phys. Rev. D85 (2012) 124036.

$R \times S^3$ 上の共形場理論と量子重力状態

- K. Hamada and S. Horata, *Conformal Algebra and Physical States in a Non-critical 3-brane on $R \times S^3$*, Prog. Theor. Phys. 110 (2003) 1169.
- K. Hamada, *Building Blocks of Physical States in a Non-Critical 3-Brane on $R \times S^3$*, Int. J. Mod. Phys. A20 (2005) 5353.
- K. Hamada, *Conformal Field Theory on $R \times S^3$ from Quantized Gravity*, Int. J. Mod. Phys. A24 (2009) 3073.
- K. Hamada, *BRST analysis of Physical Fields and States for 4D Quantum Gravity on $R \times S^3$*, Phys. Rev. D86 (2012) 124006.

上下巻共通のレビュー

- K. Hamada, S. Horata and T. Yukawa, *Focus on Quantum Gravity Research* (Nova Science Publisher, NY, 2006), Chap. 1 entitled by "Background Free Quantum Gravity and Cosmology".