

漸近的背景自由な量子重力 理論とインフレーション

KEK/総研大 浜田賢二

目次

1. はじめに
2. 重力の量子化の問題点
3. 漸近的背景自由な量子重力理論
4. 量子重力的インフレーション
5. まとめ

はじめに

宇宙を理解するために何が必要か

宇宙は膨張している

ハッブル 1929年

⇒ 小さなスケールから大きなスケールへ変化している

宇宙の進化は各時代に現れる固有のスケール
によって記述される

..
クオーク < 原子核 < 原子 < 分子 < .. < 地球 < 太陽 < 銀河 < ..

相対性理論のほか、
素粒子論、原子核理論、分子科学などが必要

宇宙に存在するスケール

—最大から最小まで—

1パーセク = 3.26光年
メガ = 百万 = 10^6

最大の大きさ = 宇宙の大きさ(ハッブル距離)
= 4000メガパーセク = 10^{26} m

銀河の大きさ = 10万光年 = 10^{21} m

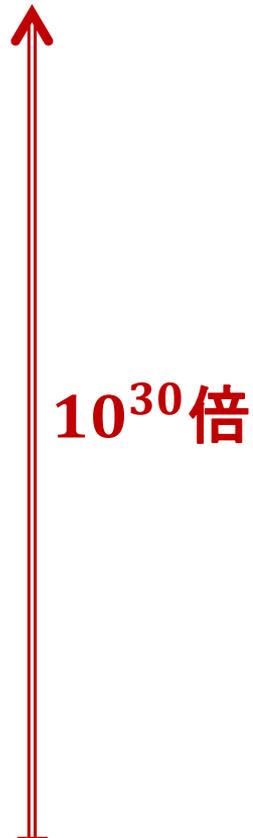
太陽系の大きさ = 100天文単位 = 10^{13} m

太陽の大きさ = 10^9 m

地球の大きさ = 10^7 m

子供の大きさ = 1 m

ゾウリムシの大きさ = 10^{-4} m



宇宙に存在するスケール

ゾウリムシの大きさ = 10^{-4} m

水素原子(H)の大きさ = 1オングストローム
= 10^{-10} m

原子核(H⁺)の大きさ = 10^{-14} m

クォークの大きさ = 10^{-18} m

最小の大きさ = プランク長
= 10^{-34} m

宇宙最大 = 10^{60} x 宇宙最小

↑
那由多

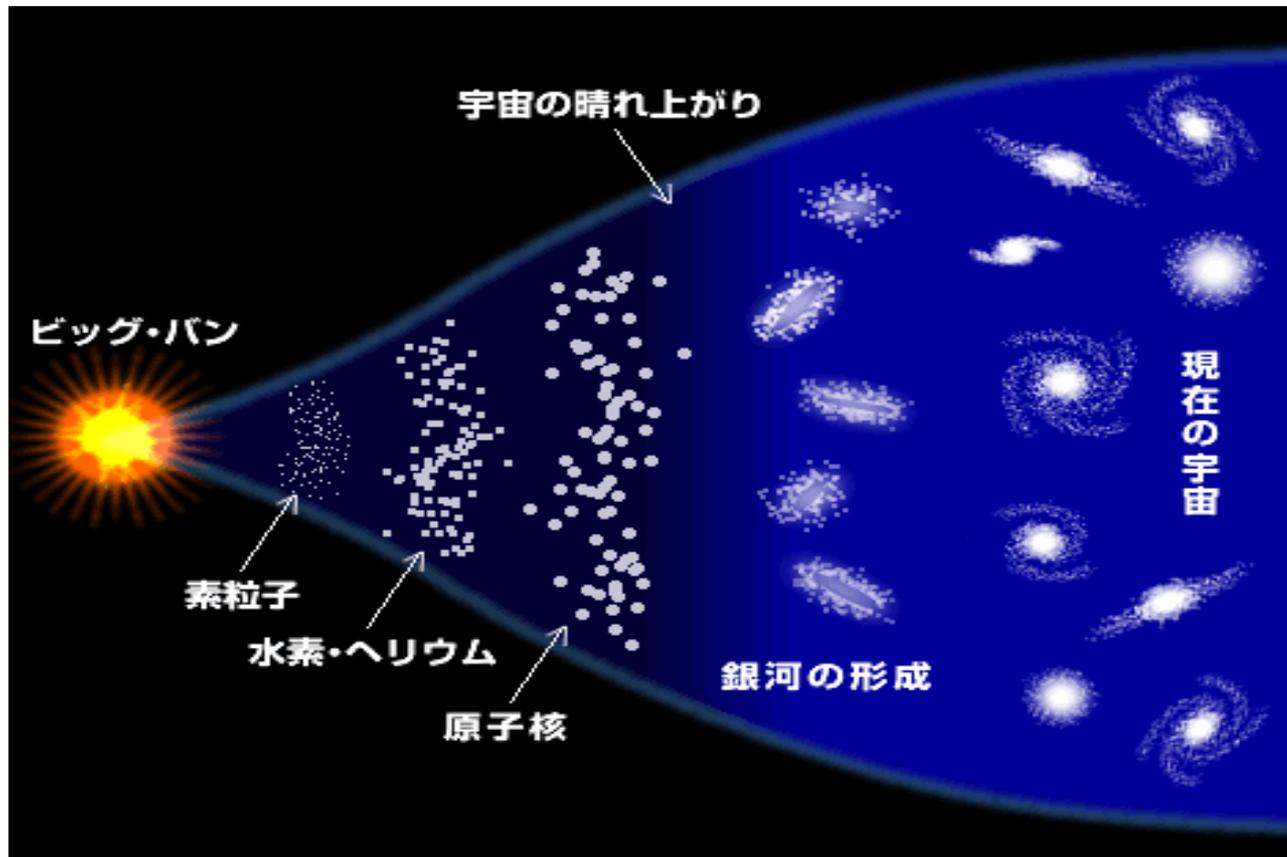
(兆 = 10^{12} 、京 = 10^{16})



10^{30} 倍

膨張する宇宙の歴史

— 最小スケールから最大スケールまでの旅 —



$$L = \frac{1}{E}$$

L = 大きさ

E = エネルギー

高エネルギー、高温



低エネルギー、低温

素朴な疑問

なぜ宇宙は膨張している？

重力は物質の間に引力を及ぼす

物質が引き合っているにもかかわらず、その引力に反して
宇宙は膨張している



斥力が必要! でも、どこから生じる?

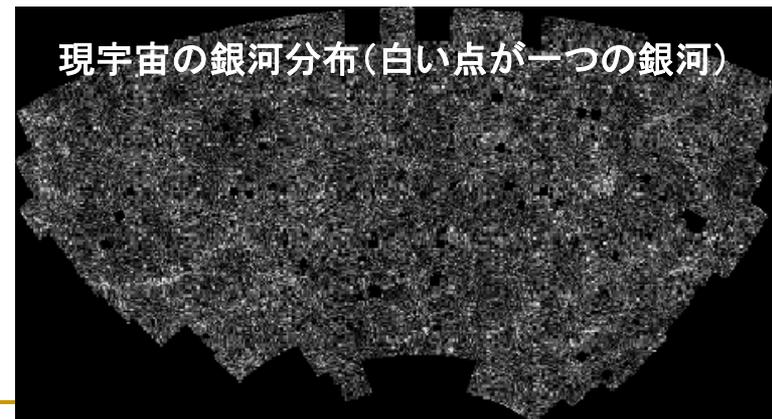
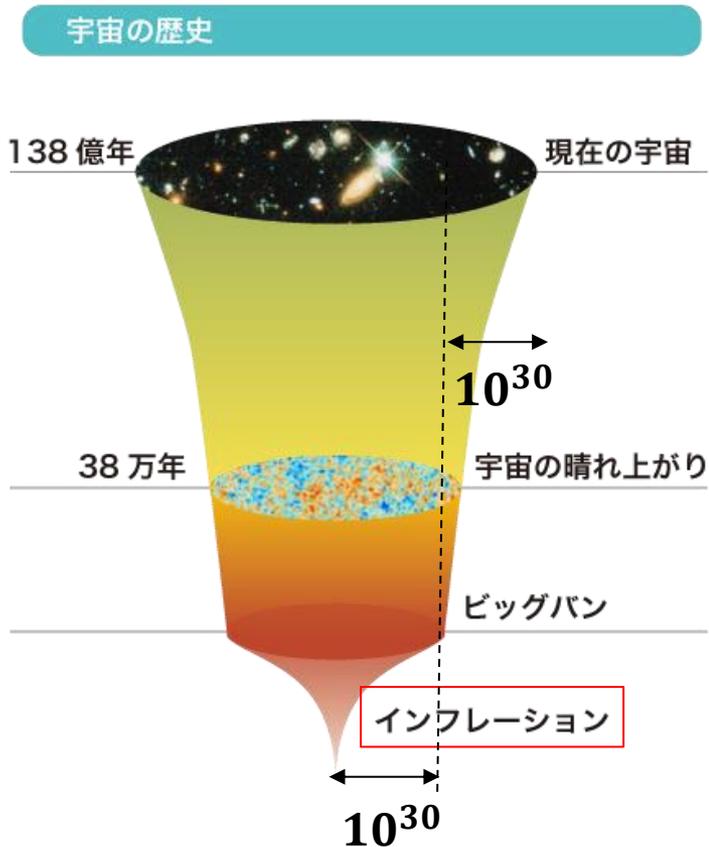
最新の宇宙論

インフレーション(急膨張)理論

ビッグバン以前に宇宙を急激に膨張させる力があった!

→ **現在の宇宙を導く自然な初期条件が得られる!**

- 宇宙の一樣・等方性の説明
- 地平線問題の解決
- 平坦性問題の解決

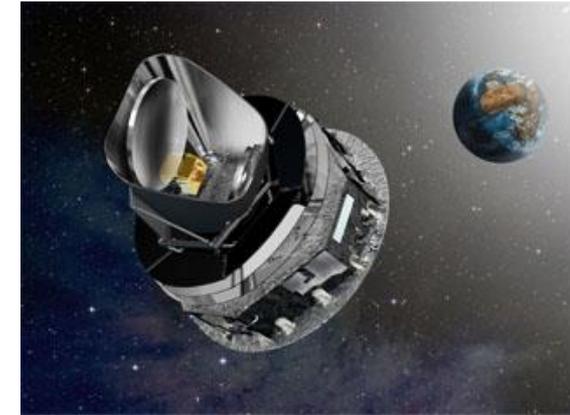


宇宙に出て確かめてみる

銀河分布より正確に測れる分布
宇宙マイクロ波背景放射(CMB)

⇓

宇宙全体にくまなく分布する波長の非常に長い光
(ビッグバンの残像、膨張とともに波長が伸びた)



Planck人工衛星

放射の温度 = 3°K

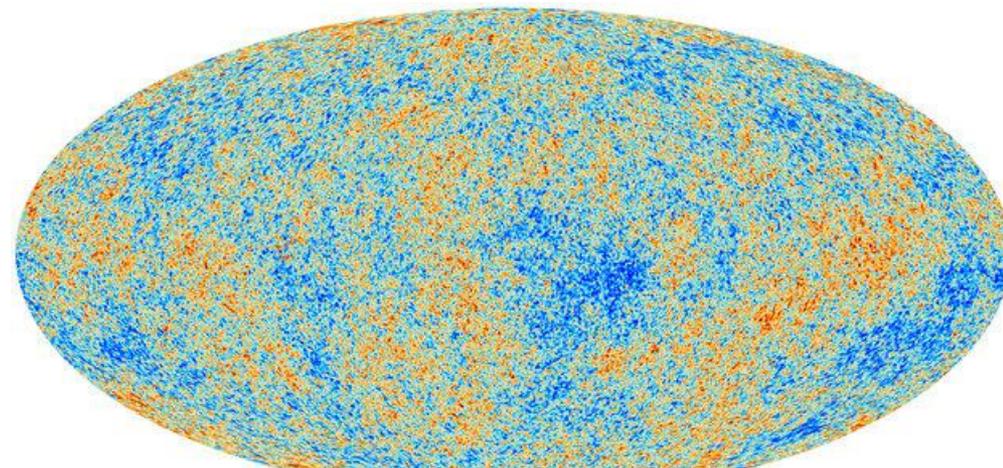


$$T = T_0 + \delta T$$



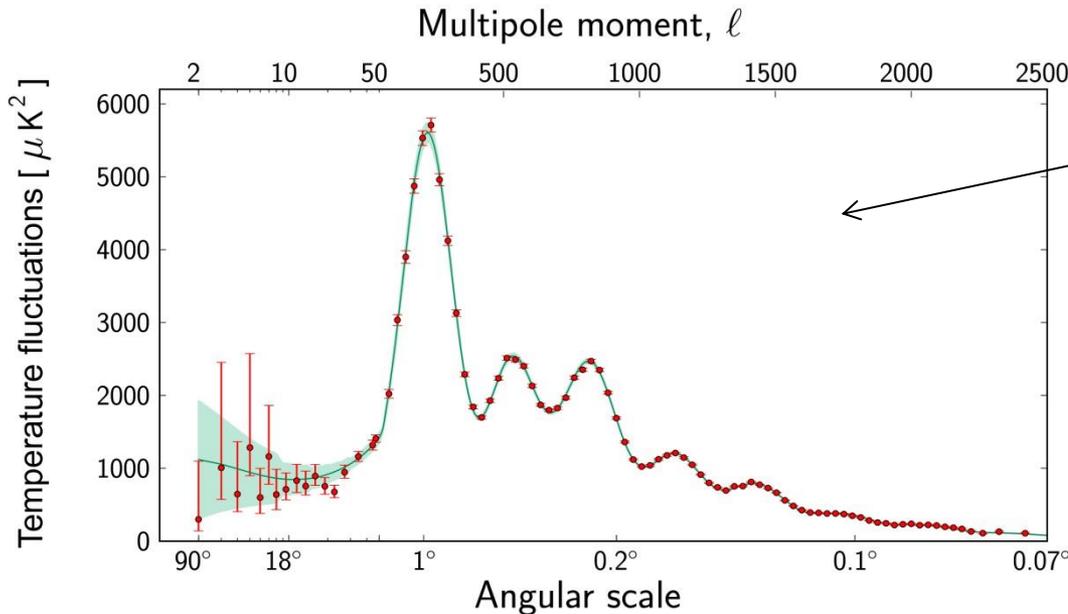
観測された揺らぎの大きさ

$$\frac{\delta T}{T} \sim 10^{-5}$$



[宇宙全天の温度分布(2013年)]
赤と青の温度差が10万分の1

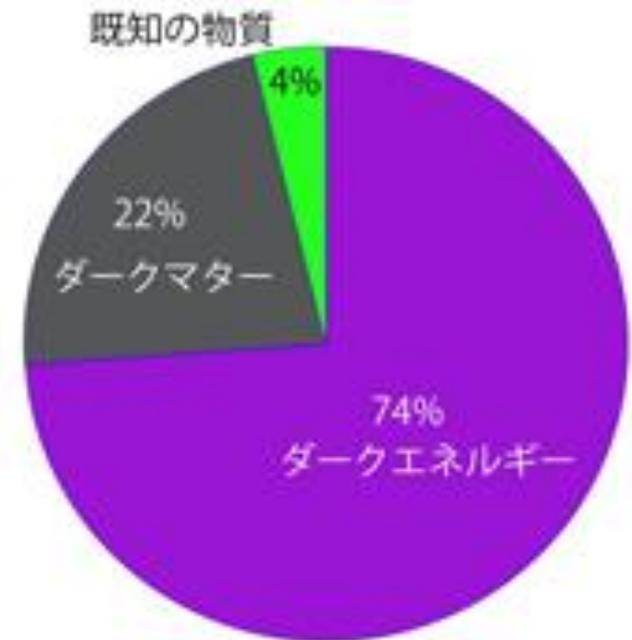
温度スペクトル(分布を統計的に処理)



宇宙進化の途中に現れる
物理スケールの固有振動
がスペクトルに影響する

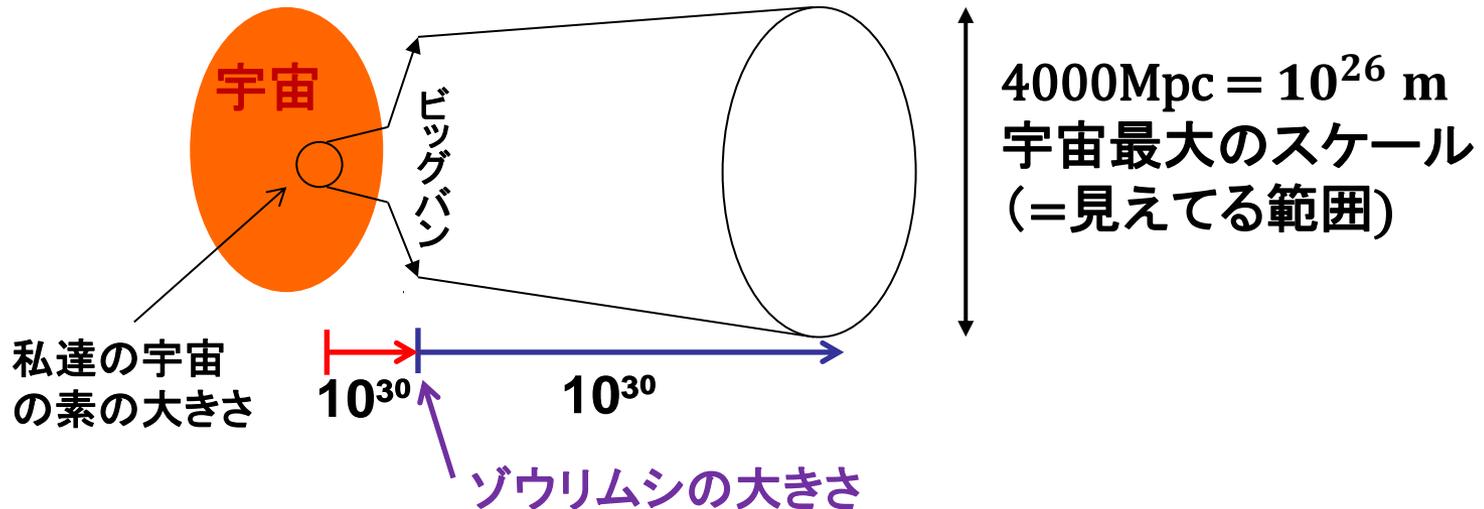
このスペクトルから

- ◆ 宇宙年齢(138億年)
 - ◆ 宇宙を構成する物質の割合
 - ◆ ニュートリノの質量
- などが分かる



最後の疑問

—インフレーションを引き起こす斥力の源は何か？—



インフレーション理論では宇宙は全体で 10^{60} 倍膨張したことになる

$$\frac{\text{宇宙最大}}{10^{60}} = \text{プランク長 (宇宙最小)}$$

宇宙の最大と最小のスケールが結びつく!

宇宙最小のスケールの世界

プランク長の世界

$$l_{\text{pl}} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.6 \times 10^{-33} \text{cm}$$

→重力の量子効果が現れてくる長さ

もし、量子重力的な素励起があるとしたら、
Planck質量で量子化された状態が現れる？

$$m_{\text{pl}} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} = 1.2 \times 10^{19} \text{GeV}$$

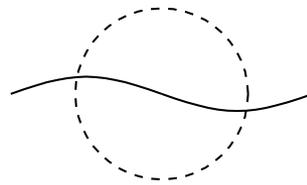
インフレーションを引き起こす斥力の源は
最少の世界にあると考えられる

重力の量子化の問題

Einsteinの重力理論の限界

粒子の質量 m がPlanck質量を超えるとブラックホールになる

Compton波長
 \approx 粒子の大きさ
 $\sim 1/m$



$$m < m_{\text{pl}}$$



$$m > m_{\text{pl}}$$

粒子の情報が失われる

粒子描像はPlanckスケールでは正当化されない、そのため
通常量子場理論ではPlanckスケールはUVカットオフと考えられている

Planckスケールを超えた世界を記述することが量子重力の目的である

Einstein重力の量子化の問題点

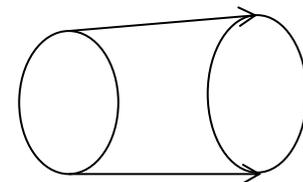
- ◆ 結合定数 (Newton定数) が次元をもつ
→ 摂動論はくりこみ不可能
- ◆ 時空の特異点が存在する
Schwarzschild解は $R=0$ である
→ Einstein作用が消える (有限)
→ 特異解を経路積分から排除できない
- ◆ 作用が下に有界でない (cf. φ^3 理論)
→ 非摂動的に量子化しても不安定

注) インスタントン解やソリトン解はゲージ作用が有限なので経路積分に寄与する

前述の情報の喪失問題も含めて、Einstein理論ではPlanckスケールを越えることはできない

場の量子論的手法を使わないアプローチ

弦理論： 粒子の運動をひもの運動に置き換える



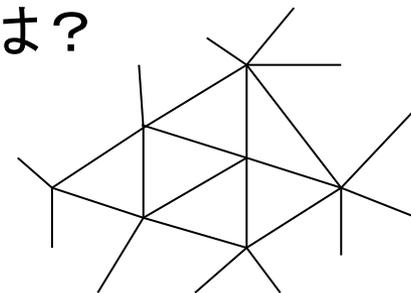
- 運動は弱場近似(背景時空の存在を仮定)
- 固有のスケールが存在する

理想的なひも → 粒子のときと同様の問題が生じる
ブラックストリング

ループ重力： 時空を離散化

- ネットワークのような時空 → 空間の体積は？
- 一般座標不変性が壊れている

イメージ先行で理論になっていない！



場の量子論的手法の再考

重力場を直接量子化する方法の歴史

1970年代、Einstein作用の問題点を克服するために運動項として4階微分作用 $R_{\mu\nu\lambda\sigma}^2$, $R_{\mu\nu}^2$, R^2 を考えた

- ✓ 結合定数が無次元になる
→ 繰り込み可能になる
- ✓ 作用が正定値(下に有界)になる
→ 経路積分の安定性

さらに、作用が正定値なRiemann曲率の自乗を含む場合、Schwarzschild解のような特異点解は作用が発散するので量子論的に排除される → **特異点がない**

(注) Schwarzschild解の経路積分のウェイト:
Einstein重力: $e^{-\int R} = 1$ 一方、4階微分作用: $e^{-\int R_{\mu\nu\lambda\sigma}^2} = \underline{0}$

4階微分量子重力の問題点

粒子(重力子)描像を保ったままの単純な摂動論で量子化すると、
新たなユニタリ性の問題が生じる

有質量重力子問題

$$\frac{1}{p^4 + m_{\text{pl}}^2 p^2} = \frac{1}{m_{\text{pl}}^2} \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 + m_{\text{pl}}^2} \right)$$

↑ ↑
重力子 ゴースト重力子

このため、80年台半ば以降、場の量子論的手法に依らない
弦理論などの方法が主流になる

このユニタリ性問題を解決するためには
非摂動的アプローチが必要

幾つかの試み

高階微分場の含まれるゴーストモードを非力学的か
又はゲージ非不変な自由度にする

Lee-Wick-Tomboulisの試み:

相互作用の効果を取り入れて伝播関数のゴーストの極を消す試み
→ 紫外極限では相互作用が消えてゴーストが現れるので、問題の本質的解決にはならない

Horavaの試み:

場の時間微分だけ2階にして、空間微分を4階にする
→ 一般座標不変性を破るので重力場理論として問題

○漸近的背景自由性(asymptotic background freedom)のアイデア:

通常の粒子的描像を捨てる

Planckエネルギーを超えた世界では時空の概念そのものが変わる

漸近的背景自由な量子重力理論

Einstein理論の問題とその解決策

Einstein重力理論の最大の問題点

= 紫外極限でもスケールが残ってしまうこと

* 通常の場合の量子論では、質量項が有っても紫外極限ではスケールを持たない運動項が支配的になるので問題ない(漸近自由性を仮定)

漸近的にスケールの無い世界に移るような理論を構成する！

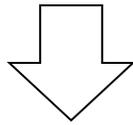
では、重力理論に於いてスケールが無いとはどうゆうことか？

通常の場合の量子論は特定の時空上で定義される
しかし、重力は時空そのものを支配する

Planckスケールを超えた領域では重力場とその他の量子場は
同じ土俵で扱えない → 重力子(graviton)的描像の破棄

背景時空自由性とは

重力のゆらぎが大きくなれば
時空を定義する距離そのものが揺らいでくる



特定の時空を伝播する粒子の描像そのものが意味をなさなくなる

||

背景時空自由性(背景時空独立性)

(background freedom, background-metric independence)

距離や時間の概念が無い、本当にスケールの無い世界の実現！

背景時空自由性の定式化

数式による定義

共形変換で移り変わるすべての時空がゲージ同値になる

||

BRST共形不変性

$$ds^2 \cong \Omega^2 ds^2$$

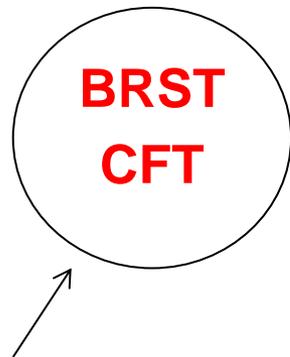
**Planckスケールを超えた世界で
このゲージ対称性が実現する重力の量子論を構成する**

〔注〕テンソル場のゆらぎは紫外極限で小さくなり、その背景自由性は考えなくてもよいことが分かる → 宇宙初期のゆらぎはスカラー的

漸近的背景自由な量子重力理論

(asymptotically background-free quantum gravity)

紫外極限でBRST共形不変性が実現するくり込み可能な重力の量子論



+ perturbation by a single coupling t

$$g_{\mu\nu} = e^{2\phi} (\hat{g}_{\mu\nu} + \underline{t h_{\mu\nu}} + \dots)$$

注) 自由場ではない

非摂動的に扱う

摂動論で扱う

→ BRST共形不変性

結合定数 t のベータ関数が負

→ 漸近的背景自由性(BRST共形不変性)

量子重力作用と量子化法

$$\text{sgn} = (-1, 1, 1, 1)$$
$$\text{weight } e^{iI}$$

Planckスケールを超える紫外極限で共形不変になる作用

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \underbrace{-\frac{1}{t^2} C_{\mu\nu\lambda\sigma}^2 - bG_4}_{\text{共形不変 (R}^2\text{項が無い)}} + \frac{1}{\hbar} \left(\frac{1}{16\pi G} R - \Lambda + \mathcal{L}_M \right) \right\}$$

共形不変 (R^2 項が無い)

運動項は共形不変

共形平坦な時空 ($C_{\mu\nu\lambda\sigma} = 0$) のまわりでの摂動展開

$$g_{\mu\nu} = e^{2\phi} \bar{g}_{\mu\nu} \quad \bar{g}_{\mu\nu} = (\hat{g} e^{th})_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\lambda} \left(\delta_{\nu}^{\lambda} + t h_{\nu}^{\lambda} + \frac{t^2}{2} (h^2)_{\nu}^{\lambda} + \dots \right)$$

厳密に取り扱う

唯一の無次元重力結合定数

共形因子場のダイナミクスと共形不変性

戦略: 先ず理論をある共形平坦な背景時空中の理論として定式化し、次にそれが背景時空の選び方に依らないことを示す！

$$\begin{aligned} Z &= \int [dg \cdots]_{\underline{g}} \exp(iI) \\ &= \int [d\phi dh \cdots]_{\underline{\hat{g}}} \exp(\underline{iS(\phi)} + iI) \end{aligned} \quad \begin{aligned} g_{\mu\nu} &= e^{2\phi} \bar{g}_{\mu\nu} \\ &= e^{2\phi} (\hat{g}_{\mu\nu} + th_{\mu\nu} + \cdots) \end{aligned}$$

作用 S は一般座標不変性を保つための **Jacobian** (= 共形異常の WZ 作用)
= 共形因子場の運動項 (Riegert 作用) 及び相互作用項

(* 従来の方法と著しく異なる点)

BRST 共形不変性

= 共形因子場を厳密に量子化したことによって現れる量子重力固有の対称性

$$\phi \rightarrow \phi + \omega \quad \Leftrightarrow \quad Z(e^{2\omega} \hat{g}) = Z(\hat{g})$$

(* 量子重力では ϕ は $(-\infty, \infty)$ の積分変数 \rightarrow シフト変換の下での不変性が共形不変性)

BRST共形不変性(=一般座標不変性の一部)

代数的定義

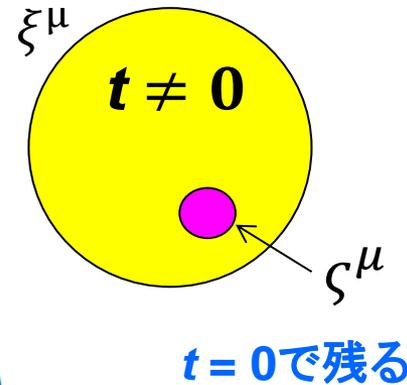
$$\delta_{\xi} g_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} \nabla_{\nu} \xi^{\lambda} + g_{\nu\lambda} \nabla_{\mu} \xi^{\lambda}$$

紫外極限 ($t=0$)で ξ^{μ} の自由度を使ってWeyl作用を輻射ゲージ固定をしても、共形Killingベクトルを満たす有限個のゲージ自由度が残る:

$$\hat{\nabla}_{\mu} \zeta_{\nu} + \hat{\nabla}_{\nu} \zeta_{\mu} - \frac{1}{2} \hat{g}_{\mu\nu} \hat{\nabla}_{\lambda} \zeta^{\lambda} = 0$$

BRST共形変換 = ζ^{μ} を変換のゴースト c^{μ} に置き換える

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_B \phi = c^{\mu} \partial_{\mu} \phi + \frac{1}{4} \partial_{\mu} c^{\mu} \\ \delta_B h_{\mu\nu} = c^{\lambda} \partial_{\lambda} h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} h_{\mu\lambda} (\partial_{\nu} c^{\lambda} - \partial^{\lambda} c_{\nu}) + \frac{1}{2} h_{\nu\lambda} (\partial_{\mu} c^{\lambda} - \partial^{\lambda} c_{\mu}) \end{array} \right.$$



$$\Rightarrow Q_B |\text{phys}\rangle = 0$$

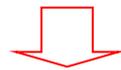
- 負計量モードが非物理的自由度になる
- 物理量はスカラー量になり、テンソルゆらぎはない
→ 原始ゆらぎスペクトル

Weyl作用が意味すること

紫外カットオフが無い

“ t ”は唯一の無次元な重力結合定数で漸近的に小さくなる
(共形平坦時空のまわりでの摂動論が正当化される)

$$t \rightarrow 0 \quad \underline{\underline{C_{\mu\nu\lambda\sigma} \rightarrow 0}} \quad (\text{共形平坦})$$



**Riemann曲率が発散するような特異点は
量子力学的に排除される**

$$\left[\text{cf. ゲージ理論: } -\frac{1}{g^2} \text{Tr} (F_{\mu\nu}^2) \quad F_{\mu\nu} \rightarrow 0 \quad (g \rightarrow 0) \right]$$

古典極限 $\hbar \rightarrow 0$: Einstein作用が優勢になる

新しい力学的スケールの存在

結合定数 t = 一般座標不変性が共形不変性からずれている度合い

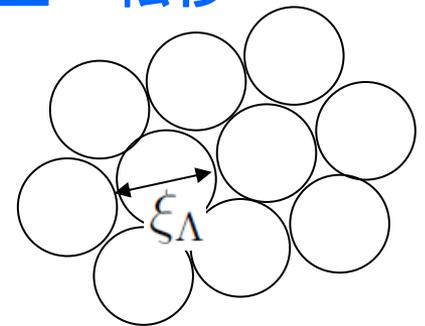
ベータ関数が負 \rightarrow 新しい力学的赤外スケール Λ_{QG} の存在

$$\bar{t}^2(p) = \frac{1}{\beta_0 \log(p^2/\Lambda_{\text{QG}}^2)}$$

ランニング結合定数が発散する = 共形不変性が完全に壊れる
 \rightarrow 古典時空へ転移

相関距離: $\xi_\Lambda = 1/\Lambda_{\text{QG}}$

- 量子時空と古典時空を分けるスケール
- 時空は実質的に相関距離 ξ_Λ で離散化される
(=相関距離より短い距離は背景時空自由性のため測定できない)



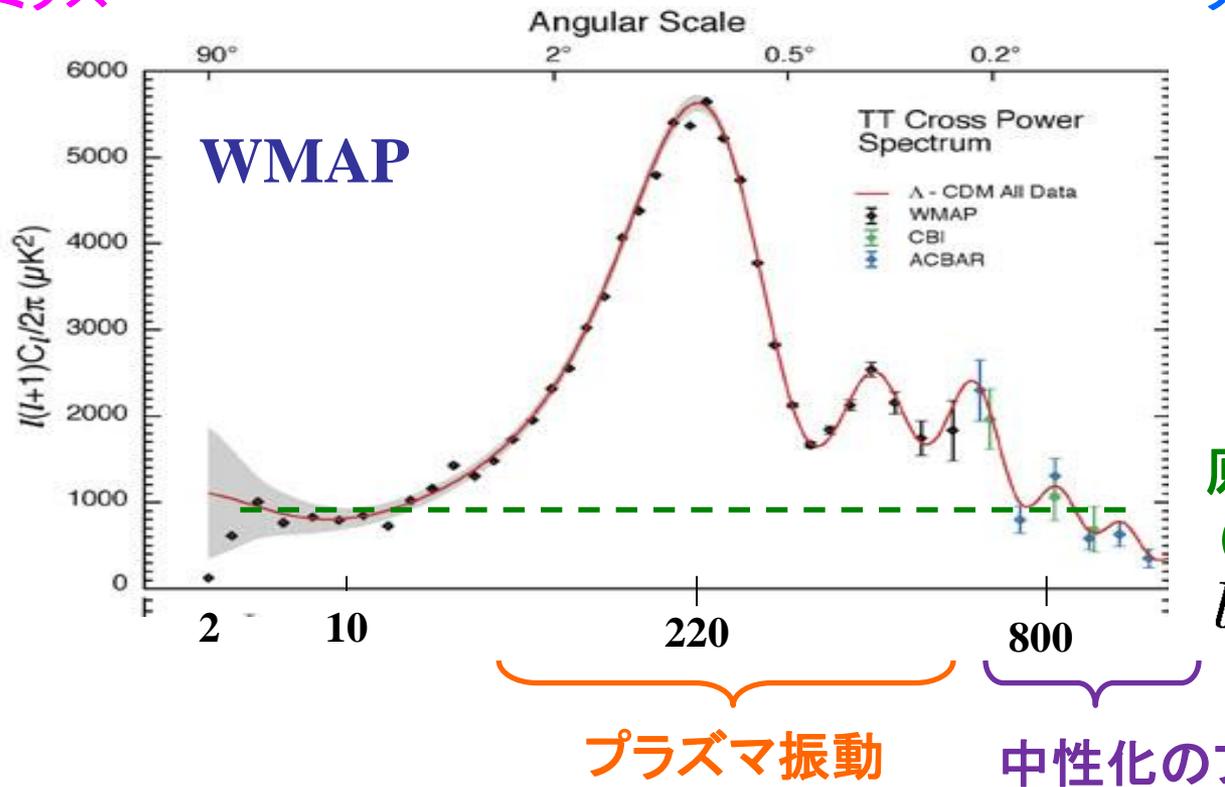
量子重力的インフレーション

観測されたCMBパワースペクトル

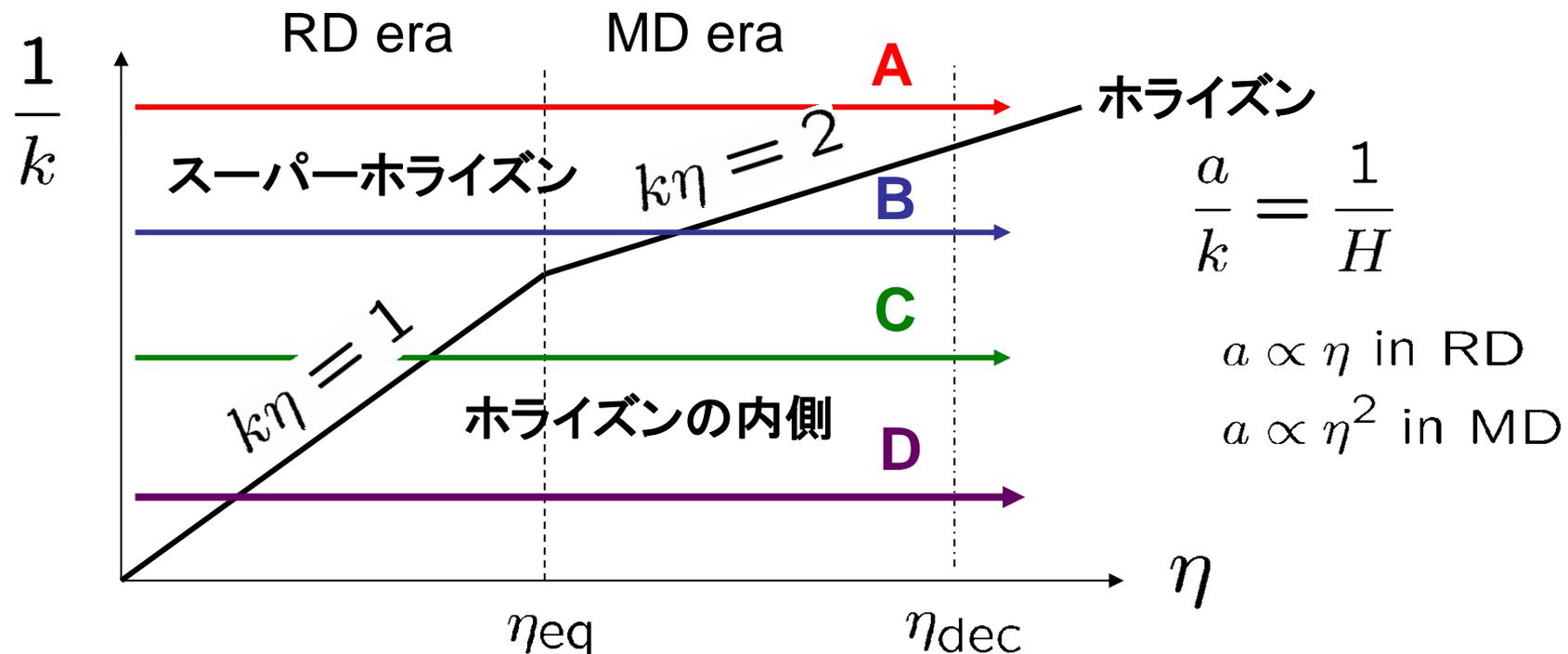
宇宙が中性化するまでのゆらぎ(摂動)の発展の歴史

ビッグバン付近
のダイナミクス

中性化付近の
ダイナミクス



典型的なゆらぎのサイズ



A : $k/a_0 = 0.002 \text{ Mpc}^{-1}$, ($l \simeq 30$) ← 原始ゆらぎの情報を保存

B : $k/a_0 = 0.005 \text{ Mpc}^{-1}$, ($l \simeq 70$)

C : $k/a_0 = 0.015 \text{ Mpc}^{-1}$, ($l \simeq 210$)

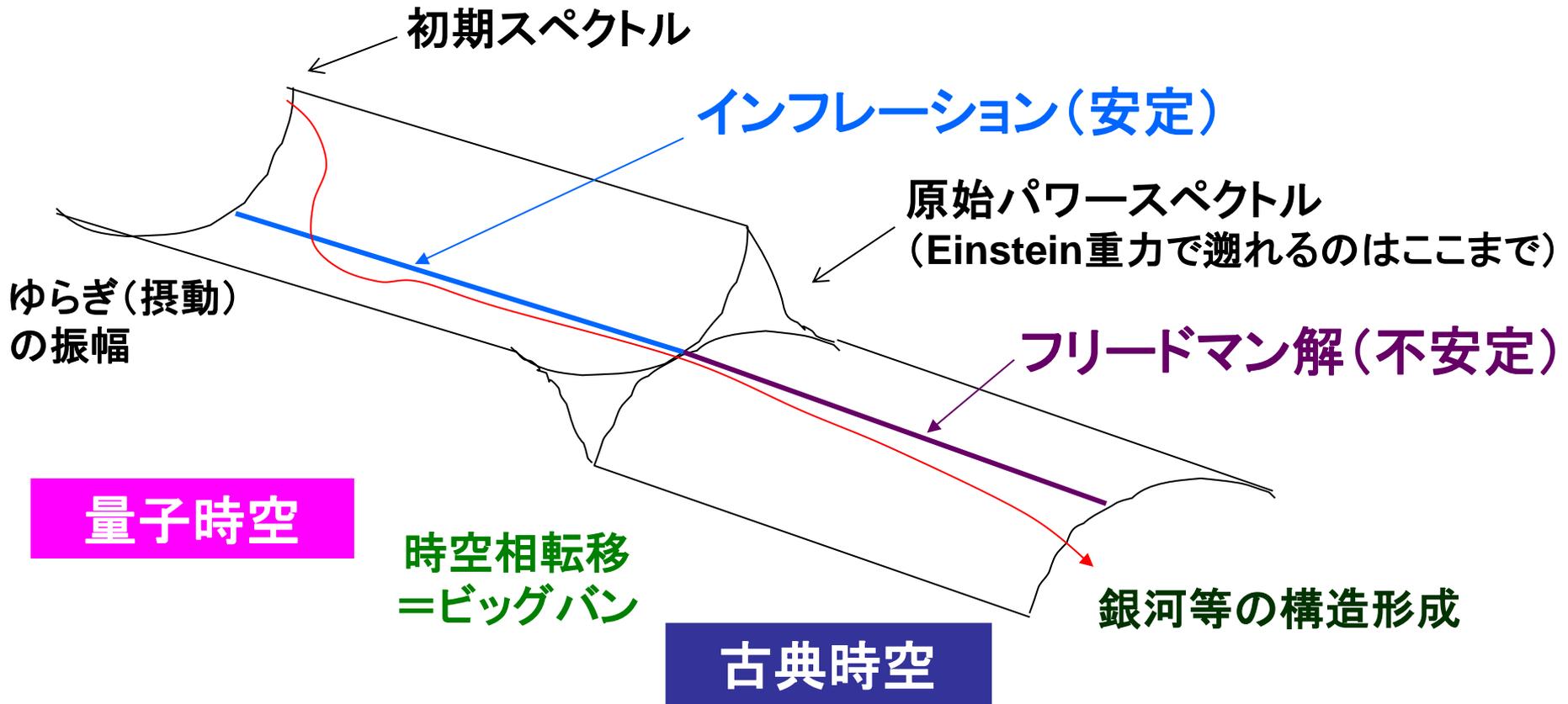
D : $k/a_0 = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$, ($l \simeq 700$)

$$l \simeq \frac{\pi}{\theta} = kd_{dec}$$

なぜインフレーションが必要か

インフレーション期にゆらぎが小さくなる

=138億年たってもまだフリードマン解が良い近似で成り立つ理由



インフレーションを誘起する場

一般にインフラトンと呼ばれる

Einstein重力理論

インフレーションを誘起し、同時にすべての物質場の素になるスカラー場が必要

漸近的背景自由な量子重力理論

重力場(主として共形因子場)のダイナミクスにインフレーションを誘起する力と物質を生成する自由度が含まれる

c.f. Starobinskyのアイデアを発展させたもの
インフレーション解の安定性とその終わらせ方が違う

量子重力のインフレーション解

共形因子場の運動方程式

$$-b_1 B(\tau) \partial_\eta^4 \phi + 3\pi m_{\text{pl}}^2 e^{2\phi} (\partial_\eta^2 \phi + \partial_\eta \phi \partial_\eta \phi) = 0$$

力学的因子 (相転移のモデル化)

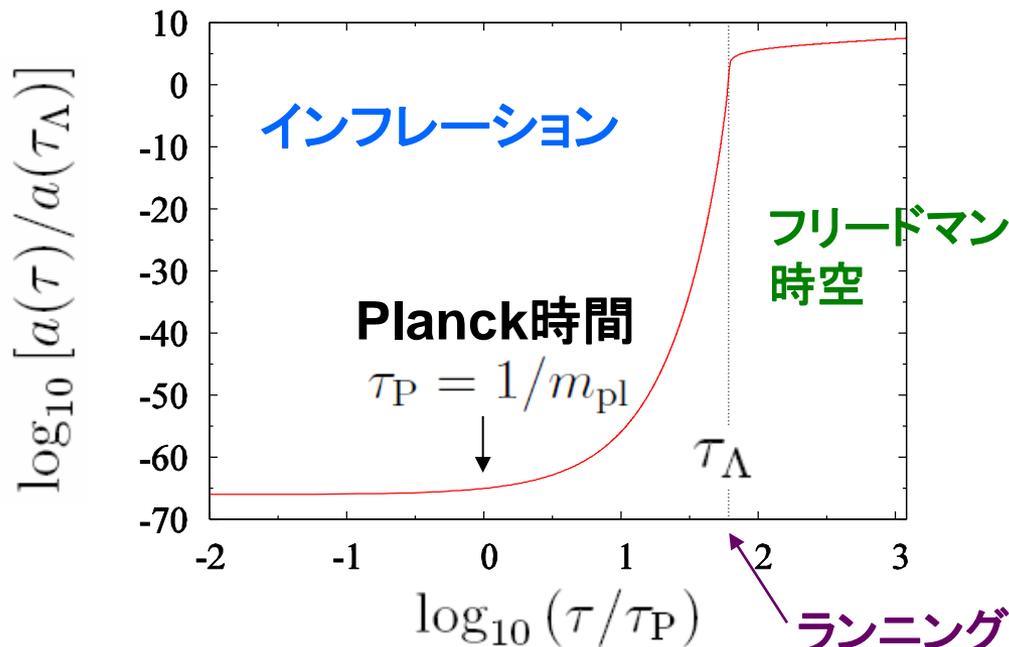
$$B(\tau) = 1 - a_1 \bar{t}^2(\tau) + \dots$$

$$= \frac{1}{1 + a_1 \bar{t}^2(\tau)}$$

誘導されたRiegert作用

Einstein作用

ランニング結合定数



安定なインフレーション解

$$a = e^\phi \simeq e^{m_{\text{pl}} \tau}$$

τ : 物理時間

インフレーションが終わる時間

$$\tau_\Lambda = 1/\Lambda_{\text{QG}}$$

時間発展のシナリオ

$$\xi_\Lambda = 1/\Lambda_{\text{QG}} (\gg l_{\text{pl}})$$

e-foldings数

$$\mathcal{N}_e = \log \frac{a(\tau_\Lambda)}{a(\tau_P)} \simeq \frac{m_{\text{pl}}}{\Lambda_{\text{QG}}}$$

→ $\Lambda_{\text{QG}} \simeq 10^{17} \text{ GeV}$

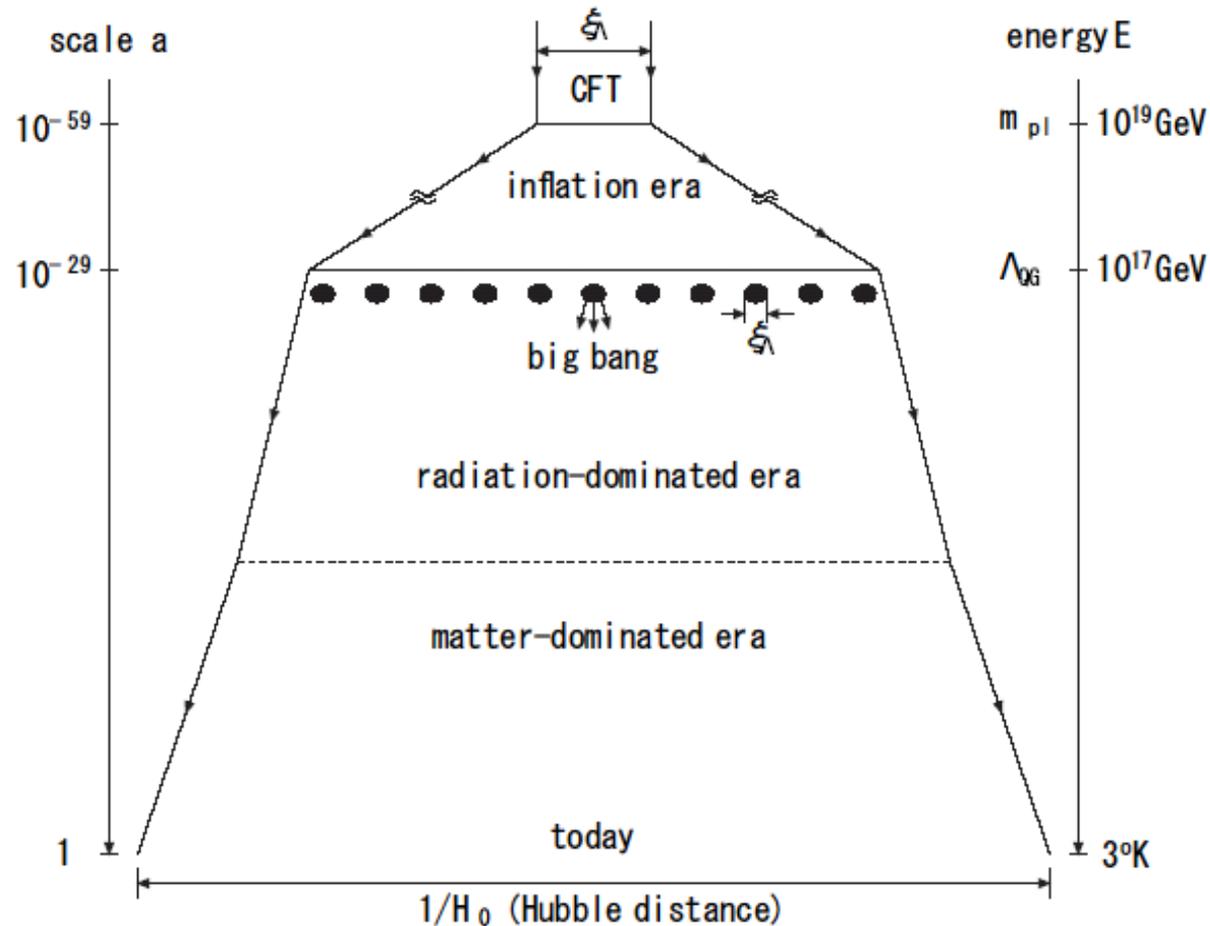
宇宙の膨張率: 10^{59}

インフレーション期間:

$$10^{30} (\Leftrightarrow \mathcal{N}_e = 70)$$

フリードマン期間: :

$$10^{29} (\Leftrightarrow 10^{17} \text{ GeV} / 2.7\text{K})$$



$$1/H_0 \simeq 10^{59} \xi_\Lambda (\sim 4000 \text{ Mpc})$$

CMBで観測可能

量子重力のゆらぎの発展

量子重力ゆらぎの粗い評価: $\frac{\delta R}{R} \sim \frac{E^2}{12m_{\text{pl}}^2} \leftarrow \text{deSitter曲率}$

$$\left. \frac{\delta R}{R} \right|_{\tau_{\text{P}}} \xrightarrow{\text{blue arrow}} \left. \frac{\delta R}{R} \right|_{\tau_{\Lambda}^-} \xrightarrow{\text{red arrow}} \left. \frac{\delta \rho}{\rho} \right|_{\tau_{\Lambda}^+} \xrightarrow{\text{green arrow}} \left. \frac{\delta T}{T} \right|_{\text{today}}$$

インフレーション期に
ゆらぎが小さくなる

時空相転移

その他の力学的スケールで
スペクトルが変形される

WMAPが明らかにしたものは時空の相転移直前の
スカラー曲率の量子的ゆらぎ

$$E = \Lambda_{\text{QG}} \simeq 10^{17} \text{ GeV} \Rightarrow \left. \frac{\delta R}{R} \right|_{\tau_{\Lambda}^-} \sim \frac{\Lambda_{\text{QG}}^2}{12m_{\text{pl}}^2} \sim 10^{-5}$$

ゆらぎの時間発展のシミュレーション

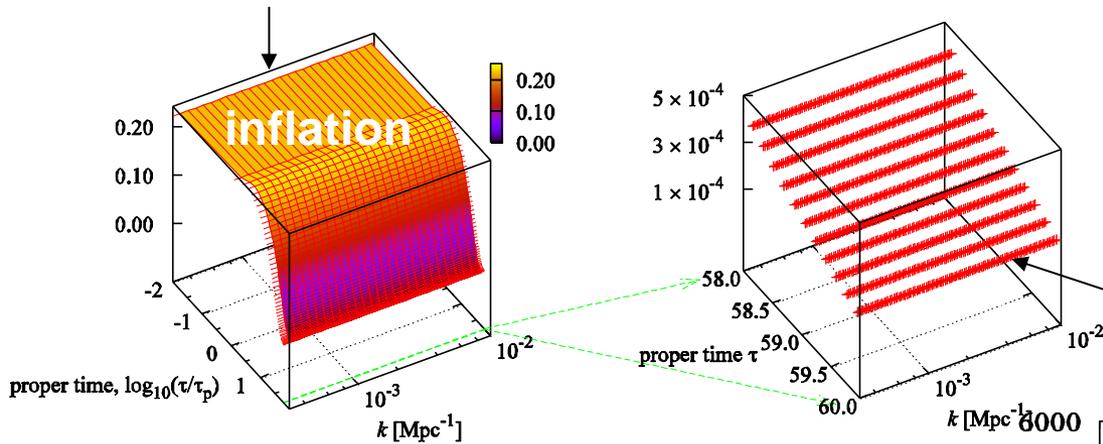
スケール不変な初期スペクトル

Planck長さからHubble距離まで

$$10^{59} = 10^{30} + 10^{29}$$

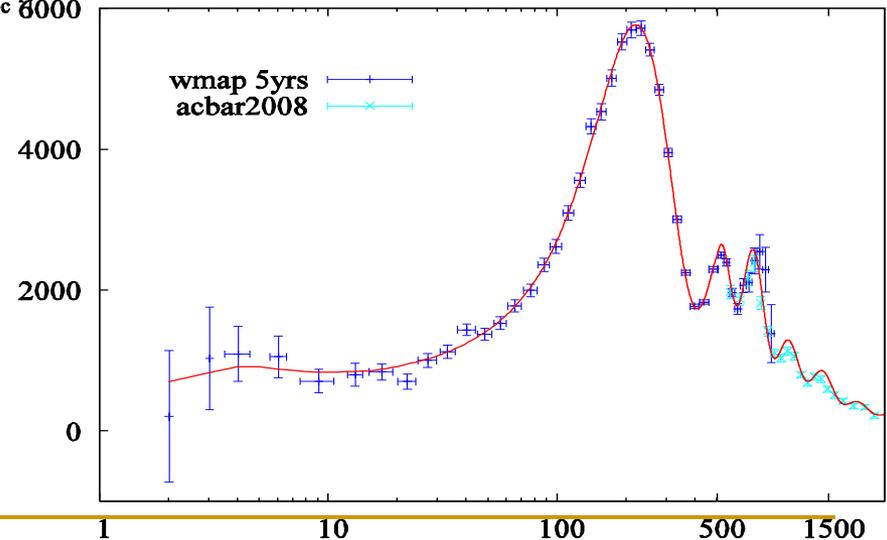
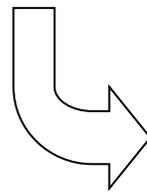
↑ ↑
inflation Friedmann

相転移点でのスペクトル
(原始パワースペクトル)



重力ポテンシャルの時間発展

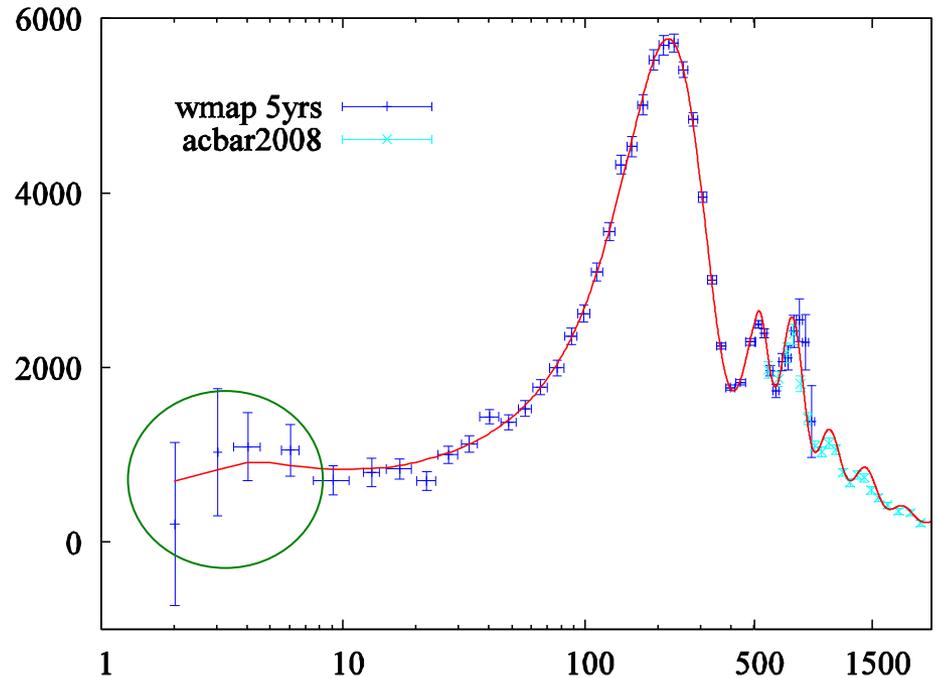
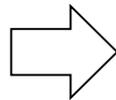
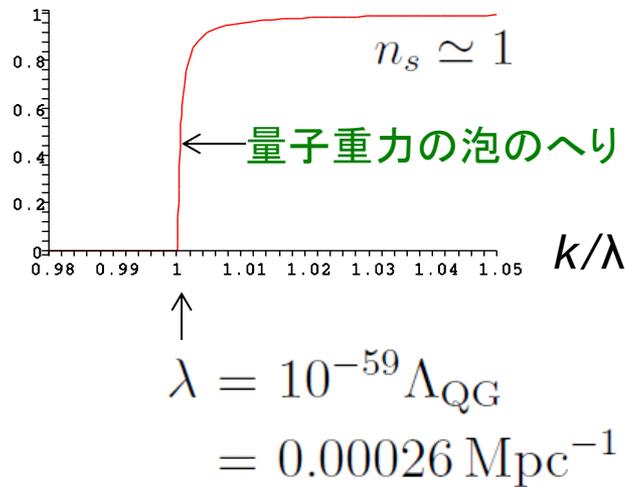
線形摂動論の範囲内ではあるが、
重力ポテンシャルの振幅が実際に
 10^{-5} 程度まで小さくなることを示せる



TTパワースペクトル

量子重力の初期スペクトル

$$P_{\text{QG}}(k) = \frac{1}{2b_1} \left(\frac{k}{m} \right)^{\frac{v}{\log(k^2/\lambda^2)}}$$



共動力学的スケール

$$1/\lambda \simeq 4000 \text{ Mpc}$$

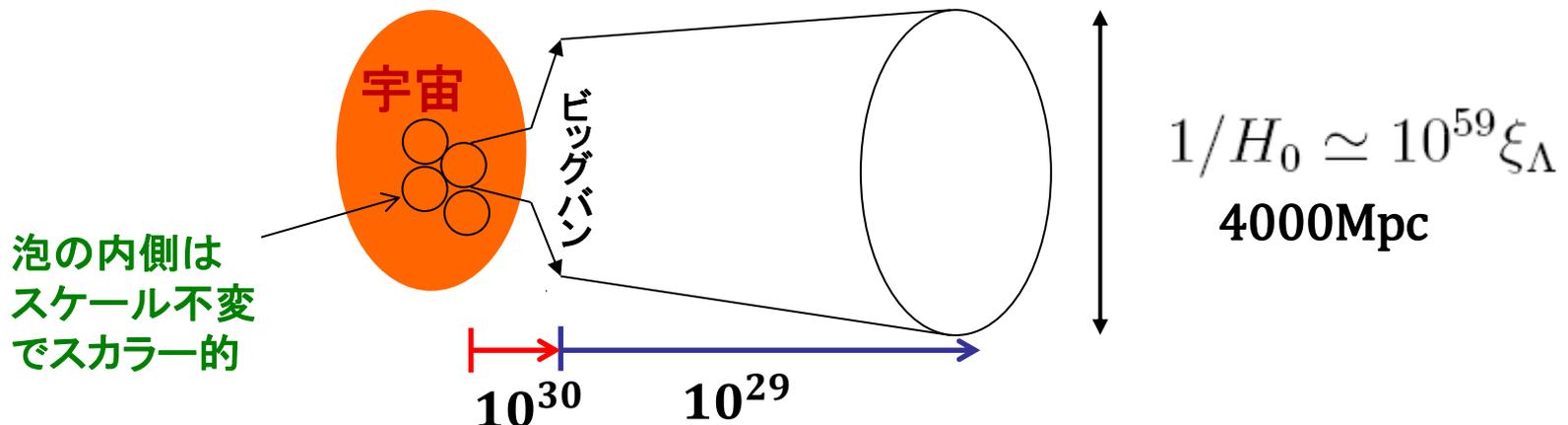
$$\Omega_c = 0.20, \quad \Omega_b = 0.043, \quad \Omega_{\text{vac}} = 0.757, \quad H_0 = 73$$

$$r = 0.06 \quad \tau_e = 0.08$$

まとめ

Planckスケールを超えたUV極限で背景時空自由性を示す くり込み可能な量子重力理論の構築

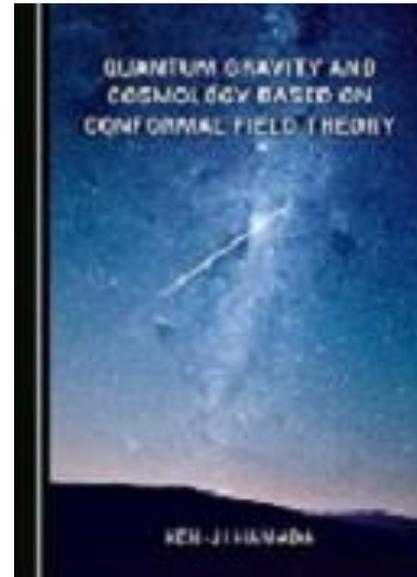
- 経路積分測度からの寄与を正しく取り入れて、背景時空独立性をBRST共形不変性として定式化（=重力子の描像の破棄）
- インフレーションを含む初期宇宙の進化は共形不変性が破れて行く過程として記述される
- 共形不変性が破れる量子重力の力学的スケールが存在して、その値はCMBの観測結果から $\Lambda_{\text{QG}} \simeq 10^{17}$ GeV で与えられる
- 時空は実質的に相関距離 $\xi_{\Lambda} = 1/\Lambda_{\text{QG}}$ で離散化される
- 現在の宇宙は量子重力の**1つの泡**から生まれた！



著書



共形場理論を基礎にもつ
量子重力理論と宇宙論
(プレアデス出版、2016)



Quantum Gravity and Cosmology
Based on Conformal Field Theory
(Cambridge Scholars Publishing, 2018)

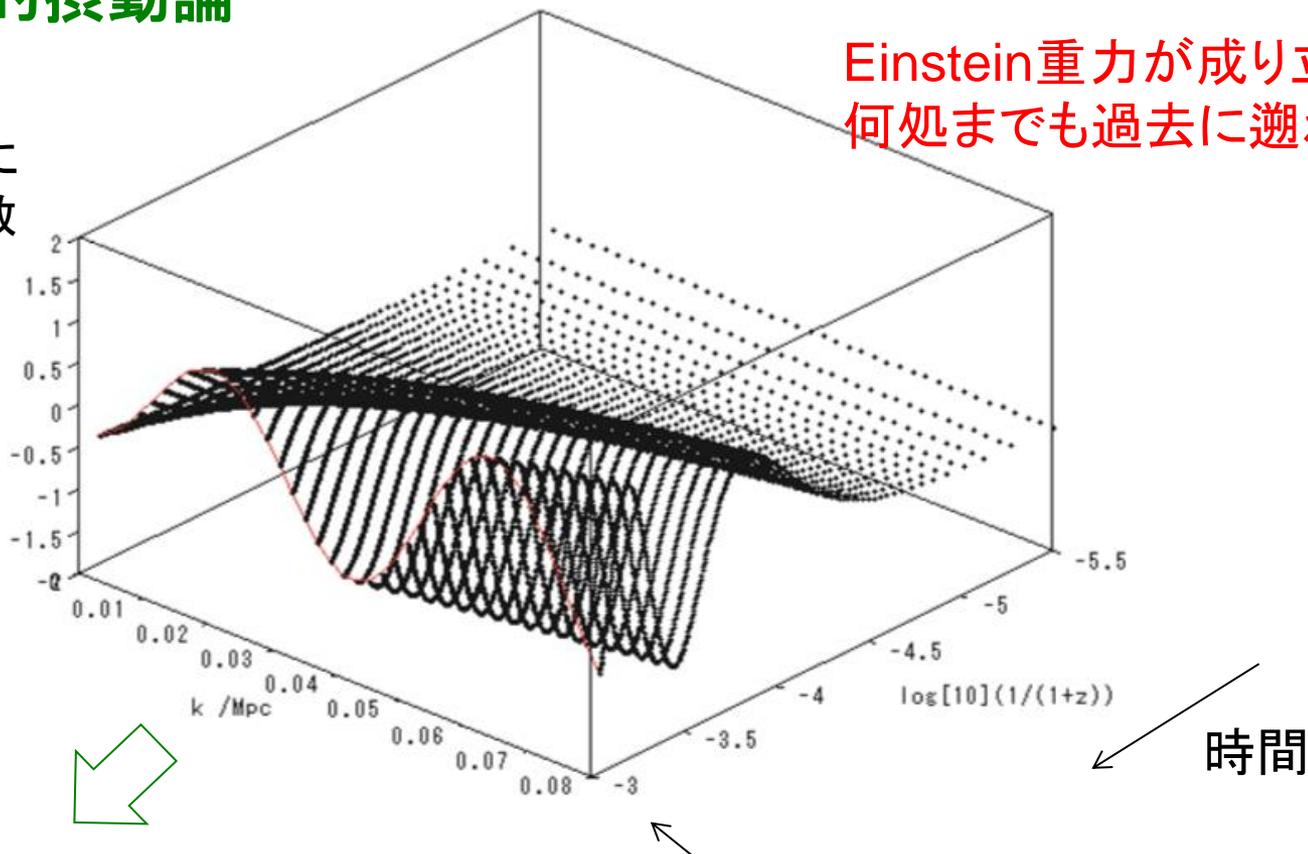
付録

フリードマン解の周りのゆらぎの時間発展

宇宙論的摂動論

CMB温度ゆらぎに対応する摂動変数の時間発展

振幅は適当に規格化している



Einstein重力が成り立つ限り
何処までも過去に遡れる

CMB: $\frac{\delta T}{T} \sim 10^{-5}$

最終散乱面

ゆらぎ(重力ポテンシャル)の発展方程式

$$ds^2 = a^2[-(1 + 2\Psi)d\eta^2 + (1 + 2\Phi)d\mathbf{x}^2]$$

Evolution equation for gravitational potentials

Effective action
= Riegert + Weyl + Einstein

$$\begin{aligned} B(\tau) & \left\{ -2\partial_\eta^4 \Phi - 2\partial_\eta \phi \partial_\eta^3 \Phi + \left(-8\partial_\eta^2 \phi + \frac{10}{3} \partial^2 \right) \partial_\eta^2 \Phi \right. \\ & + \left(-12\partial_\eta^3 \phi + \frac{10}{3} \partial_\eta \phi \partial^2 \right) \partial_\eta \Phi + \left(\frac{16}{3} \partial_\eta^2 \phi - \frac{4}{3} \partial^2 \right) \partial^2 \Phi \\ & + 2\partial_\eta \phi \partial_\eta^3 \Psi + \left(8\partial_\eta^2 \phi + \frac{2}{3} \partial^2 \right) \partial_\eta^2 \Psi + \left(12\partial_\eta^3 \phi - \frac{10}{3} \partial_\eta \phi \partial^2 \right) \partial_\eta \Psi \\ & \left. + \left(-\frac{16}{3} \partial_\eta^2 \phi - \frac{2}{3} \partial^2 \right) \partial^2 \Psi \right\} \\ + H_D^2 e^{2\phi} & \left\{ 6\partial_\eta^2 \Phi + 18\partial_\eta \phi \partial_\eta \Phi - 4\partial^2 \Phi - 6\partial_\eta \phi \partial_\eta \Psi \right. \\ & \left. + \left(12\partial_\eta^2 \phi + 12\partial_\eta \phi \partial_\eta \phi - 2\partial^2 \right) \Psi \right\} = 0 \end{aligned}$$

Constraint equation

$$\begin{aligned} & \frac{2}{t_r^2(\tau)} \left\{ 4\partial_\eta^2 \Phi - \frac{4}{3} \partial^2 \Phi - 4\partial_\eta^2 \Psi + \frac{4}{3} \partial^2 \Psi \right\} \\ & + B(\tau) \left\{ \frac{4}{3} \partial_\eta^2 \Phi + 4\partial_\eta \phi \partial_\eta \Phi + \left(\frac{28}{3} \partial_\eta^2 \phi - \frac{8}{3} \partial_\eta \phi \partial_\eta \phi - \frac{8}{9} \partial^2 \right) \Phi \right. \\ & \quad \left. - \frac{4}{3} \partial_\eta \phi \partial_\eta \Psi + \left(-\frac{4}{3} \partial_\eta^2 \phi + \frac{8}{3} \partial_\eta \phi \partial_\eta \phi - \frac{4}{9} \partial^2 \right) \Psi \right\} \\ & + H_D^2 e^{2\phi} \left\{ -2\Phi - 2\Psi \right\} = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Initially } \Phi(\tau_i) = \Psi(\tau_i) \\ (t_r = 0) \\ \text{Finally } \Phi(\tau_\Lambda) = -\Psi(\tau_\Lambda) \\ (t_r = \infty) \end{array} \right.$$

Planck時間での初期条件

初期条件 = 共形因子場の2点関数

$$\langle \varphi(\tau_i, \mathbf{x}) \varphi(\tau_i, \mathbf{x}') \rangle = -\frac{1}{4b_1} \log(m^2 |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2)$$

$$\tau_i = 1/E_i$$

$$(E_i \geq H_D)$$

$\Phi = \Psi$ mode

In momentum space

$$-\log(m^2 |\mathbf{x}|^2) = \int_{k>\epsilon} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{4\pi^2}{k^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \log\left(\frac{m^2}{\epsilon^2 e^{2\gamma-2}}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l} m = a(\tau_i) H_D \\ k = a(\tau_i) p \end{array} \right)$$

delta func.
in Fourier sp.

comoving physical

スケール不変なスカラースペクトルを得る

$$P(\tau_i, k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \langle |\tilde{\varphi}(\tau_i, \mathbf{k})|^2 \rangle = \frac{1}{2b_1}$$

$$b_1 \simeq 10$$

for GUT models

Harrison-Zel'dovich spectrum

positive-definite = physical
← positivity of Riegert action

一般座標不変性(diffeomorphism inv.)

$$\delta_\xi g_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} \nabla_\nu \xi^\lambda + g_{\nu\lambda} \nabla_\mu \xi^\lambda \quad \xi^\mu : \text{gauge parameter}$$

計量場は $C_{\mu\nu\lambda\sigma} = 0$ の周りで展開

$$g_{\mu\nu} = e^{2\phi} \bar{g}_{\mu\nu} \quad \bar{g}_{\mu\nu} = (\hat{g} e^{th})_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\lambda} \left(\delta^\lambda_\nu + th^\lambda_\nu + \frac{t^2}{2} (h^2)^\lambda_\nu + \dots \right)$$

no coupling const.
coupling const.

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_\xi \phi = \xi^\lambda \partial_\lambda \phi + \frac{1}{4} \hat{\nabla}_\lambda \xi^\lambda \\ \delta_\xi h_{\mu\nu} = \frac{1}{t} \left(\hat{\nabla}_\mu \xi_\nu + \hat{\nabla}_\nu \xi_\mu - \frac{1}{2} \hat{g}_{\mu\nu} \hat{\nabla}_\lambda \xi^\lambda \right) + \xi^\lambda \hat{\nabla}_\lambda h_{\mu\nu} \\ \quad + \frac{1}{2} h_{\mu\lambda} \left(\hat{\nabla}_\nu \xi^\lambda - \hat{\nabla}^\lambda \xi_\nu \right) + \frac{1}{2} h_{\nu\lambda} \left(\hat{\nabla}_\mu \xi^\lambda - \hat{\nabla}^\lambda \xi_\mu \right) + o(t\xi h^2) \end{array} \right.$$

Conformal mode and traceless mode are decoupled !

ベータ関数

quantum gravity+QED

$$\beta_t = -\left(\frac{n_F}{40} + \frac{10}{3}\right) \frac{t_r^3}{(4\pi)^2} - \frac{7n_F}{72} \frac{e_r^2 t_r^3}{(4\pi)^4} + o(t_r^5)$$

ランニング結合定数 ($\beta_t = -\beta_0 t_r^3$)

$$\begin{aligned} \Gamma_W &= \left\{ \frac{1}{t_r^2} - 2\underline{\beta_0} \phi + \beta_0 \log \left(\frac{k^2}{\mu^2} \right) \right\} \bar{C}_{\mu\nu\lambda\sigma}^{r2} \\ &= \frac{1}{\bar{t}_r^2(p)} \sqrt{g_r} C_{\mu\nu\lambda\sigma}^{r2} \end{aligned}$$

k : momentum defined on flat background
= comoving momentum

where

$$\bar{t}_r^2(p) = \frac{1}{\beta_0 \log(p^2/\Lambda_{\text{QG}}^2)}$$

Asymptotic freedom

力学的スケール : $\Lambda_{\text{QG}} = \mu \exp(-1/2\beta_0 t_r^2)$

物理的運動量 : $p^2 = \underline{k^2}/a^2$ with $a = e^\phi$

WZ action and Euler density

2D quantum gravity

$$R$$

Euler density

$$\sqrt{-g}R = \sqrt{-\bar{g}} \left(2\bar{\Delta}_2\phi + \bar{R} \right)$$

relation

$$\Delta_2 = -\nabla^2$$

Conformally inv.
operator

$$-\frac{b_L}{4\pi} \int d^2x \int_0^\phi d\phi \sqrt{-g}R$$

$$= -\frac{b_L}{4\pi} \int d^2x \sqrt{-\bar{g}} \left(\phi \bar{\Delta}_2\phi + \bar{R}\phi \right)$$

Liouville action

4D quantum gravity

$$E_4 = G_4 - \frac{2}{3}\nabla^2 R$$

modified

$$\sqrt{-g}E_4 = \sqrt{-\bar{g}} \left(4\bar{\Delta}_4\phi + \bar{E}_4 \right)$$

$$\Delta_4 = \nabla^4 + 2R^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu - \frac{2}{3}R\nabla^2 + \frac{1}{3}\nabla^\mu R\nabla_\mu$$

$$-\frac{b_1}{(4\pi)^2} \int d^4x \int_0^\phi d\phi \sqrt{-g}E_4$$

$$= -\frac{b_1}{(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left(2\phi \bar{\Delta}_4\phi + \bar{E}_4\phi \right)$$

Riegert-Wess-Zumino action