

繰り込み可能な量子重力と 宇宙論

KEK/総研大 浜田賢二

- Conformal Field Theory on $R \times S^3$ from Quantized Gravity, arXiv:0811.1647[hep-th].
- Renormalizable 4D Quantum Gravity as A Perturbed Theory from CFT, arXiv:0907.3969[hep-th].
- From CFT Spectra to CMB Multipoles in Quantum Gravity Cosmology, arXiv:0908.0192[astro-ph] with S. Horata and T. Yukawa.

目次

1. 重力の量子化法について
2. CFTとしての量子重力
3. 次元正則化と繰り込み
4. 共形不変性と量子重力状態
5. 量子重力的宇宙論
6. 結論

第一章

重力の量子化法について

量子化法の簡単なまとめ

Einstein gravityの量子化

次元を持った結合定数で展開するため、新しい発散が出てくる

- On-shell renormalization
高階微分の発散項を運動方程式を使って消すアプローチ
Einstein gravityではダメ、N=8 supergravity では？
[＊むしろ、低エネルギー有効理論と考えるべき！]
- Wilsonの非摂動くり込み群、イプシロン展開法
- ループ量子重力

Superstring theory

発散がない、局所的有効作用、摂動的ユニタリ性、10次元時空

Higher-derivative quantum gravity

結合定数が無次元になる

→ power-counting renormalizable

作用が正定値になる

ただし、ゴーストが現れる

$$\frac{1}{m^2 p^2 + p^4} \rightarrow \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 + m^2}$$

ghost mode

ユニタリ性問題へのアプローチの違い

- Lee-Wick-Tomboulis approach
- Horava approach
- CFT approach

格子重力: Regge と DT (dynamical triangulation)

- Regge法 $\leftrightarrow$ Einstein作用の格子化
- DT法 $\leftrightarrow$ CFT approachと同じ臨界指数を持つ

- Lee-Wick-Tomboulis approach :

resummed propagatorで議論する。

漸近自由な場の量子論 ($\beta = -\beta_0 g^3$) では

$$\frac{1}{m^2 p^2 + \beta_0 p^4 \log(p^2/\Lambda^2)} = \frac{1}{p^2 [m^2 + \beta_0 p^2 \log(p^2/\Lambda^2)]}$$

↑
→ Ghostの実極が消える (IRでは有効な考え)

- Horava approach :

Lorentz不変性を破る → ghostを非力学的自由度にする

- CFT approach (our model) :

非摂動的方法(CFT)を取り入れる

共形不変性 → ghost modeがゲージ不変でなくなる

くり込み問題の発展 (CFT approach)

60年代: Einstein **重力の量子化**

くり込み不可能

70年代: **高階微分重力のくり込み可能性**

すべてのモードを摂動的に扱う→ユニタリ性の問題(Lee-Wick)

70-80年代: **共形異常の研究(曲がった時空上の場の量子論)**

Hathrellによる高階微分重力の3ループでのくり込み不可能性の議論

80-90年代: **2次元量子重力の厳密解** (Polyakovほか)

→4次元に一般化 (Riegertほか)

00年代: Riegert **モデルを發展させてくり込みの問題を解決**

共形モードの非摂動的取り扱い→ユニタリ性問題の再考

(Wheeler-DeWitt = conformal algebra)

第二章

CFTとしての量子重力

Conformal Field Theory on $R \times S^3$ from Quantized Gravity,
arXiv:0811.1647[hep-th]

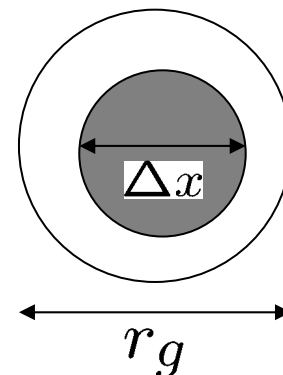
なぜ量子重力が必要か

Einstein重力の限界

- 特異点の存在、くり込み不可能
引力しかないことが問題
- プランク質量をもった素励起 → ブラックホール (BH)

$$\text{Compton波長} < \text{Schwarzshild半径}$$

粒子の情報はBH内に閉じ込められる
→ 点状粒子描像の破綻



Einstein理論ではプランクスケールを越えることはできない

特異点を排除するアイデア

特異点や発散を取り除くカギとなるアイデア

背景時空独立性 (スケール不変性)

なぜなら、特別なスケールも特別な点も存在しないから！

距離の概念の喪失



プランクスケールの壁を越えることが出来る！

量子重力には非摂動的定式化が必要 → CFT

くり込み可能な量子重力

The Action (Weyl + Euler + Einstein)

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \underbrace{-\frac{1}{t^2} C_{\mu\nu\lambda\sigma}^2 - b G_4}_{\text{conformally invariant (no } R^2)} + \frac{1}{\hbar} \left(\frac{1}{16\pi G} R - \Lambda + \mathcal{L}_M \right) \right\}$$

Planck constant

共形平坦な時空 ($C_{\mu\nu\lambda\sigma} = 0$) のまわりでの摂動展開:

$$g_{\mu\nu} = e^{2\phi} (\hat{g}_{\mu\nu} + t h_{\mu\nu} + \cdots), \quad \text{tr}(h) = 0$$

共形モード
(厳密に扱う)

トレースレステンソルモード
(摂動的に扱う)

└ 共形場理論

Wess-Zumino積分条件

Conformal variation of effective action

(=path integral by conf. mode)

bare action
(conf. anomaly)

$$\delta_\omega \Gamma = \int d^4x \sqrt{-g} \omega \left\{ \eta_1 R_{\mu\nu\lambda\sigma}^2 + \eta_2 R_{\mu\nu}^2 + \eta_3 R^2 + \eta_4 \nabla^2 R + m_1 R + m_2 \right\}$$

Integrability condition

$$[\delta_{\omega_1}, \delta_{\omega_2}] \Gamma = 8(\eta_1 + \eta_2 + 3\eta_3) \times \int d^4x \sqrt{-g} R \omega_{[1} \nabla^2 \omega_{2]} = 0$$

→ Weyl action and Euler combination (no R^2)

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{\mu\nu\lambda\sigma}^2 = R_{\mu\nu\lambda\sigma}^2 - 2R_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{3}R^2 \\ G_4 = R_{\mu\nu\lambda\sigma}^2 - 4R_{\mu\nu}^2 + R^2 \end{array} \right.$$

作用が意味すること

“ t ”は唯一の無次元な重力結合定数で漸近自由性を示す

$$t \rightarrow 0 \quad \underline{C_{\mu\nu\lambda\sigma} \rightarrow 0} \quad (\text{conformally flat})$$



Riemann曲率が発散するような特異点は
量子力学的に排除される

$$\left[\text{cf. gauge theory:} \quad -\frac{1}{g^2} \text{Tr} \left(F_{\mu\nu}^2 \right) \quad F_{\mu\nu} \rightarrow 0 \quad (g \rightarrow 0) \right]$$

古典極限 $\hbar \rightarrow 0$: Einstein作用が優勢になる

共形モードのダイナミクス

$$\begin{aligned} Z &= \int [dg \cdots]_{\underline{g}} \exp(iI) \\ &= \int [d\phi dh \cdots]_{\underline{\hat{g}}} \exp(\underline{iS(\phi)} + iI) \end{aligned} \quad g_{\mu\nu} = e^{2\phi} \bar{g}_{\mu\nu}$$

↖ Jacobian = Wess-Zumino作用

共形モードの運動項は測度 (量子効果) から誘導される！

$$S_1(\phi, \bar{g}) = -\frac{b_1}{(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left(2\phi \bar{\Delta}_4 \phi + \bar{E}_4 \phi \right) \quad b_1 > 0$$

共形場理論(Conformal Field Theory)

共形不変性(=一般座標不変性) : $\phi \rightarrow \phi + \underline{\omega}$

→ $Z(e^{2\omega} \hat{g}) = Z(\hat{g})$

ゲージ不変性(diffeomorphism inv.)

$$\delta_\xi g_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} \nabla_\nu \xi^\lambda + g_{\nu\lambda} \nabla_\mu \xi^\lambda \quad \xi^\mu : \text{gauge parameter}$$

Mode decomposition

$$g_{\mu\nu} = e^{2\phi} \bar{g}_{\mu\nu} \quad \bar{g}_{\mu\nu} = (\hat{g} e^{th})_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\lambda} \left(\delta^\lambda_\nu + th^\lambda_\nu + \frac{t^2}{2} (h^2)^\lambda_\nu + \dots \right)$$

no coupling const.
coupling const.
traceless

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_\xi h_{\mu\nu} &= \frac{1}{t} \left(\hat{\nabla}_\mu \xi_\nu + \hat{\nabla}_\nu \xi_\mu - \frac{1}{2} \hat{g}_{\mu\nu} \hat{\nabla}_\lambda \xi^\lambda \right) + \xi^\lambda \hat{\nabla}_\lambda h_{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{1}{2} h_{\mu\lambda} \left(\hat{\nabla}_\nu \xi^\lambda - \hat{\nabla}^\lambda \xi_\nu \right) + \frac{1}{2} h_{\nu\lambda} \left(\hat{\nabla}_\mu \xi^\lambda - \hat{\nabla}^\lambda \xi_\mu \right) + o(t\xi h^2) \\ \delta_\xi \phi &= \xi^\lambda \partial_\lambda \phi + \frac{1}{4} \hat{\nabla}_\lambda \xi^\lambda \end{aligned} \right.$$

Conformal mode and traceless mode are decoupled !

$t = 0$ でのゲージ不変性1

ゲージパラメータ $\kappa^\mu = \xi^\mu / t$ を導入する、そして κ^μ を有限に保ちながら $t \rightarrow 0$ の極限をとる

$$\delta_\kappa h_{\mu\nu} = \hat{\nabla}_\mu \kappa_\nu + \hat{\nabla}_\nu \kappa_\mu - \frac{1}{2} \hat{g}_{\mu\nu} \hat{\nabla}_\lambda \kappa^\lambda$$

$$[\delta_\kappa \phi = \delta_\kappa X = \delta_\kappa A_\mu = 0]$$

Weyl作用がもつ通常のゲージ対称性

→ 通常の方法でゲージ固定する

cf. これは、ベクトル場のゲージ対称性 $\delta_\lambda A_\mu = \hat{\nabla}_\mu \lambda$ に相当する

t = 0でのゲージ対称性2 (共形不変性)

ゲージパラメータをconformal Killing vectorにとる

$$\xi^\mu = \zeta^\mu \quad \hat{\nabla}_\mu \zeta_\nu + \hat{\nabla}_\nu \zeta_\mu - \frac{1}{2} \hat{g}_{\mu\nu} \hat{\nabla}_\lambda \zeta^\lambda = 0$$

→ Traceless tensor modeの変換の最低次が消える!

Conformal symmetry (on $\hat{g}_{\mu\nu}$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_\zeta h_{\mu\nu} = \zeta^\lambda \hat{\nabla}_\lambda h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} h_{\mu\lambda} (\hat{\nabla}_\nu \zeta^\lambda - \hat{\nabla}^\lambda \zeta_\nu) + \frac{1}{2} h_{\nu\lambda} (\hat{\nabla}_\mu \zeta^\lambda - \hat{\nabla}^\lambda \zeta_\mu) \\ \delta_\zeta \phi = \zeta^\lambda \hat{\nabla}_\lambda \phi + \frac{1}{4} \hat{\nabla}_\lambda \zeta^\lambda \end{array} \right.$$

→ fixed by physical state condition = Wheeler-DeWitt equation

Other fields:

$$\delta_\zeta X = \zeta^\lambda \hat{\nabla}_\lambda X + \frac{1}{4} X \hat{\nabla}_\lambda \zeta^\lambda \quad \left[X = e^\phi \bar{X}, \quad \delta_\xi \bar{X} = \xi^\lambda \partial_\lambda \bar{X} \right]$$

$$\delta_\zeta A_\mu = \zeta^\nu \hat{\nabla}_\nu A_\mu + A_\nu \hat{\nabla}_\mu \zeta^\nu$$

to remove conformal-mode dependence

For example

共形不変に結合したスカラー場の運動項

$$\begin{aligned}\delta_\zeta I_X &= - \int d^4x \partial^\mu X \partial_\mu \left(\zeta^\lambda \partial_\lambda X + \frac{1}{4} X \partial_\lambda \zeta^\lambda \right) \\ &= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} (3\partial_\eta \zeta_0 + \partial_i \zeta^i) \partial_\eta X \partial_\eta X + (\partial_\eta \zeta_i + \partial_i \zeta_0) \partial_\eta X \partial^i X \right. \\ &\quad \left. + \left[-\partial_i \zeta_j + \frac{1}{4} \delta_{ij} (-\partial_\eta \zeta_0 + \partial_k \zeta^k) \right] \partial^i X \partial^j X + \frac{1}{8} (\partial_\sigma \partial^\sigma \partial_\lambda \zeta^\lambda) X^2 \right\} \\ &= 0\end{aligned}$$

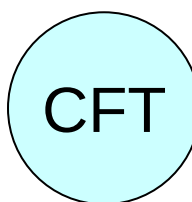
by conformal Killing vectors

on flat background

**同様に、Weyl作用やベクトル場の運動項も
共形変換のもとで不変になる**

CFTからの摂動展開

This model :

 CFT + perturbations

ゲージ変換としての共形変換が正計量と負計量のモードを混ぜるため、ゴーストが単独でゲージ不変になることはない



非摂動的 (共形モードを厳密に取り扱う)

cf. 従来の4階微分模型

 Free + perturbations

ゲージ変換がモードを混ぜないため、ゴーストが単独でゲージ不変になってしまう



すべての重力モードを摂動的に扱う

 graviton picture

WZ作用とEuler密度の関係について

2次元量子重力

R

Euler密度

$$\sqrt{-g}R = \sqrt{-\bar{g}}(2\bar{\Delta}_2\phi + \bar{R}) \quad \text{関係式}$$

$$\Delta_2 = -\nabla^2$$

共形不変な
微分演算子

$$\begin{aligned} & -\frac{b_L}{4\pi} \int d^2x \int_0^\phi d\phi \sqrt{-g}R \\ &= -\frac{b_L}{4\pi} \int d^2x \sqrt{-\bar{g}} (\phi \bar{\Delta}_2\phi + \bar{R}\phi) \end{aligned}$$

Liouville作用

4次元量子重力

$$E_4 = G_4 - \frac{2}{3}\nabla^2 R$$

修正項

$$\sqrt{-g}E_4 = \sqrt{-\bar{g}}(4\bar{\Delta}_4\phi + \bar{E}_4)$$

$$\begin{aligned} \Delta_4 = & \nabla^4 + 2R^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu - \frac{2}{3}R\nabla^2 \\ & + \frac{1}{3}\nabla^\mu R\nabla_\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{b_1}{(4\pi)^2} \int d^4x \int_0^\phi d\phi \sqrt{-g}E_4 \\ &= -\frac{b_1}{(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} (2\phi \bar{\Delta}_4\phi + \bar{E}_4\phi) \end{aligned}$$

Riegert作用

第三章

次元正則化と繰り込み

Renormalizable 4D Quantum Gravity as A Perturbed Theory from CFT,
arXiv:0907.3969[hep-th]

次元正則化について

Dimensional regularization

all orders, diffeomorphism invariant

保障

$$\delta^{(D)}(0) = \int d^D k = 0$$



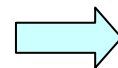
共形異常は4とD次元の間に含まれる

cf. DeWitt-Schwinger method

one-loop order

$$\delta^{(4)}(0) = \langle x | e^{-\epsilon D} | x \rangle |_{\epsilon \rightarrow 0}$$

heat kernel



conformal anomaly

くり込み可能なD次元重力作用

Euclidean sign.

D dimensional integrability → bare action

$$I = \int d^D x \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{t^2} C_{\mu\nu\lambda\sigma}^2 + b G_D + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \sum_{j=1}^{n_F} i \bar{\psi}_j \not{D} \psi_j - \frac{M_P^2}{2} R + \Lambda \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{\mu\nu\lambda\sigma}^2 = R_{\mu\nu\lambda\sigma} R^{\mu\nu\lambda\sigma} - \frac{4}{D-2} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \frac{2}{(D-1)(D-2)} R^2 \\ G_D = G_4 + \frac{(D-3)^2(D-4)}{(D-1)^2(D-2)} R^2 \end{array} \right.$$

Renormalization factors

$Z_\phi = 1$: 共形モードは繰り込みを受けない！

$$A_\mu = Z_3^{1/2} A_\mu^r, \quad \psi_j = Z_2^{1/2} \psi_j^r, \quad h_{\mu\nu} = Z_h^{1/2} h_{\mu\nu}^r$$

$$e = Z_e e_r, \quad t = Z_t t_r \quad \left(Z_e = Z_3^{-1/2} \right)$$

Ward-Takahashi identity

共形異常 (WZ作用)

$$Z_3 = 1 + \frac{x_1}{D-4} + \frac{x_2}{(D-4)^2} + \dots$$

residues x_1, x_2
 → beta function

Bare action → vertices and counterterms

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \int d^D x \sqrt{g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{4} Z_3 \int d^D x e^{(D-4)\phi} F_{\mu\nu}^r F_{\lambda\sigma}^r \bar{g}^{\mu\lambda} \bar{g}^{\nu\sigma} \\ &= \frac{1}{4} \int d^D x \left\{ \left(1 + \frac{x_1}{D-4} + \frac{x_2}{(D-4)^2} + \dots \right) F_{\mu\nu}^r F_{\lambda\sigma}^r \bar{g}^{\mu\lambda} \bar{g}^{\nu\sigma} \right. \\ & \quad + \left(D-4 + x_1 + \frac{x_2}{D-4} + \dots \right) \phi \underline{F_{\mu\nu}^r F_{\lambda\sigma}^r \bar{g}^{\mu\lambda} \bar{g}^{\nu\sigma}} \\ & \quad + \frac{1}{2} \left((D-4)^2 + (D-4)x_1 + x_2 + \dots \right) \underline{\phi^2 F_{\mu\nu}^r F_{\lambda\sigma}^r \bar{g}^{\mu\lambda} \bar{g}^{\nu\sigma}} \\ & \quad \left. + \dots \right\} \end{aligned}$$

← ordinary counterterms

← new vertices and new counterterms



Bare Weyl action

$$-\frac{1}{t^2} \int d^D x \sqrt{g} C_{\mu\nu\lambda\sigma}^2 = \frac{1}{t^2} \int d^D x \sqrt{\bar{g}} e^{(D-4)\phi} \bar{C}_{\mu\nu\lambda\sigma}^2$$

Wess-Zumino action
for conformal anomaly

Laurent expansion of b

$$b = \frac{1}{(4\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(D-4)^n}$$

$$b_n = b_n(t_r, e_r) \quad (n \geq 2)$$

$$b_1(t_r, e_r) = b_1 + b'_1(t_r, e_r)$$

Positive constant

$$b_1 = \frac{11N_F}{360} + \frac{40}{9}$$

Euler term

$$\begin{aligned} & b \int d^D x \sqrt{g} G_D \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \int d^D x \left\{ \left(\frac{b_1}{D-4} + \frac{b_2}{(D-4)^2} + \dots \right) \bar{G}_4 \right. \\ & \quad \left. + \left(b_1 + \frac{b_2}{D-4} + \dots \right) \left(2\phi \bar{\Delta}_4 \phi + \bar{E}_4 \phi + \frac{1}{18} \bar{R}^2 \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \left((D-4)b_1 + b_2 + \dots \right) \left(2\phi^2 \bar{\Delta}_4 \phi + \bar{E}_4 \phi^2 + \dots \right) + \dots \right\} \end{aligned}$$

← counterterms

← Wess-Zumino action and new counterterms

運動項 (Riegert作用) が誘導される

Conformal mode dynamics

Hathrellの共形異常の計算の再現

Hathrell, Ann.Phys.142(1982)34;
Ann.Phys.139(1982)136

Hathrellが用いたcounterterm

$$1/t^2 \rightarrow aC_{\mu\nu\lambda\sigma}^2 + bG_4 + cH^2 \quad H = R/(D-1)$$

曲がった時空上で3-loopの計算を実行し、bとcの
展開係数 (留数) の間に次の関係が成り立つことを示した:

$$b_2 = 2c_1$$

(＊物質の種類によらない)

D次元量子重力作用

$$G_D = G_4 + \frac{(D-3)^2(D-4)}{(D-1)^2(D-2)}R^2 \quad \longleftrightarrow \quad c = \frac{(D-3)^2(D-4)}{(D-2)}b$$

$$\longrightarrow c_1 = \frac{(D-3)^2}{D-2}b_2 = \frac{1}{2}b_2 + o(D-4)$$

共形異常はdiff. inv.を保障する

ベータ関数

$$\beta_t = -\left(\frac{n_F}{40} + \frac{10}{3}\right) \frac{t_r^3}{(4\pi)^2} - \frac{7n_F}{72} \frac{e_r^2 t_r^3}{(4\pi)^4} + o(t_r^5)$$

quantum gravity+QED

ランニング結合定数 ($\beta_t = -\beta_0 t_r^3$)

$$\begin{aligned}\Gamma_W &= \left\{ \frac{1}{\bar{t}_r^2} - 2\beta_0 \phi + \beta_0 \log \left(\frac{k^2}{\mu^2} \right) \right\} \bar{C}_{\mu\nu\lambda\sigma}^{r2} \\ &= \frac{1}{\bar{t}_r^2(p)} \sqrt{g_r} C_{\mu\nu\lambda\sigma}^{r2}.\end{aligned}$$

k : momentum defined
on the flat metric

where

$$\bar{t}_r^2(p) = \frac{1}{\beta_0 \log(p^2/\Lambda_{\text{QG}}^2)}$$

asymptotic freedom

力学的スケール: $\Lambda_{\text{QG}} = \mu \exp(-1/2\beta_0 t_r^2)$

物理的運動量: $p^2 = k^2/a^2$ with $a = e^\phi$

共形モードの非くり込み定理 ($Z_\phi = 1$)

$$\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} = \text{UV finite}$$

$$\frac{2b_1}{(4\pi)^2} k^4 \left[-3 \frac{t_r^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\bar{\epsilon}} - \log \frac{z^2}{\mu^2} + \frac{7}{6} \right) \right]$$

$$\frac{2b_1}{(4\pi)^2} k^4 \left[3 \frac{t_r^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\bar{\epsilon}} - \log \frac{z^2}{\mu^2} + \frac{7}{12} \right) \right]$$

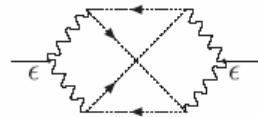
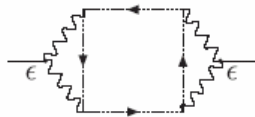
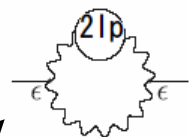
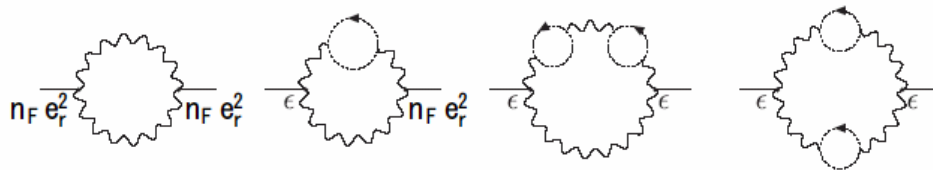
z: small fictitious mass (IR regularization)
ゲージ不変ではない → cancel out !

$$D = 4 - 2\epsilon$$

$$1/\bar{\epsilon} = 1/\epsilon - \gamma + \log 4\pi$$

propagator $1/k^4 \rightarrow 1/(k^2 + z^2)^2$

Two-point function of e^4

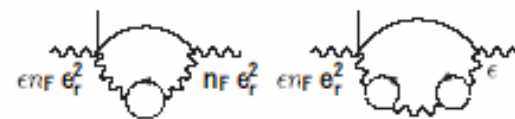
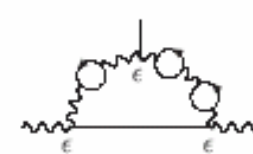
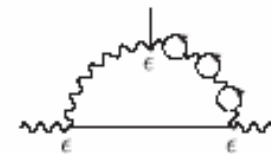
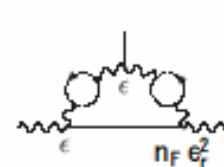
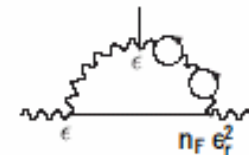
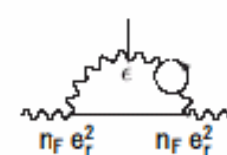
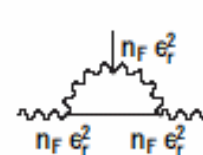
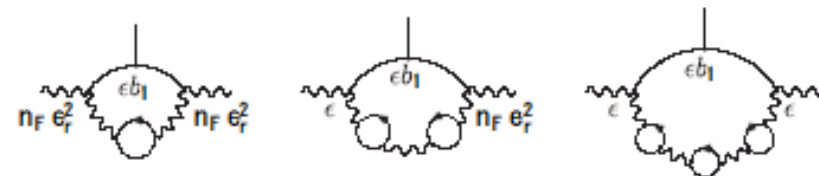


$$\epsilon = (4 - D)/2$$

And also, two-point function of e^6

**発散を $Z_\phi = 1$ で
取り除くことができる**

Vertex function ($\phi F_{\mu\nu}^2$) of e^6



ゲージ不変性とユニタリ性の再考

Einstein作用は結合定数の最低次でも複合場で与えられる：

$$M_P e^{2\phi} \left(-\nabla^2 \phi + t_r^2 h \nabla^2 h + \dots \right)$$

ゲージ不変な質量項が存在しない

→ いわゆるmassive ghostが存在しない

このことは、正計量と負計量のモードを独立なものと考えることができないことを表している

実際、共形変換 (ゲージ変換の一部) によってこれらのモードは交じり合う → 量子重力状態

非局所項 $\log(k^2/M_P^2)$ が存在しないので
力学的スケール Λ_{QG} をPlanckスケール M_P より小さく取れる
→ 量子重力的宇宙論

第四章

共形不変性と量子重力状態

Conformal Field Theory on $\mathbb{R} \times S^3$ from Quantized Gravity,
arXiv:0811.1647[hep-th]

ゲージ変換としての共形変換の生成子

結合定数“t”がゼロの極限で存在するゲージ自由度の固定方法

1. Weyl作用のゲージ自由度 κ^μ は完全に固定する

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h^T = \{h_{ij}^{TT}, h_i^T\} \quad \text{radiation gauge}$$

2. Conformal Killing vectorのゲージ自由度 ζ^μ を拘束条件で固定する

$$Q_\zeta = \int_{S^3} d\Omega_3 \zeta^\mu : \hat{T}_{\mu 0} : \rightarrow 15 \text{個の共形代数の生成子}$$

$$\delta_\zeta \phi = i[Q_\zeta, \phi] \quad \delta_\zeta h^T = i[Q_\zeta, h^T]$$

物理状態条件: $Q_\zeta |\text{phys}\rangle = 0$

共形モードの量子化

($R \times S^3$ 上で量子化)

Wess-Zumino作用

$$I_\phi = \int d\eta \int_{S^3} d\Omega_3 \left\{ -\frac{2b_1}{(4\pi)^2} \phi \left(\partial_\eta^4 - 2\Box_3 \partial_\eta^2 + \Box_3^2 + 4\partial_\eta^2 \right) \phi \right\}$$

新しい変数 $\chi = \partial_\eta \phi$ を導入して2階微分の作用にする

$$I_\phi = \int d\eta \int_{S^3} d\Omega_3 \left\{ -\frac{b_1}{8\pi^2} \left[(\partial_\eta \chi)^2 + 2\chi \Box_3 \chi - 4\chi^2 + (\Box_3 \phi)^2 \right] + v(\partial_\eta \phi - \chi) \right\}$$

→ Dirac quantization

Mode expansion

$$\begin{aligned} \phi = \frac{\pi}{2\sqrt{b_1}} & \left\{ 2(\hat{q} + \hat{p}\eta)Y_{00} + \sum_{J \geq \frac{1}{2}} \sum_M \frac{1}{\sqrt{J(2J+1)}} \left(a_{JM} e^{-i2J\eta} Y_{JM} + a_{JM}^\dagger e^{i2J\eta} Y_{JM}^* \right) \right. \\ & \left. + \sum_{J \geq 0} \sum_M \frac{1}{\sqrt{(J+1)(2J+1)}} \left(b_{JM} e^{-i(2J+2)\eta} Y_{JM} + b_{JM}^\dagger e^{i(2J+2)\eta} Y_{JM}^* \right) \right\} \end{aligned}$$

where

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i, \quad [a_{J_1 M_1}, a_{J_2 M_2}^\dagger] = \delta_{J_1 J_2} \delta_{M_1 M_2}, \quad [b_{J_1 M_1}, b_{J_2 M_2}^\dagger] = -\delta_{J_1 J_2} \delta_{M_1 M_2}$$

ハミルトニアン

$$H^\phi = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + b_1 + \sum_{J \geq 0} \sum_M \{2J a_{JM}^\dagger a_{JM} - (2J+2)b_{JM}^\dagger b_{JM}\}$$

特殊共形変換

← SU(2)×SU(2) Clebsch-Gordan

$$Q_M^\phi = \left(\sqrt{2b_1} - i\hat{p}\right) a_{\frac{1}{2}M} + \sum_{J \geq 0} \sum_{M_1} \sum_{M_2} C_{JM_1, J+\frac{1}{2}M_2}^{\frac{1}{2}M} \left\{ \alpha(J) \epsilon_{M_1} a_{J-M_1}^\dagger a_{J+\frac{1}{2}M_2} \right. \\ \left. + \beta(J) \epsilon_{M_1} b_{J-M_1}^\dagger b_{J+\frac{1}{2}M_2} + \epsilon_{M_2} a_{J+\frac{1}{2}-M_2}^\dagger b_{JM_1} \right\}$$

共形代数

$$[Q_M, Q_N^\dagger] = 2\delta_{MN}H + 2R_{MN} \quad \leftarrow S^3 \text{ 上の回転生成子}$$

特殊共形変換は正計量と負計量のモードを混ぜる

$$[Q_M^\phi, b_{JM_1}^\dagger] = - \sum_{M_2} \epsilon_{M_2} C_{JM_1, J+\frac{1}{2}-M_2}^{\frac{1}{2}M} a_{J+\frac{1}{2}M_2}^\dagger \\ - \beta \left(J - \frac{1}{2} \right) \sum_{M_2} \epsilon_{M_2} C_{JM_1, J-\frac{1}{2}-M_2}^{\frac{1}{2}M} b_{J-\frac{1}{2}M_2}^\dagger$$

***量子論的に閉じる共形変換の生成子は
Riegert作用とWeyl作用から得られる**

$$\alpha(J) = \sqrt{2J(2J+2)}$$

$$\beta(J) = -\sqrt{(2J+1)(2J+3)}$$

量子重力状態

Confomal symmetry = diffeomorphism invariance

→ 物理状態条件 = Wheeler-DeWitt拘束条件

$$(H - 4)|\text{phys}\rangle = Q_M|\text{phys}\rangle = R_{MN}|\text{phys}\rangle = 0$$

次の条件を満たす複合生成演算子 $\mathcal{R}_n$ を求める

$$[Q_M, \mathcal{R}_n] = [R_{MN}, \mathcal{R}_n] = 0$$

vacuum state

$$|\Omega\rangle = e^{-2b_1\phi}|0\rangle$$

$$Q_M^\dagger|\Omega\rangle = 0$$

then

$$\begin{aligned} |\text{phys}\rangle &= \mathcal{R}_n(a_{JM}^\dagger, b_{JM}^\dagger, \dots) e^{ip\sqrt{2b_1}\phi} |\Omega\rangle \\ &= \mathcal{R}_n(a_{JM}^\dagger, b_{JM}^\dagger, \dots) e^{\gamma_n\phi} |\Omega\rangle \end{aligned}$$

$$H = 4 \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} p &= -i\gamma_n/\sqrt{2b_1}, & \gamma_n &= 2b_1 \left(1 - \sqrt{1 - (4 - n)/b_1}\right) \\ \text{pure imaginary} & & &= 4 - n + o(1/b_1) \end{aligned}$$

→ スカラー曲率のような実数の場で与えられる

2点相関関数の正定値性

Physical states $\longleftrightarrow$ Diffeomorphism invariant fields

$$|\text{phys}\rangle = \lim_{\eta \rightarrow i\infty} e^{-i4\eta} \mathcal{O}(\eta, \mathbf{x}) |\Omega\rangle$$

共形場演算子 = 偶数個の微分を含む実演算子

Scalar curvature operator (at large b_1)

$$\sqrt{-g}R \simeq e^{2\phi}(-\partial^2\phi)$$

Using the correlation function $\langle \phi(x)\phi(y) \rangle = -\frac{1}{4b_1} \log(|x-y|^2)$

$$\langle \sqrt{-g}R(x)\sqrt{-g}R(y) \rangle = \frac{A}{|x-y|^{2\Delta_R}} \quad \Delta_R = 2 + \frac{1}{b_1}$$

$A > 0 \longleftrightarrow b_1 > 0$ (right sign of WZ action)

第五章

量子重力的宇宙論

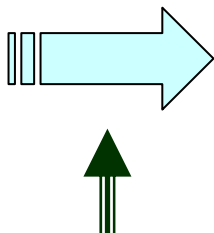
From CFT Spectra to CMB Multipoles in Quantum Gravity Cosmology,
arXiv:0908.0192[astro-ph] with S. Horata and T. Yukawa

量子重力的宇宙論

宇宙の時間発展 = 共形不変性が破れていく過程

時空の相転移

量子時空
(スケール不変)



古典時空
(Einstein時空)

新しいエネルギースケール $\Lambda_{\text{QG}} \simeq 10^{17} \text{ GeV}$

相関距離 $\xi_{\Lambda} = 1/\Lambda_{\text{QG}} (\gg l_{\text{pl}})$

インフレーション解

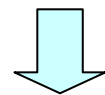
質量スケールの関係 $m_{\text{pl}} \gg \Lambda_{\text{QG}}$

運動方程式 (WZ + Einstein)

$$-b_1 \partial_\eta^4 \phi + 3\pi m_{\text{pl}}^2 e^{2\phi} \left(\partial_\eta^2 \phi + \partial_\eta \phi \partial_\eta \phi \right) = 0$$

↑ WZ action

共形不変性はPlanckスケールで破れ始める
→ インフレーション宇宙



結合定数の増大

共形不変性が力学的エネルギースケールで完全に壊れる
→ Friedmann宇宙

時間に依存したランニング結合定数と相転移のモデル

宇宙の膨張 → 時間 (唯一のスケール)

$$-\tau \frac{d}{d\tau} \bar{t}_r(\tau) = \beta(\bar{t}_r(\tau))$$

$$d\eta = a(\tau) d\tau$$

↑
proper time

力学的Wess-Zumino係数

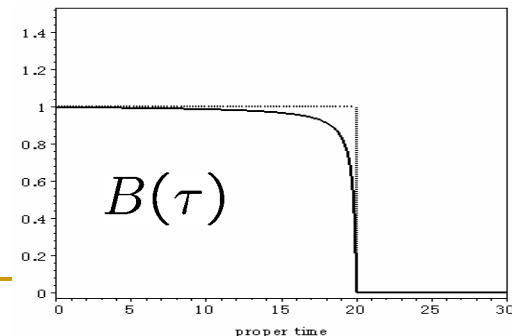
$$b_1 \rightarrow b_1 \left(1 - a_1 \bar{t}_r^2 + \cdots \right) = b_1 B(\bar{t}_r) \quad (a_1 > 0)$$

where

$$B(\tau) = \frac{1}{\left(1 + \frac{a_1}{\kappa} \bar{t}_r^2(\tau) \right)^\kappa} \quad (0 < \kappa \leq 1)$$

力学的WZ係数は力学的時間スケール

$\tau = 1/\Lambda_{\text{QG}} (\equiv \tau_\Lambda)$ で消える



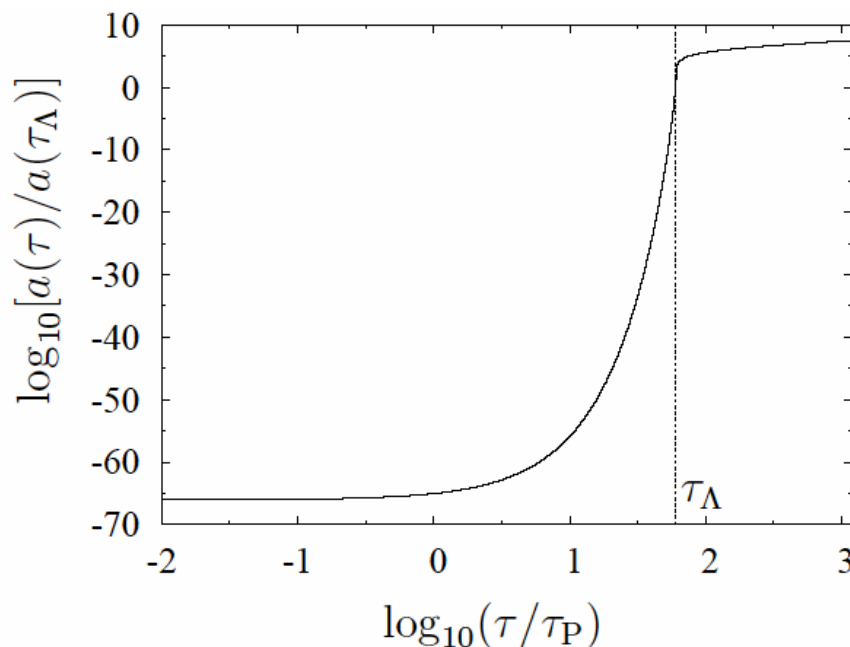
Hubble変数を用いた運動方程式

$$B(\tau) \left(\ddot{H} + 7H\ddot{H} + 4\dot{H}^2 + 18H^2\dot{H} + 6H^4 \right) - 3H_D^2 \left(\dot{H} + 2H^2 \right) = 0$$

Einstein作用

インフレーション解 (安定解)

$$H = H_D \rightarrow a(\tau) = e^{\phi(\tau)} \propto e^{H_D \tau}$$



Hubble変数:

$$H = \dot{a}(\tau)/a(\tau) = \dot{\phi}(\tau)$$

$$H_D = m_{\text{pl}} \sqrt{\pi/b_1}$$

$$(M_P = 1/\sqrt{8\pi G} < H_D < m_{\text{pl}} = 1/\sqrt{G})$$

エネルギー保存とビッグバン

$$B(\tau) \left(2H\ddot{H} - \dot{H}^2 + 6H^2\dot{H} + 3H^4 \right) - 3H_D^2 H^2 + 8\pi^2 \rho / b_1 = 0$$

$$B(\tau) \rightarrow 0$$

物質密度: ρ

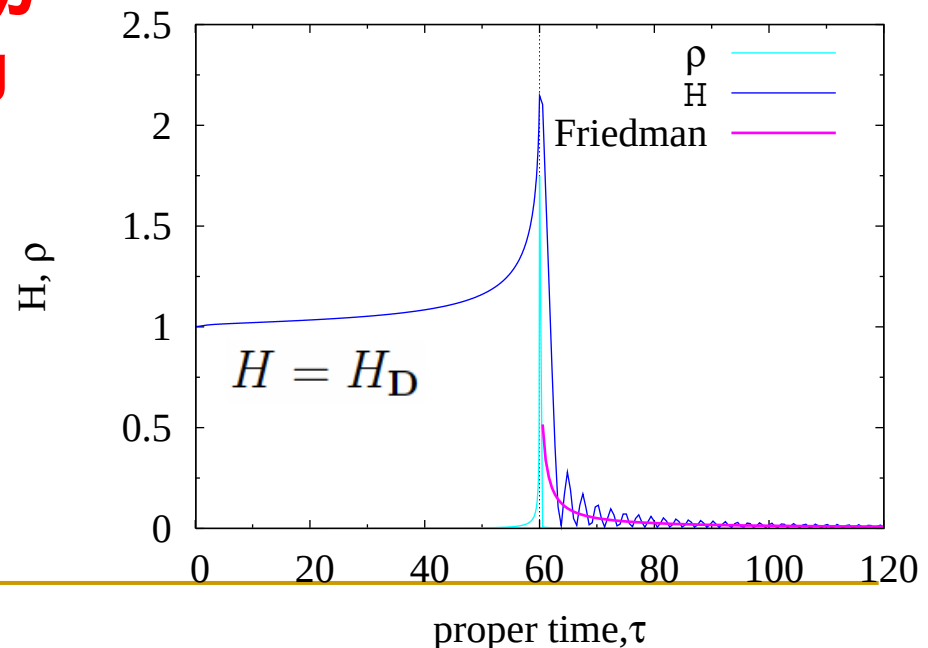
4階微分重力場の余分な自由度が
物質に転化する → Big bang

初期物質密度

$$\rho = 0 \quad (H = H_D)$$

相転移点での物質密度

$$\rho = 3 \frac{b_1}{8\pi^2} H_D^2 H^2$$



Einstein相 ($E < \Lambda_{\text{QG}}$)

低エネルギー有効理論 (derivative expansion)

$$I_{\text{low}} = \int d^4x \sqrt{-g} \{ \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \cdots \}$$

tree + 1-loop tree

$$\mathcal{L}_2 = \frac{M_{\text{P}}^2}{2} R + \mathcal{L}_2^{\text{M}}$$

cf. chiral perturbation theory

**最低次のEinstein方程式 $M_{\text{P}}^2 R_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{\text{M}}$ を用いて
高階微分項の形を制限すると**

$$\mathcal{L}_4 = \frac{\alpha}{(4\pi)^2} R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

1-loop補正: $\alpha(E) = \alpha_0 + \zeta \log(E^2/\Lambda_{\text{QG}}^2)$, ($\zeta > 0$)

現象論的パラメータ α_0 を正とすると高階微分項はirrelevantになる

宇宙発展のシナリオ

e-foldings数

$$\mathcal{N}_e = \log \frac{a(\tau_\Lambda)}{a(\tau_P)} \simeq \frac{m_{\text{pl}}}{\Lambda_{\text{QG}}}$$

→ $\Lambda_{\text{QG}} \simeq 10^{17} \text{ GeV}$

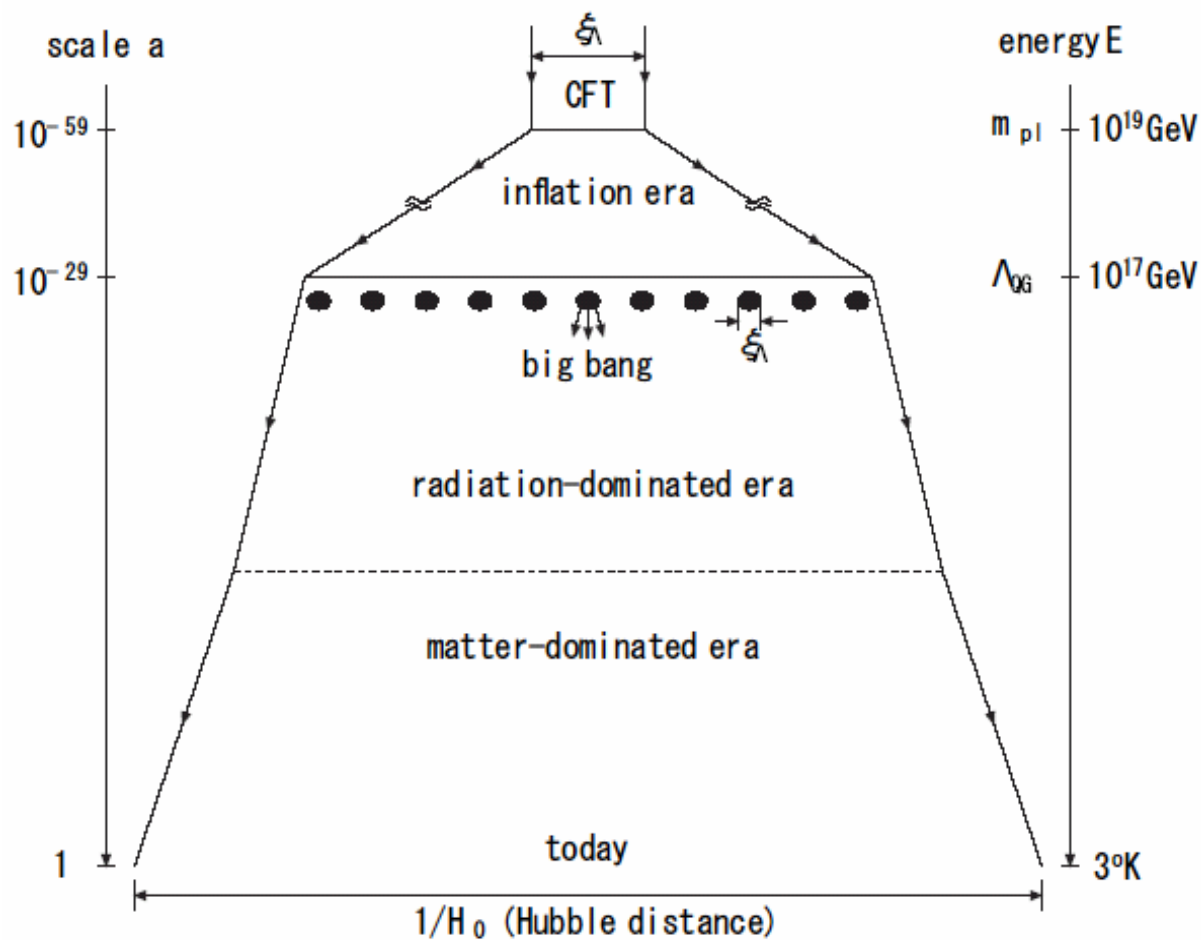
宇宙の膨張率: 10^{59}

インフレーション期間:

$$10^{30} \quad (\Leftrightarrow \mathcal{N}_e = 70)$$

フリードマン期間: :

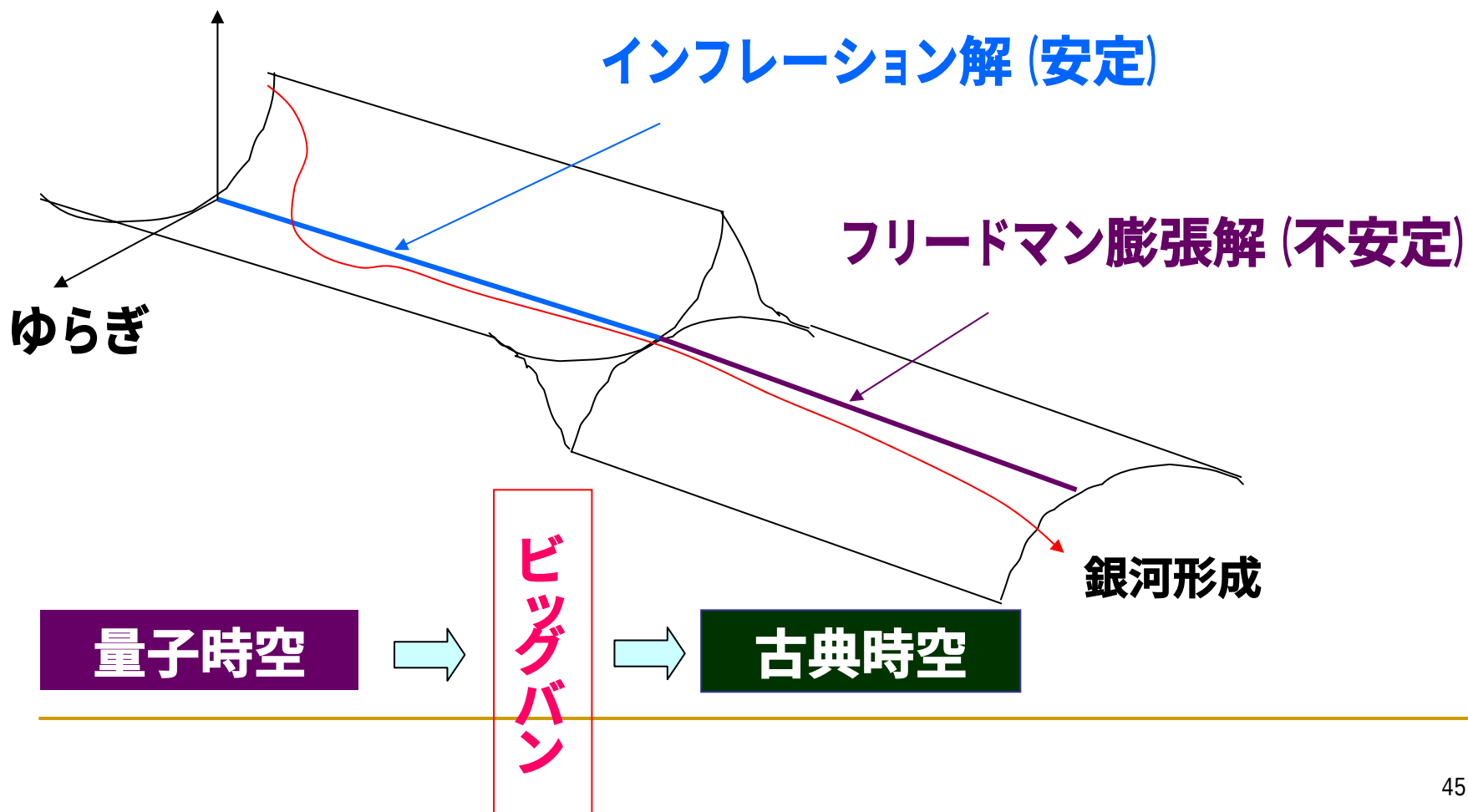
$$10^{29} \quad (\Leftrightarrow 10^{17} \text{ GeV} / 2.7 \text{ K})$$



$$1/H_0 \simeq 10^{59} \xi_\Lambda$$

ゆらぎの時間発展

インフレーションの時期にゆらぎが小さくなる。



Bardeen's gravitational potentials

$$ds^2 = a^2[-(1 + 2\Psi)d\eta^2 + (1 + 2\Phi)d\mathbf{x}^2]$$

Evolution equation for gravitational potentials

$$\begin{aligned} B(\tau) \Big\{ & -2\partial_\eta^4 \Phi - 2\partial_\eta \phi \partial_\eta^3 \Phi + \left(-8\partial_\eta^2 \phi + \frac{10}{3} \partial^2\right) \partial_\eta^2 \Phi \\ & + \left(-12\partial_\eta^3 \phi + \frac{10}{3} \partial_\eta \phi \partial^2\right) \partial_\eta \Phi + \left(\frac{16}{3} \partial_\eta^2 \phi - \frac{4}{3} \partial^2\right) \partial^2 \Phi \\ & + 2\partial_\eta \phi \partial_\eta^3 \Psi + \left(8\partial_\eta^2 \phi + \frac{2}{3} \partial^2\right) \partial_\eta^2 \Psi + \left(12\partial_\eta^3 \phi - \frac{10}{3} \partial_\eta \phi \partial^2\right) \partial_\eta \Psi \\ & + \left(-\frac{16}{3} \partial_\eta^2 \phi - \frac{2}{3} \partial^2\right) \partial^2 \Psi \Big\} \\ & + H_D^2 e^{2\phi} \Big\{ 6\partial_\eta^2 \Phi + 18\partial_\eta \phi \partial_\eta \Phi - 4\partial^2 \Phi - 6\partial_\eta \phi \partial_\eta \Psi \\ & + \left(12\partial_\eta^2 \phi + 12\partial_\eta \phi \partial_\eta \phi - 2\partial^2\right) \Psi \Big\} = 0 \end{aligned}$$

Constraint equation

$$\begin{aligned} & \frac{2}{t_r^2(\tau)} \left\{ 4\partial_\eta^2 \Phi - \frac{4}{3} \partial^2 \Phi - 4\partial_\eta^2 \Psi + \frac{4}{3} \partial^2 \Psi \right\} \\ & + B(\tau) \left\{ \frac{4}{3} \partial_\eta^2 \Phi + 4\partial_\eta \phi \partial_\eta \Phi + \left(\frac{28}{3} \partial_\eta^2 \phi - \frac{8}{3} \partial_\eta \phi \partial_\eta \phi - \frac{8}{9} \partial^2\right) \Phi \right. \\ & \quad \left. - \frac{4}{3} \partial_\eta \phi \partial_\eta \Psi + \left(-\frac{4}{3} \partial_\eta^2 \phi + \frac{8}{3} \partial_\eta \phi \partial_\eta \phi - \frac{4}{9} \partial^2\right) \Psi \right\} \\ & + H_D^2 e^{2\phi} \{-2\Phi - 2\Psi\} = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{initially } \Phi(\tau_i) = \Psi(\tau_i) \\ (t_r = 0) \\ \text{finally } \Phi(\tau_\Lambda) = -\Psi(\tau_\Lambda) \\ (t_r = \infty) \end{cases}$$

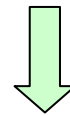
スケール不変なスペクトル

初期条件＝スケール不変なCFTスペクトル $\Phi = \Psi = \varphi$

$$\langle \varphi(\tau_i, \mathbf{x}) \varphi(\tau_i, \mathbf{x}') \rangle = -\frac{1}{4b_1} \log(m^2 |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2) \quad \begin{array}{l} \tau_i = 1/E_i \\ (E_i \geq H_D) \end{array}$$

In Fourier space

$$-\log(m^2 |\mathbf{x}|^2) = \int_{k>\epsilon} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{4\pi^2}{k^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \log\left(\frac{m^2}{\epsilon^2 e^{2\gamma-2}}\right)$$



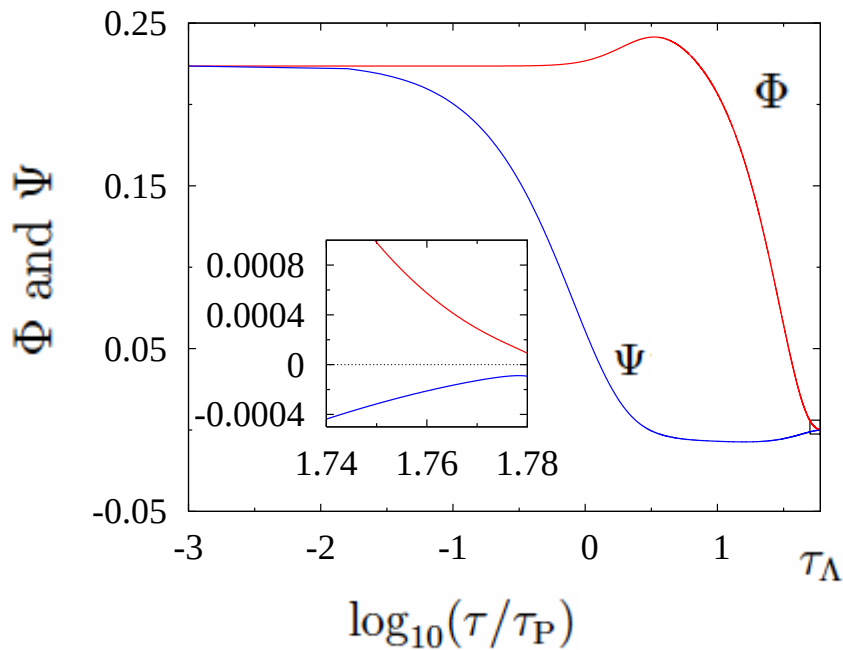
$$P(\tau_i, k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \langle |\tilde{\varphi}(\tau_i, \mathbf{k})|^2 \rangle = \frac{1}{2b_1}$$

Delta function
In Fourier space

$b_1 \simeq 10$
for GUT models

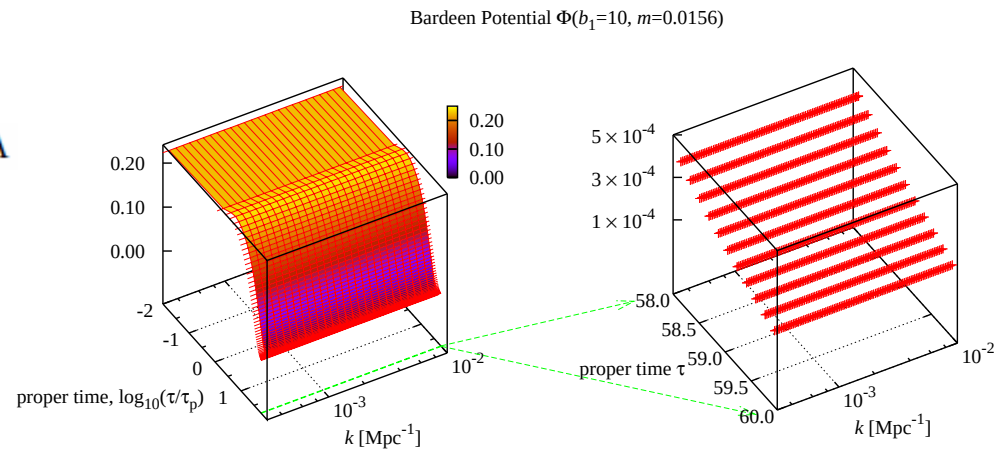
Harrison-Zel'dovich-Peebles spectrum

重力ポテンシャルの時間発展 (線形近似)



相転移点での揺らぎの大きさ

$$\frac{\delta R}{R} \sim \frac{\Lambda_{\text{QG}}^2}{12H_{\text{D}}^2} \sim 10^{-5}$$



非ガウス性と相転移点でのスペクトル

Non-Gaussianity in initial CFT spectrum

$$\delta_R = \frac{\delta R}{12m^2} = \frac{1}{2m^2} e^{2\varphi} \left(-\partial_i \partial^i \varphi - \partial_i \varphi \partial^i \varphi \right)$$

In Fourier space $\tilde{\delta}_R(k) = \frac{k^2}{2m^2} \tilde{\varphi}_{\text{NL}}(k)$

$$\tilde{\varphi}_{\text{NL}}(k) = \tilde{\varphi}(k) + \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \tilde{\varphi}(\mathbf{k}/2 - \mathbf{q}) \tilde{\varphi}(\mathbf{q} + \mathbf{k}/2) \left(\frac{3}{4} + \frac{q^2}{k^2} \right) + o(\tilde{\varphi}^3)$$

→ non-Gaussianity parameter is $f_{\text{NL}} \simeq 1$

**これは、diffeomorphism inv.からの帰結なので、
このオーダーが宇宙進化の過程で保たれる
→ 相転移点では非ガウス性の効果は無視できる**

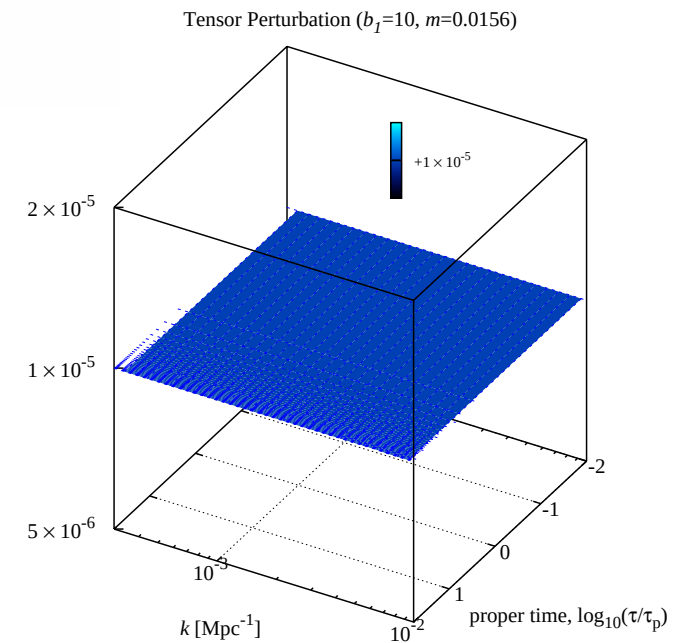
テンソルゆらぎ

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2}{t_r^2(\tau)} \left\{ \partial_\eta^4 h_{ij}^{\text{TT}} - 2\partial^2 \partial_\eta^2 h_{ij}^{\text{TT}} + \partial^4 h_{ij}^{\text{TT}} \right\} \\
 & + \frac{b_1}{8\pi^2} B(\tau) \left\{ \left(\frac{1}{3} \partial_\eta^2 \phi + \frac{4}{3} \partial_\eta \phi \partial_\eta \phi \right) \partial_\eta^2 h_{ij}^{\text{TT}} + \left(\frac{1}{3} \partial_\eta^3 \phi + \frac{8}{3} \partial_\eta^2 \phi \partial_\eta \phi \right) \partial_\eta h_{ij}^{\text{TT}} \right. \\
 & \quad \left. + \left(-\frac{7}{3} \partial_\eta^2 \phi + \frac{2}{3} \partial_\eta \phi \partial_\eta \phi \right) \partial^2 h_{ij}^{\text{TT}} \right\} \\
 & + \frac{b_1}{8\pi^2} H_D^2 e^{2\phi} \left\{ -\frac{1}{2} \partial_\eta^2 h_{ij}^{\text{TT}} - \partial_\eta \phi \partial_\eta h_{ij}^{\text{TT}} + \frac{1}{2} \partial^2 h_{ij}^{\text{TT}} \right\} = 0
 \end{aligned}$$

Initial CFT spectrum

$$P_t(k) = A_t \left(\frac{k}{m} \right)^{n_t}, \quad n_t = 0$$

漸近自由性のためテンソルゆらぎの初期値は小さいけれども、その値がインフレーションの期間保たれるので、相転移点では無視できない → $r = P_t / P_s$



相関距離の効果

相関距離 $\xi_\Lambda = 1/\Lambda_{\text{QG}} (\gg l_{\text{pl}})$

$$\Lambda_{\text{QG}} \simeq 10^{17} \text{ GeV}$$

→インフレーションが始まる前の初期スペクトルには
 ξ_Λ より大きなゆらぎは存在しない

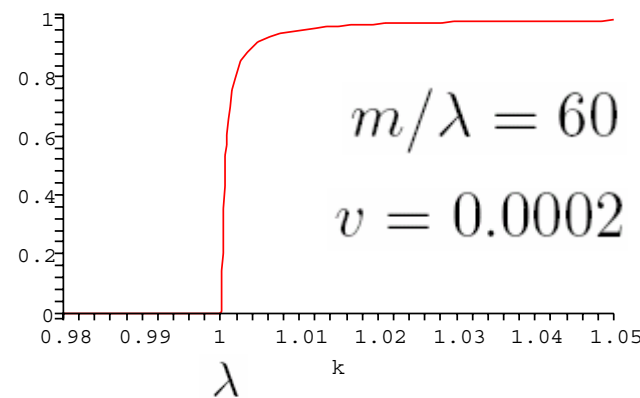
→初期に存在しないものは共動座標系でみて現在も存在しない

$1/\lambda \simeq 4000 \text{ Mpc}$ (この値は宇宙膨張のシナリオと矛盾しない)

$$\lambda = a(\tau_i) \Lambda_{\text{QG}} \quad a(\tau_i) \simeq 10^{-59}$$

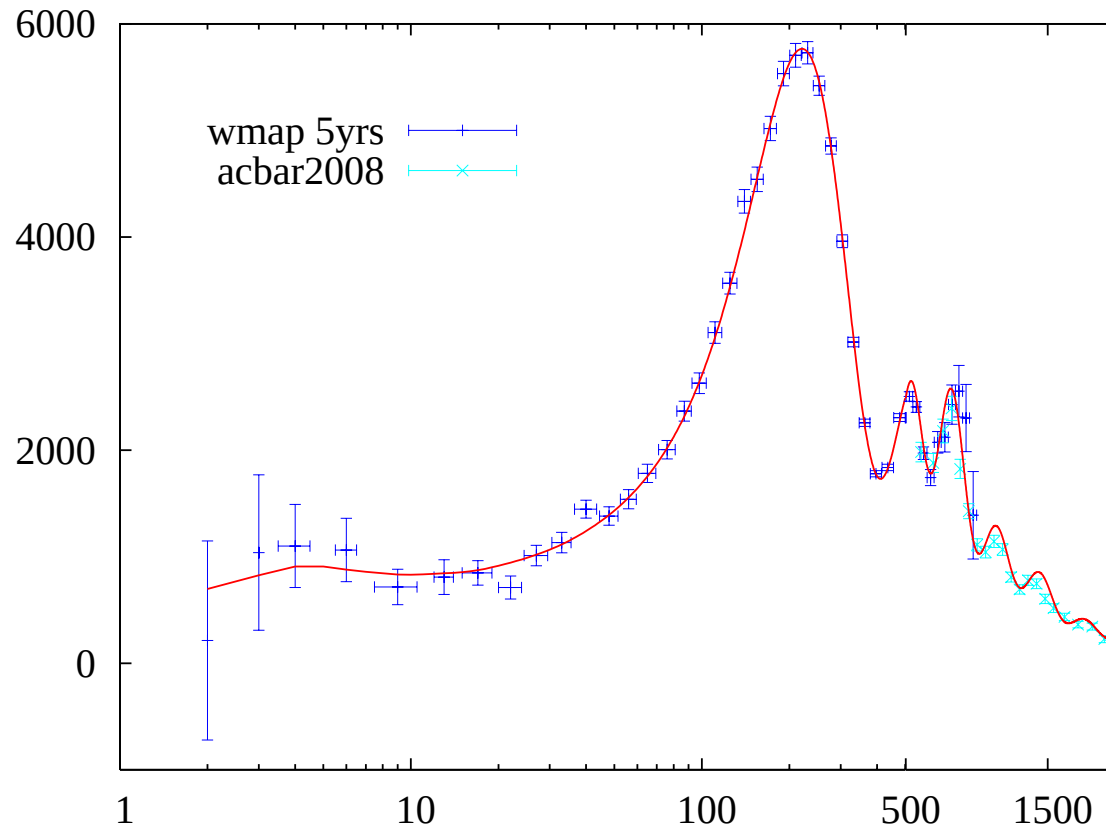
この効果をrunning couplingを用いて表す

$$P_s(k) = A_s \left(\frac{k}{m} \right)^{v/\log(k^2/\lambda^2)}$$



Indexがrunning couplingの補正を受ける

TT power spectrum



$$\lambda = 0.00026 \text{ Mpc}^{-1}$$

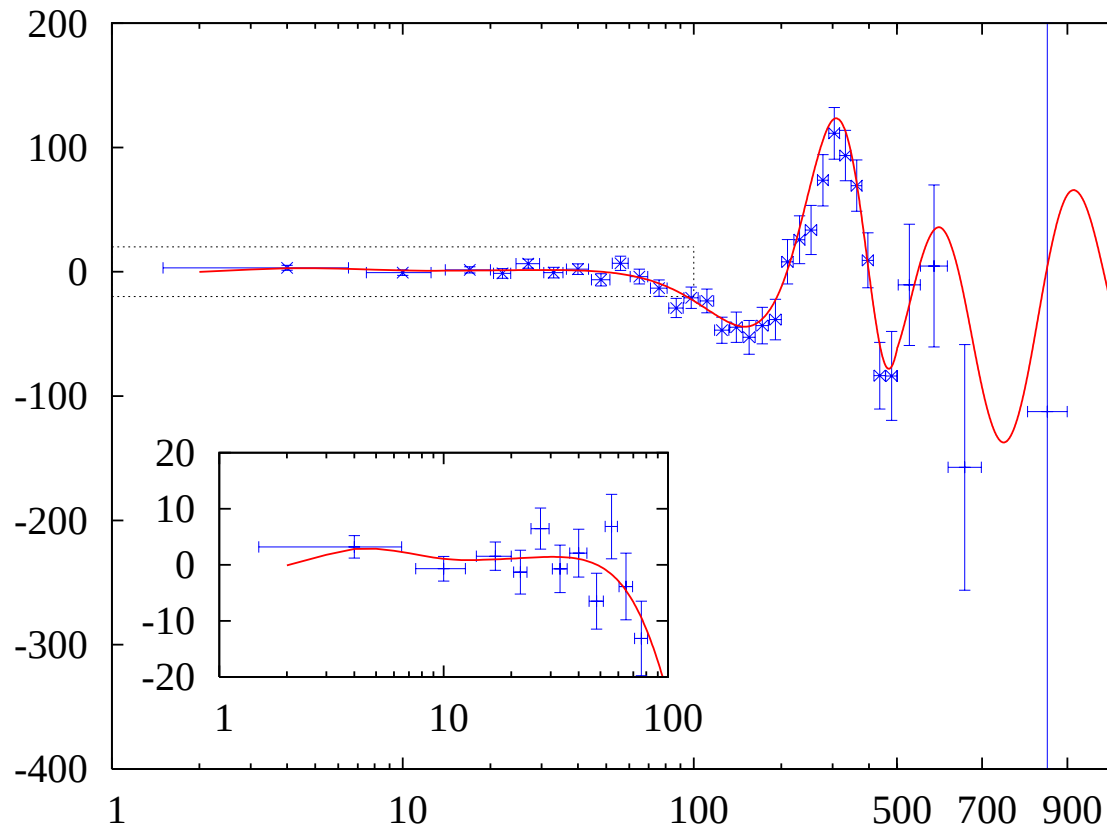
$$r = 0.06$$

$$\tau_e = 0.08$$

$$\Omega_c = 0.20, \Omega_b = 0.043, \Omega_{\text{vac}} = 0.757, H_0 = 73$$

$$[\chi^2/\text{dof} = 1.10 \text{ } (2 \leq l \leq 1000)]$$

TE power spectrum



$$[\chi^2/\text{dof} = 0.977 \ (2 \leq l \leq 1000)]$$

第六章

結論

量子重力の新しい定式化

- 共形モードを非摂動的に量子化することで量子重力をCFTとして定式化した。
- CFTからの摂動展開として繰り込み可能な量子重力を構築した。
- 3ループの次数でくり込み計算がうまくいくことを具体的に示した。
- ゲージ対称性として共形不変性が存在することから、ゴーストモードがゲージ不変でないことを示した。
- 量子論的に閉じた共形代数を構成し、共形変換が正計量と負計量のモードを混ぜることを示した。
- 共形不変性の条件から物理状態を求めた。

量子重力的宇宙論

- 安定なインフレーション解が存在することを示した。
- 力学的エネルギースケール $\Lambda_{\text{QG}} \simeq 10^{17} \text{ GeV}$ で時空の相転移が起き、そのさい重力場の余分な自由度が開放されることによってビッグバンが起きることを提唱した。
- 重力場が無次元の場であることに由来するその対数相関からスケール不変なスペクトルを導出した。
- CMB多重極を計算して観測結果と比較した。
- 大角度成分の落ち込みを量子重力の力学的スケールを用いて説明した。

格子重力 (DT法) との関係

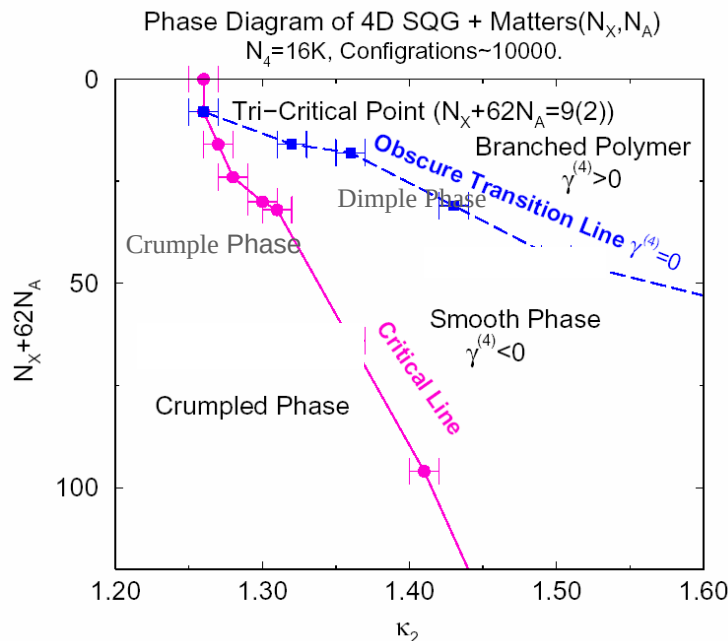
String susceptibility $Z \sim N_4^{\gamma_{\text{st}}^{(4)}-3} \exp(\mu_c N_4)$

一方、連続理論からの予言は

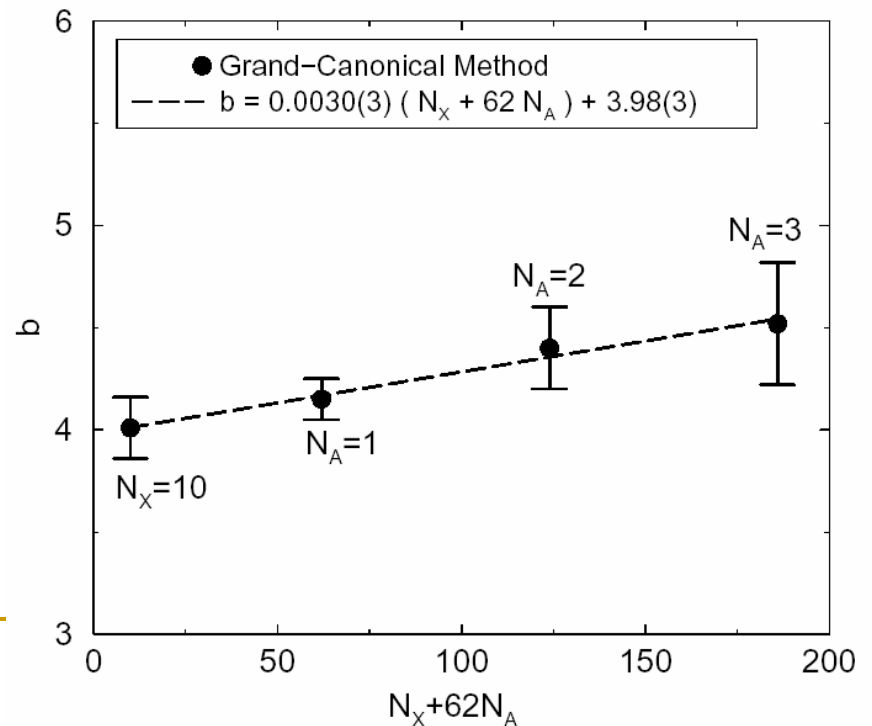
$$\gamma_{\text{st}}^{(4)} = 2 - \frac{1}{2} \left(b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_1} \right)$$

$$b_1 = \frac{1}{360} (N_X + 62N_A) + \frac{769}{180} - a_1 t_r^2$$

(0.0028) (4.27)



Horata, Egawa, Yukawa (2002)



付録

Canonical Quantization on $R \times S^3$

$R \times S^3$ background metric ($\rightarrow$ mode-expansions become simple)

$$\begin{aligned} d\hat{s}_{R \times S^3}^2 &= \hat{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -d\eta^2 + \hat{\gamma}_{ij} dx^i dx^j \\ &= -d\eta^2 + \frac{1}{4}(d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 + 2 \cos \beta d\alpha d\gamma) \\ \hat{R}_{ijkl} &= (\hat{\gamma}_{ik} \hat{\gamma}_{jl} - \hat{\gamma}_{il} \hat{\gamma}_{jk}), \quad \hat{R}_{ij} = 2\hat{\gamma}_{ij}, \quad \hat{R} = 6 \quad \left[\hat{C}_{\mu\nu\lambda\sigma}^2 = \hat{G}_4 = 0 \right] \\ d\Omega_3 &= d^3x \sqrt{\hat{\gamma}} = \frac{1}{8} \sin \beta d\alpha d\beta d\gamma \quad V_3 = \int d\Omega_3 = 2\pi^2 \end{aligned}$$

Isometry of $S^3 = SU(2) \times SU(2)$

Tensor harmonics that belongs to rep. $(J + \varepsilon_n, J - \varepsilon_n)$ with $\varepsilon_n = \pm n/2$

$$\square_3 Y_{J(M\varepsilon_n)}^{i_1 \dots i_n} = \{-2J(2J+2) + n\} Y_{J(M\varepsilon_n)}^{i_1 \dots i_n}$$

$$Y_{J(M\varepsilon_n)}^{i_1 \dots i_n*} = (-1)^n \epsilon_M Y_{J(-M\varepsilon_n)}^{i_1 \dots i_n},$$

$$\int_{S^3} d\Omega_3 Y_{J_1(M_1\varepsilon_n^1)}^{i_1 \dots i_n*} Y_{J_2(M_2\varepsilon_n^2)}^{i_1 \dots i_n} = \delta_{J_1 J_2} \delta_{M_1 M_2} \delta_{\varepsilon_n^1 \varepsilon_n^2}$$

$$M = (m, m')$$

$$\epsilon_M = (-1)^{m-m'}$$

Laplacian
on S^3

Conformal Algebra on $\mathbb{R} \times S^3$

The generator of conformal algebra

$$Q_\zeta = \int_{S^3} d\Omega_3 \zeta^\mu : \hat{T}_{\mu 0} : \quad \delta_\zeta X = i[Q_\zeta, X] \quad \hat{T}^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-\hat{g}}} \frac{\delta I_{\text{CFT}}}{\delta \hat{g}_{\mu\nu}}$$

15 conformal Killing vectors on $\mathbb{R} \times S^3$

Time translation: $\zeta_T^\mu = (1, 0, 0, 0)$

Rotation on S^3 : $\zeta_R^\mu = (0, \zeta_R^i) \quad (\zeta_R^i)_{MN} = i \frac{V_3}{4} \{ Y_{\frac{1}{2}M}^* \hat{\nabla}^i Y_{\frac{1}{2}N} - Y_{\frac{1}{2}N} \hat{\nabla}^i Y_{\frac{1}{2}M}^* \}$

Special conformal: $\zeta_S^\mu = (\zeta_S^0, \zeta_S^i)$
 $(\zeta_S^0)_M = \frac{1}{2} \sqrt{V_3} e^{i\eta} Y_{\frac{1}{2}M}^*, \quad (\zeta_S^i)_M = -\frac{i}{2} \sqrt{V_3} e^{i\eta} \hat{\nabla}^i Y_{\frac{1}{2}M}^*$

Conformal Algebra on $R \times S^3$

$$Q_\zeta = \int_{S^3} d\Omega_3 \zeta^\mu : \hat{T}_{\mu 0} : \quad \delta_\zeta X = i[Q_\zeta, X]$$

Conformal algebra

15 generators

H : Hamiltonian

R_{MN} : S^3 rotation

$Q_M \quad Q_M^\dagger$

: special conf.

+ dilatation transf.

[=4 vectors of $SO(4)$]

$$[Q_M, Q_N^\dagger] = 2\delta_{MN}H + 2R_{MN},$$

$$[H, Q_M] = -Q_M,$$

$$[H, R_{MN}] = [Q_M, Q_N] = 0,$$

$$[Q_M, R_{M_1 M_2}] = \delta_{M M_2} Q_{M_1} - \epsilon_{M_1 \epsilon_{M_2}} \delta_{M-M_1} Q_{-M_2},$$

$$[R_{M_1 M_2}, R_{M_3 M_4}] = \delta_{M_1 M_4} R_{M_3 M_2} - \epsilon_{M_1 \epsilon_{M_2}} \delta_{-M_2 M_4} R_{M_3 - M_1} \\ - \delta_{M_2 M_3} R_{M_1 M_4} + \epsilon_{M_1 \epsilon_{M_2}} \delta_{-M_1 M_3} R_{-M_2 M_4}$$

$$R_{MN} = -\epsilon_M \epsilon_N R_{-N-M}, \quad R_{MN}^\dagger = R_{NM} \rightarrow 6 \text{ generators of } SU(2) \times SU(2)$$

Traceless Tensor Fields

Traceless tensor mode is decomposed as

$$h_{00} = h, \quad h_{0i} = h_i, \quad h_{ij} = h_{ij}^{\text{tr}} + \frac{1}{3} \hat{\gamma}_{ij} h$$

Take transverse gauge by using the four κ^μ gauge parameters

$$\hat{\nabla}^i h_i = \hat{\nabla}^i h_{ij}^{\text{tr}} = 0 \quad \Rightarrow \quad h_i = h_i^{\text{T}}, \quad h_{ij}^{\text{tr}} = h_{ij}^{\text{TT}}$$

Gauge-fixed Weyl action

$$I_h = \int d\eta \int_{S^3} d\Omega_3 \left\{ -\frac{1}{2} h_{ij}^{\text{TT}} \left(\partial_\eta^4 - 2\Box_3 \partial_\eta^2 + \Box_3^2 + 8\partial_\eta^2 - 4\Box_3 + 4 \right) h_{\text{TT}}^{ij} \right. \\ \left. + h_i^{\text{T}} \underline{(\Box_3 + 2)} \left(-\partial_\eta^2 + \Box_3 - 2 \right) h_{\text{T}}^i \right. \\ \left. - \frac{1}{27} h \underline{(16\Box_3 + 27)} \Box_3 h \right\}$$



Furthermore, we take radiation gauge+ $h = h_i^{\text{T}}|_{J=\frac{1}{2}} = 0$

→ residual gauge DOF = conformal symmetry

Vector harmonics = $(J + y, J - y)$ rep. with $y = \pm 1/2$
 Tensor harmonics = $(J + x, J - x)$ rep. with $x = \pm 1$ (polarizations)

Transverse-traceless tensor mode

$$h_{\text{TT}}^{ij} = \frac{1}{4} \sum_{J \geq 1} \sum_{M,x} \frac{1}{\sqrt{J(2J+1)}} \left\{ c_{J(Mx)} e^{-i2J\eta} Y_{J(Mx)}^{ij} + c_{J(Mx)}^\dagger e^{i2J\eta} Y_{J(Mx)}^{ij*} \right\} \\ + \frac{1}{4} \sum_{J \geq 1} \sum_{M,x} \frac{1}{\sqrt{(J+1)(2J+1)}} \left\{ d_{J(Mx)} e^{-i(2J+2)\eta} Y_{J(Mx)}^{ij} \right. \\ \left. + d_{J(Mx)}^\dagger e^{i(2J+2)\eta} Y_{J(Mx)}^{ij*} \right\}$$

Transverse vector mode

$$h_{\text{T}}^i = \frac{1}{2} \sum_{J \geq 1} \sum_{M,y} \frac{i}{\sqrt{(2J-1)(2J+1)(2J+3)}} \left\{ e_{J(My)} e^{-i(2J+1)\eta} Y_{J(My)}^i \right. \\ \left. - e_{J(My)}^\dagger e^{i(2J+1)\eta} Y_{J(My)}^{i*} \right\}$$

Commutators

$$\left[c_{J_1(M_1x_1)}, c_{J_2(M_2x_2)}^\dagger \right] = - \left[d_{J_1(M_1x_1)}, d_{J_2(M_2x_2)}^\dagger \right] = \delta_{J_1 J_2} \delta_{M_1 M_2} \delta_{x_1 x_2}, \\ \left[e_{J_1(M_1y_1)}, e_{J_2(M_2y_2)}^\dagger \right] = -\delta_{J_1 J_2} \delta_{M_1 M_2} \delta_{y_1 y_2}$$

The generators of conformal algebra ($\delta_\zeta h_{\mu\nu} = i[Q_\zeta^h, h_{\mu\nu}]$)

$$\begin{aligned}
 H^h &= \sum_{J \geq 1} \sum_{M,x} \{ 2J c_{J(Mx)}^\dagger c_{J(Mx)} - (2J+2) d_{J(Mx)}^\dagger d_{J(Mx)} \} & A(J) &= \sqrt{\frac{4J}{(2J-1)(2J+3)}}, \\
 &- \sum_{J \geq 1} \sum_{M,y} (2J+1) e_{J(My)}^\dagger e_{J(My)} & B(J) &= \sqrt{\frac{2(2J+2)}{(2J-1)(2J+3)}}, \\
 & & C(J) &= \sqrt{\frac{(2J-1)(2J+1)(2J+2)(2J+4)}{2J(2J+3)}} \\
 Q_M^h &= \sum_{J \geq 1} \sum_{M_1, x_1, M_2, x_2} \mathbf{E}_{J(M_1 x_1), J+\frac{1}{2}(M_2 x_2)}^{\frac{1}{2}M} \left\{ \alpha(J) \epsilon_{M_1} c_{J(-M_1 x_1)}^\dagger c_{J+\frac{1}{2}(M_2 x_2)} \right. \\
 &\quad \left. + \beta(J) \epsilon_{M_1} d_{J(-M_1 x_1)}^\dagger d_{J+\frac{1}{2}(M_2 x_2)} + \gamma(J) \epsilon_{M_2} c_{J+\frac{1}{2}(-M_2 x_2)}^\dagger d_{J(M_1 x_1)} \right\} & \text{SU(2)}^2 \text{ CG coeff.} \\
 &+ \sum_{J \geq 1} \sum_{M_1, x_1, M_2, y_2} \mathbf{H}_{J(M_1 x_1); J(M_2 y_2)}^{\frac{1}{2}M} \left\{ A(J) \epsilon_{M_1} c_{J(-M_1 x_1)}^\dagger e_{J(M_2 y_2)} \right. \\
 &\quad \left. + B(J) \epsilon_{M_2} e_{J(-M_2 y_2)}^\dagger d_{J(M_1 x_1)} \right\} \\
 &+ \sum_{J \geq 1} \sum_{M_1, y_1, M_2, y_2} \mathbf{D}_{J(M_1 y_1), J+\frac{1}{2}(M_2 y_2)}^{\frac{1}{2}M} C(J) \epsilon_{M_1} e_{J(-M_1 y_1)}^\dagger e_{J+\frac{1}{2}(M_2 y_2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 \mathbf{E} : \text{STT type} \\
 \mathbf{H} : \text{STV type} \\
 \mathbf{D} : \text{SVV type}
 \end{cases}$$

Conformal symmetry mixes all tensor modes.

Emphasize that negative-metric modes are indispensable to form the close algebra of conformal symmetry quantum mechanically