

# 誰も知らない Planck スケールを超えた世界へ

漸近的背景自由性をもつ繰り込み可能な量子重力理論の紹介

浜田賢二

<https://research.kek.jp/people/hamada/>



量子重力の世界は霧に包まれた距離感のない幽玄の世界にたとえることができる。深い霧が晴れて時空が現れる。国宝松林図屏風 (長谷川等伯筆)

**Into A World Beyond The Planck Scale That Nobody Knows**

KEN-JI HAMADA

# 目次

|                                 |     |
|---------------------------------|-----|
| はじめに                            | iii |
| 第1章 Planck スケールとは               | 1   |
| 第2章 重力の量子化が必要な理由                | 7   |
| 第3章 初期の量子化の試みと挫折                | 15  |
| Einstein 重力を修正する初期の試み . . . . . | 18  |
| 場を使わない試みについて . . . . .          | 24  |
| 第4章 背景時空独立性を実現する方法              | 29  |
| 量子化の処方箋 . . . . .               | 32  |
| 共形不変性と背景自由性 . . . . .           | 36  |
| 歴史的背景について . . . . .             | 38  |
| 第5章 ハミルトニアン拘束条件とは               | 39  |
| 一般座標不変性の物理的意味 . . . . .         | 42  |
| 第6章 共形場理論とユニタリ性                 | 47  |
| 臨界現象と共形場理論 . . . . .            | 49  |
| ユニタリ性と臨界指数 . . . . .            | 51  |
| 量子重力の共形不変性とユニタリ性 . . . . .      | 55  |
| 第7章 量子重力の相転移                    | 59  |
| QCD の相転移 . . . . .              | 61  |
| 時空の相転移 . . . . .                | 63  |

|                            |     |
|----------------------------|-----|
| 第 8 章 量子重力の局所的な励起状態        | 67  |
| 第 9 章 量子重力的インフレーション        | 73  |
| インフレーション解 . . . . .        | 75  |
| 時空相転移としてのビッグバン . . . . .   | 77  |
| 力学的エネルギースケールの決定 . . . . .  | 79  |
| 原始パワースペクトルの起源 . . . . .    | 82  |
| 揺らぎの減少と解の安定性 . . . . .     | 83  |
| ビッグバン後から現在まで . . . . .     | 87  |
| 第 10 章 繰り込み可能性について         | 93  |
| 繰り込みとは . . . . .           | 93  |
| 繰り込み可能性と量子重力 . . . . .     | 98  |
| 異なる視点での繰り込み . . . . .      | 101 |
| 第 11 章 宇宙定数問題とは            | 103 |
| 宇宙定数の発見 . . . . .          | 103 |
| 宇宙定数問題は本当に問題か? . . . . .   | 105 |
| 第 12 章 その他の問題              | 109 |
| QED と Landau 特異点 . . . . . | 109 |
| トポロジーと重力インスタントン . . . . .  | 111 |
| 第 13 章 格子量子重力              | 115 |
| 第 14 章 終わりに                | 121 |
| 付録 A 基本定数                  | 125 |
| 付録 B 理論の簡潔な要約              | 127 |
| 参考文献                       | 131 |

# はじめに

19 世紀の終わりに Planck によって提唱された種々の Planck スケールは重力の量子化が必要とされる極小の世界を特徴づける基本単位である。Planck 長さ  $l_{\text{pl}} = 1.616 \times 10^{-35} \text{ m}$  は最小の長さ単位として知られていて、多くの物理学者はこれよりも短距離の世界は存在しないと考えているか、あるいはその世界は一般座標不変性とは異なる物理法則によって支配されているのではないかと考えている。Planck 長さにカットオフを入れ、それを量子化された時空の実体であると考えている人が多い事がそれを表している。しかしながら、この考え方こそが重力の理論が抱えている多くの問題の元凶なのである。それは時空特異点の問題から安易に逃げているだけで、繰り込み可能性やユニタリ性、宇宙定数、原始ゆらぎの起源、時間、などに関する本質的な問題は、結局のところ、Planck スケールの世界を場の量子論としてどのように記述するかという問題なのである。

問題の根本に「重力は物質によって生じる時空の歪みである」という基本的な考え方があって、それを具式化したのが Einstein 方程式である。この式は、既知のスケールとして最大の Hubble 距離を超える巨視的な領域から、最小のスケールである Planck 長さ付近まで、とてつもなく広い範囲で成り立つ宇宙の基本方程式である。適用範囲がこれほど広い方程式は他にない。それほど優れた式であるにも関わらず、特異点の存在を否定することが出来ず、そこで物理法則が破綻してしまう。その原因は指導原理として導入された一般座標不変性にあるのではなく、Einstein 方程式の方にある。Planck スケールの壁を超えられないのは、それを越えた世界でも一般座標不変性が成り立つように、理論が正しく構築されていないか

らである。

特異点の無い世界を記述するためには、物質と重力の関係を見直さなければならない。それらは決して同じ土俵の上に立っているのではない。物質は時空上で定義されているのに対して、重力は時空そのものを定義していることを再認識する必要がある。通常、物質は空間を伝播する粒子として記述され、重力も変動が小さければ粒子(重力子)として記述される。しかしながら、時間や距離が意味を成さなくなるほど重力の揺らぎが大きくなると、粒子が空間を伝播する描像そのものが成り立たなくなる。Planck スケールに近づくと、そのような時間や空間の実体が失われた世界が現れる。量子重力の研究分野でしばしば用いられる「背景時空独立性」、あるいは単に「背景独立性」や「背景自由性」などの言葉はそのような状態を表している。この量子状態も含め、重力の状態全般を記述する式の一つがハミルトニアン拘束条件と呼ばれるもので、一般座標不変性の帰結として全ハミルトニアンが消えることを表している。

Planck スケールの壁を超えるためには、繰り込み可能なだけでなく、背景時空独立性も備えた重力の量子化が必要である。それは重力子を基本要素と考える量子重力理論では決して表現することは出来ない。それ故、何らかの非摂動的な場の量子論の手法を導入しなければならない。本書の主題の一つは、背景時空独立な世界を特別な共形場理論(conformal field theory, CFT)で記述する方法を紹介する事である。そこでは共形不変性が一般座標不変性の量子的対称性として現れる。この理論では重力と物質の役割は同等ではなく、重力が主で物質が従の状態として表される。純粋に重力だけの量子的な励起状態が存在して、その状態はすべてを生み出す源泉としての働きをする。

背景時空独立な量子時空はふだん私たちがイメージする時空とかけ離れている。そのことはつまり、このような量子時空が存在するならば、必ずそのような時空から現在の古典的な時空に移る瞬間がなければならないという事でもある。その瞬間のことを「時空の相転移」と呼ぶ。本書で紹介する繰り込み可能な量子重力理論は、そのような時空相転移が起こる物理的エネルギースケールの存在を示唆している。それより高エネル

ギー領域では特別な共形場理論で記述される背景時空独立な世界が現れ、それ以下では共形不変性が完全に破れた、Einstein の重力理論で記述される古典的な時空になる。そして、宇宙初期で起こったに違いないこの変化の瞬間こそがビッグバンの正体であると考えている。このような性質を持つ理論を「漸近的背景自由な量子重力理論」と呼ぶ。

本書は半世紀にもわたる場の理論をベースとした量子重力理論研究の発展と最新の成果を分かりやすくまとめたものである。重力の量子化が何故必要なのか、説明しなければならない物理的事象は何か。ハミルトニアンの固有値がゼロであるにもかかわらず、自明でない状態、すなわちエントロピー、が存在する理由は何か。これらの説明も含めて、数式は象徴的なもの以外は出来るだけ使わずに、平易な言葉で理論を説明するように心掛けた。幸い、重力に関わる話は巷に溢れているので、言葉に対する抵抗は他の専門分野より少ないかもしれない。言葉自体はネットで調べればすぐに分かるが、ここでは言葉の背後にある意味を理解することを目指している。避けられてきた物理の領域に踏み込むことで、問題の本質を明らかにしたい。内容を数式として理解したい方は、以下の著書及び巻末の文献を参考にして下さい。本書は一般向けに書いているが、Planck スケールの世界に踏み込んだ専門家向けの書でもある。論文として出版していない議論も一部含まれている。専門的で難しい箇所もあるが、飛ばして読んでも全体像が分かるように書いたつもりである。

令和4年(2022年)9月

## 著書

- 浜田賢二, 「共形場理論を基礎に持つ量子重力理論と宇宙論」 (プレアデス出版, 2016)
- K. Hamada, *Quantum Gravity and Cosmology Based on Conformal Field Theory* (Cambridge Scholar Publishing, Newcastle, 2018)

- K. Hamada, S. Horata, and T. Yukawa, *Background Free Quantum Gravity and Cosmology* in Focus on Quantum Gravity Research edited by D. Moore (Nova Science Publisher, NY, 2006), Chapter 1

# 第1章

## Planck スケールとは

あらゆる物理現象にはそのダイナミクスを記述する固有のスケールが存在する。まず初めに、私たちの宇宙に存在する最大のスケールから最小のスケールまでを簡単にまとめてみる。

私たちが知りうる最大のスケールは Hubble 距離で、約 4000 メガパーセク (Mpc) である。1 パーセク (pc) は 3.26 光年でメガ (M) は百万 ( $10^6$ ) 倍を表す記号である。1 光年が  $9.5 \times 10^{15}$  m であることから、Hubble 距離は約  $10^{26}$  m となる。これは現在観測可能な宇宙の大きさに相当していていて、特定の物理現象に関わるようなスケールとして、これよりも大きなスケールの存在は確認することができない。

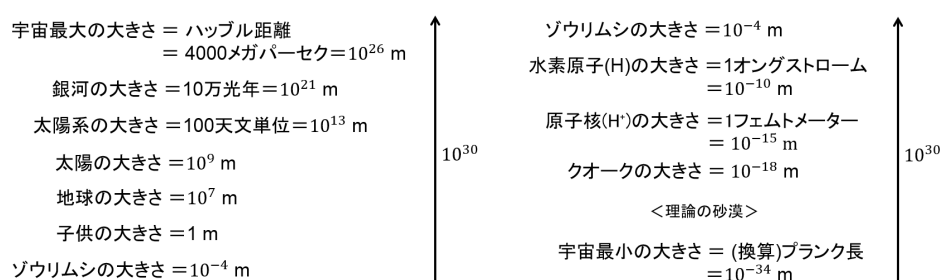


図 1.1: 宇宙に存在する種々のスケール。最大から最小まで。

次に大きなスケールは銀河団、つまり銀河の集団のサイズで、4 ~ 5 Mpc である。それらがさらに集団を形成しているのが超銀河団で 10 ~ 30 Mpc



の大きさになる。銀河自体のサイズは約 10 万光年である。図 1.1 に示したように、順に太陽系、太陽、地球、動物、昆虫と続いて、ゾウリムシの大きさが  $10^{-4}$  m である。すなわち、Hubble 距離はゾウリムシのおよそ  $10^{30}$  倍になる。

さらに短距離になると、物理でおなじみのスケールが現れる。水素原子の大きさは約 1 オングストローム ( $\text{\AA} = 0.1 \text{ nm} = 10^{-10} \text{ m}$ )、その原子核は約 1 フェムトメートル ( $\text{fm} = 10^{-15} \text{ m}$ )、さらに原子核を構成するクォークのサイズは  $10^{-18} \text{ m}$  と見積もられている。クォークは Gell-Mann によって導入された物質を構成する最小の要素である素粒子の一つで、全部で 6 種類あることが知られている。それよりも小さい構成要素は今のところ知られていない。

これらよりも遥かに小さいスケールとして知られているのが Planck 長さ  $l_{\text{pl}}$  である。それは、Einstein の重力理論に現れる重力相互作用の強さを表す Newton 定数  $G$ 、量子の世界を記述する際に現れる Planck 定数  $\hbar$ 、相対性理論の基本定数である光速  $c$  の 3 つの基本定数を用いて構成される長さスケールで、

$$l_{\text{pl}} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.616 \times 10^{-35} \text{ m}$$

で与えられる。Planck 長さはその定義式に  $\hbar$  を含むことから推察できるように、重力の量子と関わりのあるスケールだと考えられている。

組み合わせを変えると質量のスケールも得ることが出来る。Planck 質量と呼ばれるそれは

$$m_{\text{pl}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2.176 \times 10^{-5} \text{ g}$$

で与えられる。さらに、Planck 質量に光速の 2 乗を掛けるとエネルギーの次元をもつ Planck スケールが得られる。また、運動方程式を記述する際は上記のものと係数だけ異なる換算 Planck 長さ  $L_{\text{P}} = \sqrt{8\pi} l_{\text{pl}} = 0.81 \times 10^{-34} \text{ m}$  や換算 Planck 質量  $M_{\text{P}} = m_{\text{pl}}/\sqrt{8\pi} = 4.3 \times 10^{-6} \text{ g}$  がよく使われる。

物体がそれ自体基本要素であるのか、それとも内部構造を持つもののかによって状況は異なるが、一般的にそのサイズはそれがもつ固有の質量と反

比例の関係にある。Einstein の有名な公式  $E = mc^2$  により、質量  $m$  はエネルギー  $E$  と同等であり、エネルギーの逆数に  $\hbar$  を掛けると長さの次元になることから容易に理解できる。すなわち高エネルギーになればなるほど、より短距離のスケールが現れることを意味する。

例えば、クォークが現れるミクロな世界を支配する重要なエネルギースケールとして以下の二つが良く知られている。一つはGlashow と Weinberg と Salam の3人によって独立に提唱された弱い相互作用と電磁相互作用を統一的に記述する電弱理論 (electroweak theory) のエネルギースケールで、もう一つは強い相互作用を記述する量子色力学 (quantum chromodynamics, QCD) のエネルギースケールである。前者は約 100 GeV で、1 eV は電子 1 個を 1 V で加速したときに得るエネルギー、G (ギガ) は 10 億 ( $10^9$ ) 倍を表す記号である。このスケールの逆数で与えられる長さがクォークサイズの  $10^{-18}$  m のオーダーである。もう一方の QCD エネルギースケールは約 200 MeV で、それに対応する長さはおよそ水素原子核のサイズを表す 1 fm になる。

量子重力の世界を特徴づける Planck エネルギーはおよそ  $10^{19}$  GeV になる。それはクォークを覗き見ることが出来るエネルギーの  $10^{17}$  倍にもなる途方もない高さである。素粒子物理学者は特別なスケールの存在が知られていないこの 17 桁におよぶエネルギー領域のことを「理論の砂漠」と呼んでいる。もちろん、このような領域の存在を不自然と思うかどうかは研究者による。砂漠の中に位置するスケールの候補として有名なのが大統一理論 (grand unified theory, GUT) のエネルギースケールで、理論が正しいならば  $10^{16}$  GeV 付近に存在すると考えられている。それとは別に、量子重力にも Planck スケールとは異なる新たな力学的エネルギースケールが砂漠地帯に存在することが示唆されている。それについては後の章で順を追って説明する。

Planck 長さとゾウリムシの間には、切りが良くなるので  $L_P$  の方を使って比べると、約  $10^{30}$  桁もの違いがある。そしてゾウリムシと宇宙最大のスケールである Hubble 距離の間も約  $10^{30}$  桁の違いがある。この比較からも Planck 長さが途方も無く小さいことが分かる。そして、宇宙の最大

と最小のスケールの間には

$$\frac{\text{Hubble 距離}}{\text{Planck 長さ}} \simeq 10^{60} \quad (1.1)$$

のように、「那由多」と呼ばれる  $10^{60}$  桁にもおよぶ違いがある。本書の目的の一つはこの両極端の 2 つのスケールを量子重力も含めた重力の理論で結び付けることである。

さて本題である、重力を量子化する、とはどういうことなのか。良く知られているように、量子化を行うと離散的な構造がエネルギー準位などとして現れる。量子重力の場合では時空が Planck 長さを単位として離散的になるのではないかと考える人がいる。あるいは重力の量子的励起が Planck 質量を単位として離散的に現れると考える人もいる。しかしながら、このような単純な見方は深刻な問題を抱えている。もし時空が不連続なら、重力理論を規定する一般座標不変性<sup>1</sup>、すなわち「一般座標変換の下で物理法則が不変になる」という指導原理が損なわれてしまう。また、次章で説明するが、Planck 質量を超えた質量を持つ素励起が存在すれば、Einstein の重力理論では、それはもはやブラックホールになってしまう。

取りあえずこれらの問題を無視して、Einstein の重力理論の量子化を実行してみると果たして何が起こるのであろうか。通常の場合の量子論の量子化法は平坦な Minkowski 時空上で定義されているので、その方法が使えるように平坦な時空の周りでの重力場の小さな揺らぎ、すなわち重力波を考えて、それを量子化することを考える。量子化されたこの揺らぎのことを素粒子の一つとみなして「重力子」と呼ぶ。しかしながら、ここで新たな問題が生じる。物理量が有限な量として計算できるためには、場の量子論は繰り込み可能でなければならないが、この理論は繰り込み不可能になる。つまり、量子補正を計算すると次から次へと新しいタイプの紫外発散が現れて、それを体系的に処理することが出来ず、量子論として意味のある物理量を導くことが出来ない。

このような弱場近似による量子化では、理論を有限にするために、何ら

<sup>1</sup>省略せずに、一般座標変換不変性と呼んだり、より専門的に微分同相写像不変性と呼んだりする。

かの紫外カットオフを導入して、Planck エネルギースケールより上の世界に行けないように制限を課すことになる。すなわち、Planck 長さより短い距離は考えない離散的な構造を導入し、且つそれが時空の実体であるとするのである。しかしながら、このような弱場近似では重力の本質的な問題を扱うことが出来ない。そのことが繰り込み不可能性として現れているのである。

Einstein の重力理論と量子論の相性の悪さはこれだけではない。スカラー曲率を用いて定義される Einstein-Hilbert 作用が正定値で無いことも問題である。平坦な時空のまわりでの小さな揺らぎを考えている限り、それは問題にならないが、重力場の揺らぎが大きくなってくると、不安定性が現れる。また、この作用では、量子論を考えても、時空の特異点の問題を解決することが出来ないのである。これについては第3章で詳しく述べる。

このような理論的な側面だけが重力を量子化することの難しさではない。計算が大変になることも難しさの一つの要因である。Einstein の重力理論は美しい理論であるが、重力場はテンソル場なので、ベクトル場やスカラー場に比べて、格段に扱いが大変になる。さらに、物質を表す既知の場は運動量の次元を持っているのに対して、重力場は座標系の取り方にもよるが、基本的に無次元の場である。それ故、物質場の繰り込み可能な相互作用は高々場の4点関数までで表されるのに対して、弱場近似で摂動展開した重力場の相互作用は無限まで続く多点関数になる。昔は計算に埋もれて、疲れ果て、結局ただ計算しましたで終わる場合が多かった。問題が生じてそれを解決するすべが見つからず、場の量子論的手法は廃れていった。

まずは計算可能な理論体系を構築することが大事である。提唱されている量子重力理論の多くは、見えない所、見るのが難しい所は見ずに、その外側の振る舞いだけを議論して、それで十分だとする考え方が主流になっている。それは昔、1960年代に流行った散乱行列理論のような考え方である。ハドロンの内部を記述することなく、散乱行列やカレント代数を用いて強い相互作用を理解する代数的手法である。散乱行列理論は現在も

有益な、複素解析を用いた数学的に美しい理論で、多くの優秀な研究者を魅了している。けれども、結局は場を導入してハドロンの構造を直接的に明らかにした QCD に置き換わっていった。

本書の主題は、重力の量子化にまつわる諸問題を克服するために、Planck スケールを超えた世界に「場」を導入する新しい手法を紹介することである。ここでは、理論の本質はあくまでも一般座標不変性であって、それを最後まで守ることが第一であると考え。そのためには連続性を保ったまま時空の量子化を行うか、少なくとも連続性が適切な極限で復活するような量子化を行う必要がある。それは繰り込み可能な理論を考えることを意味していて、その結果 Planck スケール付近で理論は大きな修正を受けることになる。この修正された理論で、特異点、繰り込み、ユニタリ性、励起状態、インフレーション、宇宙定数、などに関わる諸問題を再考して、それらがどのように解決されるのかを以下の章で順次見ていく。

次章からは  $c = \hbar = 1$  と規格化した自然単位系でスケールを表すことにする。この単位系を使うと、Einstein の有名な  $E = mc^2$  の関係式に於いて  $c = 1$  とすると分かるように、質量とエネルギーが同じ単位で表されることになる。また、長さと時間が同じ単位になって、それはエネルギーの逆数になる。以後、質量やエネルギーの大きさは主に GeV を用いて表すことにする。付録 A に各種の基本定数と、自然単位系に変換する際に有益な定数をまとめておく。

## 第2章

# 重力の量子化が必要な理由

量子重力理論が必要とされる場所として、まず最初に挙げられるのがブラックホールの中心付近である。特異点の問題を解くためには重力の量子化が必要であると考えられている。宇宙の創成期もまたしかりである。宇宙は静的ではなく、誕生した当初からずっと膨張し続けていると考えられている。つまり、過去に遡れば宇宙は高温で高密度な状態であったと推測され、遂には量子重力が必要とされる領域に至ると考えられている。ここでは、より具体的に、これらの領域で重力の量子化が必要とされる理論的及び現象論的な理由について説明する。

まず初めに、広がりのない理想的な点で記述される素粒子像は Einstein の重力理論と矛盾する概念であることを指摘しておく。何故ならそれは重力理論から見ればブラックホールに他ならないからである。ただ、粒子の質量が Planck の質量スケール  $m_{\text{pl}} (= 1/\sqrt{G}) = 1.221 \times 10^{19} \text{ GeV}$  より小さい場合は、位置の不確定性の目安である Compton 波長 (質量の逆数) が質量によって生じる自身のホライズン (事象の地平線) サイズより長くなるため、点状の粒子とみなしても差し支えない。しかしながら、Planck 質量を超えた質量をもつ粒子が存在したならば、そのホライズンサイズは位置の不確定性の大きさを超えてしまうので、その粒子の情報は外から見ることが出来なくなる。それはまさにブラックホールそのものである。

既知の素粒子の質量はすべて Planck 質量よりも十分小さいので重力の

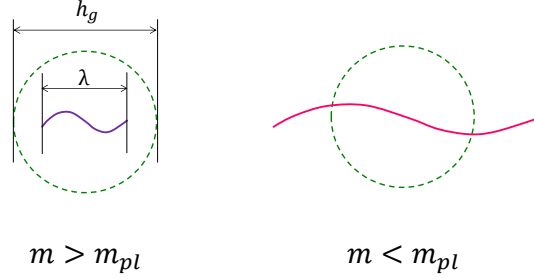


図 2.1: 質量  $m$  の Compton 波長は  $\lambda \sim 1/m$  で与えられる。一方, 粒子のホライズンサイズ (点線) は  $h_g \sim m/m_{pl}^2$  で与えられる。従って  $m > m_{pl}$  では右図のように  $\lambda < h_g$  となって, 素励起の情報がホライズンの内側に閉じ込められて喪失してしまう。このように Planck スケールを超えた世界では通常の粒子描像は破綻する。

量子効果を考慮する必要はないが, 量子重力では Planck 質量単位の素励起が生じていても不思議ではない。それはどのように記述されるのだろうか。これは単なる素励起の問題だけではなく, ブラックホールの問題でもある。

Einstein の重力理論を規定する基本方程式が Einstein 方程式である。重力場, すなわち計量テンソル場, を  $g_{\mu\nu}$ , Ricci テンソルを  $R_{\mu\nu}$ , スカラー曲率を  $R$ , 物質のエネルギー運動量テンソルを  $T_{\mu\nu}^M$  と書くと, それは通常

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu}^M \quad (2.1)$$

と表される。この式は物質の存在が時空の歪みを引き起こすことを表している。裏を返せば, 曲率が無限大になる特異点を解消するためには, 物質そのものが消えて無くならなければならないと言っているようなものである。

初期宇宙に目を転じると, この事実は現在の宇宙がどのように生まれたかという問題にも影響する。私たちを構成する物質はビッグバンが起きた時に生成されたと考えられている。その際, 物質の源になるものが必要である。Einstein の重力理論の枠内では, それもまた物質でなければなら

ない。すなわち、すべてを生み出す未知の場を導入しなければならない。Einstein 方程式は物質が生成されたビッグバン当時から現在に至るまでの数 10 桁に及ぶ壮大な宇宙の発展を記述する優れた方程式であるけれども、この方程式は同時に Einstein 重力理論の限界も示しているのである。

さらに深く宇宙初期を見てみると、より現実的に量子重力理論の必要性が明らかになる。宇宙論が今日のように大きく進展したのは、1989 年に NASA のケネディ宇宙センターから打ち上げられた天文衛星、宇宙背景放射探査機 (Cosmic Background Explorer, COBE) 及び 2001 年にその後継機として打ち上げられた Wilkinson マイクロ波異方性探査機 (Wilkinson Microwave Anisotropies Probe, WMAP)、近年では 2009 年に欧州宇宙機関 (ESA) が打ち上げたプランク (Planck) 天文衛星などによって、宇宙マイクロ波背景放射 (cosmic microwave background, CMB) の揺らぎ (異方性) が高い精度で測定できるようになったからである。これらの実験結果から標準宇宙論のパラメータが決定され、それによってビッグバン以前に空間が指数関数的に急激に膨張した時期があったとする、佐藤と Guth と Starobinsky によって提唱されたインフレーション理論が強く支持されるようになった。

インフレーションのアイデアは、主として、何故ホライズンサイズよりもはるかに長距離の相関がビッグバン直後の宇宙初期に存在しているのかという「地平線問題」と、何故空間の曲率が小さいのかという「平坦性問題」を解くために導入された。このアイデアを自然に解釈すれば、宇宙は誕生から現在までおよそ  $10^{60}$  倍膨張したことになる。それは (1.1) で示したように、まさに宇宙最大のスケールである Hubble 距離と最小のスケールである Planck 長さ  $l_{\text{pl}}$  が結ばれることを意味する。このことから、観測された CMB の揺らぎスペクトルの中に宇宙創成期の重力の量子的な揺らぎの痕跡が記録されていると期待されるのである。

ただ、この事だけで量子重力の痕跡が残っていると信じることは出来ない。素朴に考えると、宇宙初期の情報の多くは長き時間の経過の中で失われてしまっているのではないか。ましてや重力の量子効果の痕跡など残っ



ているはずがないのではないかと思える。しかしながら、宇宙の歴史を順に過去へ遡っていくと、その疑問に答えることが出来るのである。それを示すために、まずは標準宇宙論の土台である Friedmann 時空解について良く理解しておく必要がある。

Friedmann 解は一様等方性を仮定して求めた Einstein 方程式の動的な解の一つである。ここで強調しておかなければならないことは、この解は不安定な解であるということである。通常、このような解が物理として選ばれることはない。なぜなら、この解のまわりの小さな揺らぎ (摂動) を考えると、それは時間とともに成長して、解から大きくズレてしまうからである。にもかかわらず、宇宙は現在も Friedmann 解で良く近似できる。Sloan Digital Sky Survey (SDSS) による銀河が質点に見えるほど広範囲な全天での銀河分布の観測結果 (図 2.2) はそれを見事に示している。不安定な Friedmann 宇宙が 100 億年以上長く続いているとするなら、この事実はその初期値を与えるビッグバン直後の揺らぎ、原始揺らぎ、の振幅が不自然なほど小さかったことを意味している。

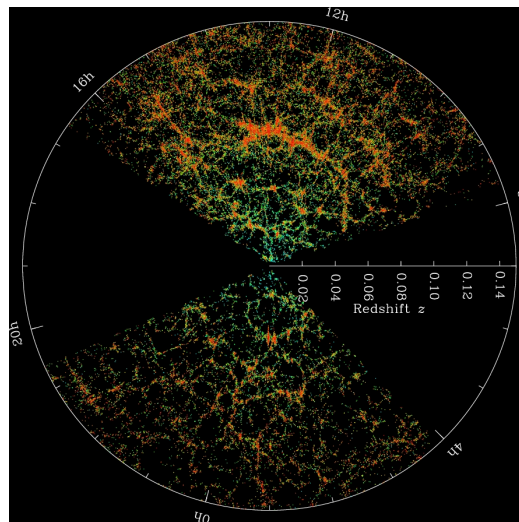


図 2.2: SDSS による全天での銀河分布の観測結果 [<https://www.sdss.org>]. 1 つ 1 つの点が銀河を表している。データの無い部分は天の川銀河面である。

ビッグバン以後、その小さな揺らぎが成長して星や銀河、銀河団といった構造が造られる。これらの構造形成は非線形効果を含むので単純な摂動論では記述できないが、宇宙が中性化するまでは、揺らぎはまだ小さく、摂動論が適用可能である。この事実に基づいて宇宙の発展を摂動的に記述する学問を宇宙論的摂動論と呼ぶ。それについては第9章で解説する。中性化以後、光は物質との相互作用から自由(脱結合)になるため揺らぎが成長しなくなる。そのため、脱結合する時点での揺らぎのスペクトルが分かれば、現在のCMBの揺らぎスペクトルのおおよそを知ることができる。

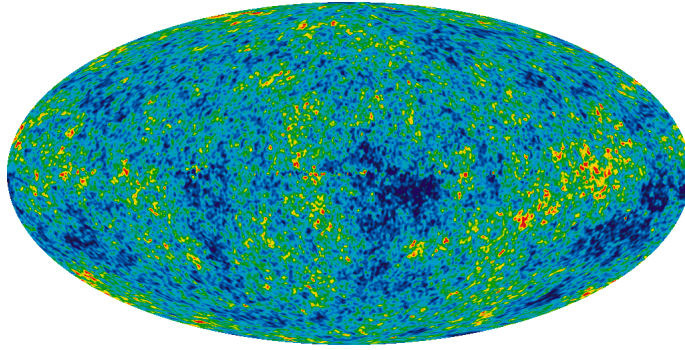


図 2.3: WMAP の全天の CMB 温度揺らぎ分布 [https://map.gsfc.nasa.gov]。

Penzias と Wilson によって 1964 年に発見された CMB は温度  $T$  が 3 度 K の Planck 分布をしている。その分布からのズレの大きさである温度揺らぎ振幅  $\delta T/T$  が  $10^{-5}$  のオーダーであることを初めて観測したのが COBE 天文衛星である。この発見に対して、実験を主導した Mather と Smoot の 2 人に 2006 年のノーベル賞が授与された。その後継機である WMAP によって得られたより詳細な CMB の温度揺らぎ分布が図 2.3 で、それを統計処理して得られた温度揺らぎスペクトルが図 2.4 である。

このスペクトルは主に放射優勢な時代から現在までの宇宙の歴史を記録している。宇宙初期のスペクトルはほぼ特徴のないスケール不変な形であったと考えられていて、Harrison-Zel'dovich 型と呼ばれるそのスペクトルを図 2.4 のなかに書き込むと、多重極モーメント  $l$  の小さいところにある凹みの底部を通る水平な直線になる。すなわち、その直線からの変形

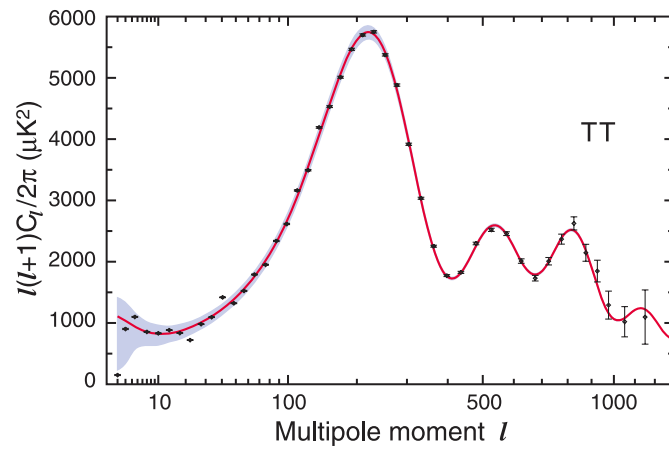


図 2.4: WMAP の CMB 温度ゆらぎスペクトル [C. Bennett, et.al., *Astrophys. J. Suppl.* **208** (2013) 20]。

が宇宙進化の過程で揺らぎが受けたダイナミクスを表している。

これらの変形のほとんどは宇宙が放射優勢から物質優勢に変わる時期から中性化するまでの期間に起こる。それ以前ではスケール不変なスペクトルが保たれるため、放射優勢な時代が続く限りどこまでも過去に遡ることができる。揺らぎのサイズがホライズンサイズより大きな時期ではスペクトルはほとんど変化しない。特に、 $l < 30$  の CMB 多重極成分は宇宙の中性化以後にホライズンの内側に入るか、もしくは現在も入っていない大きなサイズの揺らぎ成分で、ビッグバン直後の原始のスペクトルをそのまま保っていると考えられている。そのため、Einstein の重力理論が正しい限り、現在の CMB スペクトルから原始スペクトルが生成されたビッグバン直後の情報を引き出すことができる。

標準宇宙論が私たちに突きつける事実は直感と矛盾しているように思える。宇宙初期は高エネルギー反応の坩堝で、揺らぎが大きかったと考えるのがむしろ自然だからである。このことから、初期値としてたまたま小さい値が選ばれたと考えるよりもむしろ、少なくとも宇宙の構造形成に関与する揺らぎに対しては、それを小さくする何らかのメカニズムが初期にあったと考える方がシナリオとして受け入れやすい。これを明らかにす

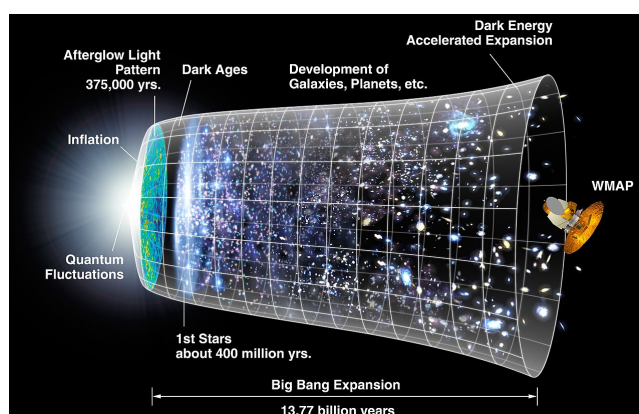


図 2.5: WMAP が描く標準宇宙論のシナリオ [<https://map.gsfc.nasa.gov>]

ることは初期宇宙論の大きな課題の一つである。

私はこの問題を解く鍵がインフレーションにあると考えている。100 億年以上もの長きにわたって Friedmann 宇宙が続くために必要な非常に小さな揺らぎの初期値を与えるメカニズムとして、それを捉えることは理にかなっている。インフレーションを誘起する力が重力の量子効果によって与えられ、その期間中に揺らぎが小さくなったと考えると話がよりすっきりする。

量子重力理論の目的の一つはまさにそのようなインフレーションのダイナミクスを明らかにして、Friedmann 宇宙の初期条件を与える原始スペクトルを導出することである。それは非常に小さな振幅をもった、ほぼスケール不変で、且つスカラー的なスペクトルでなければならないことが観測結果から示唆されている。インフレーションはどのように誘起されるのか。重力場はテンソル場で与えられるにもかかわらず、何故初期の宇宙ではスカラーモードが優勢になるのか。揺らぎが小さくなる過程はどのように記述されるのか。量子重力のこれらの問題に対する答えも含めて、Planck スケールを超えた世界から現在に至るまでの宇宙の進化のシナリオについては、主に本書の後半で解説する。



## 第3章

### 初期の量子化の試みと挫折

重力と場の量子論を結び付けた最初期の仕事の一つとして、1962年の内山とDeWittによる曲がった時空上で量子化された物質場の繰り込みについての研究がある。内山と言えば、YangとMillsとは独立に、非可換ゲージ理論と重力を結び付けた研究を完成させていたことで有名で、1954年に京都大学での会議でその成果を発表している。残念なことに、そのときの反応が否定的だったため、論文として発表することをためらっている間に先を越されてしまったと伝えられている。

1960年代の後半に入ってEinsteinの重力理論を量子化する試みがDeWittによって本格的に始められた。当時のことに詳しいわけではないが、力を媒介する場と言えば電磁場や重力場ぐらいしか認知されていなかった時代である。前者が量子電磁力学 (quantum electrodynamics, QED) として完成したのだから、次は重力場だ、となっても不思議ではない。Einsteinが夢見た統一理論を構築する上でも、すなわちすべての場を一つの理論体系の下で定式化するためにも、重力場を他の場と同じ土俵に乗せる必要があっただろうし、同時に時空の特異点の問題が解消できるのではないかという期待もあったと思われる。

1970年代に入ってから't Hooft, Veltman, DeserとNieuwenhuizenらによって重力の繰り込みについての研究が始められた。最初は弱い重力場の近似で量子化することが試みられた。すなわち、ある古典的な背景時空

からの小さな揺らぎ (摂動) を考えて, その揺らぎを量子化することである。通常は, 重力場を表す計量テンソル場を

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa H_{\mu\nu} \quad (3.1)$$

のように, 背景時空として平坦な時空を採用して, 揺らぎを表す場  $H_{\mu\nu}$  が真空中を伝播する状況を考える。ここで,  $\eta_{\mu\nu}$  は Minkowski 計量である。もちろん考える対象に合わせて曲がった背景時空を選ぶこともできる。展開のパラメータ  $\kappa$  は相互作用の強さを表すことから結合定数と呼ばれ, Newton 定数の平方根, すなわち Planck 長さ  $l_{\text{pl}}$  の単位を持つ。このように真空中を伝播する重力場の揺らぎのことを重力波と呼ぶ。素粒子の世界では電磁波を光子と呼ぶように, 重力波を重力子と呼ぶことが多い。重力子を媒介とした相互作用は図 3.1 や図 3.2 のような Feynman 図で表される。

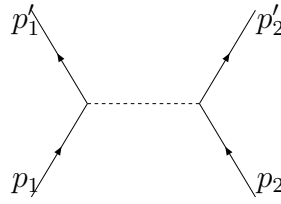


図 3.1: 重力子 (点線) を交換するスカラー粒子 (実線) の散乱。

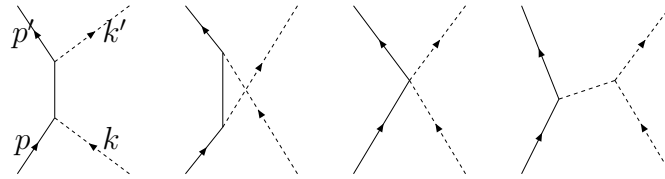


図 3.2: 重力子とスカラー粒子の Compton 散乱。

しかしながら, このような弱場近似で量子重力を定式化することには多くの問題がある。弱場近似ではそもそも Einstein 重力理論の最大の問題

である特異点について何ら答えることは出来ない。それでも当時は、それ以外に量子補正を具体的に計算する方法が無かったので、そのような設定から量子重力の研究が始まった。

取りあえず特異点の問題を脇に置いて前に進むと、紫外発散という新たな大問題が生じる。量子化するとループを含む Feynman 図が量子補正として現れ、それを計算すると答えが無限大になってしまうのである。既知の他の量子場はみな繰り込み可能で、発散を体系的に処理することが出来るのに対して、Einstein の重力理論は繰り込み不可能になってしまうことである。その原因は、繰り込み可能な場の量子論では相互作用の強さを表す結合定数が無次元になるのに対して、この重力理論は結合定数が次元を持っているからである。

何故、重力場の結合定数だけが次元を持つのか。それは運動方程式を導く作用が無次元量でなければならないことからすぐに分かる。電磁場や電子の場はそれ自体次元を持っていて、さらに座標微分を含めたそれらの作用は余分なスケールを導入しなくても無次元になる。それ故、結合定数も無次元になる。一方、重力場を表す計量テンソル場  $g_{\mu\nu}$  は本質的に無次元の場である。そのため座標微分を2つ持つスカラー曲率  $R$  を4次元体積で積分して得られる Einstein 重力理論の作用、Einstein-Hilbert 作用と呼ぶ、を無次元にするには、不足した次元を補うためにスケールを導入する必要がある。それが Newton 定数  $G$  である。

重力場が厳密に無次元の場であることは、本書で取り上げる多くの物理現象に於いて重要な意味を持つ。展開式 (3.1) では場を再定義して  $H_{\mu\nu}$  にゲージ場と同じ次元を持たせているが、それは便宜上のことであって、ゲージ場と違って、この展開から生じる相互作用項は無限まで続く多点関数になる<sup>1</sup>。また、後の章でスケール不変な重力場のダイナミクスを議論する際にも無次元であるということが本質的に効いてくる。

一般的に、繰り込み不可能な場の量子論では、発散を処理するためにエ

<sup>1</sup>この分野の慣例により、(3.1) では  $H_{\mu\nu}$  の1次で止めているが、 $g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu$  で定義される計量テンソル場の逆は  $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \kappa H^{\mu\nu} + \kappa^2 H^\mu_\lambda H^{\lambda\nu} + \dots$  のように無限に続く場の多重積で展開される。 $\sqrt{-g}$  も  $R$  も同様に展開される。



エネルギーに上限を設ける必要がある。つまり、それ以上に行けないように何らかの紫外カットオフを設けるのである。それはカットオフ以下のエネルギースケールで有効な理論として考えていることを意味する。Einstein の重力理論では通常 Planck エネルギーにカットオフを入れる。

しかしながら、これは高エネルギー物理を記述する基礎理論として問題がある。特異点などの問題を議論するためには無限に小さな領域まで扱えなければならない。それ故、Planck スケールを超えた世界を記述するためには、繰り込み可能性は必要な条件なのである。

## Einstein 重力を修正する初期の試み

Einstein 重力理論の問題点はその作用にある。繰り込み可能な理論がもっている作用の特徴の一つは、微分の階数が最も高い運動項がスケールをもっていないということである。そのため、高エネルギーに行けば行くほどその運動項が優勢になり、質量項などの有次元パラメータをもつ項は無視できるようになる。これに対して、Einstein-Hilbert 作用は Newton 定数というスケールを持っていて、それが理論の最高微分項として与えられるので、スケールの存在を無視できるような極限が存在しない。そのため、スケールの無い世界に移行することが出来ず、エネルギーに上限のある理論になっている。前章の初めに述べた問題も結局のところここから生じている。

1970 年代の後半に入ってから、繰り込みの問題を解決して、Planck スケールを超えた領域に入るために、Einstein の重力理論を修正する試みがなされた。Einstein 理論の本質は一般座標不変性であって、いわゆる Einstein 方程式はそれから導かれたものの一つである。修正はあくまでも一般座標不変性を満たすように行われるべきである。その一つが Stelle,

Tomboulis, Fradkin と Tseytlin らによる 4 階微分を含む無次元の作用を導入する方法である。

その作用は以下のように構成される。重力場の性質を記述する重要な関数として, Einstein-Hilbert 作用に採用されているスカラー曲率  $R$ , Einstein 方程式に現れる Ricci テンソル  $R_{\mu\nu}$ , 時空の曲がり具合を表す Riemann 曲率テンソル  $R_{\mu\nu\lambda\sigma}$  がある。それらをそれぞれ 2 乗して, 計量テンソル場で時空の脚をつぶした 3 つの関数,  $R^2$  と  $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$  と  $R_{\mu\nu\lambda\sigma}R^{\mu\nu\lambda\sigma}$ , を考える。それらは 4 階微分のスカラー関数なので, 4 次元時空体積で積分すると無次元になる。そのため, それらを作用として採用した重力理論の結合定数は無次元となり, 繰り込み可能な理論の候補になる。

時空の曲がり具合を表す Riemann 曲率テンソルは特に重要で, それは光子などのゲージ粒子の場の強さ  $F_{\mu\nu}$  (電場や磁場など) に相当する量と考えることが出来る。実際, 数学の分野では  $F_{\mu\nu}$  は曲率と呼ばれている。Einstein 方程式の問題点はまさに重力場の強さを表す曲率テンソルが含まれていないことである。それは, ゲージ場の運動方程式が  $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$  のように場の強さとカレント  $J^\mu$  で書けることと対比をなしている。それ故, Riemann 曲率テンソルの 2 乗を重力場の作用に含めることは理にかなっていると思われる。けれども, この作用を採用すればすべて OK とは残念ながらならないのである。

先ずはこの作用の良いところから説明すると, それらは

1. 繰り込み可能になる,
2. 作用が下に有界になる,
3. 特異点が解消する

の性質を満たすことである。1. はすでに述べたように, 摂動展開に用いる結合定数が無次元になることからくる。

2. の性質は曲率の 2 乗を考えていることから保証される<sup>2</sup>。このことは安定性の観点から極めて重要である。これに対して,  $-\infty$  から  $\infty$  までの

<sup>2</sup>正確には, 2 番目の性質は Wick 回転を施して Euclid 化した場の量子論の作用が満たすべき性質として挙げている。詳しくは第 6 章を参照。

値をもつスカラー曲率  $R$  そのもので定義される Einstein-Hilbert 作用は下に有界な関数ではなく、エネルギーの底が抜けている状態になっている。そのため、正則な背景時空の回りの小さな摂動を考えている場合は問題ないが、重力場の揺らぎが大きくなると、その系は量子論的に不安定になることを示している。つまり、曲率の2乗の作用を考えることは Einstein の重力理論がもつこの不安定性の解消につながる。

3. は量子重力で最も期待していた性質の一つである。特異点を持つ時空解の代表である Schwarzschild ブラックホール解は Einstein 方程式の解の一つで、 $R_{\mu\nu}$  及び  $R$  が消える Ricci 平坦な解である。一方、Riemann 曲率テンソル  $R_{\mu\nu\lambda\sigma}$  は値を持って、解の中心で発散する。特異点とはまさに Riemann 曲率テンソルが発散する点のことを指す。このことは、つまり、Riemann 曲率テンソルの2乗を持つ作用は特異点をもつ解を代入すると発散するということである<sup>3</sup>。一般に、作用が発散するような場の配置は非物理的なものとして排除される。その際、作用が正定値であることも重要な条件で、それが発散する場の配置は、その存在確率がゼロになることを意味するからである。このことは、第6章で改めて議論するが、経路積分による量子化法を用いると統計力学的に理解することができる。

これらのことは Einstein 重力理論の問題点もあぶり出す。上で述べたように、物理的な解とはそれを作用に代入しても有限になるような解である。ゲージ理論におけるソリトン解とかインスタントン解がその良い例である。一方、Einstein-Hilbert 作用は不定値だけでなく、スカラー曲率がゼロになる Schwarzschild 解に対して消えるので、ブラックホールの特異点が物理的な解として存在することになってしまう。このことが大きな問題なのである。

重力の量子論として、Einstein の重力理論を中心に据えて定式化しようとする試みが依然として多いのが現状である。その理由の一つとし

---

<sup>3</sup>Riemann 曲率テンソルの2乗は、Euler 標数の表式を利用して、しばしば作用から取り除かれることがあるが、それは正則な時空の周りでの摂動理論を考えるときのように、時空に特異点がないことが明らかな場合にのみ実行出来ることである。ここでは、そのような前提を置かない一般的な場合を想定して説明している。

て、ユニタリ性の問題を気にしなくてよいからというのがある。しかし、それは誤りである。なぜなら、Einstein-Hilbert 作用では時空特異点を取り除くことが出来ないからである。この理論のユニタリ性はあくまでも散乱行列が定義できる弱場近似の場合に限って保証されていると考えるべきである。

ここまで、Einstein-Hilbert 作用にはない、4 階微分重力場作用の良い点について述べた。このように書くとすべて上手く行くように思えるが、現実はその単純ではない。まず、これまでの議論だけでは作用が一意に決まらない。特異点を排除するために Riemann 曲率テンソルの 2 乗が含まれるべきであるが、一般座標不変性だけではまだ任意性が残ってしまう。それ以上に問題なのは量子化の方法である。まず初めに試みられたのは、言うまでもなく、弱い重力場近似、すなわち重力波近似である。平坦な時空の周りで (3.1) のように摂動展開する方法が採用された。その際、 $\kappa$  の代わりに、展開のパラメータとして新たな無次元の結合定数が導入される。このアプローチが採用された理由はもちろん具体的に計算ができる方法論が 1970 年代当時はそれしかなかったからである。

弱場近似による量子化は、この場合でもやはり問題である。探し求めているのは Planck 長さよりも短距離の極小の世界を記述する理論であり、そこは極超高エネルギーの世界である。にもかかわらず、弱場近似とは、ブラックホールの中心近傍で重力場が弱くなり、平坦な時空が現れることを仮定したことになる。それは奇妙である。私たちは中心に近づくにつれて重力に押しつぶされて行くと思っていたのに、そこまで行くと逆に穏やかで平坦な、地球上と大して変わらない環境が現れると言っているのである。あるいは、宇宙初期まで遡ると、そこもまたすべての物質が押しつぶされた重力場の強い状態であると考えているけれども、弱場近似はそうではないと仮定しているのである。

弱場近似が採用された背景には、原子核などのハドロンの物理を記述する強い相互作用の理論として導入された QCD の成功も影響している。その理論が示す「漸近的自由性」という性質は、短距離、すなわち高エネルギー極限で相互作用が弱くなって、ハドロンの構成要素であるクォークや

グルーオンが自由粒子のように振る舞いというものである。繰り込み可能な量子重力理論の初期の研究も、ゲージ理論の一種として、同じような性質を持つものと仮定して進められた。

取りあえず設定の物理的奇妙さは脇に置いて、弱場近似で重力場を量子化すると理論的にどのような問題が生じるのかについて述べることにする。摂動論自体は問題なく定義できて、それは繰り込み可能な場の量子論になる。しかし、物理量に大きな問題が生じる。いわゆる「ゴースト粒子問題」である。ゴーストとは非物理的であることを指す言葉で、その作用の符号は正常な粒子のそれとは逆になっていて、下に有界でない場合を言う。ゴースト粒子が実在する場として散乱に寄与するとユニタリ性が破れてしまうので、それは観測されてはならない粒子である。一般的に、4階微分を持つ自由場の理論は通常の2階微分の場の理論と比べて2倍の自由度を持っている。そのうちの一方が物理的な自由度ならば他方は必ず非物理的な自由度になってしまうことが問題なのである。

一方で、漸近的自由性を示す相互作用をもった4階微分場の量子論だと量子補正のおかげでゴーストが表に出てこないことが Lee と Wick によって示唆されている。1970年代の4階微分量子重力理論はその成果を踏まえて研究が進められた。それは低エネルギーでゴーストが実世界に現れないことを言っているが、高エネルギーで相互作用が消えると、結局そこはゴースト粒子が現実には飛び交っている世界になる。このように弱場近似を用いた単純な摂動論では問題の本質的な解決に至らなかった。

この高階微分場のゴースト問題は一般的な場の量子論の教科書には載っていない専門性の高い問題で、そのまま No-Go 定理として受け止めている人も多い。Einstein の重力理論に固執する人の多くはそう受け止めているように見える。Planck スケールの壁を超えるためには、この問題に対する答えを見つける必要がある。4階微分作用のゴーストの問題は、場の自由度が物理的なモードと非物理的なモードに分解できることにある。弱場近似を採用すると、粒子の運動項だけが残る摂動のゼロ次で、それらはそれぞれ独立な自由度として振る舞うようになることが問題なのである。Lee と Wick の研究の本質は2つのモードが相互作用で結び付くこと

で互いに独立でなくなることにある。

このことは問題解決のための一つのヒントを与える。もし2つのモードを結び付けるようなゲージ対称性が紫外極限で存在するならば話は変わってくる。ゴーストが実世界に現れるとは、それが単独でゲージ不変になることであるが、結び付けるようなゲージ対称性があれば、個々のモードをゲージ非不変にすることが出来るからである。当然のことながら、このような状況は単純な弱場近似の摂動論では実現できない。なぜなら、ゲージ対称性があっても相互作用が消える紫外極限では、ゲージ変換はモードごとに作用して、他のモードと混じり合わないからである。

重力の量子化にまつわる理論的そして物理的な問題点を克服するためには何か足りないのである。それは一体何なのか。重力が量子化された時空のイメージは時間や空間が大きく揺らいだ状態である。原点に立ち返って、そのような量子状態を正しく表現する理論を構築する必要がある。

時間や空間が不確かになるほど重力場が大きく揺らいだ状態とは、特定の背景時空を採用しても、それ自体にもはや物理的な意味がないことを表している。そのような性質のことを「背景時空独立性」又は「背景自由性」と呼ぶ。それはつまり特定の背景時空上を伝播する伝統的な粒子描像が成り立たなくなることを意味する。

それを表現するためには何らかの非摂動的な手法を導入する必要がある。次章で紹介する新たな定式化の中核となる部分は非摂動的な場の理論の代表格である共形場理論の特別なケースとして記述される。それは、通常の共形場理論と違って、共形不変性がゲージ対称性として現れる場の理論である。つまり、共形変換で移り変わることが出来るスケールの異なる世界がすべてゲージ同値になることを意味する。このように代数的に背景時空独立性が表現され、このゲージ対称性の存在によってゴーストの問題も解決することが出来る。

そもそも、ゴーストの問題は量子論に限った話ではない。Einsteinの重力理論にはEinstein-Hilbert作用の不定値性の原因となる負計量のゴーストモードが存在する。局所的にはそれを取り除くことが出来て、物理的な重

力波モードだけで理論を記述することが出来る。しかながらし, Friedmann 時空のような時空全体の構造を考えるとときは負計量のモードの存在が重要な働きをする。それは一般座標不変性を保つために, すなわちハミルトニアンをゼロに保つために, 必要なモードであることを表している。以後の数章で, 量子論に於いてもゴーストモードが一般座標不変性を保つために重要な役割を果たすことを解説する。ゴーストは物理量として局所的に現れることは決してないが, ハミルトニアンがゼロになる非自明な時空の量子状態を記述するために必要不可欠な要素であることを明らかにする。

## 場を使わない試みについて

場の量子論的手法が行き詰った 1980 年代以降, それに依らない新たな方法が主流になった。弦理論やループ量子重力がその代表例である。背景時空独立性を実現する場の量子化法を紹介する前に, ここで場を用いない方法について簡潔にまとめておく。

弦理論は元々ハドロンの物理を支配する強い相互作用を記述するために南部らによって考えられたもので, 1960 年代に発展した散乱行列理論の流れを汲む理論である。粒子間の相互作用の散乱振幅が, 紫外発散を伴わずに, 計算できる定式化になっている。

この理論の本質は, 物質の基本要素として, 点状ではなく 1 次元の広がりを持った弦状の物体を考えることである。それが分離したり合体したりしながら平坦な時空間を運動している。弦の固有振動モードが粒子に対応して, その離散的なエネルギースペクトルが質量スペクトルになる。質量がゼロになるモードが特に重要で, それが素粒子模型を構成する粒子になる。その中に, スカラーやベクトルのモードだけでなくテンソルモードである重力子も含まれていて, それ故, 統一理論の候補として研究され

るようになった。さらにフェルミオンの自由度を加えた超弦理論は万物の理論とか究極の理論と呼ばれるようになっていった。

理論のもう一つの大きな特徴は、Lorentz 不変性を保つために時空が 10 次元又は 26 次元でなければならないことである。超弦理論は 10 次元で定義されている。そのため、4 次元である現実世界を記述するためには余分な 6 次元空間を観測できないほど小さく丸める必要があり、それをコンパクト化と呼ぶ。

弦理論は、ユニタリな散乱行列が計算できる、弱場近似をベースとした理論体系になっていて、Newton 定数に対応する長さの 2 乗の次元をもつ結合定数  $\alpha'$  (弦の張力はこの逆数) による摂動展開で定義される。それ故、散乱振幅を再現するように構成された弦理論の有効作用は、Einstein-Hilbert 項を最低次として、曲率のべき乗で表される高階微分項で展開される形になる。また、繰り込み可能な理論と異なって、その各項が古典的に扱える局所的な作用になることも特徴の一つである<sup>4</sup>。

理論がもつ唯一のパラメータが次元を有する  $\alpha'$  で、Einstein の重力理論と同様に、そのスケールの存在がどこまでも無視できないような理論になっている。そのため、その逆数の平方根がエネルギーの上限となり、摂動展開はそれ以下で行われることになる。いずれにせよ、点状でも、弦状でも、物体が特定の背景時空の中を運動するという視点のままで上限を突破することは困難だという事である。

一般に、物理現象にはそれ固有のスケールが存在する。弦理論には元々  $\alpha'$  しかないのだから、それよりも低エネルギーの現象を記述するためのスケールは空間を丸めたときの半径などで対応することになる。その仕方は原理的に無数にあるが、通常は必要とする対称性が残るようにコンパクト空間の幾何を決める。コンパクト化の問題点はそれが基本的に恣意的である

---

<sup>4</sup>弦理論有効作用の曲率の 2 次の項は、Lovelock の重力理論の作用のように、Gauss-Bonnet 型だけになる。Gauss-Bonnet 項を (3.1) で摂動展開すると、次元に依らず、場の 2 次の運動項は消えて、3 点以上の相互作用項だけが現れる。高階微分項もすべて相互作用項のみを与える。つまり、運動項は 2 階微分の Einstein-Hilbert 項からのみ導かれるため、漸近場として自由に伝播するモードが物理的な重力子だけとなって、散乱行列の摂動的ユニタリ性が保たれる。



ということである。

1990年代に入ってから、D ブレーンと呼ばれる高次元物体が新たな自由度として登場した。元々は弦理論の強結合状態を記述するために導入されたものである。それを記述する方法として、世界体積 (物体の運動の軌跡) の理論として表す方法と超弦理論の有効場の理論である超重力理論のソリトン解として表す方法の2通りが知られていた。それらの対応関係から AdS/CFT 対応というアイデアが前世紀の終わりごろ Maldacena によって提唱された。それは AdS (=Anti de Sitter) 空間の境界に共形場理論 (conformal field theory, CFT) が現れるという予想である。弦理論から生まれたこのアイデアは、いまではホログラフィック原理とも呼ばれて、もはや弦理論とは独立に発展している。

AdS/CFT 対応が活用されている研究領域は、QCD やクォークグルーオンプラズマ、物性物理学の分野で、Witten によってグルーオンの励起状態 (グルーボール) のスペクトルの解析に適用されたのが始まりである。ただ、重力の言葉を使用しているが、それらは重力のダイナミクスとは直接関係の無い話ばかりである。その本質は、ゲージ対称性を保ったまま、ダイナミクスを記述するためのスケールを導入することにある。単純にゲージ場に質量項を加えるようなやり方ではゲージ対称性が破れてしまうことは良く知られている。繰り込み可能なゲージ理論では非局所的な量子補正項を通してスケールが入るが、ここでは空間を曲げることで入れているのである。さらに、いくつかのDブレーンを余剰次元で絡ませることで、研究対象が持つ大域的対称性を作りだしたりする。このようにして導かれた曲がった時空上の運動方程式は、解くことが比較的容易な局所的な場の方程式になっている。このアプローチの成功は、ゲージ対称性と大域的対称性が物理現象の骨格を決めていることを暗に示している。

この対応を逆手に取って、CFT を調べれば、AdS 上の量子重力が記述できるはずだという主張がなされていて、AdS 量子重力理論と呼ばれている。ただ、それは背景時空に依った話で、次章で解説する、CFT 自体が背景時空独立性を表現する場の量子論として与えられる方法とは本質的に異なる。

統一理論としての弦理論は、なんでも含むが何も説明できない状況になっている。ただ、空間を丸めたりする際に幾何学や群論などの知識が必要で、その数理的な美しさに魅了されている人は多い。今ではそちらの方が多いと思われる。数理サイエンスとしての興味は尽きないが、重力のダイナミクスについて説明できることは少ない。

もう一つの代表例である Rovelli と Smolin によって提唱されたループ量子重力理論は、弦理論が持たない背景時空独立性を強調して支持を獲得した理論である。時空を離散的に定義して、可能な時空配置をすべて足し上げることで背景自由性を実現しようとする試みの一つである。エネルギー運動量テンソルがゼロになる拘束条件、すなわち一般座標不変性の条件、を満たす状態が、点(ノード)とそれをつなぐ線(リンク)から構成されるグラフで表される。それをスピネットワークと呼んでいる。さらに離散的な時間を加えたものをスピフォームと呼んでいる。

格子ゲージ理論と違って、この理論は連続極限を取らない。むしろ面積や体積が離散化されていることが重力の量子化であると考えている。面を貫くリンクの数や空間の中に含まれるノードの数によって、その部分の面積や体積が Planck スケールを単位として与えられる。しかしながら、離散化すればその時点で連続的な対称性である一般座標不変性は破れてしまう。空間成分については Wilson ループのような変数の存在を想定して拘束条件を満たすように工夫しているが、時間に関係するハミルトニアン拘束条件を満たしているとは言えない。そもそも、連続的な対称性に由来した拘束条件を満たす状態がスピネットワークで過不足なく表現できるのか疑問である。

これは元々 Einstein の重力理論を Arnowitt-Deser-Misner (ADM) 形式を用いて正準量子化する試みから始まったもので、Wheeler-DeWitt 方程式を解く試みと関係している。拘束条件を満たす状態を構成するために、場の変数を Ashtekar の新たな変数に書き換え、前述のループ変数が導入される。ここまでは Poisson 括弧を用いた古典論の話である。量子論に移行するにはそれを交換子に置き換えるのが定石だが、ここで問題が生じる。それについては続く 2 つの章で触れる。ループ量子重力はそうせず

に状態をスピンネットワークで表現することで量子化が実行されたとしている。これは経路積分法とも違い、常とは異なる新しい理論になっていると考えるべきである。この理論は一般座標不変性を原理原則としているように見えるが、実際にはイメージが先行しているように思う。

## 第4章

# 背景時空独立性を実現する方法

重力を含む統一理論を構築するためには、重力場も他の場と同じ土俵で考えなければならない。それは特定の時空間を伝播する重力子の描像を前提にしているとも言える。しかし、ここではその立場を取らない。なぜなら、物質場は時空の存在の下で定義されるが、重力場は時空自身を定義するものだからである。他の場と異なり、重力場は本質的に無次元で、すべての場と直接的に結合している。この事実にもっと注目すべきである。重力場と物質場の役割はおのずと違って、その違いが顕著になるのが Planck スケールを超えた世界である。そこでは重力の揺らぎが大きく、もはや粒子が伝播する描像が成り立たなくなる。

ここまでの議論で言えることは、結局のところ、単純な弱場近似による摂動論は諦めなければならないということである。そもそも、Riemann 曲率テンソルが消えるような時空配置の回りで摂動展開する方法はブラックホール中心近傍の強い重力場を記述するには不適切だし、曲がった時空を背景として採用しても、それに特異点があればその近傍は議論できないので、量子重力理論を構築できたことにはならない。

ではどうすればよいのか。まずは特異点を非物理的なものにするため、第3章で述べたように、作用は Riemann 曲率テンソルの2乗を含む4階微分関数を採用すべきである。その上で従来の弱場近似によらない何らかの工夫が求められる。量子重力を規定する性質として「背景時空独立

性」や「背景自由性」と呼んでいるものは一般座標不変性のことである。量子化によって新たに獲得する特性を強調するために、別の名前で呼ばれているのである。距離や時間の概念が失われるほど時空が大きく揺らいでいる状態を表しているその言葉は、基準となる古典的な時空が定まらないことということで、たとえ選んでもその回りで大きく揺らいでいるなら、それはもはや意味を成さないことを表している。それ故、背景時空独立性は、特定の時空の回りの揺らぎがすべて小さいとする弱場近似では決して説明できない。

何らかの非摂動的な手法を導入する必要がある。ヒントは宇宙初期にある。WMAP 天文衛星等による CMB の観測から導かれた結果は、宇宙初期の揺らぎがスケール不変でスカラー的であったことを示唆している。その起源を共形不変性に求めるのは一つの自然な考え方である。ブラックホールの中心近傍で時空の相が変わって共形不変な世界が実現するなら、特異点問題の解決にもつながる。

そのような性質を持つ繰り込み可能な場の量子論として、背景時空独立性が特別な共形不変性として表現される量子重力理論を以下で紹介する。簡潔な要約は付録 B を参照。この理論では、重力の場の強さを表す量として、Riemann 曲率テンソルそのものではなく、それを含む Weyl 曲率テンソル

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu\lambda\sigma} = & R_{\mu\nu\lambda\sigma} - \frac{1}{2}(g_{\mu\lambda}R_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}R_{\nu\lambda} - g_{\nu\lambda}R_{\mu\sigma} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\lambda}) \\ & + \frac{1}{6}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda})R \end{aligned} \quad (4.1)$$

が重要な働きをする。加えて、4次元時空で積分すれば位相的になる Euler 密度  $G_4 = R_{\mu\nu\lambda\sigma}R^{\mu\nu\lambda\sigma} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2$  が必要になる。

作用は4階微分をもつ共形不変な Weyl 曲率テンソルの2乗、以下 Weyl 作用と呼ぶ、と位相的な Euler 密度項を中心に構成される。これに微分の階数が低い Einstein-Hilbert 作用や宇宙項、物質場の作用などが加わる。Planck スケールを超える高エネルギーでは4階微分作用が優勢になって共形不変性が現れる。Einstein-Hilbert 作用は Planck スケールより低エネルギー領域で有効になる。このように、Einstein の重力理論では決して到

達できない Planck スケールを超えた世界を記述することが出来るようになる。

ここで前章の話を出してほしい。(3.1) のような単純な弱場近似で量子化すると、物理的な描像の不自然さだけでなく、ゴーストの問題も生じて上手く行かないことを述べた。その摂動展開は  $R_{\mu\nu\lambda\sigma} = 0$  の平坦な時空の回りで行っていることに相当する。これに対して、Weyl 作用を採用するという事は、 $C_{\mu\nu\lambda\sigma} = 0$  の共形平坦な de Sitter 時空の周りで摂動展開することを意味する。これは地平線問題や平坦性問題を解決するアイデアとして多くの宇宙論研究者が信じているインフレーション理論とも符合する。

本題である非摂動的な量子化の要点は、計量テンソル場を展開する際に、距離を決める最も重要な共形因子を、正の数であることが明らかな指数関数の形で、

$$g_{\mu\nu} = e^{2\phi} \bar{g}_{\mu\nu} \quad (4.2)$$

のように括り出して特別扱いすることである。指数関数の肩に乗ったスカラー的場  $\phi$  を共形因子場と呼ぶ。共形平坦な時空からのズレを表す残りの重力場の自由度は

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\lambda} (e^h)^\lambda{}_\nu = \eta_{\mu\lambda} \left( \delta^\lambda{}_\nu + h^\lambda{}_\nu + \frac{1}{2} h^\lambda{}_\sigma h^\sigma{}_\nu + \cdots \right) \quad (4.3)$$

のように弱場近似で展開する。ここで、 $h_{\mu\nu}$  はトレースレス条件 ( $h^\mu{}_\mu = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = 0$ ) を満たす 9 成分のテンソル場である。

もちろん、すべての自由度を非摂動的に扱えるのが最良であるが、それは決して容易なことではない。それ故、Planck スケールを超えた世界の特徴を上手くとらえた摂動論を提唱しているのである。完全に非摂動的な手法については第 13 章を参照。

展開 (4.3) を制御する無次元のパラメータとして結合定数  $t$  を導入する。トレースレステンソル場の場の強さが Weyl 曲率テンソルで与えられることに注意すると、摂動論はその 2 乗である Weyl 作用の前に  $t^2$  の逆

数を導入することで定式化される<sup>1</sup>。具体的に摂動計算をする際は、通常  $h^\mu_\nu \rightarrow th^\mu_\nu$  のように場を再定義してから行う。けれども、ダイナミクスを説明する際は、Weyl 作用の前に結合定数を残したままの方が分かりやすいので、再定義せずにこのまま話を進める。

共形因子場  $\phi$  は、固有の結合定数を導入することなく、厳密に取り扱う必要がある。なぜなら、4階微分作用は共形不変なので、共形因子場に依存しないからである。そのためこの場はこれらの作用によって制御されることなく完全に揺らいだ状態になる。すなわち、共形因子場は非摂動的なままである。ただ、まったく依存しないのであれば、そのダイナミクスは存在しないのと同じになって、重力場の重要な部分が欠けた理論になってしまう。共形因子場のダイナミクスがどこから生じて、どのように記述されるのか、以下で述べるその特別な扱い方こそが量子化の核心である。

## 量子化の処方箋

良く知られている量子化の方法として正準量子化法と経路積分法がある。重力の量子化の問題は、すなわち、これらの量子化の処方箋に則って理論が定式化できるかどうかを見定めることである。Einstein の重力理論では前に述べた多くの問題が生じてそれが出来なかった。

ここでは一般座標不変性を明白に保つことが出来る経路積分法を採用して前述の重力の量子化を行う。一方、正準量子化法は作用が特定の背景時空、通常は平坦な時空上で定義されていることを前提としていて、正準交換関係の設定はその時空上で行われることに注意しなければならない。その際、時間が特別扱いされているので、一般座標不変性が明白に保たれているとは言い難い。これについては次章で改めて触れる。

<sup>1</sup>この結合定数の入れ方はゲージ場理論のときと同じである。結合定数を  $g$  として、それをゲージ場の強さ  $F_{\mu\nu}$  の2乗で与えられる作用の前に  $g^2$  の逆数で導入することは、 $F_{\mu\nu} = 0$  の回りで摂動展開をすることを暗に表している。

量子重力の経路積分は、作用を  $I$  として、それを指数関数の肩に乗せて、計量テンソル場  $g_{\mu\nu}$  について汎関数積分を実行することで定義される。その分配関数を象徴的に

$$Z = \int [dg]_g e^{iI(g)} \quad (4.4)$$

と記述する。ここで、 $[dg]_g$  は  $g_{\mu\nu}$  の汎関数積分の測度で、添え字の  $g$  はそれが力学変数である  $g_{\mu\nu}$  自身を用いて一般座標不変になるように定義されていることを表している。物質場の寄与は簡単のためここでは省略している。

ここで新たな量子化の問題が生じる。この積分測度は、 $g_{\mu\nu}$  で積分しようとする、それを定義している測度の中の  $g_{\mu\nu}$  依存性も積分しなければならないことを示している。まずはこの入れ子の状態を解消しなければならない。

通常は、実用上の理由から、特定の時空上で定義された測度に置き換えて経路積分を実行する場合がほとんどである。平坦な時空上でなら、Minkowski 計量  $\eta_{\mu\nu}$  の添え字をもつ  $[dg]_\eta$  と表記すべきである。この測度の使用は、(3.1) のような弱場近似を採用するならば正当化されて、摂動変数である  $H_{\mu\nu}$  場に対して教科書通りの経路積分を実行すれば良いように思われる。けれども、一般的には、この単純な置き換えは一般座標不変性を破ってしまう。

実際、展開式 (4.2) を用いるときは、一般座標不変性を保持したまま入れ子の状態を解消するために、積分測度を

$$[dg]_g = [d\phi]_\eta [dh]_\eta e^{iS(\phi, \bar{g})} \quad (4.5)$$

と書き換える必要がある。ここで、 $[dg]_\eta$  は直交分解して  $[d\phi]_\eta$  と  $[dh]_\eta$  の積で表している。指数関数部分  $e^{iS}$  が一般座標不変性を保証するために必要な書き換えのヤコビアンを表していて、共形因子場  $\phi$  の関数  $S$  は Wess-Zumino 積分可能条件を満たす Wess-Zumino 作用と呼ばれる量で与えられる<sup>2</sup>。

---

<sup>2</sup>同時変換、 $\eta_{\mu\nu} \rightarrow e^{2\omega} \eta_{\mu\nu}$  と  $\phi \rightarrow \phi - \omega$ 、を考えると、その変換の下で  $g_{\mu\nu}$  (4.2)



ここに現れる Wess-Zumino 作用  $S$  は、その共形変分が「共形異常」と呼ばれる量になる、体系的に良く調べられている作用である。共形異常は曲がった時空中の場の量子論の研究から生まれた言葉で、1970 年代に Capper, Duff, Deser, Isham らによって調べられたのが初めである。共形不変な作用から始めても、量子化するとその不変性が破れてしまう事を表している。歴史的に異常という言葉が使われているが物理的には異常でもなんでもない。それは量子化を行うと新たなスケールが現れるという事実に伴って生じるもので、スケールを含む量子補正項が一般座標不変な形に書けるために必要な量である。

このように、展開 (4.2) の下での量子重力理論 (4.4) は、

$$I_{\text{QG}}(\phi, \bar{g}) = S(\phi, \bar{g}) + I(g) \quad (4.6)$$

を作用としてもつ、平坦な時空中の場の量子論として

$$Z = \int [d\phi]_\eta [dh]_\eta e^{iI_{\text{QG}}(\phi, \bar{g})} \quad (4.7)$$

の形に再定義することが出来る。つまり、Wess-Zumino 作用  $S$  が決まれば通常の場合の量子論の方法を使って計算することが出来るという事である。

この表式は、作用 (4.6) は一般座標不変な形をしていないが、量子補正を含めた有効作用、すなわち分配関数の対数、を計算すると、それが一般座標不変な形になることを言っている。ここで改めて、この Minkowski 計量  $\eta_{\mu\nu}$  はあくまでも便宜上導入されたものであって、物理的な意味をもつ計量テンソルは (4.2) であることに留意する。ここで採用している戦略はまず特定の正則な背景時空中、ここでは平坦時空中、で理論を定義した後、背景時空の選び方に依らないことを示すことである。

一般座標不変性を保つために現れる Wess-Zumino 作用  $S$  が共形因子のダイナミクスを、すなわち、 $\phi$  の 4 階微分の運動項や相互作用項を与える。

は不変なので、測度 (4.5) も不変である。一方、右辺は  $[d\phi]_{e^{2\omega}\eta} [dh]_{e^{2\omega}\eta} e^{S(\phi-\omega, e^{2\omega}\bar{g})} = [d\phi]_\eta [dh]_\eta e^{iS(\omega, \bar{g})} e^{S(\phi-\omega, e^{2\omega}\bar{g})}$  となる。このとき  $[d\phi]_\eta$  が  $\phi$  のシフト変換に対して不変になることが本質的に効いている。これが元に戻り形には  $S(\omega, \bar{g}) + S(\phi-\omega, e^{2\omega}\bar{g}) = S(\phi, \bar{g})$  を満たす必要がある。これを Wess-Zumino 積分可能条件と呼ぶ。この条件は元々曲がった時空中で示された。重力を量子化すると、上記の  $[d\phi]_\eta$  の性質から最終的に  $\hat{g}_{\mu\nu}$  の共形変換に対する背景時空独立性が導かれる。

その中でも、トレースレステンソル場との相互作用の大きさを表す結合定数  $t$  のゼロ次, すなわち  $t \rightarrow 0$  の極限でも残る運動項の存在は重要で, それは発見者の名前を取って Riegert 作用と呼ばれている。この作用の量子化は Antoniadis と Mazur と Mottola によって行われた。

前に Wess-Zumino 作用はスケールを伴って生じると書いたが, Riegert 作用は特別で,  $t$  のゼロ次で現れると言うことは, スケールを伴わないことを意味する。この事実はスケールを持たない共形場理論を構成する上で本質的である。論理としてややこしいのは, Riegert 作用も元々は共形異常として導出されたものであるが, 量子重力として共形因子場  $\phi$  の経路積分を実行すると, 破れたはずの共形不変性が背景時空独立性として新たな姿を見せることである。このことは次節でより明らかになる。

最後に, ここまでは  $\hbar$  について注意を払わずにきたが, それを復活させたとき, どこに現れるか明示しておく。作用  $I$  を 4 階微分重力部分  $I^{(4)}$  と Einstein-Hilbert 項や物質場の作用からなる低階微分項  $I_{\text{EG}}$  に分けて考えると,  $\hbar$  の逆数が入るのは  $I_{\text{EG}}$  の前だけである。重力場は無次元の場合なので  $I^{(4)}$  は完全に無次元な関数になる, そのため  $\hbar$  は入らない。同様に経路積分測度に由来する Wess-Zumino 作用  $S$  にも  $\hbar$  は入らない。このことは, 4 階微分重力作用はすべて純粋に量子論的なダイナミクスを記述する量であることを表していて,  $I_{\text{EG}}$  を除くそれらを重みとして含めた全体を経路積分測度とみなすこともできる。つまり, 量子重力の経路積分はしばしば  $I_{\text{EG}}$  のみを用いて象徴的に  $\int \mathcal{D}g_{\mu\nu} e^{iI_{\text{EG}}/\hbar}$  と表されることがあるが, その測度が正確には  $\mathcal{D}g_{\mu\nu} = [d\phi dh]_{\eta} e^{iS+iI^{(4)}}$  と表すことが出来るという事を示している。また, 以下の議論で, 測度から生じた Wess-Zumino 作用と Weyl 作用が同等に扱われるのもこのためである。

この  $\hbar$  についての考察から, ゴーストモードは本質的に量子的な存在で, 粒子のような古典的な実体として現れることがないことが分かる。その上, 以下で述べるように, それはゲージ不変ですらない, すなわち物理的でないことが示せる。

## 共形不変性と背景自由性

この量子重力理論の要点は、結合定数  $t$  による展開のゼロ次で実現する摂動論の中核となる部分がもつ特別な性質にある。弱場近似では、摂動のゼロ次は平坦な時空を伝播する自由場粒子、ここでは重力子、で表され、摂動論はそれらが相互作用して散乱する様子を記述している。一方、この理論では自由場は現れない。中核となる部分は特別な共形場理論で記述され、結合定数  $t$  はそこからのズレの程度を表している。そのため、漸近的に自由場が存在することを前提とした物理量である散乱行列も定義されない。

さて、度々言及してきた特別な共形場理論とは正確にはどのようなものなのか、その物理的な意味は何なのか。通常の共形場理論との大きな違いは共形不変性がゲージ対称性 (BRST 対称性)、一般座標不変性の一部、であるということである<sup>3</sup>。そのため、通常は真空のみが共形不変であるのに対し、この共形場理論では物理量もまた共形不変でなければならない。すなわち、共形変換で移り変わることができる異なる背景時空上の理論がすべてゲージ同値になって、物理的に区別がつかなくなる。これはまさに背景時空独立性を代数的に表現したものである。この対称性のことをゲージ対称性であることを強調して「BRST 共形不変性」と呼ぶ。

具体的に数式で表すと以下ようになる。先ず初めに、一般座標変換は、座標変換  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu - \xi^\mu(x)$  の下で、線素  $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$  が  $ds'^2 = ds^2$  のように不変になる変換を言う。変換のゲージパラメータ  $\xi^\mu$  が無限小の場合、変分を  $\delta_\xi g_{\mu\nu}(x) = g'_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x)$  と定義すると、一般座標変換は  $\delta_\xi g_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} \nabla_\nu \xi^\lambda + g_{\nu\lambda} \nabla_\mu \xi^\lambda$  と表される。ここで、 $\nabla_\mu$  は共変微

<sup>3</sup>Becchi と Rouet と Stora と Tyutin は 1970 年代にゲージ不変性がゲージ固定とそれに伴うゴーストモードまで含めた形式に拡張出来ることを発見した。BRST は 4 名の頭文字を並べたものである。BRST 形式による量子化法は発見後まもなく九後と小嶋によって体系化された。

分である。

一般座標変換を (4.2) と (4.3) の下で展開して, ゲージパラメータ  $\xi^\mu$  として共形 Killing 方程式を満たす 15 個のゲージ自由度  $\zeta^\mu$  を考えると, BRST 共形変換は紫外極限に相当する摂動の最低次に現れて,

$$\begin{aligned}\delta_\zeta \phi &= \zeta^\lambda \partial_\lambda \phi + \frac{1}{4} \partial_\lambda \zeta^\lambda, \\ \delta_\zeta h_{\mu\nu} &= \zeta^\lambda \partial_\lambda h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} h_{\mu\lambda} (\partial_\nu \zeta^\lambda - \partial^\lambda \zeta_\nu) + \frac{1}{2} h_{\nu\lambda} (\partial_\mu \zeta^\lambda - \partial^\lambda \zeta_\mu) \quad (4.8)\end{aligned}$$

で与えられる<sup>4</sup>。この変換は重力場が共形次元ゼロの場合であることを表している。共形因子場  $\phi$  の変換に, 通常の共形変換には無い, 場を含まないシフト項が現れているが, それはこの変換が一般座標変換に由来していることを示している。各変換の生成演算子はそれぞれ Riegert 作用と Weyl 作用から導出されたエネルギー運動量テンソルを用いて構成される。

物理量は共形変換 (4.8) の下で不変でなければならない。この変換の特徴の一つは場を含んでいることである。通常のゲージ変換では, 摂動の最低次の右辺はゲージパラメータだけに依って, 場に依らなくなる。そのような変換では場を構成するモードが混じり合うことがないので, ゴーストモードはゴーストモードのままゲージ不変になってしまう。これに対して, (4.8) の変換の下では場を構成するモードが互いに混じり合って, すべてのゴーストモードが単独でゲージ不変にならないことが示せる。このように, BRST 共形不変性の存在が紫外極限での物理量のあり方を大きく制限し, これまでと異なる視点でゴースト問題を解決してくれる。

ゴーストモードは, それ自体は物理量でないが, 一般座標不変性が成り立つために必要不可欠な要素である。量子重力の物理状態は, 次章で述べるように, 全ハミルトニアンが正確に消える状態として表される。BRST 共形不変性は真に Planck スケールをはるかに超えた紫外極限で現れるそのような一般座標不変な状態を規定する。それが, 何もない真空状態ではなく, エントロピーを持つ非自明な状態として存在することが出来るのは,

<sup>4</sup>共形 Killing ベクトル  $\zeta^\mu$  以外の局所的な  $\xi^\mu$  の自由度はすべて, 輻射ゲージ固定条件を課すなどして, 可能な限り場の自由度を消去するために使われたものとして, ここでは考えない。

ゴーストモードのおかげである。

共形場理論の立場から見たユニタリ性の問題については第6章で解説する。BRST 共形不変性が高エネルギー極限で実現することを「漸近的背景自由性」と呼び<sup>5</sup>, それが示唆する物理的な性質については第7章で改めて議論する。このような性質を持った重力の量子論を「漸近的背景自由な量子重力理論」と呼ぶ。

## 歴史的背景について

最後に, BRST 共形不変性の歴史的な背景について言及しておく。この量子化法は1980年代の前半に, 時空が2次元の場合に Polyakov によって始められ, 同年代の後半に Polyakov と Knizhnik と Zamolodchikov の3人による2次元量子重力の厳密解の発見に繋がった。その発見を受けて Distler と川合, David らが2次元量子重力理論を Liouville 場の量子論として定式化した。その作用である Liouville 作用は元々 Polyakov によって発見された2次元 Wess-Zumino 作用で, Riegert 作用はその4次元版として見つけられたものである。

2次元ではトレースレステンソル場の成分は2つで, それは一般座標不変性の自由度を使って消すことが出来るので, 共形因子場  $\phi$  だけの理論として表すことが出来る。また, 作用  $I$  に当たる Einstein-Hilbert 作用は位相不変量 (Euler 標数) になり, 量子化はトポロジーごとに可能な重力場の配置について経路積分することに相当して, さらにトポロジーについて足し上げを行うことになる。

---

<sup>5</sup>方法論は異なるが, 紫外固定点の存在を前提としているという点で, これは Weinberg が1979年に提唱した「漸近的安全性」に通じる考え方でもある。それについては第10章10.3節で述べる。

## 第5章

# ハミルトニアン拘束条件とは

一般座標不変性は、ゲージ場のゲージ不変性ととともに、古典論から量子論まで、限りなく無限小な世界から宇宙規模の世界まで成り立つ基本原理であると私は考えている。Einstein 方程式を神が与えた方程式として、本質的な修正を認めない人たちもいるが、守るべきは一般座標不変性の方である。Einstein 方程式は量子論と相性が悪いけれども、一般座標不変性と重力の量子化は決して対立するものではない。ただ、いくつか通常の量子化とは感覚的に相違なる点があって注意が必要である。ハミルトニアン拘束条件と一般に呼ばれているものはその一つである。量子重力を考える際はこの条件の存在にもっと気を使うべきである。前章で示した背景時空独立性は真にそれを表現したものである。

通常、重力場は物質が存在することで生じると考えられている。そのことを強調するように、Einstein 方程式は (2.1) の形で表記される。しかしながら、この表記は対称性の本質を隠してしまう。Einstein 方程式は重力場の運動方程式で、それは Einstein-Hilbert 作用を含む系全体の作用を重力場で変分したものが消える式として導かれる。一方で、重力場はすべての場と結合していて、作用を重力場で変分して得られる量は系全体のエネルギー運動量テンソルに他ならない。すなわち、系全体の作用を  $I$  として、そのエネルギー運動量テンソルを  $T_{\mu\nu} (= g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} T^{\lambda\sigma})$  と書くと、運動方程式は変分原理より  $\delta I / \delta g_{\mu\nu} = \sqrt{-g} T^{\mu\nu} / 2 = 0$  で与えられ、Einstein 方程

式は

$$M_P^2 \left( -R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) + T_{\mu\nu}^M = 0 \quad (5.1)$$

と表すのが本来正しい。ここで  $M_P = 1/\sqrt{8\pi G}$  は換算 Planck 質量で、Planck 質量  $m_{\text{pl}}$  を  $\sqrt{8\pi}$  で割ったものである。特にエネルギー運動量テンソルの時間・時間成分はハミルトニアン密度で、それを空間体積で積分したものがハミルトニアンである。すなわちハミルトニアンが消えることを表している。

場の量子論では、経路積分の方法を用いると、場の運動方程式は Schwinger-Dyson 方程式と呼ばれる恒等式で表すことが出来る。それは、場の変数を  $\varphi$  とし、その作用を  $I$  とすると、

$$\int [d\varphi] \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \left( e^{iI(\varphi)} \dots \right) = i \left\langle \frac{\delta I(\varphi)}{\delta\varphi(x)} \dots \right\rangle = 0$$

で与えられる。ここで、 $\langle \dots \rangle = \int [d\varphi] \dots e^{iI(\varphi)}$  は真空期待値、相関関数、を表していて、ドットに挿入されている場は  $x$  とは異なる点にあるものとする。自由スカラー場を例にとると、この式はその運動方程式である Klein-Gordon 方程式が期待値の形で成り立つことを表している。相互作用があればそれによる量子補正も含めた運動方程式になる。

この恒等式は、通常の積分で言うと、無限遠で消える関数  $f(v)$  を考えたとき、あるいは閉空間上で考えたとき、 $\int dv \partial f(v)/\partial v = 0$  が成り立つことを汎関数積分に一般化したものである。積分変数  $v$  を場  $\varphi$  として、汎関数の積分と微分に置き換えたものと考えればよい。このとき、場は無限遠で消えるもの、あるいは境界の無いコンパクトな時空上で定義されているものとする。

この Schwinger-Dyson 方程式を重力場に適用する。測度の問題は一時脇に置いて、直観的に捉えたと、恒等式は

$$\int [dg] \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \left( e^{iI(g)} \dots \right) = \frac{i}{2} \langle \sqrt{-g} T^{\mu\nu}(x) \dots \rangle = 0 \quad (5.2)$$

のように表すことが出来る。つまり、量子補正も含めたエネルギー運動量テンソルが恒等的にゼロになる。この式は計量場を変化させても理論が

不変になっていることを表していて、背景時空独立性の別の表現になっている。この式を具体的に定義するためには、前章で示したように、一般座標不変な方法で Planck スケールの向こう側の世界まで経路積分を正しく定式化する必要がある。

正準量子化の枠組みで定式化しようとする初期の試みでは、ハミルトニアン拘束条件や運動量拘束条件、それらを汎関数微分を用いて表わした Wheeler-DeWitt 方程式と呼ばれているものが量子重力理論を規定する式として現れるが、それらは本質的に (5.2) 式と同じものである。ただ、そう呼ばれている式の多くが Einstein の重力理論の枠内で Arnowitt と Deser と Misner による ADM 形式を用いて議論されているということに注意しなければならない。そのため第 3 章で述べた多くの問題を抱えたままである。また、正準量子化自体、交換関係を設定する際に時間を特別扱うため、一般座標不変性が不明瞭になるという問題もある<sup>1</sup>。さらに、経路積分の立場から見ると、測度について注意を払っていないのが実情である。それ故、(5.2) の表記では、重力場の経路積分測度を、前節で導入した  $[dg]_g$  ではなく、 $[dg]$  のように添え字  $g$  を省いて書いている。この測度の不定性は「演算子の順序付け問題」として知られる正準量子化の困難の主因でもある。

さて、前に戻って、(5.2) 式を正確な式に書き換えて話を進める。作用  $I$  は、Weyl 曲率テンソルの 2 乗に Euler 項を加えた共形不変な 4 階微分作用を中心として、それに Einstein-Hilbert 項や物質場の低微分作用を加えたものである。一般座標不変な測度を (4.5) のように実用的な平坦背景時空上で定義して、その書き換えに必要な Wess-Zumino 作用  $S$  を加えた全作用を (4.6) のように  $I_{\text{QG}}$  と書く。分配関数は (4.7) と書けるので、Schwinger-Dyson 方程式は

$$\begin{aligned} \int [d\phi dh]_{\eta} \frac{\delta}{\delta \phi(x)} e^{iI_{\text{QG}}} &= i \langle \sqrt{-g} T^{\lambda}_{\lambda}(x) \rangle = 0, \\ \int [d\phi dh]_{\eta} \frac{\delta}{\delta h^{\nu}_{\mu}(x)} e^{iI_{\text{QG}}} &= \frac{i}{2} \left\langle \sqrt{-g} \left( T^{\mu}_{\nu}(x) - \frac{1}{4} \delta^{\mu}_{\nu} T^{\lambda}_{\lambda}(x) \right) \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

<sup>1</sup>時間と空間が同じ次元である 2 次元量子重力は特殊で、正準量子化を用いても一般座標不変性は保たれる。



と表される。これらをまとめて  $\langle \sqrt{-g} T^\mu_\nu(x) \rangle = 0$  と書く。摂動展開の仕方 (4.2) と (4.3) から、この式は共形因子場に対して厳密である一方、トレースレステンソル場に対しては摂動的に成り立つ。

運動方程式 (5.3) は背景時空独立性の一つの表現であり、その期待値には量子補正が含まれている。言い換えれば、運動方程式は有効作用を背景計量で変分したものが消える式として表される。その式は

$$T_{\mu\nu}^{(4)} + M_{\text{P}}^2 \left( -R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) + T_{\mu\nu}^{\text{M}} = 0 \quad (5.4)$$

の構造をもって、 $T_{\mu\nu}^{(4)}$  は4階微分重力項で、Wess-Zumino 作用、Weyl 作用、及びそれらを量子化することによって生じる量子補正項などからの寄与が組み込まれている。

## 一般座標不変性の物理的意味

さて、系全体のエネルギー運動量テンソルが消えることは、物理として何を意味しているのだろうか。ここでは2つの重要な性質について述べる。

I. 一つは、ハミルトニアンが消えることから、通常量子論で仮定されているような、系全体で定義される絶対的な時間が存在しないということである。すなわち、Schrödinger 方程式のような通常の時間発展の概念はもはやない。

このことは、Einstein 方程式を (5.1) のように書き換えると分かるように、古典論でも言えることである。時間は重力場の強さの違いによって進み方が異なる。地球上のような重力場が弱いところでは、重力ポテンシャルの変化が単調で、場所による進み方の違いを測定することが出来るが、系全体で同じように進んでいるわけではない。

重力が完全に揺らいだ量子時空では時間の概念そのものがなくなる。背景時空独立性と呼ばれるその性質は、基準となる背景として平坦な Minkowski 時空を選んでも、その回りで共形因子場が大きく揺らいでいれば、もはや基準を選ぶことの意味がなくなることを行っている。つまり、計量テンソル場 (4.2) で定義される物理的な時間や距離が揺らいで、実質的に測ることが出来なくなる。前章では、この性質が高エネルギー極限で BRST 共形不変性として実現されることを述べた。

およそその時間は、エネルギー運動量テンソルが消える式 (5.4) を解いた結果として生じる、重力場の力学的な変化として与えられる。共形因子、宇宙論ではスケール因子、が単調に増加し始めるとそれが時間となる。それは Planck 質量等の物理的スケールによって共形不変性が次第に壊れていく過程として表される。時間の流れはインフレーションによって始まると考えられる。後で示すように、その期間中に宇宙構造の決定に関与するサイズの揺らぎが小さくなっていて、時間が一様な流れとしての実体を持つようになる。小さくなった揺らぎはその後 Einstein 方程式の解である Friedmann 解に受け継がれ、実体としての時間も続いていく。

ここで注意すべきことは、ハミルトニアンが消える解を考えているにもかかわらず、非自明な解が存在することである。すなわち、ハミルトニアンの固有値がゼロの状態が、唯一に決まるのではなく、変化することで時間が生まれている。このような変化が起こるのは Einstein-Hilbert 作用が下に有界でないからである。もしこの作用が物質場のそれと同様に正定値ならば自明な真空解のみになって、時間は生まれまいであろう。このことは、ゴーストモードはハミルトニアンがゼロの量子重力状態を構成するために必要である、という第 3, 4 章で述べてきたこととも繋がっている。

さらに注目すべき点は、運動方程式 (5.4) は、 $T_{\mu\nu}^{(4)}$  項が加わることで、質量の源である  $T_{\mu\nu}^M$  項が消えても成り立つことである。つまり、物質の存在しない、重力の揺らぎだけが存在する世界を記述することができる。このように、物質が重力を生み出すという Einstein 方程式の視点とは全く異なる視点で時空を議論することが出来る。さらに、この方程式は重力だけの世界から物質のある世界へ移行する過程も記述することが出来る。その

移行過程が重要な働きをする量子重力の励起状態およびインフレーション宇宙論については後の章で詳しく述べる。

絶対的な時間が存在しないことから、通常の「保存」の意味が成り立たなくなる。保存するとは、すなわち宇宙の進化の過程で変化しないということで、ここでは繰り込み群不変であると表される（第10章参照）。エネルギー運動量テンソルはまさに繰り込み群不変な量である。また、全エネルギーがゼロであることから、宇宙のエントロピーは有効作用そのものとして与えられ、それも繰り込み群不変量として保存する。このことは、宇宙のエントロピーは重力の量子的揺らぎに由来し、それが一定に保たれることから、Gamowの熱いビックバン宇宙模型の前提条件である断熱条件が厳密に成り立つことを示している。

II. 運動方程式(5.4)が示唆するもう一つの重要な事実として、ゼロ点エネルギーが存在しない、ということが挙げられる。

このことを理解する前に、エネルギー運動量テンソルが「正規積」であるということを指摘しておく。それは相関関数の中で有限な演算子として振る舞う複合場のことで、自由場なら正規順序付けされた演算子を指す用語である。通常の場合の量子論では、それは次のように一般的に示すことが出来る。曲がった時空上で、有限な相関関数  $\langle \cdots \rangle = \int [d\varphi]_g \cdots e^{iI(\varphi, g)}$  を考える。それを古典的な計量テンソル場で変分したものは明らかに有限であることから、

$$\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \langle \cdots \rangle = \frac{i}{2} \langle \sqrt{-g} T^{\mu\nu}(x) \cdots \rangle = \text{有限} \quad (5.5)$$

のように量子補正を含めたエネルギー運動量テンソル  $T^{\mu\nu}$  が有限な演算子であることが示せる<sup>2</sup>。これは一般座標不変性から導かれる結論で、その対称性を厳密に保つ経路積分法で量子化を行うと、このように明白に示すことができる。

<sup>2</sup>繰り込み可能な場の量子論として注意すべき重要な点は、この変分で定義された  $T^{\mu\nu}$  は繰り込まれる前の裸の量で書かれている、すなわち繰り込み群不変量であるということである。(5.5)式はそれが繰り込まれた量で定義された正規積に書き換えることが出来ることを示していて、その中には共形異常の寄与もすべて含まれている。

Adler と Collins と Duncan は、共形異常の研究の一環として、 $T^{\mu\nu}$  が実際に正規積で表されることを示した。Brown と Collins, Hathrell はその研究をさらに発展させて、エネルギー運動量テンソルが正規積であり、且つ繰り込み群不変量であるという事実から一組の特殊な繰り込み群方程式を導出した。その方程式を解くと重力場の作用の形が決まることが最近になって示された。この仕事については第 10 章で取り上げる。

通常の場合の量子論では、(5.5) のように、エネルギー運動量テンソルは有限であることが示されるだけだが、重力の量子論ではさらに強く、(5.3) のように恒等的に消える事が示される。それはゼロ点エネルギーが存在しないことを意味する。

一般に、場の量子論に於いて、正準量子化を行った後に正規順序付けを行うのは、一般座標不変性を回復するための作業であるとも言えるかもしれない。事実、量子重力理論 (4.7) を正準量子化法を用いて量子化して BRST 共形変換の生成演算子を求める際、共形代数の交換関係が正しく閉じるためには、すなわち一般座標不変性が保たれるためには、正規順序付けを施す必要があることが示せる。

ゼロ点エネルギーが存在しないという事実は、宇宙初期の揺らぎの起源の問題と関わってくる。Einstein の重力理論の枠内では、現在の宇宙を構成する物質の源は何らかの物質でなければならず、インフレーション理論を考えるとインフラトンと呼ばれる未知の場がそのために導入される。その際、揺らぎの起源はこのインフラトンのゼロ点エネルギーとして説明される。しかしながら、重力の量子論ではそのようなゼロ点エネルギーが存在せず、代わりに量子重力の励起状態がすべての源になると考えられる。

この事実は宇宙定数問題と呼ばれるものとも関係する。この問題は、Planck スケールに紫外カットオフを導入してゼロ点エネルギーを計算すると、Planck 質量の 4 乗という観測と全く合わない大きな宇宙定数が得られてしまうことから起きている。しかしながら、ここで議論している量子重力理論はそのカットオフを超えた世界を記述しているのであって、この問題の原因自体が存在しない。

そもそも、カットオフの 4 乗という大きな宇宙定数の出現は正則化の方法によっている。例えば一般座標不変性を保つ次元正則化を用いればそれは現れない。にもかかわらず、あえて Planck スケールにカットオフを導入するという事は、その設定に物理的な意味を持たせていることになる。つまり、Planck スケールを超えた世界は存在せず、そこには場も存在しないと仮定しているのと同じである。このことから、宇宙項問題を論じるには Planck スケールを超えた世界を記述する必要があることが分かる。この問題は繰り込み可能性とも関係していて、改めて第 11 章で述べることにする。

## 第6章

# 共形場理論とユニタリ性

共形変換の下で真空が不変になる場の量子論のことを共形場理論 (conformal field theory, CFT) と呼ぶ。それは非摂動的な場の量子論の代表格で、共形不変性は相転移などの物理現象に関与する重要な対称性の一つとして研究されている。それが現れる非自明な場所として、臨界現象を示す統計モデルの臨界点、ベータ関数が消える場の量子論の固定点、などがよく知られている。その一つとして量子重力の紫外固定点加わる。

場の量子論では作用が共形不変でも、量子化すると共形不変性が破れるのが普通である。すでに第4章で述べた共形異常がそれに当たる。それは物理的なスケールが存在することを表していて、そのスケールによって物理現象を記述することができるのである (第7章を参照)。このことから、共形不変性が量子論で現れるのは極めて非自明なことであることが分かる。

共形変換は座標を  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$  と変換したとき、距離を表す線素  $ds$  が

$$ds^2 \rightarrow ds'^2 = \Omega^2(x) ds^2 \quad (6.1)$$

のように共形因子の分だけ変化するような変換である。このとき距離を定める計量テンソルは固定したままである。逆に、座標を変えずに計量テンソルを共形因子だけ拡大させる変換 (Weyl 変換) として定義することもできるが、元々は座標変換として議論された。

共形不変性が物理学で議論されるようになったのは20世紀の初めであ

る。まずはMaxwell方程式が共形不変であることが示された。その後、質量を持たないフェルミオンのDirac方程式が共形不変であることが示されて、物理学者や数学者の間で盛んに研究されるようになった。Weyl曲率テンソル(4.1)が発見されたのもこの頃である。当時はまだ古典的な対称性として議論されていた。

前世紀の後半に入ると、場の量子論や統計モデルの臨界現象を理解するうえで、共形不変性は本質的に重要な性質であると認識されるようになった。臨界現象の普遍性(ユニバーサリティ)という概念がいつごろ生まれたのかよく知らないが、1970年代にPolyakov, FerraraとGattoとGrillo, Mackらによって提唱された共形ブートストラップ法は普遍性の存在を前提とした手法である。それは元々、強い相互作用の短距離での振る舞いから予想されたスケーリング仮説に基づいて、ハドロンの物理を理解するために考えられた。作用やハミルトニアンを使わずに、共形不変性とユニタリ性から臨界現象を理解する方法で、1960年代の散乱行列理論やカレント代数を用いた代数的アプローチの流れをくむ考え方である。

1980年代中頃に、BelavinとPolyakovとZamolodchikovによって、2次元共形場理論の縮退表現が発見されたことで、共形ブートストラップ法が2次元に於いて極めて有効な手法であることが示された。さらにユニタリ性(正定値性)の条件を課すと物理的な臨界指数が決まって、2次元の臨界現象が分類できることがFriedanとQiuとShenkerによって示された。それは同時期にAndrewsとBaxterとForresterによって解かれたIsing模型を含む一連の可解格子模型の厳密解が示す臨界指数と完全に一致している。

今世紀に入って、共形ブートストラップ法は大きな進歩を遂げ、3次元以上でも有効であることが分かってきた。3次元以上では、Ising模型を含め、厳密に解かれた格子模型が存在しないことから、その意義は大きい。それまでは、2次元は共形代数が無限次元になるため特別であると考えられてきた。しかしながら、この研究は共形代数が有限次元である3次元以上の共形場理論でも、共形不変性とユニタリ性を課すと、臨界指数が決まることを示唆している。以下、最近の共形場理論の発展について簡潔にま

とめた後、量子重力におけるユニタリ性について述べる。

## 臨界現象と共形場理論

まず初めに共形場理論と臨界現象の関係について簡単に触れることにする。ここでは Euclid 空間で定義された共形場理論を考える。それは Wick 回転と呼ばれる解析接続を行うことで Minkowski 時空上の理論に戻すことができるものとする (Osterwalder と Schrader の再構築定理)。一般に、Ising モデルのような  $D$  次元の古典格子統計模型を臨界点直上で連続極限を取ったものは  $D$  次元 Euclid 空間上の共形場理論になると考えられている。

統計模型の臨界現象を制御する温度などの変数を  $T$  とし、その臨界点を  $T_c$  とする。一般的に、臨界現象に関与する場を  $O$  と書くと、その相関関数は非臨界点  $T \neq T_c$  のとき

$$\langle O(x)O(0) \rangle \sim e^{-|x|/\xi}$$

のように指数関数的に減衰する。ここで、 $|x| = \sqrt{x^2}$  で、 $\xi$  は相関距離である。臨界点  $T = T_c$  では相関距離が無限大になって、相関関数が

$$\langle O(x)O(0) \rangle = \frac{1}{|x|^{2\Delta}}$$

のようにべき乗の振る舞いをするようになる。これは共形不変性が現れたことを示していて、 $\Delta$  を  $O$  の共形次元と呼ぶ。それは相関関数が長距離で発散しないために非負でなければならない。

以下では臨界点直上に現れたその共形場理論の作用を  $I_{\text{CFT}}$  と書くことにする。それは、自由場の場合を除いて、不明な場合がほとんどである。それ故、共形場理論は共形不変性とユニタリ性の条件から、作用に頼らずに臨界現象を理解するための学問であるとも言える。



臨界現象は、臨界点からの小さな摂動を考えたとき、臨界点への近づき方を表す臨界指数によって分類される。例えば、レレヴァント (relevant) 場と呼ばれる、共形次元  $\Delta$  が空間次元  $D$  よりも小さい場  $O$  による摂動を考えてみる。臨界点からのズレを無次元パラメータ  $t$  ( $\ll 1$ ) で表して、その摂動の効果を取り入れると、作用は

$$I_{\text{CFT}} \rightarrow I_{\text{CFT}} - ta^{\Delta-D} \int d^D x O(x)$$

のように変更される。ここで、 $a$  は不足した次元を補うために導入した任意の長さスケールで、統計模型に於ける格子間隔に相当する。いま、物理的なスケールは相関距離  $\xi$  だけなので、次元解析より  $ta^{\Delta-D}$  を  $\xi^{\Delta-D}$  と同一視すると、

$$\xi \sim at^{-1/(D-\Delta)} \quad (6.2)$$

の関係が得られる<sup>1</sup>。例えば、 $O$  としてエネルギー演算子  $\epsilon$  を考えると、それは温度  $t = |T - T_c|/T_c$  による摂動を表す。その共形次元を  $\Delta_\epsilon$  とすると、それに対応する臨界指数  $\nu$  は  $\xi \sim at^{-\nu}$  で定義されることから、 $\nu = 1/(D - \Delta_\epsilon)$  の関係式が得られる。その他、比熱や磁化の臨界指数なども、共形場理論に現れる場の共形次元と場の演算子積の代数構造 (構造係数) から決まる。

## ユニタリ性と臨界指数

---

<sup>1</sup>無次元のパラメータと任意スケールを関連付けて物理的なスケールを定義する (6.2) のような手順のことを「次元変換」 (dimensional transmutation) と言う。場の量子論的見方をすると、物理的なスケールである相関距離は任意に導入したスケール  $a$  に依らない繰り込み群不変量で、 $d\xi/da = 0$  である。この条件式に (6.2) を代入して解くと、 $t$  のベータ関数  $\beta_t = -adt/da = -(D - \Delta)t$  がレレヴァントの条件により負になって、 $a \rightarrow 0$  の連続 (紫外) 極限で  $t \rightarrow 0$  の臨界点に近づくことが分かる。繰り込み群不変量については、後に QCD や量子重力理論の物理定数を定義する際にも触れる。

素粒子の場の量子論では、ユニタリ性は粒子の散乱過程の始状態と終状態をつなぐ散乱行列がユニタリ行列で与えられることを指す。一方、共形場理論では自由粒子である漸近的な始終状態を考えないので、散乱行列も定義されない。そのため、共形場理論におけるユニタリ性は場や作用の実性や正定値性として表される。

Euclid 空間で定式化された作用  $I$  を持つ場の量子論は Boltzmann の重み因子として  $e^{-I}$  を持つ統計力学系とみなすことが出来る。この重みが発散しないために、作用は下に有界でなければならない。また、重みが確率として解釈できるような正定値の値をもつために、作用は実関数であることが要求される。一般的に、作用に複素数が含まれる系はユニタリ性が壊れている。このように物理的な重みを与える作用は実関数で下に有界なものでなければならない。さらに、作用が正で発散するような場の配置は Boltzmann 重みが消えるので、存在確率がゼロになって、非物理的になる。それ故、作用が無限大になるような場の配置をもつソリトン解やインスタントン解は考えないのである。第3章で述べたように、Riemann 曲率テンソルを含む4階微分作用を導入すると時空の特異点解を取り除くことが出来るのも同じ理屈である。

ただ、共形場理論では作用が知られていない場合が多い。そのため作用によらないユニタリ性の条件が必要である。まずは、すでに述べたように、共形次元は非負でなければならないという条件が付く。そう上でさらに重要なのが、場の実性を保証する条件である。その一つが実場の2点相関関数が正定値になることである。これは、実数の2乗が正であることから、物理的に怪しい操作をしなければ自然と成り立つべき条件である。逆に、実場を考えているのに2点相関関数が負になるとしたら、それは作用が下に有界でないことを示唆している。その場合は経路積分が発散してしまうので、それを正則化するために場の実性が犠牲になっているのである。

実場が満たすべきこの正定値条件を課すと、場の共形次元として許容される範囲の下限が決まって、非負よりも強い制限が得られる。この条件のことをユニタリ性バウンドと呼ぶ。例えば、4次元ではスカラー場の共形次元は1以上となる。下限の1は自由スカラー場の次元である。ベクト

ル場は 3 以上になって、下限の 3 は保存するカレントが持つべき次元である。2 階対称テンソル場ならば 4 以上で、下限の 4 は保存するエネルギー運動量テンソルを表している。一方、自由電磁場の 4 元ポテンシャルは次元が 1 のベクトル場なのでこの条件を満たさない。これは 4 元ポテンシャル自身はゲージ不変ではないことに起因している。電磁場の強さ  $F_{\mu\nu}$  を考えると、それはゲージ不変な反対称テンソル場で、その場合のユニタリ性バウンドは 2 以上となって、条件が満たされていることが分かる。このように条件は物理的な量に対して課さなければならない。

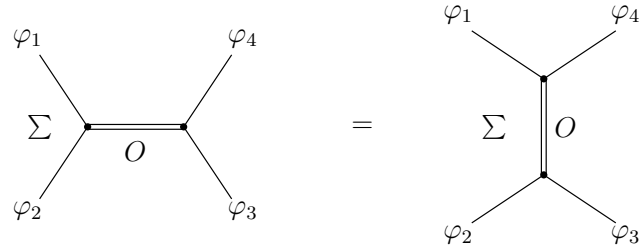


図 6.1: 交差対称性。

2 点相関関数の正定値性は場の次元の下限しか与えないので、これでは具体的なことは何も決まらない。そこで新たな条件として 3 点相関関数の実性が考えられるようになった。3 点相関関数の構造は共形不変性から全体の係数を除いて完全に決まる。この係数は、場の積を他の場を用いて展開する演算子積展開の構造を決めることから、構造定数と呼ばれている。場の実性が保たれているなら構造定数もまた実数になるはずである。実際、2 次元共形場理論のユニタリ系列の構造定数はすべて実数で与えられる。一方、非ユニタリ模型の代表である Lee-Yang 模型の構造定数は複素数になることが知られている。この条件を 3 次元以上の共形場理論に課すと共形次元の上限が求まることが最近の研究で分かってきた。

構造定数が実数であるとは、すなわちその 2 乗が正定値になることである。この条件を課して 3 次元 Ising 模型の臨界指数を求めた最近の成果について簡潔に述べることにする。これは Polyakov らによって開発された

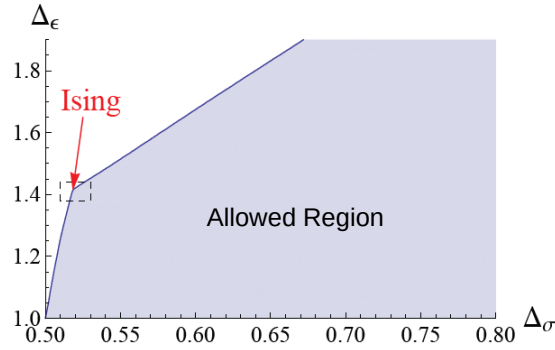


図 6.2: 共形ブートストラップ法による 3 次元の共形次元の数値計算の結果。ここで,  $\Delta = \Delta_\epsilon$ ,  $d = \Delta_\sigma$  で, 淡青色の部分がユニタリ性から許される共形次元の組みを表す領域である。3 次元 Ising 模型の臨界指数は境界の折れ曲がっている所に相当する。[S. El-Showk, M. Paulos, D. Poland, S. Rychkov, D. Simmons-Duffin, and A. Vichi, Phys. Rev. D **86** (2012) 025022.]

共形ブートストラップの手法を 2 次元以外に適用して成功した初めての例である。

共形次元  $d$  を持つスカラー場  $\varphi_d$  を考え, その演算子積展開が

$$\varphi_d(x) \varphi_d(0) = \frac{1}{|x|^{2d}} + \frac{f_{dd\Delta}}{|x|^{2d-\Delta}} O_\Delta(0) + \dots$$

で与えられるとする。後で  $\varphi_d$  は Ising 模型のスピン演算子  $\sigma$  に同定される。右辺第 1 項は  $\varphi_d$  の 2 点相関関数を表していて, ユニタリ性からその係数は正の数で, ここでは 1 に規格化している。 $O_\Delta$  は後にエネルギー演算子  $\epsilon$  に同定される共形次元  $\Delta$  を持つスカラー場で, 右辺に現れるユニタリ性バウンドを満たすスカラー場の中で最も小さな共形次元をもつものとする。ドットはその他の場の寄与を表していて, 演算子積展開が完全系を成すためにはスカラー場だけでなく整数スピンをもつ完全対称テンソル場も必要である。展開の係数  $f_{dd\Delta}$  が  $O_\Delta$  と 2 つの  $\varphi_d$  の間の構造定数である。完全対称テンソル場と  $\varphi_d$  の間にも同様に構造定数が定義される。これらの構造定数がすべて実数であることがユニタリ性の条件になる。

この条件を数値的に扱える形に設定するために, スカラー場  $\varphi_d$  の 4 点相

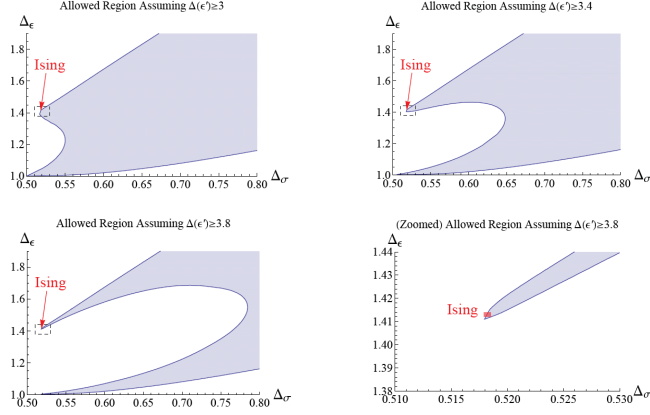


図 6.3: 3次元共形ブートストラップ法のより詳細な計算結果。ここで,  $\Delta' = \Delta(\epsilon')$  である。上から順に,  $\Delta' \geq 3$ ,  $\Delta' \geq 3.4$ ,  $\Delta' \geq 3.8$  と条件を強めていった結果である。最後の図は3番目の図の Ising 模型近傍を拡大したものである。[S. El-Showk, M. Paulos, D. Poland, S. Rychkov, D. Simmons-Duffin, and A. Vichi, Phys. Rev. D **86** (2012) 025022.]

関関数を考える。その基礎になっているのが, Dolan と Osborn と Petkou による, 共形ブロックと呼ばれる関数が Gauss の超幾何級数の積で書けることを発見した仕事である。それを使えば, 構造定数の情報を除いて, 4点相関関数の形が一意に決まる。4点相関関数は3点相関関数の積に分解することが出来て, 分解の仕方の任意性から図 6.1 のような交差対称性が成り立つ。この性質を用いて構造定数  $f_{dd\Delta}$  の2乗の情報を上手く抜き出して, 非負であるべしという条件を課すと, 次元  $d$  に対して許される  $\Delta$  の値が制限される。それを  $(d, \Delta) = (\Delta_\sigma, \Delta_\epsilon)$  のグラフで表したのが図 6.2 である。

この段階ではまだ, 淡青色領域内のすべての値が連続的に許されている。そこでさらに, 2次元共形場理論のときのように, 共形次元に離散的な構造があると仮定して制限を加えていく。図 6.3 は, 演算子積の右辺に現れるスカラー場の共形次元  $\Delta$  とその次に現れるスカラー場の共形次元  $\Delta' (> \Delta)$  の間に不連続な飛び (ギャップ) があると仮定して同様の解析を

行った結果である。このようにして、特異な点として  $d(=\Delta_\sigma)=0.5182(3)$  と  $\Delta(=\Delta_\epsilon)=1.413(1)$  の値が浮き上がってくる。その値は3次元 Ising 模型をモンテカルロ法で数値的に計算した結果と一致している。さらに、高次に現れるスカラー場やテンソル場の共形次元に同様な制限を加えていくと、遂には淡青色の領域が孤立した島のようになって、この値に絞られていく。

これは驚くべき結果であった。2次元共形場理論が解けたのは共形代数が無限次元だからだと考えられていたからである。高次元では代数の生成演算子は有限個になってしまうため、共形不変性は共形次元を決定づけるほど強くはないと思われていたが、そうではなかった。

## 量子重力の共形不変性とユニタリ性

本書で議論しているのは、量子重力の高エネルギー極限で現れる特別な共形不変性である。通常の共形不変性は真空が共形不変であることを指しているのに対して、量子重力のそれは、第4章で述べたように、一般座標不変性の一部、すなわちゲージ対称性として現れるので、すべての量が共形不変でなければならないことを要求する。それ故、BRST 共形不変性と呼んでいる。通常の共形不変性は、理論が特定のスケールに依らなくなることを指すが、距離を定義する計量は存在する。これに対して、量子重力のそれは距離そのものが揺らぐことで生じる共形不変性なので、本当の意味でスケールの無い世界を表している。

ここでもう一度、BRST 共形不変性と通常の共形不変性との違いを代数的に整理しておく。一般座標変換は、共形変換 (6.1) と違って、座標の変換と共に計量テンソル場  $g_{\mu\nu}$  も変換させて、線素の2乗  $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$  を

$$ds'^2 = ds^2$$

のように不変に保つ変換である。それ故、一般座標不変性の中に共形不変性が含まれていることは直観的に理解しづらい面がある。量子重力理論に現れる共形不変性は、理論を背景時空中の場の量子論 (4.7) に書き換えると見えてくる隠れた対称性である。このとき共形変換は背景時空中で定義された線素  $d\hat{s}^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  に対する Weyl 変換  $d\hat{s}^2 \rightarrow d\hat{s}'^2 = e^{2\omega} d\hat{s}^2$  として表すことができる。一方で、元々の計量テンソル場  $g_{\mu\nu}$  は (4.2) で与えられることから、背景計量の変更は積分変数である共形因子場を  $\phi \rightarrow \phi' = \phi - \omega$  とシフトすることで吸収することができる (第 4 章の脚注 2 も参照)。量子重力ではこのシフト変更は単なる積分変数の書き換えである。共形因子場  $\phi$  の積分領域が  $(-\infty, \infty)$  で定義されていることから、経路積分測度は  $[d\phi']_\eta = [d\phi]_\eta$  のように不変になるので、結局のところ、背景時空を Weyl 変換しても理論は変わらないことを示している。

このように、BRST 共形不変性の実現にとって重要な部分は、共形因子場  $\phi$  についての経路積分が実行されていて、且つそれがシフト変換に対して不変な背景時空中の測度を用いて書かれているということである。ここでは Weyl 変換を用いて示したが、第 4 章で与えた共形変換 (4.8) は、背景時空  $d\hat{s}^2$  を平坦に固定して、座標変換として表したものである。

共形変換によって互いに結び付けられた異なる背景時空中の理論がすべてゲージ同値になるこの性質は、元々の理論が計量テンソル場  $g_{\mu\nu}$  で書かれていることからきている。つまり、一般座標不変性が別の形で現れているに過ぎないのである。これは背景時空独立性を代数的に表現したもので、時空の共形因子が非摂動的に大きく揺らいで、物理的な距離が実質的に測れないような状況になっていることを表している。

Planck スケールを超えた世界では、このような背景時空独立性が実現して、特定の背景時空を伝播する粒子の描像が成り立たなくなる。それ故、散乱行列も定義できない。そのような量は次章で解説する時空相転移後に古典的な時空が現れて初めて定義されるものである。

量子重力のユニタリ性は、共形場理論のそれに倣って、物理的な場の実性が保たれるかどうかで表される。BRST 共形不変性を実現するためにはゴーストモードが必要であるが、それ自体はゲージ変換である BRST 共

形変換の下で不変にならないため、物理的な存在ではない。実際、BRST 共形不変な量はすべて実の複合スカラー場として与えられる。その実性は  $I_{\text{QG}}$  (4.6) で与えられる 4 階微分量子重力作用が正定値であることから破れないことが保証される。

ここで注意すべきことは、Einstein-Hilbert 作用に含まれるゴーストモードはその不定値性の原因であるが、4 階微分重力作用のゴーストはそうではないということである。量子化の際に、重力場をモードに分解して考えているが、元の間で見るとその作用は正定値である。このことは、モード分解があくまでも便宜上であることを示している。実際、個々のモードは独立ではなく、お互いにゲージ変換で結び付いている。

最後に、実複合スカラー物理場に対応する物理状態が共形代数を用いてどのように表現されるかを記す。共形場理論として見たときのディラレーションを  $D$ 、Lorentz 変換の生成演算子を  $M_{\mu\nu}$ 、特殊共形変換の生成演算子を  $K_\mu$  とすると、物理状態  $|\psi\rangle$  は条件式

$$D|\psi\rangle = 0, \quad M_{\mu\nu}|\psi\rangle = 0, \quad K_\mu|\psi\rangle = 0$$

で定義される。さらに、この状態に並進の生成演算子  $P_\mu$  を作用させて得られるいわゆるディセダント (子孫) 状態は BRST 自明な状態になって消える。これらの式は一般座標不変性を表すハミルトニアン拘束条件や運動量拘束条件に他ならない。この物理状態は無限個存在することが示されている。前にも強調したが、ハミルトニアンが消える状態であるにもかかわらず、無限個存在して、エントロピーをもつことが出来るのは、単独では決して物理的な状態として現れないゴーストモードのおかげである。

物理状態は、共形場理論の言葉を使えば、スピンのゼロの実プライマリースカラー状態に当たる。これに対して、テンソル状態は存在しない。このことは宇宙初期の揺らぎがスカラー的であったことを示唆する CMB の観測結果と合致している。





## 第7章

# 量子重力の相転移

前章では、作用やハミルトニアンを知らなくても、共形不変性とユニタリ性の条件から 3 次元 Ising 模型の臨界現象を理解することが出来ることを見た。2 次元ではこの問題は厳密に解けていて、Ising 模型を含む一連の臨界指数が分類されている。臨界指数には普遍性があると信じられていて、臨界点近傍の振る舞いは共形不変性を用いて分類される臨界指数のどれかで表されると考えられている。これは非常に強い結論である。けれども、どの指数が Ising 模型に対応するかは結果を知っているから言えることでもある。また、臨界点近傍が理解できれば物理のすべてが分かるわけでもない。

実際、ハドロンの物理では共形不変性が破れるところまで強い相互作用を記述できないと、その質量スペクトルなどを理解することは出来ない。そのため、場を導入して記述する必要がある。強い相互作用を媒介する場はグルーオン (糊粒子) と呼ばれ、非可換なゲージ場 (Yang-Mills 場) を用いて記述される。その理論が繰り込み可能な場の量子論の一つである量子色力学 (QCD) として定式化されたのは 1970 年代に入ってからである。

QCD の創始者の一人である 't Hooft がその土台となる非可換ゲージ場理論の繰り込み可能性問題に取り組んでいた当時は、繰り込みという考え方に否定的な人の方が多かった。量子電磁力学 (QED) では成功したけれども、発散を繰り込んで有限にするという処方箋はひどく作為的に見えて、

場の量子論に頼らずに有限な理論の構築を目指す人の方が多かった。繰り込み理論が広く受け入れられるようになったのは、結局のところ、QEDとQCD、両者の成功によるところが大きい。また、同時に、Wilsonらによる繰り込み群の考え方に基づいて、理論が整備されたことも大きい。それはエネルギースケールの変換に理論のパラメータがどのように応答するかを体系的に理解するため道具立てである。クォークやグルーオンが示す漸近的自由性は繰り込み群の考えに基づいて見事に説明することができる。

QCDがハドロンの物理に適用できると考えられるようになったのは、実験的に検証されていた強い相互作用がもつ漸近的自由な振る舞いをうまく説明できることが示されてからである。それは、核子(陽子や中性子)の中を見ることが出来るほどの高エネルギー極限で、強い相互作用が相対的に弱くなって、核子を構成するクォークやグルーオンが自由粒子のように振る舞う性質のことである。理論的にはエネルギースケールの変化に対する結合定数の変化の程度を表すベータ関数が負になることを指す。QCDがこの性質を持つことを発見した功績で、PolitzerとGrossとWilczekの3氏にノーベル賞が2004年に授与された。

しかしながら、't Hooftも、論文として発表しなかったけれども、彼らより前にベータ関数が負になることを発見し、その物理的意味を理解していたといわれている。この本人の主張を、彼なら知っていただろうと、多くの人が信じていた。ノーベル賞は3人までしか受賞できないので、この問題を解消するために、まずは't Hooftとその師であるVeltmanの2氏に、別の非可換ゲージ場を用いて記述される電弱相互作用の量子構造を解明した業績に対して、1999年にノーベル賞が授与され、その後3氏が受賞した。これが、漸近的自由性の発見が1970年代の前半であるにもかかわらず、今世紀に入るまでノーベル賞が授与されなかった理由の一つではないだろうか。

さて、話題を量子重力理論に戻す。繰り込み可能な量子重力理論の結合定数 $t$ のベータ関数も負になることが示されている。それは、非可換ゲージ場理論と同様に、高エネルギー極限で結合定数が小さくなることを表し

ている。量子重力の世界では、高エネルギー極限は Planck エネルギースケールを超えた領域に入る事を意味する。結合定数  $t$  は重力場のトレースレステンソルモード  $h_{\mu\nu}$  を制御するために導入された変数なので、 $t$  が小さくなるとはテンソル揺らぎが小さくなることを表している。

これに対して、距離を支配する共形因子場  $\phi$  の揺らぎは大きいままである。高エネルギー極限で現れる時空は、単純な自由場理論ではなく、背景時空独立性を表現した特別な共形場理論で記述される。それ故、この性質のことを、漸近的自由性と区別して、「漸近的背景自由性」と呼んでいる。ここでは両者それぞれの物理的意味を考えることにする。

## QCD の相転移

QED で良く知られている遮蔽効果は、電荷が存在するとその回りで電子・陽電子対が仮想的に生成されて、遠方から見ると電荷が遮蔽されて小さく見える現象を指す。

QCD の閉じ込めはこの電荷の遮蔽効果と反対のことが起きていると解釈される。QED との違いは、クォークだけでなくグルーオンも「カラー(色荷)」を持っていることである。電磁場は自分自身と直接相互作用しないが、非可換ゲージ場であるグルーオンは自分自身とも相互作用する。そのため、カラーをもつ粒子が存在すると、その回りではクォーク・反クォーク対のみならずグルーオンの対も生成される。このグルーオン対の効果によって QED とは逆の現象「反遮蔽効果」が起きていると考えられる。すなわち、短距離ではカラーの効果が小さくなり、相互作用が弱くなる。逆に、遠距離になるとその効果は大きくなって閉じ込めが起こる。

上記の量子補正を加えたカラー間の相互作用の強さはランニング結合定数(有効結合定数とも呼ばれる)で表される。考えているエネルギーま

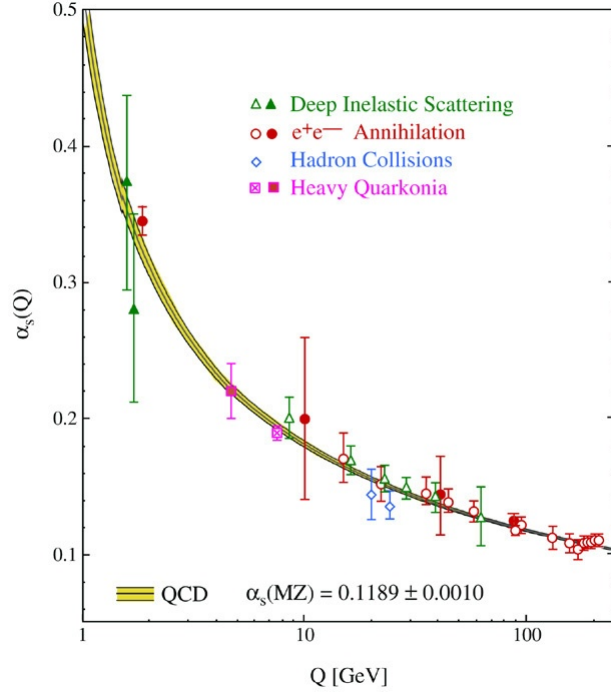


図 7.1: QCD のランニング結合定数の振る舞い, 及びその測定結果のまとめ。ここで,  $\alpha_s(Q) = \bar{g}^2(Q)/4\pi$  である。[G. Prosperi, M. Raciti, and C. Simolo, Progress in Particle and Nuclear Physics **58** (2007) 387.]

たは運動量スケールを  $Q$  とすると, その 2 乗は

$$\bar{g}^2(Q) \propto \frac{1}{\log(Q^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)} \quad (7.1)$$

と表される。この表式はベータ関数が負であることから導かれるもので, 比例係数はその情報から決まる正の数である。 $\Lambda_{\text{QCD}}$  は QCD に固有な物理的エネルギースケールで, 理論的には決まらない自由パラメータである。

これはエネルギー  $Q$  ( $\geq \Lambda_{\text{QCD}}$ ) で有効な相互作用の強さを表していて,  $Q$  が高ければ  $\bar{g}(Q)$  は小さくなって, 相対的に弱くなることを示している (図 7.1 参照)。エネルギーが低くなれば対数的にゆっくりと大きくなっていき,  $\Lambda_{\text{QCD}}$  で急激に発散する。つまり, この QCD エネルギースケールで強い相互作用の強さが無限大になって閉じ込めが起こることを表し

ている。その値は実験から  $\Lambda_{\text{QCD}} \simeq 210 \text{ MeV}$  と求まっている。その逆数  $\xi_{\text{QCD}} (= 1/\Lambda_{\text{QCD}})$  は強い相互作用の相関距離を表していて、核子の大きさの基準単位である  $1 \text{ fm} \simeq 10^{-15} \text{ m}$  になる。これより低エネルギーの世界は QCD を用いて記述することが有効でなくなる。そのため  $\Lambda_{\text{QCD}}$  は QCD の赤外カットオフとも呼ばれている。

宇宙進化の過程でもこのような相転移が起きていると考えられる。宇宙の温度が QCD エネルギースケールよりも高いときは、クォークやグルーオンは自由に飛び回っているが、それ以下に温度が下がるとそれらは核子の中に閉じ込められて自由に運動できなくなることを表している。つまり、グルーオンによって強く結びつけられたクォークの複合場として一体で運動するようになる。それがハドロンと呼ばれる物質である。

専門的には、量子補正を含めたグルーオンの有効作用が、ランニング結合定数 (7.1) が発散すると、その逆数に比例して消えることで説明される。それ故、ハドロンを表す新しい場の変数を導入して記述される「QCD の低エネルギー有効場の理論」にはグルーオンの運動項は含まれない。

## 時空の相転移

重力場の結合定数  $t$  も、ベータ関数が負になることから同様のことが言えて、(7.1) に対応する量子重力の相互作用の有効な強さを表すランニング結合定数の 2 乗は

$$\bar{t}^2(Q) \propto \frac{1}{\log(Q^2/\Lambda_{\text{QG}}^2)} \quad (7.2)$$

と表される。この式は量子重力のダイナミクスを決める新たな物理的エネルギースケール  $\Lambda_{\text{QG}}$  の存在を予言している。比例係数は付録 B に記したベータ関数の係数から決まる。

重力場による量子補正は, (7.2) の比例係数を決めるベータ関数の値だけでなく, 考えている物理的なエネルギー  $Q$  にも入ってくる。 $Q$  の2乗を運動量の2乗で表すと, それは計量テンソルが (4.2) であることから

$$Q^2 = g^{\mu\nu} q_\mu q_\nu = \frac{q^2}{e^{2\phi}} \quad (7.3)$$

で与えられる。ここで,  $q^2$  は共形因子を除いた計量テンソル  $\bar{g}_{\mu\nu}$  で定義される運動量の2乗である。これは一般座標不変性から要請されることで, 量子重力の有効作用はランニング結合定数 (7.2) を用いて表される (付録Bの (B.4) 参照)。物理運動量 (7.3) を通して入ってくる有効作用の共形因子場  $\phi$  に依存した部分が, 第4章で述べた, 共形異常をもたらす Wess-Zumino 作用  $S$  に他ならない。

このことは QCD のランニング結合定数 (7.1) の場合でも同様で, (4.2) の計量をもつ曲がった時空上で考えれば,  $Q$  は (7.3) に置き換わる。このように共形異常は一般座標不変性を保つために現れる必要不可欠な量である。

さて, Planck 質量や宇宙定数と異なる, 新たな重力のエネルギースケール  $\Lambda_{\text{QG}}$  の存在は何を表しているのだろうか。結合定数  $t$  は4階微分 Weyl 作用の共形不変なダイナミクスを制御するために導入されたパラメータである。QCD の場合と同様に考えれば, ランニング結合定数 (7.2) が  $\Lambda_{\text{QG}}$  で発散することは, そのエネルギースケールで共形不変なダイナミクスが完全に消えてしまうことを表している。より専門的には, Weyl 作用に対する有効作用がランニング結合定数の2乗の逆数に比例して消えることを指す。

共形因子場のダイナミクスは QCD には存在しない部分である。共形不変な4階微分作用には共形因子場は含まれないが, そのダイナミクスは共形異常の Wess-Zumino 作用として現れる。特に結合定数  $t$  のゼロ次で現れる Riegert 作用は BRST 共形不変性のために必要不可欠な作用である。その作用に  $t$  の高次補正を加えた有効作用もまたランニング結合定数 (7.2) を用いて書くことが出来て, それが発散するとその有効作用も消える。このようにエネルギースケール  $\Lambda_{\text{QG}}$  で共形不変なダイナミクスを

担っていたすべての作用が消えて、新しい時空の相に移る。重力場の運動方程式 (5.4) では、それは  $T_{\mu\nu}^{(4)}$  部分が消えることで表現される。

このとき、低エネルギーの時空相はどのように記述されるのであろうか。QCD では 2 階微分であるグルーオン場の作用がなくなると、グルーオンのダイナミクスは完全に消えてしまう。これに対して、量子重力では 4 階微分重力作用がすべて消えても、2 階微分の Einstein-Hilbert 作用が残って、それが低エネルギーでの重力場の運動項を与える。すなわち、Einstein の重力理論が低エネルギー有効理論として現れる。重力場はもはや (4.2) のように共形因子場とトレースレステンソル場に分けて考えることは出来なくなり、それらの複合場として一体となった重力場が新たな場の変数となる。

それでは、新しい重力的スケールの値はいくつになるのであろうか。これは観測から決めなければならない。第 9 章で解説する量子重力的インフレーションのシナリオから、時空の相転移が起こるスケールとして  $\Lambda_{\text{QG}}$  は約  $10^{17}$  GeV になることが示唆されている。この値は Planck 質量  $m_{\text{pl}}$  のおよそ 100 分の 1 であるから、その逆数である量子重力の相関距離  $\xi_{\Lambda} = 1/\Lambda_{\text{QG}}$  は Planck 長さの約 100 倍になる。すなわち、エネルギーをどんどん高くして行って、より短距離を探索すると、Planck スケールに到達する前に Einstein の重力理論は破綻して、時空は新しい相に入るという事である。だからこそ、Einstein の重力理論が抱えている多くの問題を解決することが出来るのである。

相関距離  $\xi_{\Lambda}$  は測定可能な最小距離を与える。これよりも長距離の物理は Einstein の重力理論で記述されるため、距離を古典的に測ることが出来るが、これより短距離になると、量子重力の領域に入って、重力場が大きく揺らぎ始めるために計測が困難になる。背景時空独立性が BRST 共形不変性として実現している極微の世界では、物理は計量テンソルの選び方に完全によらなくなる。それはスケールの異なる世界がすべてゲージ同値になることを表していて、そこではもはや物理的な距離が定義されない。すなわち、距離の概念が失われた世界になる。したがって、 $\xi_{\Lambda}$  よりも短い距離は実質的に測れないことを意味する。このように、繰り込み可能な量



子重力理論では、紫外カットオフを導入せずに連続的に時空を扱っているにもかかわらず、距離が $\xi_\Lambda$ で量子化された時空が現れる。

## 第8章

# 量子重力の局所的な励起状態

Planck 質量より大きな質量を持つ点状の粒子は, Einstein の重力理論では, ブラックホールに他ならないことはすでに第2章で指摘した。そのような粒子の情報はホライズンの内側に隠れて見えなくなってしまうからである。これに対して, 量子重力理論は Planck 質量を超える大きな質量を持った局所的な励起状態が存在することを示している。

漸近的背景自由な量子重力理論には約  $10^{17}$  GeV の新たな力学的エネルギースケール  $\Lambda_{\text{QG}}$  が存在することはすでに述べた。これは Planck エネルギースケールより2桁小さい値で, 次章で述べる重力の量子効果によって起こるインフレーションのシナリオが CMB の観測結果と合致するように決めたものである。ここでもこの値を採用して話を進める。

時空はこのとき実質的に相関距離  $\xi_\Lambda (= 1/\Lambda_{\text{QG}})$  で量子化される。その長さは Planck 長さの約100倍になる。これよりも長距離では Einstein の重力理論に基づいて物理的な距離を測ることができるが, その内側では重力場の量子的揺らぎが大きくなって, 距離を測ろうとしても, もはやそれが物理的な意味をもたない背景自由な世界が現れる。このことから, 量子重力の励起状態が存在するとすると, それは直径が相関距離  $\xi_\Lambda$  の局所的な状態として現れることが示唆される。それは QCD におけるグルーボールに近い状態である。ただ, 内部で揺らいでいるのが時空そのものなので, その点は想像しがたいところである。けれども, 外部から見れば同じよう

に古典的な時空に生じた粒子のように見えると考えられる。

ここでは、励起状態として、質量  $m$  が Planck 質量程度の静的な球状物体を考える。そのような物体の古典的なホライズンサイズである Schwarzschild 半径  $r_g (= 2Gm)$  は Planck 長さ程度になる。すなわち、遠方から物体の中心に向かって近づいて行ったとき、ホライズンよりも 100 倍遠いところで重力の量子効果が効き始めることを意味する。そのため、ホライズンは量子揺らぎの中に埋没して消滅してしまう。

このような物体の外側は Schwarzschild 解で表され、内側は量子重力理論で記述される。そのような状態を運動方程式 (5.4) の解として実際に求めてみる。その際、物質場のエネルギー運動量テンソル  $T_{\mu\nu}^M$  はゼロと置く。すなわち、純粋に重力的な励起状態を考える。

具体的な解を求めるために、量子重力のダイナミクスを担っている  $T_{\mu\nu}^{(4)}$  部分を、平均場近似的な手法を適用して、大胆にモデル化することにする。量子補正を取り込んだ有効作用がランニング結合定数  $\bar{t}(Q)$  (7.2) を用いて書けることはすでに述べた。座標空間で見ると、ランニング結合定数は場に作用する複雑な微分演算子で、量子化によって生じる非局所性や非線形性がかたちとなって現れたものである。ここでは、その期待値を動径座標  $r$  に依存した平均場に置き換えて式を簡単化する。すなわち、(7.2) の中の  $Q$  を  $r$  の 2 倍の逆数に置き換えて、物体の半径に相当する  $R_h (= \xi_\Lambda/2)$  で発散し、原点で消える関数  $\bar{t}^2(r) \propto 1/\log(R_h^2/r^2)$  としてそれを表す。

このような平均場近似を施してモデル化された運動方程式は次のような構造をもつ (付録 B の最後を参照)。原点付近では、ランニング結合定数が消えるに伴って、共形因子場の揺らぎが主体となった方程式になる。一方、励起状態の中心から離れていくとランニング結合定数は次第に大きくなっていき、端に至ると発散する。それに伴って、端で  $T_{\mu\nu}^{(4)}$  項がランニング結合定数の 2 乗の逆数に比例して消滅し、外部は真空中の Einstein 方程式で記述される。

励起状態の質量は内部の重力エネルギーの和として  $m = \int_{|\mathbf{x}| \leq R_h} d^3\mathbf{x} T_{00}^{(4)}(\mathbf{x})$  と定義される。ここで、 $\mathbf{x}$  は背景時空の空間座標で、 $r = |\mathbf{x}|$  である。この質量  $m$  が Planck 質量  $m_{\text{pl}}$  の 2 倍の場合の解を図 8.1 に提示した。遠方では

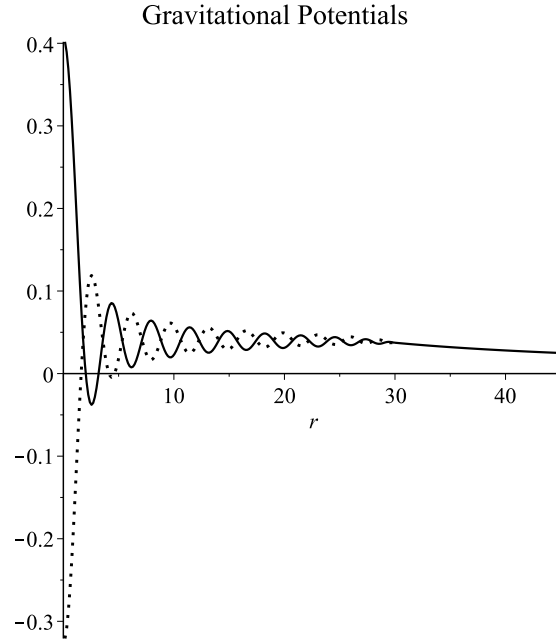


図 8.1: 質量が  $2m_{\text{pl}}$  の量子重力の局所的な励起状態。重力ポテンシャル  $\Phi$  を実線,  $-\Psi$  を点線で表している。励起の半径  $R_h (= \xi_\Lambda/2)$  は 30 に規格化されていて, その外側は Schwarzschild 解  $\Psi = -r_g/2r$  ( $\Phi = -\Psi$ ) になっている。[K. Hamada, Phys. Rev. D **102** (2020) 026024.]

Einstein 方程式は Poisson 方程式の形に書けて, その解は Newton ポテンシャルで近似できる。それは, 線素  $ds^2 = -(1+2\Psi)d\eta^2 + (1+2\Phi)d\mathbf{x}^2$  で定義される重力場ポテンシャル  $\Psi$  と  $\Phi$  を導入すると,  $\Psi = -r_g/2r$ ,  $\Phi = -\Psi$  で与えられる。ここで,  $r_g$  は前出の Schwarzschild 半径で, 質量が Planck 質量の 2 倍の場合を考えていることから, Planck 長さの 4 倍になる。

励起状態に外から近づいていくと重力場は次第に強くなっていく。けれども, いま考えている状態の半径  $R_h$  は Schwarzschild 半径  $r_g$  よりも 20 倍以上大きくて, 端での重力ポテンシャルの大きさ  $r_g/2R_h$  は近似が機能するほど十分に小さい。内部に入ると, 重力ポテンシャルは量子効果によって振動し始めて, もはや古典解のように単調に増大して発散するようなことはなくなる。このとき, 外部では  $\Phi = -\Psi$  を満たしていた 2 つの重力ポ

テンソルが次第にズレていって、中心付近では共形因子場の揺らぎを表す  $\Phi = \Psi$  の配置が優勢になる。このような内部の重力ポテンシャルの振動は物理的な距離が揺らいでいることを表している。

重力ポテンシャルを用いたこの解の導出は、これらの事実をあらかじめ想定して行われたものである。前述のようにランニング結合定数を平均場に置き換えて運動方程式を立て、計算結果が近似と矛盾していないことを確かめながら解を求めた。Planck 質量の 2 倍という質量は、物理的に興味深い質量であるだけでなく、幸いにもこの近似方法が有効な質量でもある。これよりも質量が大きくなると、ランニング結合定数以外の非線形効果も考慮しなければならなくなって計算が困難になる。いずれにせよまだ不完全ではあるが、この解は励起状態の特徴をよく捉えていると考えている。

この物体はブラックホールではなく粒子と呼ぶことが出来る。このような質量だけをもつ純粋に重力的な粒子を「暗黒粒子」と呼ぶ。質量が  $\Lambda_{\text{QG}}$  より低ければ、重力の量子効果が発動しないので、このような励起は起こらないと考えられる。また、量子重力の質量スペクトルは  $\Lambda_{\text{QG}}$  で量子化されていると予想されるが、平均場近似では残念ながらそれを確かめることは出来ない。

この励起状態はおそらく  $\Lambda_{\text{QG}}$  の逆数程度の寿命ですぐに崩壊すると思われる。端の部分でランニング結合定数が大きくなるという事は、そこで物質場との相互作用が大きくなることを表している。そのため、端で物質が生成され、そこから徐々に重力のエネルギーが物質のエネルギーに移ることで崩壊していくと考えられる。

一方、質量が Planck 質量よりも 100 倍以上大きな物体だと、古典的なホライズンサイズが相関距離よりも長くなる。そのような物体は、外から見ると、もはやブラックホールである。そのダイナミクスについては現時点では想像するしかないが、中心付近はここで示したように重力場が量子的に大きく揺らいでいると考えられる。

このような大きなブラックホールでは中心部以外は重力を古典的に扱うことが出来る。Hawking は 1970 年代に、そのような半古典近似の下で、

ブラックホールが輻射を放ちながら徐々に小さくなっていく、いわゆる蒸発現象が起こることを示した。蒸発の最終局面では、ホライズンが消滅して、上記の暗黒粒子状態が現れると考えられる。それは最終的に崩壊してブラックホールは完全に消滅すると予想される。

宇宙初期には暗黒粒子が大量に、そして密に生成されたと考えられる。それらが、いわゆる「暗黒物質」として現在まで残るためには、寿命が長くて安定でなければならない。暗黒粒子は当初角運動量を持っていないと考えられるので、たとえ個々に寿命が短くても、崩壊する前に合体するかもしれない。ホライズンが形成されるほど大きくなれば、それらを種として大量の原始ブラックホールが形成される。そうすると、寿命が長くなるので、暗黒物質の候補になる。



## 第9章

# 量子重力的インフレーション

量子重力理論が必要とされる領域として、ブラックホールの中心付近のほかに、宇宙創成の時期が挙げられる。ビッグバン以前に宇宙が指数関数的に急速膨張した時期があったとする、1980 年前後に佐藤と Guth と Starobinsky によって提案されたインフレーション理論が支持されるようになると、量子重力理論の必要性が強く主張されるようになった。なぜなら、このアイデアの自然な解釈は、現在見えている宇宙の広大な領域が、インフレーション以前まで遡ると、Planck 長さより狭い領域から始まったこと示唆しているからである。

インフレーション理論を考える大きな理由の一つは「地平線（ホライズン）問題」を解決するためである。空間が急激に引き伸ばされることで、宇宙初期にホライズンサイズよりも大きなサイズの相関が存在した理由を上手く説明することができる。もう一つは「平坦性問題」を説明することである。宇宙初期の空間が曲率を持っていたとすると、その符号によって宇宙はあっという間につぶれるか、非常に速く膨張して星や銀河が形成されなくなるかのどちらかになる。にもかかわらず 100 億年以上経った現在でも曲率はほぼゼロのままであることが観測から分かっている。この問題もインフレーションの時期に空間が極端に引き伸ばされて平坦化されたと説明することができる。

さらに、これら以外で強調しておきたいインフレーションの重要な役割



と考えられるのが、ビッグバン後の宇宙進化の初期値を与える原始揺らぎを生成することである。現在の宇宙を説明するためには、少なくともその構造形成に關与するサイズの揺らぎでは、そのスペクトルはほぼスケール不変なものでなければならない。かつ、その振幅の大きさは異常に小さな値でなければならないことが要請される。インフレーション理論はそれらを説明する必要がある。

では、何故、原始揺らぎが小さくなければならないのか。第2章ですでに述べたように、それは空間の一様等方性を仮定して導かれた Friedmann 解が非静的で、不安定であることによる。この解は時間的に単調に変化して、さらに解のまわりの小さな揺らぎ(摂動)を考えると、揺らぎが時間とともに成長して、時空は解から大きくズレてしまう。通常、このような不安定解は物理として選ばれない。Einstein が静的で安定な解を得るために宇宙項を導入したのは有名な話である。しかしながら、宇宙は膨張している。それはスペクトルが「赤方偏移」していることから疑いの余地がないことである。さらに、宇宙は100億年以上も長く続いているにも関わらず、現在も不安定な Friedmann 解で良く近似できる。この事実は初期の揺らぎが不自然なほどに小さかったことを示している。

初期値として、たまたま振幅の小さな揺らぎが選ばれることがあるかもしれない。しかし、それは自然な説明であるとは思えない。むしろ、揺らぎを小さくする何らかのメカニズムが、それ以前にあったと考えるのが自然である。インフレーションがその役割を担っていたと考えると話は明快になる。けれども、Einstein の重力理論の枠内で構成されたインフレーション理論では、それが上手く説明できているとは言い難い。

ここでは量子重力の運動方程式(5.4)の解としてインフレーション解を導出する。Planck スケールの向こうにある背景自由な世界から共形不変性が破れた現在の Friedmann 宇宙に至るまでのシナリオを解説する。宇宙発展の歴史はダイナミクスに寄与する重力作用の微分の階数が段階的に下がっていく過程として捉えることができる。

## インフレーション解

量子重力理論には観測によって決めなければならない「物理定数」が3つある。それらはどのエネルギースケールで見ても同じ値をもつ真の定数で、場の量子論では繰り込み群不変量として定義される。その内の2つ、Planck 質量  $m_{\text{pl}}$  と力学的エネルギースケール  $\Lambda_{\text{QG}}$  が宇宙初期のダイナミクスを記述する。一方、3番目の宇宙定数は無視できるほど小さいとしてここでは考えない。

一般的にインフレーションは指数関数的に空間が膨張する de Sitter 時空解で表される。急激に空間が膨張する解はすべてインフレーション解と言えるが、ここでは de Sitter 解を指すものとする。また、以下で解説する解は Starobinsky 解に準ずるものであるが、インフレーションの終わり方に大きな違いがある。

インフレーション解は Weyl 曲率テンソルが消える共形平坦な時空解の一つである。第7章で解説した漸近的背景自由な性質は、ランニング結合定数 (7.2) が小さくなる高エネルギー領域で、そのような共形平坦な時空配置が支配的になることを表している。つまり、インフレーションは力学的スケール  $\Lambda_{\text{QG}}$  よりも高いエネルギー領域で起こると考えられる。その領域に存在できるスケールは Planck 質量しか考えられないので、それがインフレーション解を決めるスケールになる。故に、解が存在するための条件として

$$m_{\text{pl}} > \Lambda_{\text{QG}} \quad (9.1)$$

が要請される。

進化が始まる前の極初期の宇宙では時間や距離が意味をなさなくなるほど共形因子が大きく揺らいでいたとする。このとき物質はまだ存在していなかったとして、そのエネルギー運動量テンソル  $T_{\mu\nu}^{\text{M}}$  は始めゼロであったとする。そのような世界はスケールを持たない特別な共形場理論で記

述されることはすでに述べた。ただ、共形不変性は完全ではなく、それを破るスケールがあれば、いずれ宇宙は進化し始める。物理定数の大小関係 (9.1) は進化の過程で宇宙が最初を感じるスケールが Planck スケールであることを表している。

量子重力の運動方程式 (5.4) は系全体のエネルギー運動量テンソルが消えることを表している。共形因子が指数関数的に膨張するインフレーション解は Einstein 項  $T_{\mu\nu}^{\text{EH}}$  と重力の共形ダイナミクスを担う 4 階微分項  $T_{\mu\nu}^{(4)}$  がバランスすることから導かれる。具体的には、線素が  $e^{2\phi(\eta)}(-d\eta^2 + d\mathbf{x}^2)$  で与えられる空間的一様等方な時空を仮定して、共形因子場  $\phi$  の運動方程式 (5.4) を解いて解を求める。

宇宙論では、時間成分のみに依存した共形因子  $a(\eta) = e^{\phi(\eta)}$  のことをスケール因子と呼ぶ。時間変数として  $d\tau = a(\eta)d\eta$  で定義される  $\tau$  を導入すると、線素の時間成分が  $-d\tau^2 + a^2(\tau)d\mathbf{x}^2$  のように平坦な時空のそれになるので、この変数のことを物理時間と呼ぶ<sup>1</sup>。Hubble 変数  $H(\tau) = \partial_\tau a(\tau)/a(\tau)$  を用いると、まだランニング結合定数が小さい初期段階では、インフレーション解は

$$H(\tau) = H_D, \quad H_D = m_{\text{pl}} \sqrt{\frac{\pi}{b_c}} = M_{\text{P}} \sqrt{\frac{8\pi^2}{b_c}} \quad (9.2)$$

に収束する解になっていて、スケール因子が  $a(\tau) \propto e^{H_D \tau}$  のように  $\tau$  を時間として指数関数的に膨張することが分かる (図 9.1 と図 9.2 を参照)。ここで、 $b_c$  は一般座標不変性を保つために導入された Riegert 作用の係数で、重力場と相互作用する素粒子模型に依存する数である。典型的な  $b_c$  の値はおよそ 10 前後になるので (付録 B 参照)、 $H_D$  は換算 Planck 質量と Planck 質量の間に値をもつことが分かる。それ故、ここでは、 $H_D$  も Planck スケールと呼ぶことにする。また、空間が膨張し始める時刻  $\tau_{\text{P}}$  は  $H_D$  の逆数で与えられ、それを Planck 時間と呼ぶことにする。

さらに、インフレーション解 (9.2) を背景時空として、そこからのズレを表す揺らぎ変数を新たに導入する。その運動方程式を (5.4) から導出して

<sup>1</sup>座標変数の名称として、物理時間  $\tau$  に対して  $\eta$  は共動時間と呼ばれている。同様に、 $\mathbf{x}$  は共動座標と呼ばれ、実際の距離を表す  $\mathbf{r}(\tau) = a(\tau)\mathbf{x}$  を物理座標と呼ぶ。

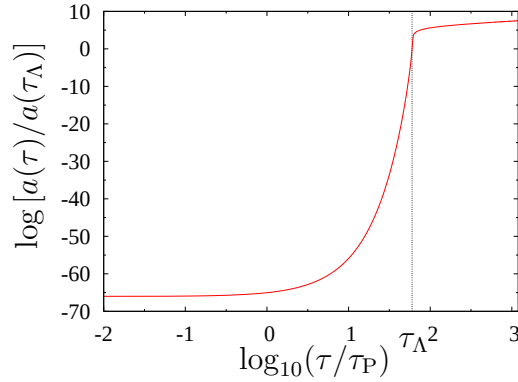


図 9.1: スケール因子  $a(\tau)$  の時間発展。時空は Planck 時間  $\tau_P (= 1/H_D)$  から急激に膨張し始める。インフレーションは力学的時間スケール  $\tau_\Lambda (= 1/\Lambda_{QG} = 60\tau_P)$  で終わり, Friedmann 宇宙に移る。[K. Hamada, S. Horata, and T. Yukawa, Phys. Rev. D **74** (2006) 123502.]

時間発展を調べると、揺らぎが次第に小さくなって行くことが示せる。詳しいことはこの節の最後で解説するが、このことは、(9.2) が安定な解で、最初揺らぎが大きくても、やがて宇宙はこの解に収束していくことを示している。それは、同時に時間変数  $\tau$  が一様な時間として実体をもつようになったことを意味する。このように単調増大するスケール因子が宇宙全体の時間という概念を生み出すのである。

## 時空相転移としてのビッグバン

インフレーションはいつ終わるのか。時空が膨張し始めると、それに伴って物理的運動量  $Q$  (7.3) の値が下がって、ランニング結合定数  $\bar{t}(Q)$  (7.2) が対数関数的にゆっくりと大きくなって行く。力学的スケール  $\Lambda_{QG}$  近くまで下がると、それは急激に大きくなっていて発散する。ランニング結合定数が小さい間は、Weyl 曲率テンソルが消える時空配置をもったインフレーション宇宙が安定的に続くが、大きくなってくると、宇宙は次第にそ

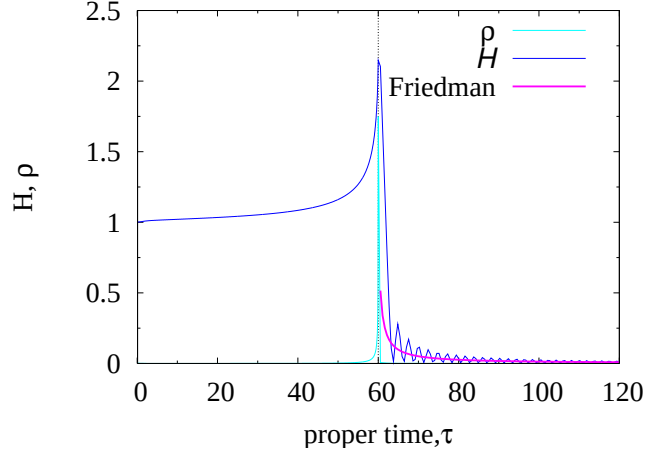


図 9.2: Hubble 変数  $H$  と物質のエネルギー密度  $\rho$  の時間発展。ここでは  $H_D = 1$  と規格化している。相転移点  $\tau = \tau_\Lambda (= 60)$  以降, 時間が経つと Friedmann 解に漸近する。物質は相転移点近傍で急激に生成される。[K. Hamada, S. Horata, and T. Yukawa, Phys. Rev. D **74** (2006) 123502.]

のような時空配置から逸脱して行く。遂には, インフレーションは終わり, 宇宙は Einstein の重力理論で記述される Friedmann 時空に移行する。この変化が時空相転移である。

この相転移過程を重力の量子補正を取り入れた運動方程式 (5.4) で記述するために, 前章と同様に, ランニング結合定数を時間変数に依存した平均場で近似することにする。すなわち,  $Q$  を物理時間  $\tau$  の逆数に置き換えて, それを  $\bar{t}^2(\tau) \propto 1/\log(\tau_\Lambda^2/\tau^2)$  に書き換える。ここで,  $\tau_\Lambda$  はエネルギースケール  $\Lambda_{QG}$  の逆数で定義される力学的時間スケールである。時空相転移は共形重力ダイナミクスを担っている 4 階微分重力項  $T_{\mu\nu}^{(4)}$  が時間  $\tau_\Lambda$  で  $\bar{t}^2(\tau)$  の逆数に比例して消えていく過程として表される。

宇宙を構成する物質が生成される現象をビッグバンと呼ぶなら, 時空相転移はまさにビッグバンで, それ以前には如何なる物質も存在しなかったというのがこの相転移の特徴である。それは, 全エネルギー運動量テンソル (5.4) がゼロに保たれていることから,  $T_{\mu\nu}^{(4)}$  が消えて行くにしたがつ

て、始めはゼロであった物質場の  $T_{\mu\nu}^M$  が値をもつようになることで説明される。すなわち、相転移時に量子重力のエネルギーがすべて物質のエネルギーに転化することでビッグバンが起こる。この転移を引き起こす物質場と共形因子場の間の相互作用は Wess-Zumino 作用  $S$  で与えられ、ランニング結合定数の増大とともに開いていって、相転移間近で急激に強くなる。そのため、変化は劇的に起こることが予想される。

ビッグバンは、元々、すべての始まりを表す言葉であった。宇宙が膨張しているという事実は、宇宙は高温・高密度な過去のある一点から始まったことを示していて、その点を指す言葉として生まれた。実際、Friedmann 宇宙は過去に遡るとスケール因子が消える特異点に行き着く。インフレーションの考えが受け入れられるようになってからは、ビッグバンはインフレーション後に物質が生成された、すなわち現在の宇宙の原型が作られた瞬間を指す言葉になった。さらに、インフレーション宇宙ではスケール因子は決して消えることがなく、特異点の問題が解消される。

一方、ビッグバンに代わる表現として、しばしば再加熱という言葉が使われることがある。これはあくまでも Einstein の重力理論の枠内でインフレーションが議論される場合の言葉で、再びの意味は、Friedmann 宇宙の進化の途中でインフレーションが起きて、その時点で一旦過去の宇宙がリセットされ、現在の宇宙が誕生したと考えることによる。そのため過去に遡ったとき、Planck スケールに到達しないようにインフレーション期間の始まりを低く抑えているのが特徴である。

## 力学的エネルギースケールの決定

量子重力的インフレーション理論は Planck 質量スケール  $H_D (= m_{\text{pl}} \sqrt{\pi/b_c})$  と力学的エネルギースケール  $\Lambda_{\text{QG}}$  の比でシナリオが決まる。それらは物理定数なので、観測結果から決めるしかない。Newton 定数  $G$  の測定から、Planck 質量  $m_{\text{pl}} (= 1/\sqrt{G})$  は  $1.2 \times 10^{19}$  GeV と決まる。新たに導入した

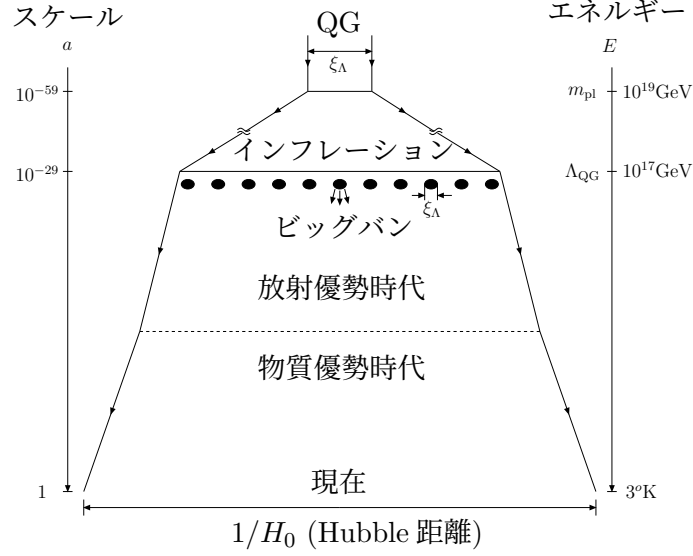


図 9.3: 量子重力的インフレーションシナリオ。宇宙が膨張を始める Planck 時間以前に相関距離  $\xi_\Lambda = 1/\Lambda_{\text{QG}} (\gg l_{\text{pl}})$  の大きさであったゆらぎが現在までに  $10^{59}$  倍膨張して、宇宙の大きさを表す Hubble 距離  $1/H_0 (\simeq 5000 \text{ Mpc})$  まで膨張する。すなわち  $1/H_0 \simeq 10^{59} \times \xi_\Lambda$  である。

Planck スケール  $H_D$  を決める Riegert 作用の係数  $b_c$  は、前にも述べたように、重力場と相互作用する素粒子模型に依存する数で、ここでは  $b_c = 10$  を採用する。

インフレーションを特徴づける指標の一つとして膨張率 (e-foldings) と呼ばれるものがある。ここでは、それは Planck 時間  $\tau_P$  からインフレーションが終わる力学的時間  $\tau_\Lambda$  までに宇宙がどれだけ膨張したかを表す量で、 $\mathcal{N}_e = \log[a(\tau_\Lambda)/a(\tau_P)]$  と定義される。そのおおよその値は、2つのスケールの比

$$\mathcal{N}_e \simeq \frac{H_D}{\Lambda_{\text{QG}}} \quad (9.3)$$

で与えられる。一般的なインフレーションのシナリオが要求する膨張率はおおよそ 60 から 70 の間である。

また、インフレーションが終わる直前のスカラー曲率の揺らぎの大きさ

は、次元解析から、およそ  $\delta R \sim \Lambda_{\text{QG}}^2$  で与えられると考えられる。揺らぎの大きさを示す無次元の指標として、インフレーション解のスカラー曲率  $R = 12H_{\text{D}}^2$  で割った量を考えると、それも 2つのスケールの比を用いて、

$$\left. \frac{\delta R}{R} \right|_{\tau_{\Lambda}} \sim \frac{\Lambda_{\text{QG}}^2}{12H_{\text{D}}^2} \quad (9.4)$$

で与えられる。この値が Friedmann 宇宙の初期値である原始パワースペクトルの振幅の平方根の大きさを与えることになる。

CMB の観測結果を説明するに必要な (9.4) の大きさは非常に小さな  $10^{-5}$  程度の値でなければならない。このことから、Planck スケールと力学的エネルギースケールの比は  $H_{\text{D}}/\Lambda_{\text{QG}} = 60$  と見積もることが出来て、

$$\Lambda_{\text{QG}} \simeq 1.1 \times 10^{17} \text{ GeV} \quad (9.5)$$

の値が求まる。このとき膨張率も (9.3) より 60 という適切な値になる。実際は、Hubble 変数  $H$  はずっと一定値  $H_{\text{D}}$  のままではないし、相転移後も Friedmann 宇宙に漸近するまでにいくらか加速膨張するので、それらも含めると膨張率  $\mathcal{N}_e$  は 70 近くに達する。

膨張率 70 を桁で表すと、宇宙はインフレーション期におよそ  $10^{30}$  倍膨張したことになる。さらに、エネルギースケール  $\Lambda_{\text{QG}}$  で Friedmann 宇宙に移行してから現在の  $3^\circ\text{K}$  に至るまでに  $10^{29}$  倍膨張する。合わせて  $10^{59}$  倍膨張したことになる。この桁数は、図 9.3 で示したように、宇宙最大のスケールとして挙げた Hubble 距離と量子重力の相関距離が

$$\frac{1}{H_0} \sim \frac{a_0}{a(\tau_{\text{P}})} \xi_{\Lambda} \simeq 10^{59} \times \xi_{\Lambda} \quad (9.6)$$

のように関係付くことを意味する。ここで、 $a_0$  は現在のスケール因子である。

## 原始パワースペクトルの起源



これまでの議論から, Friedmann 宇宙の初期値である原始パワースペクトルの起源がインフレーション以前の量子重力の世界にあると考えるのが自然であることを見てきた。

では, 従来の考え方と何処が異なっているのだろうか。Einstein の重力理論の枠組みで議論されるインフレーション理論では通常, 現在の物質の源になる, インフラトンと呼ばれる未知の現象論的なスカラー場を導入しなければならない。さらに, すべての揺らぎの起源がその場のゼロ点エネルギーで与えられるとして, 紫外カットオフを導入してその値を計算している。これに対して, 一般座標不変性が Planck スケールを超えてどこまでも成り立っている漸近的背景自由な量子重力理論では, この不変性のおかげでゼロ点エネルギーが消えることはすでに説明した。その代わりになるのが  $T_{\mu\nu}^{(4)}$  に値を与える量子重力の励起状態で, それが揺らぎの起源となる。これは宇宙定数問題とも関係する話で, それについては第 11 章で述べる。

漸近的背景自由性は, ランニング結合定数  $\bar{t}(Q)$  がまだ小さいインフレーション以前ではテンソル揺らぎの大きさが結合定数に比例して小さくなり, スカラー的な共形因子の揺らぎが支配的になることを表している。それは宇宙論的にも好ましい性質で, 観測によって示された CMB 揺らぎのテンソル・スカラー比が何故小さいのかを上手く説明することが出来る<sup>2</sup>。

揺らぎのスペクトルは 2 点相関関数で与えられる。より正確には, 2 地点の揺らぎの大きさの差の 2 乗平均が観測される量である<sup>3</sup>。揺らぎの初期値を宇宙が指数関数的に膨張し始める Planck 時間よりも前に設定すると, その時点でのスカラー揺らぎのスペクトルは Riegert 作用から計算される共形因子場  $\phi$  の 2 点相関関数で与えられる。それは通常の場合の理論ではありえない, 長距離でも相関が消えることのない対数関数で表される。

<sup>2</sup>BRST 共形不変性はインフレーション以前を起源とする CMB サイズのテンソル揺らぎが存在しないことを示唆する。それ故, 量子重力インフレーションでは, テンソル・スカラー比はインフレーションのスケールに対して制限を与えることなく, Planck スケールの壁を超えることができる。

<sup>3</sup>観測量は同一点での値がゼロになることに注意。観測量は離れた 2 点の揺らぎの相対値であって, 絶対値, すなわちゼロ点エネルギーではない。

相関が対数関数になるのは場が無次元であることの反映で、それが真のスケール不変性をもたらしている。

同時刻での対数相関関数を座標空間から 3 次元運動量空間へ Fourier 変換して得られるパワースペクトルはスケール不変な、通称 Harrison-Zel'dovich スペクトルと呼ばれるものになる。パワースペクトルの表記として、それに運動量の絶対値 (波数) の適切なべき乗を掛けて無次元化したものがよく使われる。この表記を使うと、スケール不変なスペクトルは波数によらない正の定数で表される。共形因子場のそれはまさに振幅が  $1/2b_c$  の正の定数になる。

スケール不変性はあらゆる波長の相関が存在することを表している。一方で、その不変性は力学的スケール  $\Lambda_{\text{QG}}$  で急速に失われる。それは、物理的距離が相関距離  $\xi_\Lambda (= 1/\Lambda_{\text{QG}})$  を超えると、相関が急速に減衰して消えることを表している。関係式 (9.6) は、Planck 時間に  $\xi_\Lambda$  であった距離が現在では Hubble 距離まで引き延ばされていることを示している。観測された CMB 揺らぎスペクトルの  $l = 2$  の低多重極成分はそのような大きなサイズの相関の有無を表していて、その成分が鋭く落ち込んでいるという事実は、新しい力学的距離スケール  $\xi_\Lambda$  を用いて説明することが出来る。

## 揺らぎの減少と解の安定性

インフレーションが始まる以前の重力の量子的な揺らぎのスペクトルについては上で説明した。しかし、それがそのまま Friedmann 宇宙に受け継がれるわけではない。ここでは、揺らぎがインフレーション期間中にどのように発展するのか、特に振幅がどのように変化するかを見ることにする。具体的には、インフレーション解の周りの揺らぎ (摂動) を考えて、それがどのように時間発展するかを運動方程式 (5.4) を解いて調べた結果を示す。

膨張している宇宙のスペクトルを記述するには、共動波数と呼ばれる共動座標での空間運動量の絶対値を使うのが便利である。実際の波数は、(7.3) の平方根のように、それをスケール因子  $a(\tau)$  で割ったもので、物理波数と呼ぶ。現在のスケール因子の値  $a_0$  を 1 に規格化すると、共動波数は現在の波数の大きさを表していることになる。以下では  $a_0 = 1$  として話を進める。インフレーション理論は、膨張が始まる Planck 時間での物理波数が現在の波数の約  $10^{59}$  倍であったことを示唆している。

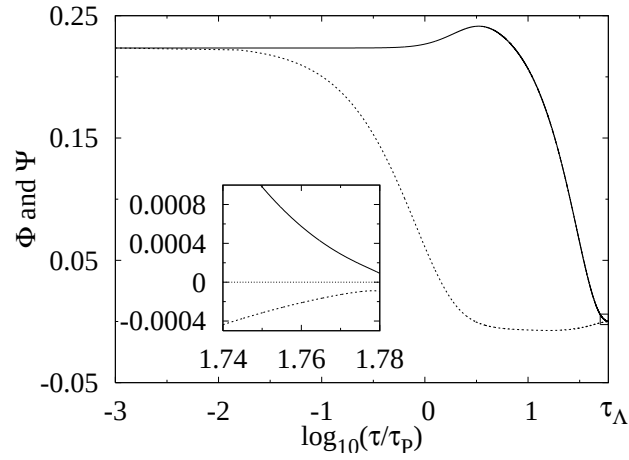


図 9.4: インフレーション背景時空での重力ポテンシャル  $\Phi$ (実線) と  $\Psi$ (点線) の線形発展方程式の解。初期値は  $\Phi = \Psi = 1/\sqrt{2b_c} = 0.224$ 、共動波数は  $k = 0.01 \text{ Mpc}^{-1}$  を採用。 $\tau_P = 1$  になるように  $H_D = 1$  と規格化して、 $\tau_\Lambda = 60$  と設定。重力ポテンシャルは振幅を減少させながら変化して相転移点  $\tau_\Lambda$  では  $\Phi = -\Psi$  となる。[K. Hamada, S. Horata, and T. Yukawa, Phys. Rev. D **81** (2010) 083533.]

図 9.3 に示した宇宙発展のシナリオは、現在の最も大きなサイズの揺らぎが、インフレーションが始まる前までさかのぼると、およそ相関距離  $\xi_\Lambda$  の物理波長をもつ揺らぎであったことを表している。それは物理波数として力学的スケール  $\Lambda_{QG}$  の値を持っていたことになる。ここでは、宇宙の構造形成に関与したと考えられる  $\Lambda_{QG}$  からそれより数桁高い物理波数

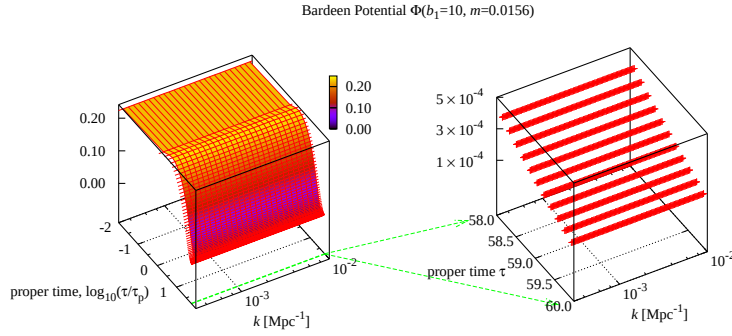


図 9.5: 重力ポテンシャル  $\Phi$  の時間発展。相転移点  $\tau = \tau_\Lambda$  での線が原始パワースペクトルを与える。

をもつ揺らぎの時間発展について考える。

運動方程式を共動波数空間で表して、波数ごとに解いていく。ここで扱うサイズの揺らぎに対しては、前章と同様に、線素  $ds^2 = a^2[-(1+2\Psi)d\eta^2 + (1+2\Phi)d\mathbf{x}^2]$  で定義される 2 つのスカラー的重力ポテンシャルを用いて調べることが出来る。前出との違いはインフレーション解で与えられるスケール因子  $a$  の 2 乗が全体に掛かっていることである。基本的な計算の仕方は前と同じであるが、相転移点近くの非線形効果を表すランニング結合定数を時間に依存した平均場で近似していることが異なる。一方、まだ揺らぎが大きい初期に現れる別の非線形効果として Einstein テンソル項に含まれる共形因子場の指数関数からの寄与がある。それは物理波数が Planck スケール  $H_D$  を超えると無視できなくなるので、それを避けるために  $H_D$  より低い波数を考えることにする。このようにして導かれた線形の運動方程式は、静的な揺らぎを考えた前章と違って、時間に依存した背景時空の周りでの摂動なので、かなり複雑になるが、数値的に解くことが出来る。

インフレーションが始まる前の初期のスペクトルはほとんどスケール不変であるが、相関距離  $\xi_\Lambda$  より長い相関は急速に減衰して消えるため、取りうる波数に下限が生じることはすでに述べた。ここで、それが前述の  $l = 2$  の低多重極成分の落ち込みを表していることを見してみる。この成分

の共動波数はおよそ  $\lambda_0 = 0.00026 \text{ Mpc}^{-1}$  であることから、この値と物理的スケール (9.5) との比を求めると  $\lambda_0/\Lambda_{\text{QG}} \sim 10^{-59}$  となることが分かる。右辺はちょうど宇宙が膨張し始める前のスケール因子の大きさを、 $\lambda_0$  の逆数がほぼ Hubble 距離に相当する事から、この関係式はインフレーションのシナリオから導かれた (9.6) 式に他ならない。このように、 $\xi_\Lambda$  を用いて  $l=2$  の落ち込みを上手く説明することが出来る。

共動波数を  $k$  と書いて、揺らぎの運動方程式の計算結果を  $k > \lambda_0$  の領域で表示する。また、上で述べたように、 $k$  の上限は  $m_0 \sim 10^{-59} \times H_D$  とする。それは Planck 時間の物理波数が  $H_D$  になる共動波数を表している。インフレーション解は  $H_D/\Lambda_{\text{QG}} = m_0/\lambda_0 = 60$  で計算したものを採用しているので、 $m_0 = 0.0156 \text{ Mpc}^{-1}$  になる。

重力ポテンシャル  $\Phi$  と  $\Psi$  の振る舞いを  $k = 0.01 \text{ Mpc}^{-1}$  の場合で計算した結果が図 9.4 である。図 9.5 は上記の波数の範囲内での計算で、 $\Phi$  の結果のみを提示している。初期は  $\Phi = \Psi$  を満たす共形因子場の揺らぎで満たされていることから、重力ポテンシャルの初期値はそのパワースペクトルの振幅  $1/2b_c$  の平方根で与えられる。このように、少なくとも示した範囲内では、横一直線のスケール不変な形を保ったまま、振幅が次第に小さくなっていることが分かる。また、相転移点では  $\Psi = -\Phi$  を満たす揺らぎに変化しているのが図 9.4 から見て取れる。

高波数領域での計算を困難にしている  $\phi$  の指数因子は結合定数  $t$  が消える極限でも残る非線形項である。共形場理論の立場で見たとき、それは Einstein-Hilbert 作用が、単純な質量項ではなく、スケールを持ったポテンシャル項と見なすことが出来る共形不変な演算子として機能するために必要な因子である。それ故、この非線形項はスペクトルの形をスケールのべき乗に弱める効果があると考えられている。この効果により、スケール不変なスペクトルが  $k > m_0$  でゆっくりと赤方に傾くと期待している。

このタイプの非線形項を取り入れた数値計算は困難でまだ実行されていない。計算した  $\lambda_0 < k < m_0$  の範囲は、観測された CMB 多重極では、 $l=2$  から第1音波ピークを超えたあたりまでが対応する。ここではスケール不変な形が  $k > m_0$  の領域でも維持されていると仮定して、それを

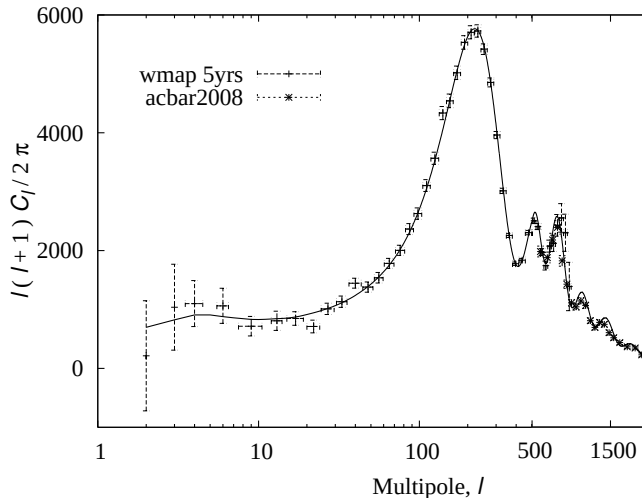


図 9.6: CMB の温度ゆらぎ (TT) パワースペクトル。計算結果 (実線) を WMAP5 と ACBAR2008 のデータと伴に表示している。宇宙論的パラメータは  $\tau_e = 0.08$ ,  $\Omega_b = 0.043$ ,  $\Omega_c = 0.20$ ,  $\Omega_{\text{vac}} = 0.757$ ,  $H_0 = 73.1$ ,  $T_{\text{cmb}} = 2.726$ ,  $Y_{\text{He}} = 0.24$  と設定し、テンソル・スカラー比は  $r = 0.06$  としている。低多重極の落ち込みは  $\lambda_0 = 0.00026 \text{ Mpc}^{-1}$  で減衰する力学的因子によって説明される。[K. Hamada, S. Horata and T. Yukawa, Phys. Rev. D **81** (2010) 083533.]

初期値として CMB のスペクトルを計算し、実験結果と比較することにする。図 9.6 はそのようにして得られた結果である。

## ビッグバン後から現在まで

インフレーション期間中に重力の量子的揺らぎは引き伸ばされる。途中でも色んなサイズの揺らぎが生まれるが、後の宇宙の大規模構造の決定に関与するサイズまで拡大する特定の揺らぎの振幅は大きく減衰する。こ

のようにして、現在につながる古典的な時空構造の基礎が生成され、その中を局所的に生成された揺らぎである物質や前章の励起状態が粒子として漂っている。十分に大きなサイズまで拡大した重力の小さな量子揺らぎはビッグバン時の局所的な擾乱に巻き込まれることなく Friedmann 時空に受け継がれる。前節の最後に示した CMB の温度ゆらぎスペクトルを得るためには、それが現在までどのように時空中を伝達されてきたのかを知る必要がある。ここではその進化の歴史について簡潔に解説する。揺らぎは一様等方性からのズレを表していて、その時間発展は Einstein 方程式と生成された各物質のエネルギー運動量の保存の式によって記述される。

ビッグバン直後の宇宙では、物質は激しく相互作用しているので、熱平衡が実現した完全流体として記述することが出来る。最初のうちは、光やニュートリノを中心とした、光速で運動する粒子のエネルギー密度が高い放射優勢の時代が続く。宇宙が膨張するにつれて、温度がスケール因子の逆数で下がっていくと、クォークなどの質量をもつ粒子は次第に動きが鈍くなって行き、強い相互作用によって互いに結び付いて安定な陽子や中性子などに変化する。さらに、ヘリウム原子核などの重い原子核が順次生成され、光子やニュートリノ、電子とともに物質の世界が構成されていく。

温度が  $1\text{eV}$  ぐらいまで下がると、非相対論的になった質量をもつ物質のエネルギー密度が放射のそれを上回るようになって、物質優勢の時代に入る。それは非相対論的な物質のエネルギー密度が温度の 3 乗で減少するのに対して、放射のそれは Stefan-Boltzmann 則により温度の 4 乗でより早く減少するため、進化の途中で逆転するからである。

物質優勢の時代に入ってもなく、原子核と電子が結合して原子となり、宇宙が急速に中性化する。これ以後、電荷が消えたことで、光は自由に伝播できるようになり、宇宙は澄み渡っていく。この現象を宇宙の晴れ上がり (再結合) といい、起きたその瞬間を切り取って「最終散乱面」と呼ぶ。

物質と呼んでいるものの中には、ほとんど重力としか相互作用しない、それ故いまだ直接的に観測されていない未知のものも含まれている。その中で、現在まで残っている安定なものを「暗黒物質」と呼ぶ。特に、質量が比較的重いと仮定して、非相対論的に扱っているものを「冷たい暗黒

物質」と呼ぶ。観測された CMB スペクトルや宇宙の大規模構造の形成、見えない質量の存在を示唆する銀河の回転曲線の異常や重力レンズ効果などを説明するためその存在が予言されている。

Einstein 方程式の世界では、重力ポテンシャルの揺らぎが各物質の密度の揺らぎに反映して行く。それが成長して、質量分布のムラが大きくなり、星や銀河、銀河団、超銀河団といった構造が形成される。これらの構造形成が始まるのは主に宇宙が中性化した後である。星や銀河などは、個々に見れば非常に大きな質量の集中であるが、銀河さえも質点と見なせるほど広く宇宙を見渡すと、銀河分布の一樣等方性からのズレを表している銀河団や超銀河団といった大規模構造の存在が示唆する揺らぎの大きさは  $1/10$  程度で、宇宙全体は現在もまだ Friedmann 時空解で十分近似できるレベルであることが分かる。

大規模構造に関与する大きなサイズの揺らぎが成長し始めるのは宇宙が中性化した後で、それまではあまり変化せずにビッグバン直後の小さな振幅がそのまま保たれる。図 9.7 と図 9.8 は、各種の揺らぎが過去 (右上) から宇宙が中性化する最終散乱面までにどのように発展するかを計算したものである。共動波数  $k$  は現在の揺らぎの波数を表していて、Mpc の逆数を単位としている。時間軸は赤方偏移  $z$  で表している。それはスケール因子を使って  $z + 1 = a_0/a$  と定義される。 $k$  の逆数が揺らぎの波長で、銀河を質点とみなせるほど十分に大きなサイズを考えている。ちなみに銀河団は  $4 \sim 6$  Mpc、超銀河団は  $10 \sim 30$  Mpc の大きさの構造である。過去に遡れば、最終散乱面でのそれらの物理的な波長は、その時点でのスケール因子を掛ける必要があるため、現在の長さの約千分の 1 になる。インフレーションが始まる前まで遡れば、それらは Planck 長さ内に納まってしまう。

揺らぎスペクトルの変形のほとんどは、宇宙が放射優勢の時代から物質優勢の時代に移り、その後中性化するまでの期間に起こる。それ以前はスケール不変なスペクトルが保たれるため、放射優勢な時代が続く限りどこまでも過去に遡ることができる<sup>4</sup>。そのため、Einstein 理論が正しい限り、

<sup>4</sup>ホライズンサイズより大きいサイズの揺らぎはどの時代でもほとんど変化しない。



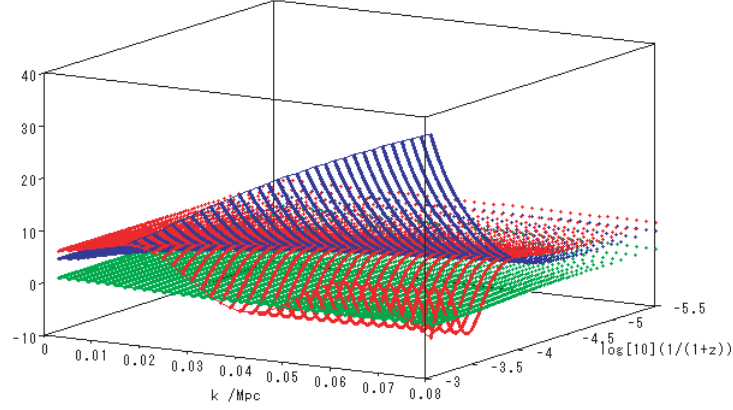


図 9.7: 放射優勢の時代から脱結合時 ( $z \simeq 10^3$ ) までの揺らぎ変数の時間発展。上から, 冷たい暗黒物質の密度揺らぎ (青), 光子の密度揺らぎ (赤) と重力ポテンシャル  $\Phi$  (緑) で, 赤方偏移  $z$  の対数を時間として表示している。計算は  $\Phi$  の初期値を波数  $k$  によらずに 1 とする Harrison-Zel'dovich スペクトルを仮定して行っている。冷たい暗黒物質の揺らぎは物質優勢時代に入って以後にホライズンの内側に入る波長の短いゆらぎから順次単調に増大していく。一方, 光子の揺らぎは大きく振動し始める。

現在の CMB スペクトルから原始スペクトルが生成されたビッグバン直後の情報を引き出すことができる。

中性化以後, 光は物質との相互作用から自由 (脱結合) になるため, 物質と違って, その揺らぎは成長しなくなる。この事実はいわゆる Sachs-Wolfe 関係式, 脱結合時の重力ポテンシャルと現在の CMB の温度揺らぎとの間をつなぐ関係式, として表される。そのため, 脱結合の瞬間を表す最終散乱面での重力ポテンシャルのスペクトルが分かれば, 現在の CMB 揺らぎスペクトルのおおよそを知ることができる。図 9.8 はそれを表していて,

特に,  $l < 30$  の CMB 多重極成分は宇宙の中性化以後にホライズンの内側に入るか, もしくは現在も入っていないサイズのゆらぎ成分で, ビッグバン直後の原始のスペクトルをそのまま保っていると考えられる。

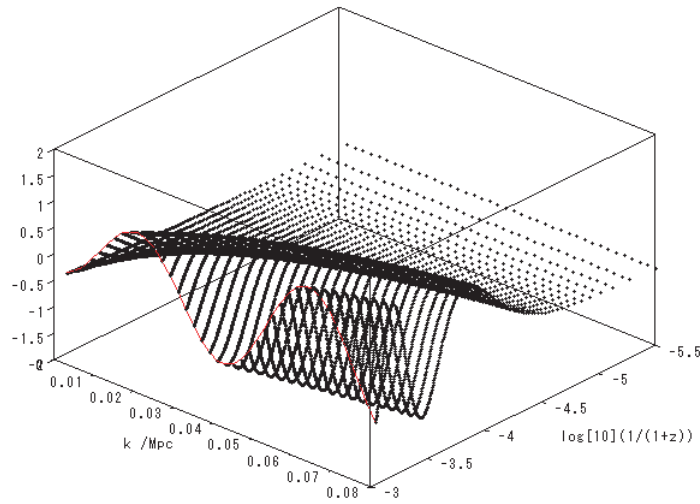


図 9.8: Sachs-Wolfe 関係式に現れる CMB 温度揺らぎの摂動変数の時間発展。図 9.7 と同じ条件の下で計算している。最後の実線は脱結合時 ( $z \simeq 10^3$ ) のスペクトルである。波数  $0.02 \text{ Mpc}^{-1}$  付近の最初の極値が CMB スペクトルの第 1 音波ピークに相当する。

最終散乱面 ( $z \simeq 10^3$ ) に現れた三角関数の構造が現在の CMB スペクトルの大まかな構造を決めている。

構造形成に関わる物質の揺らぎの成長を理解するためには、中性化以後は非線形な効果を考慮する必要がある。これに対して、ここで考えているサイズの光子の揺らぎはビッグバン直後から現在までほとんど線形近似で扱うことが出来る。そのため高い精度での予測が可能である。この事実に基づく摂動論を用いた宇宙の進化の研究は宇宙論的摂動論と呼ばれる。

CMB スペクトルは大まかに 3 つの領域に分けることができる：スケール不変な原始宇宙のスペクトルをほぼそのまま伝えていると考えられている低多重極成分領域 ( $l < 30$ )、宇宙が中性化する以前に生成された光子とバリオンのプラズマ流体振動が現れている領域 ( $30 < l < 800$ )、そして中性化の過程で光子のゆらぎの振幅が指数関数的に減少する Silk 減衰領域 ( $l > 800$ )。この減衰領域では完全流体の近似が破れ非等方ストレスが現れる。この節で示した先の図にはこの効果は考慮されていない。

Silk 減衰が起こるのは、物質が中性化するプロセス (再結合) が始まってから光が物質から完全に自由になる (脱結合) までの間に、光の平均自由行程が長くなり熱平衡が保てなくなることによる。平均自由行程よりも波長が長ければ完全流体の近似が成り立つが、短い波長のゆらぎは拡散 (photon diffusion) してゆらぎが平均化され振幅は減衰する<sup>5</sup>。この効果は第1音波ピークを越えた辺りから現れはじめ、 $l$ が800を越えると著しくなる。したがって、完全流体を仮定した宇宙論的摂動論が比較的有効なのは長波長領域のせいぜい  $l < 800$  までである。Silk 減衰を扱うためには Thomson 散乱を考慮した Boltzmann 方程式を解く必要がある。

CMB スペクトルの計算はすでにプログラム化されており、CMBFAST など既存の計算コードが公開されている。初期宇宙論の役目はその初期条件である原始スペクトルを与えることである。量子重力理論の目的はまさにそれを与えることである。

---

<sup>5</sup>完全流体は粘性がゼロの流体である ( $\neq$  理想気体)。粘性は平均自由行程に比例する量で、粘性がゼロであるとは、平均自由行程がゼロの強結合の系を意味する。このように頻繁に相互作用している系ではその系の中で熱のやり取りが閉じていて熱平衡が実現できる。

## 第10章

# 繰り込み可能性について

この章では繰り込みに関係する事柄についてもう少し踏み込んだ解説をする。特に、重力に関する部分では、第4章で物理的な議論から決めた重力作用の形が繰り込み可能性の条件から決まるという話を紹介する。ここではどうしても話がより専門的になってしまうので、用語にあまりなじみがない人はスキップしても差し支えない。

### 繰り込みとは

基本的な素粒子の理論は繰り込み可能な場の量子論として記述されている。その典型が電子と光子の相互作用を記述する量子電磁力学 (quantum electrodynamics, QED) である。これは最も成功した理論の一つで、極めて高い精度で正しさが検証されている。その疑いようのない事実から、理論を定量化するさいの基礎となる繰り込みの手法が次第に信頼されるようになっていった。この繰り込み計算の業績によって朝永と Schwinger と Feynman の3人が1965年のノーベル物理学賞を受賞した。2020年に96歳で他界した知の巨人 Dyson も有力候補であったが、3人の壁に阻まれた。

連続的な無限次元の自由度を扱う 4 次元の場の量子論には紫外発散がつきものである。繰り込み可能であるとは、その紫外発散の種類が有限で、それらを相殺項を導入して適切に取り除くことができることを言う。適切にできるとは、もとの作用と相殺項が同じ形をしていて、発散を取り除く作業が場や結合定数などに発散を吸収させること、すなわち繰り込むことで実行できることを指す。Einstein の重力理論が繰り込み不可能になるのは、Einstein-Hilbert 作用から出発すると、その形では相殺出来ないような新しい発散が次々に生じてしまって、無限個の相殺項を用意しなければならないからである。

繰り込み可能性は、対称性のような明快な規則と違って、当初は試行錯誤で見つけられた性質であった。実際、1 ループの議論では単に発散を手で取り除いているだけにしか見えない。繰り込みの本質は 2 ループ以上から現れて、その具体的な処方箋は以下のようになる。

まず始めに、理論を決める場の性質や対称性等から許される可能なすべての局所的な作用を用意する。処理する前の元の間や結合定数のことを、「裸の間」や「裸の結合定数」と言い、総称して「裸の量」と呼ぶ。次に、形式的に裸の量を「繰り込まれた量」と「繰り込み因子」の積で表す(和で与えられる場合もある)。この時点ではまだ繰り込まれた量に実体はなく、そう呼んでいるだけである。繰り込まれた量を用いてループ計算を行い、それによって生じた発散を取り除けるように繰り込み因子を順次決めていく。すなわち、元々の裸の量が発散していたとして発散を処理するのである。繰り込み因子を決める作業は上記の相殺項を決めることに他ならない。このようにして、繰り込まれた量のみで記述される有限な量が計算され、それによって漸近的自由性のような繰り込まれた量をもつ物理的な性質が明らかになる。

この処方箋から分かるように、もとの作用は局所的なので、繰り込み可能性の条件として紫外発散はすべて局所的なものでなければならないという制限が出てくる。これは紫外が狭い領域を表していることを思えば自然な条件と言える。一方で、量子補正を含めた有効作用、すなわちランニング結合定数で記述される作用、は非局所的なものになることを思い起

こせば、これは必ずしも単純なことではないことが分かる。

場の量子論を定義する際は対称性が主で、繰り込み可能性は従である。作用が有次元パラメータを持たない場合、量子化しても破れない対称性によって作用の形が唯一に決まるような理論では、繰り込み可能性は明白になる。QED や量子色力学 (quantum chromodynamics, QCD のようなゲージ場の量子論がまさにそうである<sup>1</sup>。そうでない場合は手探りで見つけていく必要がある。それ故、繰り込み可能性を対称性のような指導原理とは認めずに、明らかに有限な理論の探求が、特に重力と関係する理論に於いて、いまでも続いている。

繰り込みの手法がより信じられるようになったのは「繰り込み群」の考え方が定着してからではないかと思う。繰り込み計算を実行する際、元々の作用に存在しなかった新たな任意のスケールが導入される。それを質量スケールで表して  $\mu$  と書くことにする。繰り込み群は異なる  $\mu$  をもつ世界の間の関係を表していて、それを  $\mu$  の変化に対する応答として偏微分方程式で表したものが「繰り込み群方程式」である。その方程式を定義する際に現れる関数の一つとして最も重要なのが、 $\mu$  の変化に対する繰り込まれた結合定数の応答を表すベータ関数である。

では、その任意スケールはどのように現れるのか。その事を説明するためには正則化について述べる必要がある。それは発散を処理するために理論を一旦有限にすることを意味する。その方法を指定しないと本当の意味で理論を定義したことにはならない。最も簡単な例が、エネルギーに対する紫外カットオフを導入する方法である。繰り込みは紫外カットオフを無限大にしたときに発散する項を取り除く操作を表す。その他に、格子正則化や次元正則化などがある。それぞれに利点と欠点があるが、選択の基準は理論にとって最も重要だと考えている対称性が保たれるかどうかである。以下で、個々の正則化法についてに解説する。

紫外カットオフ  $\Lambda_{UV}$  を導入して理論を正則化すれば、 $\log \Lambda_{UV}^2$  の形の紫外発散が現れる。対数の引数は無次元でなければならないので、カット

<sup>1</sup>たとえばフェルミオンに質量があっても、それは紫外発散の構造を大きく変えないので繰り込み可能性に抵触しない。

オフを持つ次元を相殺するために新たなスケール  $\mu$  が導入され、発散は  $\log(\Lambda_{UV}^2/\mu^2)$  の形で処理されることになる<sup>2</sup>。カットオフ依存性がこの形で除去されるように繰り込みが実行されると、次元の不足を補うように、スケール  $\mu$  は非局所的な量子補正項  $\log(q^2/\mu^2)$  として有効作用の中に残ることになる。最終的にそれはランニング結合定数に現れる物理的なスケールに置き換わる。

紫外カットオフを導入する方法は単純で良いが、ゲージ対称性や一般座標不変性を破ってしまうことが大きな問題で、そのような対称性を破ってしまう望まれない発散は、対数の形ではなく、 $\Lambda_{UV}$  の冪の形で現れる。もしすべての紫外発散を適切に繰り込むことができれば、紫外カットオフを無限大に飛ばして、破れた対称性を回復することが出来るであろう。しかしながら、紫外カットオフ法でそれを実際に行うことは難しく、この方法は紫外カットオフを有限にしたまま繰り込み不可能な理論に適用されるのが一般的である。

時空を格子状に離散化して正則化する方法も同様である。この場合、格子間隔がカットオフ  $\Lambda_{UV}$  の逆数に相当し、任意のスケールはその次元を相殺するために導入される。これは、各格子点の近傍を平均値で近似して、最後に格子間隔をゼロにする極限を取って連続性を回復する方法で、繰り込み可能性は連続極限が適切に取れることを表している。単純なカットオフ法と違って、この方法の良いところは格子上のゲージ対称性が数学的に明確に定義されていることである。並進や回転の対称性は破れているが、それらは連続極限で回復すると考えている。

格子上でのゲージ理論の定式化は Wilson によって 1970 年代に提唱され、モンテカルロ法に基づくその具体的な数値計算は 1980 年に Creutz によって始められた。この正則化法の有用性は格子ゲージ理論の成功から明らかである。現在ではハドロンの質量スペクトルがかなり高い精度で計算できるようになっている。この成功はゲージ対称性が物理を決定づける極めて重要な対称性であることも示している。

最後に 1972 年に 't Hooft と Veltman によって提唱された次元正則化法

<sup>2</sup>簡単のため、ここでは作用に含まれる質量パラメータはゼロとして考えている。

について説明する。これは場の連続性を保ったまま、時空の次元を4より少し小さい値に解析接続することによって理論を有限化する方法で、紫外発散は、時空次元を  $D$  とし、 $n$  を自然数とすると、 $1/(D-4)^n$  の極の形で現れる。この発散を繰り込みの処方箋にしたがって取り除いたあとで、次元を4に戻して物理量を求める。任意スケール  $\mu$  は時空次元を変えたことによって生じる質量の次元の不足を補うために導入される。この方法の優れた点はゲージ対称性や一般座標不変性を厳密に保っていることである。一方で、カイラル対称性や超対称性のような特定の次元でしか成立しないような対称性を持つ理論に適用するには、その対称性が壊れても良いとするのか、それとも4次元に戻したときに回復する見込みがあるのか見極める必要がある。

他にも、Pauli-Villars 正則化法やゼータ関数正則化法などが知られている。前者は、次元正則化法が考案される前までは、ゲージ理論に適用される主流の正則化法であった。後者は2次元の場の量子論でよく使用されている方法である。ただ、高次元でも正しく使えるのかどうかよくわからない。

ここで、繰り込み群の話に戻る。繰り込み可能な理論は元来裸の量で定義されていることに注意する。それはつまり裸の量は元々の作用に入っているスケールやパラメータにしか依存しないという事である。この事実から、量子化の際に導入される任意のスケール  $\mu$  に裸の量が依存しないという条件式  $\mu d(\text{裸の量})/d\mu = 0$  が導かれる。この式を繰り込まれた量で書き換えるといわゆる繰り込み群方程式が得られ、それはスケールの変化に対して理論のパラメータがどのように応答するかを記述する偏微分方程式になる。その際に導入されるベータ関数は最も重要な関数で、繰り込まれた結合定数を  $g$  とすると  $\beta_g = \mu dg/d\mu$  で定義される。

裸の量で定義されている分配関数やその対数で与えられる有効作用は任意スケール  $\mu$  に依らない量である。一方で、繰り込み可能であるとは、それらが有限であること、すなわち繰り込まれた量で表されることを意味する。繰り込まれた量の中でスケール  $\mu$  に依らないものを特に繰り込み群不変量と呼ぶ。有効作用は真に繰り込み群不変量である。エネルギー



運動量テンソルもまた裸の量であり且つ有限な量でもある繰り込み群不変量である。

繰り込まれたパラメータの中で、裸の量でないにもかかわらず、繰り込み群不変量になっているものを物理定数と呼ぶ。すなわち、どのスケールで見ても変わらない真の定数である。それを  $M_{\text{phys}}$  と書くと

$$\mu \frac{d}{d\mu} M_{\text{phys}} = 0 \quad (10.1)$$

を満たすものと定義される。物理定数は任意スケール  $\mu$  と繰り込まれた結合定数等を組み合わせることで構成することができて、この操作のことを「次元変換 (dimensional transmutation)」という。例えば、QCD で、ベータ関数が  $\beta_g = -\beta_0 g^3$  で与えられているとすると、力学的エネルギースケールは繰り込み群不変量として  $\Lambda_{\text{QCD}} = \mu e^{-1/2\beta_0 g^2}$  の形で与えられる。摂動の高次になればより複雑な形になるが、体系的に定義することができる。この表式を使うと、有効作用は、第 7 章の議論の中で指摘したように、非局所的な対数の量子補正項がランニング結合定数 (7.1) の形に纏まって、その 2 乗の逆数が括り出された繰り込み群不変な形に書けることが示せる。

## 繰り込み可能性と量子重力

繰り込み理論は、Einstein の重力理論と相容れないが、一般座標不変性と矛盾するものではない。本書で紹介した漸近的背景自由な量子重力理論の繰り込みは、上で述べた繰り込みの処方箋と同じように、無次元の結合定数  $t$  を用いて一般座標不変な方法で実行される。これとは異なる視点で論じられる量子重力の繰り込みについては、次節で触れることにする。

量子重力理論の作用を決める条件の一つはもちろん一般座標不変性である。ただ、それだけでは作用が唯一に決まらないのが量子重力の難しい

ところである。実際、重力場の4階微分作用の候補は、Riemann 曲率テンソルの2乗、Ricci テンソルの2乗、スカラー曲率の2乗の3つがあって、一見それらの組み合わせは任意に選ぶことが出来る。ここでは、それが繰り込み可能性の条件からある特定の組み合わせに決まるという話を紹介する。

重力場の作用を決めるために、まずは曲がった時空上の QED や QCD を考えることにする。すなわち、重力場は古典的なままで、それ以外のすべての場を量子化したゲージ理論を考える。このとき、紫外発散を取り除くために必要な相殺項の中で、重力場のみで構成されるものを重力相殺項と呼ぶことにする。このような理論を考える理由は、ゲージ不変性と一般座標不変性の両方を課すと、量子場であるゲージ場やフェルミオンの(裸の)作用の形が、重力場との結合の仕方まで含めて、唯一に決まるからである。つまり、この時点で決まっていない部分は重力相殺項だけという事になる。しかしながら、量子場と重力場の相互作用は完全に分かっているの、外線が重力場で内線にゲージ場やフェルミオンが伝播する Feynman 図を計算して紫外発散の形を求めれば、重力相殺項の形も唯一に決まっているはずである。

重力相殺項を求める計算はゲージ不変性や一般座標不変性を保つ次元正則化を用いて行われる。繰り込み可能性は繰り込み群方程式として表され、それは相殺項の形に強い制限を与える。実際、1980年代に Hathrell は、共形異常の形を決めるために、エネルギー運動量テンソルなどの正規積を含む相関関数が満たすべき特殊な繰り込み群方程式を導出した。その際、前節で述べた、紫外発散が局所的であるという条件が重要な働きをする。最近の研究で、この繰り込み群方程式を摂動の全次数で解くと、重力相殺項が綺麗に2つの形に纏まることが分かった。それらは、4次元に戻ったとき、第4章で述べた共形不変な重力作用の形をしている。より正確に言うと、4次元から逸脱した部分も含めて完全に決まって、その中に Riegert 作用を代表とする Wess-Zumino 作用  $S(4.5)$  の情報が含まれている<sup>3</sup>。一般座標不変性を保つように量子化したのだから、それは当然の結

<sup>3</sup>次元正則化を採用すると、Schwinger-Dyson 方程式 (5.2) は、(5.3) のように書き変え

果とも言える。そして、その結果はゲージ理論のゲージ群やフェルミオンの表現、種類等に依らないことが見て取れる。

重力相殺項が共形不変な 2 つの形に決まるのは、ゲージ場理論の紫外発散に寄与する相互作用が共形不変な形をしていることが反映している。もし、共形不変でない無次元の結合定数を持った相互作用が加わるなら、これら 2 つにさらにスカラー曲率の 2 乗の相殺項を加えればよい。ここで強調したいことは、これら定まった 3 つの型に綺麗に分類されるということである。

曲がった時空上の場の量子論は、量子重力理論の一部と見ることも出来るので、量子重力理論の作用も、繰り込み可能性を要求するならば、上記の重力相殺項と同じ形のものでなければならない。故に、それを量子重力の裸の作用として採用しなければならない。

作用の形が決まれば、結合定数の導入の仕方も見えてくる。ここでは共形不変な相互作用が紫外極限で重要になることを予め想定して決めている。すなわち、第 4 章で説明したように、共形平坦な時空の周りでの摂動展開になるように、無次元の重力結合定数  $t$  の 2 乗の逆数を正しい符号で Weyl 作用の前に導入している。

次に、この作用を用いて、重力の量子論として矛盾が生じないのか、紫外極限で共形不変性が実現されるようにベータ関数が正しく負になっているのか、計算して確かめる必要がある。実際、結合定数  $t$  のベータ関数は、物質場の内容に依らずに負値になることが示せる。このことは、QCD と同様に、量子重力の力学的スケール  $\Lambda_{\text{QG}}$  が定義出来て、それより上のエネルギースケールで共形不変性が現れることを示している。

共形不変性は通常のゲージ理論にも現れるが、重力の量子論のそれは背景時空独立性として現れるということが大きな違いである。それは重力場を量子化したことによって初めて生じる量子論的な一般座標不変性のことで、ゲージ対称性であることを強調するために BRST 共形不変性と呼んで区別している。このゲージ対称性の下でゴーストモードが非物理的になることはすでにいたるところで強調した。

---

なくても、測度からの寄与も含めて、そのまま成り立つ。

## 異なる視点での繰り込み

第3章で述べたように、Einstein の重力理論を単純に摂動展開して量子重力を定式化しようとする、長さの2乗の次元をもつ Newton 定数を結合定数として展開することになる。そのため次元解析から曲率の多重積で構成される高階微分の重力相殺項が必要になることが容易に分かる。摂動の次数を上げていけば最終的に無限個の新しい相殺項を導入しなければならないことになり、繰り込み不可能であると言われている。それでもなお、重力の量子論として、Einstein の重力理論を中心に据えた定式化を試みる人も依然として多い。以下、その試みについてコメントする。

まず手始めに、重力場だけの系を考えて、その Einstein 方程式である Ricci 平坦の条件を Feynman 図の外線の重力場に課して、重力相殺項、すなわち発散を消す試みが行われた。この方法では、1 ループ程度の重力相殺項を消すことは出来ても、高次ループで要求される高階微分の重力相殺項の中に当然消えないものが出てきて、すぐに上手く行かなくなる。

そこで、理論的な縛りがより強い超対称性を持つ超重力理論が考えられた。超対称性は1970年代に発見されたボゾンとフェルミオンを結び付ける対称性で、それと重力の運動方程式を組み合わせると重力相殺項の数が有限個に制限されるのではないかと期待された。この試みは、超対称性のレベルを最高位まで高めるとすべて決まってしまうのではないかと Hawking が予想したことで大いに盛り上がったが、上手く行っていない。これは通常の繰り込みとは異なる手法で、量子重力のために考えだされた苦肉の策と言える。このアプローチは最終的に超弦理論に吸収され、超重力理論はその有効理論として現れることになる。

これとは異なる見方として、1970年代に Weinberg によって提唱された「漸近的安全性」という考え方がある。それは紫外カットオフを無限大に飛ばしたときに正しい重力の量子論が示すべき性質として提案されたも

ので、無限個の重力相殺項の存在は認めるが、それらに伴って導入される新たな結合定数の繰り込み群フローに紫外固定点が存在することを要求している。これは、紫外極限で理論はそこに収束して行き、カットオフによって失われていた一般座標不変性が回復するはずである、という期待を表している。

そのような固定点が存在することを示そうとする研究は今も積極的に行われている。その際によく用いられているのが、カットオフの変化に対する有効場の理論の応答を調べるために考えられた、汎関数繰り込み群と呼ばれる手法である。これは前半で述べた繰り込み可能な場の量子論が示す繰り込み群よりも広い概念で、Einstein 重力理論のような繰り込み不可能な理論にも適用されている。

もし、そのような固定点が存在しているならば、そこでは何らかの共形不変性が実現していると考えるのが妥当である。漸近的背景自由な量子重力理論は、中核となる部分が共形場理論で与えられ、摂動展開がそこからのズレとして定義される繰り込み可能な場の量子論である。それ故、漸近的背景自由性は漸近的安定性の一つの表現であるということもできる。

最後に、すでに述べたように、理論を決定づける対称性が何かによって、選ばれる正則化法も異なってくる。カットオフ以外の適切な方法が存在しない場合もある。その場合は経験がものをいう。しかしながら、それがあいまいさを生み出し、その結果、理論が拡大解釈され、定まらなくなっていく。宇宙定数問題はそのような問題の一つであることを次章で述べる。

## 第11章

# 宇宙定数問題とは

宇宙定数問題を大問題という人もいれば、ただのパラメータの問題だという人もいる。随所で指摘してきたように、私は後者の立場である。問題の根本原因は Planck スケールを超えた世界の存在が無視されていることである。ここでは、量子重力理論の立場からこの問題に対する一つの答えを提示する。

### 宇宙定数の発見

はじめに、宇宙定数、すなわち宇宙項の係数、にまつわる歴史を手短に述べることにする。宇宙項は、一般相対性理論が出版された年の翌年の 1917 年に、静的な宇宙を実現するために、Einstein 自身によって導入されている。そのこと自体なにも驚くべきことではない。宇宙項の存在は一般座標不変性から決して否定されるものではないし、Einstein を含めて当時の研究者の多くは、宇宙は時間変化しないと考えていたからである。

静的な宇宙像は、天文学者である Hubble が 1929 年に発表した観測結果によって打ち碎かれた。彼は多数の銀河の速度を測定して、すべての銀河が地球から遠ざかっていることを発見した。その後退速度は遠い銀河は

ど速くて、すなわち空間が至る所で膨張していて、あらゆる物体の間の距離が広がっていることが示された。この発見の数年後に、宇宙項の導入を「人生最大の過ち」と Einstein は言ったとされている。

宇宙項が再び脚光を浴びるのは、1990 年代の後半に入ってからである。標準光源として用いられる Ia 型超新星の明るさの観測を通して、宇宙の膨張速度が速まっていることが示された (図 11.1 参照)。標準光源とは絶対光度、電球で言うところのワット数、が分かっている天体で、その明るさの違いがそのまま地球からの距離の違いとみなすことが出来る。宇宙が現在加速膨張していることを示すこの事実は宇宙定数を用いて説明することができる。この発見に対して、Supernova Cosmology Project を主導した Perlmutter 及び Supernova Search Team を主導した Riess と Schmidt の 3 人に 2011 年のノーベル賞が授与された。宇宙項の存在は、その後の WMAP による CMB の揺らぎの観測によって、より確かなものになった。当時はまだ、宇宙定数はゼロであると信じている人が多かった。宇宙定数を厳密にゼロにする超対称性を持った理論が盛んに研究されていたこともあり、この発見は大きな衝撃であった。

観測された宇宙定数はエネルギーの 4 乗の次元を持っていて、Planck 質量の 4 乗の値よりもおよそ 120 桁も小さな値である。それは極めて小さく、初期宇宙では無視できる値で、第 9 章で解説したインフレーションには全く寄与しないものである。その宇宙項が現在の加速膨張に大きく寄与している理由は以下の通りである。ビッグバン後の宇宙発展を決める Einstein 方程式に於いて、初期は物質のエネルギー密度が圧倒的に大きいですが、宇宙膨張に伴ってその寄与はどんどん小さくなっていく。これに対して、宇宙項の寄与はずっと一定なため、現在近くになって両者の寄与が逆転したからである。

## 宇宙定数問題は本当に問題か？

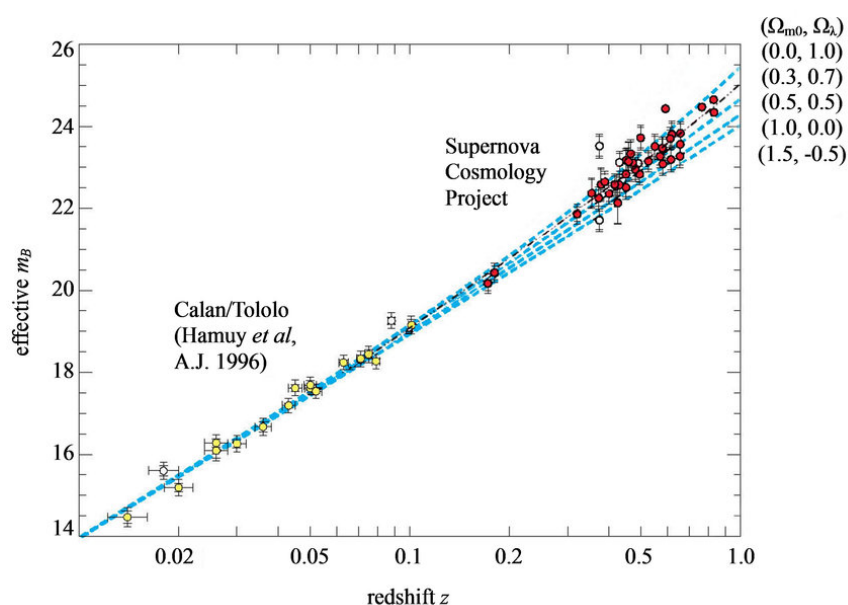


図 11.1: 宇宙項の存在を示す観測結果。横軸が赤方偏移 (後退速度), 縦軸が光度距離を表している。点は観測された Ia 型超新星である。もし宇宙の膨張率が一定ならば傾きは一定になるが, 観測値の多くがそれより上に来ていることから宇宙は加速膨張している。[Supernova Cosmology Project, S. Perlmutter, *et.al.*, *Astrophys. J.* **157** (1999) 565.]

発見されるまでは宇宙定数が値を持つかどうかが大きな問題であった。ただ, それは量子論とは関係のない話で, 一般相対性理論の枠組みで議論できる問題である。この章の本題である宇宙定数問題はむしろこれから述べることである。

宇宙定数の問題を最初に指摘したひとりが Pauli だと言われている<sup>1</sup>。量子力学が誕生した 1920 年代のことである。ゼロ点エネルギーによる斥力を試算すると非常に大きな値になるので, 宇宙は急速に膨張して, 天体もすぐに互いが認識できないほど遠くに離れてしまうのではないかと彼

<sup>1</sup>例えば, 「真空エネルギーと暗黒エネルギーは折り合えるか」日経サイエンス 2021 年 4 月号, N. Straumann, *The History of the Cosmological Constant Problem*, arXiv:gr-qc/0208027 を参照。



は危惧したらしい。当時は奇抜すぎてその話を真面目に受け止めた人はいなかったようだが、本人は面白がって難題を吹っかけていたのかもしれない。Pauli の排他律で知られる完璧主義者の彼は、正しいとか正しくないとか以前にそもそも答えになっていないという意味の、「間違っただけ」という辛辣な言葉を残したことでも有名である。

ゼロ点エネルギーの最初の具体的な計算は、場の量子論が広く受け入れられるようになった 1960 年代に、Zel'dovich によって行われた。その結果、観測とまったく合わない非常に大きな宇宙定数が得られたことで、宇宙定数が量子論の問題として議論されるようになった。

ここまでの記述は、よく知られている事をまとめただけである (1989 年の Weinberg のレビューを参照)。ここで問題にしたいことは、値の大きさではなく、その計算がどのように実行されたかである。宇宙定数問題の本質は Planck スケールで紫外カットオフを導入してゼロ点エネルギーを計算したら、Planck 質量の 4 乗に比例する大きな宇宙定数が生じてしまったという事である。

この計算法では、カットオフは有限で、物理的な意味を持っていることになる。つまり、Planck スケールを超えた世界に場が存在しないことを仮定したことになる。そして、それは重力場が繰り込み不可能であるという先入観からきていることは言うまでもない。しばしば、離散的な時空を考えることを重力の量子化と呼ぶ場合があるが、場の連続性を否定すれば一般座標不変性も破れてしまう。このように、宇宙定数問題の背後には一般座標不変性の問題が隠れている。

カットオフをゲージ理論に適用するとカットオフの 2 乗に比例したゲージ場の質量項が現れてゲージ不変性が破れてしまう。その他の物質場にも質量項が現れる。このとき、ゲージ対称性をあからさまに破る項は手で取り除いて、そうでないものは残すという選択がしばしば行われたりする。問題の宇宙項はその類である。そもそも、一般座標不変性が破れているので、カットオフ依存性が、単純な質量項の形をしていない、複雑な宇宙項の形に纏まる保証はどこにもない。

宇宙項の存在を予言しているのが一般座標不変性であるにも関わらず、

その対称性を破る量子化法を採用するのは本末転倒である。実際、ゲージ不変性や一般座標不変性を保ったまま理論を有限にすることが出来る次元正則化を用いれば、不変性を破るカットオフのべき乗に相当する紫外発散は現れない。

宇宙定数問題を解決するためには Planck スケールを超えた世界へ踏み込まなければならない。第5章で述べたように、その領域でも成り立つ重力の量子論では、一般座標不変性の帰結としてゼロ点エネルギーが消えることが一般的に示せる。すなわち、問題の原因そのものが消えることを意味する。

では、宇宙定数とは何であろうか。繰り込み可能な量子重力理論ではそれは一つの物理定数になる。正確には、繰り込み群不変量で、宇宙進化の過程で値が変わらない真の定数として与えられる。それは、Newton 定数がそうであるように、実験から決めなければならない定数である。

宇宙定数の発見は、梶田さんの2015年ノーベル賞の受賞に至ったニュートリノ質量の発見に似ている。ニュートリノの質量も長らくゼロであると信じられてきたが、それはあくまでも願望で、その方が単に自由パラメータの数が少なくて理論がすっきりするという理由からである。質量がゼロになることを要求する対称性は存在しない。これらの発見は、対称性等によって否定されない量は存在する、という当たり前のことを教えてくれている。この場合、知るべきことはその値が大きいか小さいかだけである。逆に見れば、このことはゼロと小さいの間には天と地ほどの差があることを示している。

最後に、宇宙定数とは別の言い方として、今世紀に入ってから「暗黒エネルギー」という新しい言葉がよく使われるようになった。宇宙定数は文字通り物理定数であるが、定数でない可能性も含めてこの言葉が使われている。暗黒物質という言葉と対にして使うと印象的でもある。また、Einstein 重力理論の枠組みで議論されるインフレーション理論では宇宙項が使われるのが一般的なので、それと現在の宇宙項を区別したいという理論的背景もあると推察される。



## 第12章

### その他の問題

この章では Planck スケール付近で生じると考えられている他の問題について取り上げることにする。一つは QED に現れる理論的な困難として知られている Landau 特異点の問題, もう一つはトポロジーの足し上げについての問題である。これらの問題が量子重力理論ではどのように再解釈されるのかを見る。

#### QED と Landau 特異点

Landau 特異点は一般的にベータ関数が正になる漸近的に非自由な場の量子論で起こると考えられている問題で, 量子補正を取り込んだランニング結合定数 (有効結合定数) が高エネルギー側で発散するような特異点を持つことを指す。QED はそのような Landau 特異点を持つ理論の代表格として知られている。特異点が現れるエネルギー以上ではその理論は定義されない, そこで新しい理論に置き換わる必要がある。つまり, Landau 特異点をもつ理論は極微の世界を記述する基本的な理論として適切ではないという事である。

このような悪い事は通常 Planck スケール近くで起こると考えられている。それ故、理論が破綻する前に大統一理論 (grand unified theory, GUT) のような漸近的自由性を示す素粒子模型に統合されるシナリオを考えたり、さもなくばそこに至るまで大丈夫なように理論のパラメータを制限したりする。後者は Planck スケールまでもてば、それを越えた世界について考えても仕方がないので、後は気にしないという消極的な考え方である。

しかしながら、ここでは量子重力の力学的スケール  $\Lambda_{\text{QG}}$  を Planck エネルギーより 2 桁低い  $10^{17}$  GeV に取ったことで、Planck スケールに到達する前に量子重力の補正が加わることから、理論が置かれている状況が変わってくる。

そこで、第 10 章 10.2 節で触れた Weinberg の漸近的安全性的な要請が、量子重力に対してだけでなく、QED にも適用できるかどうかを考えてみる。量子重力のそれは BRST 共形不変性としてすでに実現している。そこで QED についても非自明な紫外固定点が存在して、そこで QED のベータ関数  $\beta_e$  が消えることを期待する。それを確かめるための非摂動的な計算は困難であるが、第 4, 7, 10 章で述べた  $t$  の摂動展開による量子重力のループ補正は QED ベータ関数に負の寄与を与えることが知られている。そのため  $\Lambda_{\text{QG}}$  を超えると  $\beta_e$  は減少し、紫外固定点に至ることを期待することが出来る。

インフレーション期間中は、時空相転移点に近づくまで、Weyl テンソルが消える共形不変なダイナミクスが良く保たれていて、ランニング結合定数  $\bar{t}(Q)$  も大きくならない。そこで、QED のベータ関数  $\beta_e$  もほとんど固定点に張り付いていて、共形不変性の存在を示すゼロの値が保たれていると仮定する。相転移点近くになると重力の結合定数は急激に大きくなり、やがて共形不変な重力のダイナミクスは完全に消えて、Einstein の重力理論を中心とした低エネルギー有効場の理論に移行する。その際に  $\beta_e$  も非ゼロになって共形不変性が破れるとすると、Wess-Zumino 相互作用  $\sqrt{-g} \beta_e \phi F_{\mu\nu}^2$  が開いて、それを通して量子重力のスカラ的揺らぎから光子が生成されるシナリオを考えることが出来る。

時空相転移時に物質を生成するこのメカニズムは、光子の場の強さ  $F_{\mu\nu}$

を Yang-Mills 場のそれに置き換えれば, QCD や GUT 模型の場合にも適用できる。これらの場合は高エネルギー極限でベータ関数が消えるので Landau 特異点の問題は生じない。

## トポロジーと重力インスタントン

重力の量子化と言えばトポロジーの足し上げであると考える人は少なからずいる。重力場の局所的なダイナミクスがない低次元の量子重力理論ではトポロジーの足し上げは本質的といえるかもしれないが, 4次元では主要なトピックスではなく, 重力場のダイナミクスの方がはるかに大事である。ただ, 例えば CP の破れを引き起こすようなダイナミクスを宇宙初期に求めるならば, 特殊なトポロジーをもつ時空がそれに寄与するかもしれない。一般的にそのような時空配置のことを重力インスタントンと呼んでいる<sup>1</sup>。

重力インスタントン解と呼ばれているものはいくつもあって, 主に 1970 年代によく調べられ, 江口と Gilkey と Hanson の報告書にまとめられている。その多くは Riemann 曲率テンソルの自己双対条件を満たす Einstein 方程式の解として与えられ, 境界を持っている解も少なくない。

ここでは Belavin, Polyakov, Schwartz, Tyupkin の 4 人によって発見された Yang-Mills インスタントン解と極めて類似した, Weyl 作用と関係の深い解のみを取り上げる。それは境界を持たないコンパクトな 4次元多様体で, Weyl 曲率テンソルの自己双対条件と Weyl 作用から導かれる重力場の運動方程式の両方を満たす解である<sup>2</sup>。現在知られているその解は江口と Freund によって調べられた複素 2 次元射影空間 ( $\mathbb{CP}^2$ ) だけである。

<sup>1</sup>この節で紹介する話題の詳細は表紙のホームページ上で公開している解説書「トポロジーと量子重力」を参照。

<sup>2</sup>Yang-Mills インスタントンの時と同様に Euclid 時空で議論する。それは背景時空を Wick 回転することで得られる。

$\mathbb{CP}^2$  空間での完全な Weyl 作用は重力版のテータ項  $i\theta\tau$  を加えた形で与えられる。重力インスタントン数に相当する  $\tau$  は Hirzebruch 符号数で、ここではその向き付けによって  $\tau = \pm 1$  で与えられる。ここまでは、通常のインスタントン解と同様で、Yang-Mills 場の場の強さがトレースレステンソル場の場の強さである Weyl 曲率テンソルに置き換えられているだけである。

通常のインスタントン解を考える場合と大きく異なる点は、 $\mathbb{CP}^2$  空間にはスピン構造が存在しないということである。すなわちフェルミオンが空間上で正しく定義できないのである。そのことは本来整数でなければならない Atiyah-Singer のスピン  $1/2$  Dirac 指数が  $\mathcal{I}_{1/2} = -\tau/8$  の分数になってしまうという事実から見て取れる。ただ、整数であることは必要条件であって、これだけならばフェルミオンの種類を 8 の倍数にすれば克服できるが、まだ十分ではない。 $\mathbb{CP}^2$  内の可縮でない部分空間である 2 次元球面 ( $\mathbb{CP}^1$ ) 上でフェルミオンを平行移動させてみると、スピン接続から余分な位相が現れてしまうという別の矛盾が見つかる。

時空にフェルミオンが入らないのであれば現実の世界を記述することは出来ない。そこで Hawking と Pope はフェルミオンが入るように一般化されたスピン構造というものを考えた。それは、 $\mathbb{CP}^2$  空間上に背景  $U(1)$  ゲージ場を導入して、フェルミオンがスピン接続だけでなくゲージ場の影響も受けるように時空構造を修正することである。もしフェルミオンの電荷が奇数ならば、 $\mathbb{CP}^1$  部分空間上で平行移動させたときにスピン接続から生じる余分な位相がゲージ場からの位相と相殺することで問題を解決することが出来る。その際、背景ゲージ場と結合するボゾン場の電荷は偶数でなければならないという制限も新たに生じる。

ここまでの議論から分かることは、 $\mathbb{CP}^2$  空間上では  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  を持つ標準模型にはスピン構造が入らないということである。Atiyah-Singer 指数を整数にするだけなら、右手型ニュートリノを考慮すれば、右手型と左手型を合わせたフェルミオンの数が世代ごとに 16 個になるので出来る。しかし、右手型ニュートリノはゲージ電荷を一切もたないので、スピン接続の位相を背景ゲージ場を導入して消すことが出来ない。それ

以外のフェルミオンやボゾン場についても、上手くスピン構造が入るように電荷が割り当てられているわけではない。そのため、余分な  $U(1)$  ゲージ場を加えて、その電荷を場に適切に割り当てることでスピン構造が入るように理論を修正するしかない。また、世代ごとのフェルミオン数が 15 個の  $SU(5)$  GUT も Atiyah-Singer 指数が整数にならないのでスピン構造が入らない。

標準模型を含む数々の GUT 模型の中で  $\mathbb{CP}^2$  上にスピン構造を入れることが出来る最も単純なゲージ群は  $SO(10)$  である。この場合スピン構造の入れ方はいくつか考えられて、 $SO(10)$  の中のどの  $U(1)$  部分群に背景ゲージ場を導入するかで決まる。さらに、分配関数が非ゼロで存在するためには Atiyah-Singer 指数がゼロになるように選ぶ必要がある<sup>3</sup>。そのために、例えば対称性の破れパターンとして  $SO(10) \rightarrow SU(4) \times SU(2) \times SU(2)$  を考えて、両  $SU(2)$  の  $U(1)$  部分群に背景ゲージ場を導入すると、スピン構造を持たせることが出来る。

このように、実験からまだ排除されていない  $SO(10)$  が選ばれることや、フェルミオン数が 16 の倍数であることが要求されることなど、いくつか興味深い制限がもたらされる。ただ、これは決して  $SO(10)$  を強要するものではない。スピン構造が入らないならば、そのトポロジーは経路積分から排除されるだけのことである。逆に、もし  $SO(10)$  が物理として選ばれているならば  $\mathbb{CP}^2$  時空も考えなければならぬかもしれない。重力インスタントンの物理への応用はあまり進んでいない分野で、今後の課題である。

---

<sup>3</sup>フェルミオンのゼロモードが存在しないための必要条件である。ゼロモードがあるとその Grassmann 積分によって分配関数が消えてしまう。質量項があればゼロになることを避けることが出来るが、ここでは質量は実質的にゼロとみなせる高エネルギー領域を考えている。





## 第13章

# 格子量子重力

漸近的背景自由な量子重力理論は非摂動的な共形場理論と摂動論を組み合わせたハイブリッドな方法で定式化された繰り込み可能な場の量子論である。この理論を完全に非摂動的に定式化する試みとして力学的単体分割を用いた方法が提案されている。格子ゲージ理論のときのように Euclid 時空を考えて、それをランダムな格子に分割して調べる方法である。

時空を離散化して重力理論を定式化する方法は 1960 年代に Regge によって始められた。当初は格子の繋がり方を固定したまま各辺の長さを変えて多様な時空を表現するものであった。ただ、この方法では重力場の経路積分として足し上げなければならない可能なすべての時空を十分に表現することが出来ないと認識されている。足し上げを実行する際にどのような測度を使うのかという問題もある。

Regge 計算法に代わる方法として、辺の長さを変えるのではなく、ランダムな格子で時空を分割する「単体量子重力理論」が提案された。格子を構成するパーツが図 13.1 のような単体 (シンプレックス) で与えられ、 $n$  次元時空は  $n$  単体を貼り合わせて構成される。例えば、2 単体の代表である三角形を貼り合わせると図 13.2 のような 2 次元面が構成される。ここでは、境界の無い時空を考えて、そのトポロジーは固定する。

ここで大事なことは貼り合わせの仕方の多様性で、各単体の形ではない。それは同じ体積をもつ同等なもののみなしている。単体の内側は時

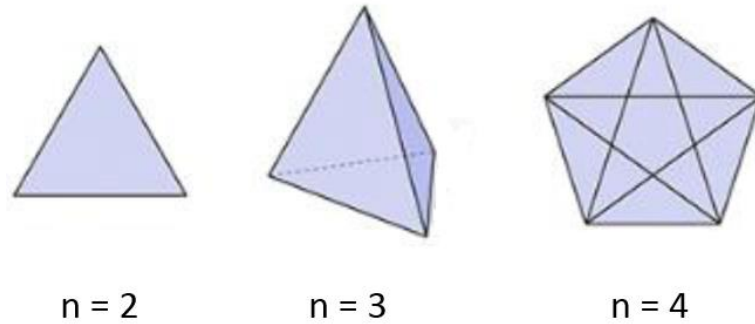


図 13.1:  $n$  次元単体量子重力の構成要素。

空が平均化されて存在していて、連続極限を取るとなめらかな時空が得られると考える。異なる貼り合わせの仕方が局所的に異なる時空配置を表していて、可能なすべての配置を足し上げることで重力場の経路積分が表現される。トポロジーはまず球面を考え、必要なら他のトポロジーも考えて最後に足し上げを行うことになる。

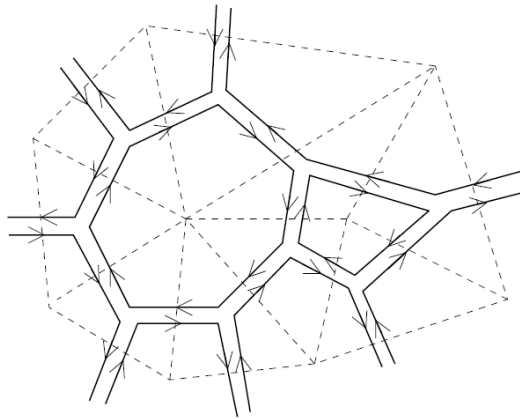


図 13.2: 2 次元ランダム面 (点線) とそれに双対な Feynman 図 (2 重線)。

この方法は Weingarten, David, Kazakov らによってまず 2 次元で実行され、成功を収めた。その分配関数は、3 角形の枚数を  $N_2$ ,  $N_2$  枚の可能な

貼り合わせ方を  $\mathcal{T}_2$ , その分配数を  $\Omega(N_2)$  とすると,

$$Z_{\text{SG}_2}(\lambda) = \sum_{N_2=0}^{\infty} \sum_{\mathcal{T}_2} e^{-\lambda N_2} = \sum_{N_2=0}^{\infty} \Omega(N_2) e^{-\lambda N_2} \quad (13.1)$$

で定義される。この統計モデルは2次相転移を起こすことが知られていて、その臨界点を  $\lambda = \lambda^c$  とすると、分配数は  $N_2$  が大きいところで  $\Omega(N_2) \sim N_2^{\gamma_{\text{st}}^{(2)}-3} e^{\lambda^c N_2}$  のように振る舞う。ここで  $\gamma_{\text{st}}^{(2)}$  はストリング感受率と呼ばれる量である。各3角形の面積を1と規格化すると、 $N_2$  は貼り合わせた面の面積となり、 $\lambda$  はそれを制御する宇宙定数の働きをする。この統計モデルに格子間隔に相当するスケール  $a$  を導入して、臨界点上で  $a \rightarrow 0$  と同時に  $N_2 \rightarrow \infty$  として、 $(\lambda - \lambda^c)/a^2 \rightarrow \lambda_{\text{cos}}$  を保つように連続極限を取ると、2次元量子重力が導かれる。ここで  $\lambda_{\text{cos}}$  は繰り込まれた物理的宇宙定数である。

2次元ランダム面は、図13.2のように、それに双対な図を考えると Feynman 図と1対1の対応が付くので、その Feynman 図を生成する3点相互作用を持った行列模型 (0次元の Yang-Mills 場理論のようなもの) を使って分配関数(13.1)を表すことが出来る。この方法を使うとランダム面の足し上げが行列変数の積分として解析的に実行することができて、2次相転移が実際に起こることが計算で示せる。さらに、Brezin と Kazakov, Douglas と Shenker, Gross と Migdal の3グループによって、相転移点で連続極限を取ると、第4章4.2節の最後で触れた2次元量子重力理論と完全に一致した結果が得られることが1980年代の終わりに示されている。

1990年代に入ると、2次元での成功を受けて、高次元への拡張が盛んに議論されるようになった。力学的単体分割法による4次元量子重力の数値計算は Ambjørn と Jurkiewicz, Agishtein と Migdal などのグループによって始められた。全体の体積を表す4単体の数を  $N_4$ , その中に含まれる2単体の数を  $N_2$  とすると、分配関数は体積  $N_4$  を持つ4単体の可能な貼り合わせ方  $\mathcal{T}_4$  について和を取った

$$Z_{\text{SG}_4}(\kappa, \lambda) = \sum_{N_4=0}^{\infty} \sum_{\mathcal{T}_4} e^{\kappa N_2 - \lambda N_4} = \sum_{N_4=0}^{\infty} \Omega(\kappa, N_4) e^{-\lambda N_4} \quad (13.2)$$

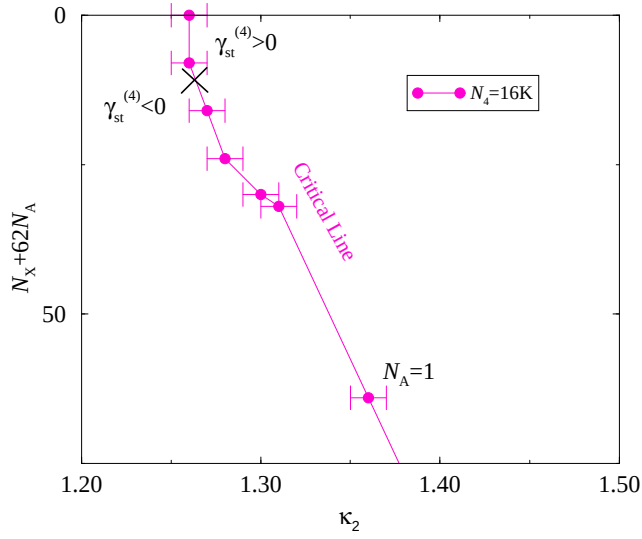


図 13.3: 物質場が  $N_X + 62N_A$  個導入した場合の数値計算の相転移点  $\kappa_4^c$  とその  $\kappa_2$  依存性。  $N_X$  と  $N_A$  はそれぞれスカラー場と  $U(1)$  ゲージ場の数を表す。×印より下では感受率が負になって第 2 種相転移点が存在する。[K. Hamada, S. Horata and T. Yukawa, *Focus on Quantum Gravity Research* (Nova Science Publisher, NY, 2006), Chap. 1.]

で定義される。ここで、 $\kappa$  は Planck 質量の 2 乗、 $\lambda$  は宇宙定数に相当する。2 次相転移が  $\lambda = \lambda^c(\kappa)$  で起こるとすると、分配数はそこで  $\Omega(\kappa, N_4) \sim N_4^{\gamma_{\text{st}}^{(4)} - 3} e^{\lambda^c(\kappa) N_4}$  のように振る舞う。その指数  $\gamma_{\text{st}}^{(4)}$  がストリング感受率の 4 次元版である。

4 単体量子重力では連続極限を取るために必要な 2 次相転移の存在は 2 次元面のときほど自明ではないが、洞田と江川と湯川によってその存在が数値的に示唆されている (図 13.3 参照)。それは 1 万個を超える 4 単体を貼り合わせて 4 次元球面と同じポロジーマを持つ多様体を構成し、さらにそこに物質場を組み込んで数値シミュレーションを行った結果である。図 13.4 は、相転移点直上で評価して得られた 4 次元版ストリング感受率が、漸近的背景自由な 4 次元量子重力から導かれたそれと矛盾しないことを示している。

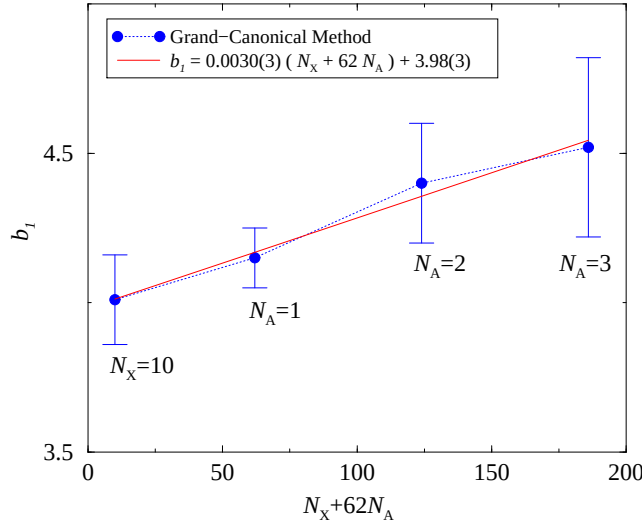


図 13.4: 感受率  $\gamma_{st}^{(4)}$  の数値計算の結果。得られた感受率を連続理論から導かれた  $\gamma_{st}^{(4)} = 2 - (b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_1})/2$  の表式と合わせることで  $b_1$  の関数形を求めて表示している。ここで、 $b_1$  は Riegert 作用の係数で、(B.3) で予言されているように、 $N_X + 62N_A$  の 1 次の関数で表されることが分かる。[K. Hamada, S. Horata and T. Yukawa, *Focus on Quantum Gravity Research* (Nova Science Publisher, NY, 2006), Chap. 1.]

両者を比較するにあたって注意すべきことは、4 単体重力理論の重み  $e^{\kappa N_2 - \lambda N_4}$  は連続理論での Einstein-Hilbert 作用と宇宙項に相当する部分しかないことである。つまり、4 階微分重力項の情報は貼り合わせの仕方  $\mathcal{T}_4$  の中に含まれていることになる。それは、第 4 章 4.1 節の最後で述べたように、4 階微分重力作用  $I^{(4)}$  や Wess-Zumino 作用  $S$  は  $\hbar$  に依らない純粋に量子論的な量で、経路積分測度の一部とみなせることに対応している。

最後に 3 次元の重力理論について簡単に述べる。偶数次元と異なって、奇数次元である 3 次元には体積積分をすると無次元になる重力のスカラー関数が存在しない。そのため作用に次元をもつパラメータを導入しなければならない。このことから、2 次元や 4 次元で用いられた方法は 3 次元に適用できないことが分かる。連続的な場を用いる方法としては、宇

宇宙定数や物質場が無い場合に、重力理論を Chern-Simons 理論として記述する Witten のアプローチがよく知られている。それは 3 次元の重力は局所的な自由度のない位相的 (トポロジカル) な場の理論であることを表している。これに対して、位相不変量を 3 単体重力として表わしたのが、Racah-Wigner  $6j$  記号を用いて 4 面体の 6 辺を表現することで構成された Ponzano と Regge の模型や、それをより数学的に発展させた Turaev と Viro の模型である。それらと Chern-Simons 理論との関係についての研究は今も続けられている。

他方、3 単体量子重力の候補として Boulatov の模型がよく知られている。それは、トポロジーを固定して、(13.1) や (13.2) のように、宇宙項や Einstein-Hilbert 項による重みを加えて、3 単体の可能なすべての貼り合わせ方について足し上げを行う方法である。2 単体の足し上げで成功した行列模型を、テンソルの脚を持った模型に一般化して、3 単体でそれを実行することを目指したものである。ただ、かなり複雑な模型なので、解析が進んでいるとは言えない。また、比較検討できるような物理量が知られていない故か、3 単体重力として大規模な数値計算が行われたという話も聞かない。3 次元量子重力は主に数学的な対象として研究されている。

## 第14章

### 終わりに

古くからの科学思想に「オッカムの剃刀」というのがある。14世紀のイギリスのオッカム村の哲学者 William によって提唱された、ある事象を説明するのに必要以上に多くの仮定を加えるべきではない、という原則である。剃刀は不必要なものを切り落とすの意味で使われている。

例えば、天動説はすべての惑星が同一円盤上にあるなら、次から次へと円運動を足していけばどんどん正確になる。しかしながら、これは観測と合うように次から次へと変数を導入するパラメータ物理の典型で、オッカムの剃刀の思想に反していると言える。実際、軌道が斜めの冥王星や彗星などが加わると対応できなくなるし、太陽系の外まで考えれば破綻してしまう。オッカムの剃刀は真偽を判定をするものではないが、より単純な原理原則に基づいて説明できる方が真であると考えすることは理にかなっている。

本書で終始貫かれている指導原理が一般座標不変性である。けれども、世の中では、Einstein 方程式の方を第一に考える人が多いように思える。Einstein 方程式は美しく、Tシャツの図柄にもなるほどその存在がはっきりしているため、ある種の偶像崇拜的な側面があって、この方程式を否定することは Einstein 自身を否定することであるような風潮がある。もちろんそれは間違いで、Einstein の最大の業績は間違いなく一般座標不変性が物理学の基本原理の一つであることを発見したことである。それは決



して量子論と対立するものではない。Einstein 方程式はこの原理から導かれた方程式の一つであるが、不完全である。

Planck スケールを超えた世界を記述するために提案された「漸近的背景自由な量子重力理論」は一般座標不変性がどこまでも成り立つように定式化された場の量子論である。これは無限自由度を体系的に扱える繰り込み可能な理論で、紫外カットオフを導入することなしに連続場を用いて記述される。この性質はもちろん一般座標不変性によって保証される。量子重力を特徴づける背景時空独立性も一般座標不変性が量子レベルで獲得する性質の中に含まれている。それらの性質が重力の諸問題に対してこれまでとは異なる新しい解決策を与える。すべて一般座標不変性から導かれるのである。

方法論としての新しさは共形不変性を用いたことである。重力場モードの中で特に距離を支配する最も重要な共形因子を非摂動的に扱い、その他のテンソルモードには紫外極限では役割が小さくなるとして摂動論を適用することで、一般座標不変性の中に隠れていた背景時空独立性が共形不変性の形で顕わになる。この場合の重力の量子化は、一般座標不変な作用を用意すれば自動的に成立するような単純な作業にはならない。一般には共形異常と呼ばれている経路積分測度からの寄与も正しく取り入れる必要がある。それを実行すると、背景時空独立性が BRST 共形不変性として、すなわち、共形変換で移り変わることができる異なる背景時空上の理論がすべてゲージ同値になると表現される。Planck スケールを超えた世界はその性質をもつ特別な共形場理論として記述される。

理論が繰り込み可能でなければならないという条件は、時空の次元が 4 であることの理論的な根拠を与える。私たちは知らず知らずのうちに 4 次元の外から宇宙を見ていることがある。ある瞬間に宇宙が生まれたという発想は、その瞬間を 4 次元時空の外側から見ているようなものである。しかしながら、私たちは 4 次元の世界の中にいて、宇宙に外の世界があるかどうかなど分かるはずもない。余剰次元は未知の大陸のようなものである。それは説明すべき事柄よりも無限に多くの余分な自由度を付け加えたことになる。

漸近的背景自由性は新たな力学的スケールの存在を示唆する。それは背景時空独立な量子時空相と古典的な時空相を分ける物理的なエネルギースケールで、その値は重力の量子効果で誘起されるインフレーションのシナリオから Planck 質量  $m_{\text{pl}}$  より 2 桁小さい  $10^{17}$  GeV に決まる。それは Planck スケールに到達する前に重力の量子効果が効き始めることを意味している。それ故、Planck スケールで顕著になると考えられる古典論の諸問題を回避することが出来る。

量子重力の相関距離はこのエネルギースケールの逆数で与えられ、Planck 長さのおよそ 100 倍になる。それより長距離なら古典的に距離を測ることが出来るが、内側に入ると相が変わって、距離が大きく揺らいだ量子的世界になる。それが極まった状態として現れるのが背景時空独立な世界である。このことは、時空は連続的に記述されているが、物理的な距離は実質的にこの相関距離で量子化されていることを意味する。

一般座標不変性の帰結として系全体のハミルトニアンはゼロになることが示せる。それはゼロ点エネルギーが消えることを表していて、それ故、それを原始揺らぎの起源と考えることは出来ない。宇宙の進化は、ハミルトニアンをゼロに保ったまま、時空の状態が変化して行く過程として表される。重力の量子的揺らぎのみが存在する状態から宇宙が始まったと考えれば、進化のシナリオがより明快になる。それはすなわち、重力がすべての物質の源であるという事を示唆している。

重力場は次元を持たない場で、すべての物質と直接相互作用する唯一の場でもある。そして、漸近的背景自由性は、重力場の中のスカラー的な共形因子の揺らぎが宇宙初期で優勢になることを言っている。物質場は高エネルギー極限では共形不変を保っていて、共形因子場と結合していないが、時空の相転移が起こり始めると、共形因子場と物質場との相互作用が共形異常の Wess-Zumino 作用を通して開かれ、物質が生成される。このようにして得られた相転移後の原始スペクトルには、量子重力の共形不変性に由来したスカラー的でスケール不変な性質が引き継がれる。この性質の大元は重力場が無次元であるという事実から来ているのである。

宇宙がどれだけ広いのか私たちには分からない。観測している範囲は

その一部でしかない。インフレーションのシナリオでは、宇宙の始まりまで遡ると、現在見えている範囲がすべて相関距離の内側に入ってしまう。すなわち、宇宙は量子重力が励起した泡の一つから始まったことを示唆している。インフレーションが始まると、膨張によって生じた隙間を新たな泡が、そのエネルギー密度がほぼ一定になるように、空間を密に埋めていくと考えられる。そうやって急拡大した宇宙が時空の相転移を起こして、泡が一斉に物質に転化して現在の宇宙に移行する。

身近で感じる重力の相互作用は他の相互作用に比べて極めて弱いものである。けれども、その弱さが逆に重力が宇宙全体を小さな泡に閉じ込めてしまえるほどの能力を持っていることの裏返しになっているとも言える。

背景時空独立な Planck スケールの世界はこのように想像を絶する世界である。だからこそ、しっかりとした指導原理が必要で、それが一般座標不変性である。新たな原理を導入する試みもあるが、まずは一般座標不変性である。それ故、私が行ったことは、一般座標不変性に固執しながら、奇をてらうことなく、通常の場合の量子化法が重力に対しても上手く機能することを確かめることであった。これによって量子重力研究の新しい地平が開かれた。

Schrödinger の猫が生きているのか死んでいるのかといった思考実験的な議論は後回しでよいと思う。それを解決する手段としてのパラレルワールドのような考えは楽しいかもしれないが、実のあることは何も語らない。それが理解できないからといって量子論が否定されるわけではない。最近の量子技術の進歩を考えれば、そのような問題もいずれ時が来れば答えが見つかるのではないだろうか。

# 付録 A

## 基本定数

|                              |                 |   |                                                                   |
|------------------------------|-----------------|---|-------------------------------------------------------------------|
| 換算 Planck 定数                 | $\hbar$         | = | $1.055 \times 10^{-27} \text{ cm}^2 \text{ g s}^{-1}$             |
| 光速                           | $c$             | = | $2.998 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$                          |
| Newton 定数                    | $G$             | = | $6.672 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$ |
| Planck 質量                    | $m_{\text{pl}}$ | = | $2.177 \times 10^{-5} \text{ g}$                                  |
|                              |                 | = | $1.221 \times 10^{19} \text{ GeV}/c^2$                            |
| 換算 Planck 質量                 | $M_{\text{P}}$  | = | $2.436 \times 10^{18} \text{ GeV}/c^2$                            |
| Planck 長さ                    | $l_{\text{pl}}$ | = | $1.616 \times 10^{-33} \text{ cm}$                                |
| Planck 時間                    | $t_{\text{pl}}$ | = | $5.390 \times 10^{-44} \text{ s}$                                 |
| Boltzmann 定数                 | $k_{\text{B}}$  | = | $1.381 \times 10^{-16} \text{ erg K}^{-1}$                        |
| メガパーセク (Megaparsec)          | 1Mpc            | = | $3.086 \times 10^{24} \text{ cm}$                                 |
| Hubble 定数                    | $H_0$           | = | $100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$                         |
| 現在の Hubble 距離                | $c/H_0$         | = | $2998h^{-1} \text{ Mpc}$                                          |
| (現在の観測では $h \simeq 0.7$ である) |                 |   |                                                                   |

自然単位系 ( $c = \hbar = k_{\text{B}} = 1$ ) への変換に有益な定数

|       |   |                                                  |
|-------|---|--------------------------------------------------|
| 1 cm  | = | $5.068 \times 10^{13} \hbar/\text{GeV}$          |
| 1 s   | = | $1.519 \times 10^{24} \hbar/\text{GeV}/c$        |
| 1 g   | = | $5.608 \times 10^{23} \text{ GeV}/c^2$           |
| 1 erg | = | $6.242 \times 10^2 \text{ GeV}$                  |
| 1 K   | = | $8.618 \times 10^{-14} \text{ GeV}/k_{\text{B}}$ |



## 付録 B

### 理論の簡潔な要約

本書で採用する Minkowski 計量は  $\eta_{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$  である。Riemann 曲率テンソルは, Christoffel 記号  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = g^{\lambda\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu})/2$  を用いて,  $R^{\lambda}_{\mu\sigma\nu} = \partial_{\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \Gamma_{\rho\nu}^{\lambda}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}$  と定義される。Ricci テンソルは  $R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}$ , スカラー曲率は  $R = R^{\mu}_{\mu}$  で与えられる。共変微分は  $\nabla_{\mu}A_{\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}A_{\lambda}$  と表される。

漸近的背景自由な量子重力理論の作用,  $I = I^{(4)} + I_{\text{EG}}/\hbar$ , は

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{t^2} C_{\mu\nu\lambda\sigma}^2 - bG_4 + \frac{1}{\hbar} \left( \frac{1}{16\pi G} R - \Lambda + \mathcal{L}_M \right) \right] \quad (\text{B.1})$$

で与えられる。最初の 2 項が共形不変な 4 階微分作用  $I^{(4)}$  で, 第 1 項は Weyl 作用, 第 2 項の  $G_4 = R_{\mu\nu\lambda\sigma}^2 - 4R_{\mu\nu}^2 + R^2$  は Euler 密度 (Gauss-Bonnet) である。繰り込み可能な理論では, 作用は裸の量で記述され, 繰り込まれた量とは異なる記号が使われるが, ここでは簡単のため区別していない。また, 本文でも述べたように,  $\hbar$  は低階微分項  $I_{\text{EG}}$  の前にだけ現れる。これは重力場が完全に無次元な場であることに由来する。4 階微分重力作用はすべて純粋に量子的なダイナミクスを記述し, 時空のエントロピーを生み出している。以下では  $\hbar = 1$  とする。

共形因子場  $\phi$ , トレースレステンソル場  $h^{\mu}_{\nu}$  と背景計量  $\hat{g}_{\mu\nu}$  を用いて, 計量テンソル場を  $g_{\mu\nu} = e^{2\phi}\bar{g}_{\mu\nu}$ ,  $\bar{g}_{\mu\nu} = (\hat{g}e^h)_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\lambda}(\delta^{\lambda}_{\nu} + h^{\lambda}_{\nu} + \dots)$  と分解する。共形因子  $e^{2\phi}$  はそのまま非摂動的に扱い,  $h^{\mu}_{\nu}$  は摂動論で考える。Weyl 曲率テンソルが  $h^{\mu}_{\nu}$  の場の強さであることから, 結合定数  $t$  を (B.1)

のように導入することは、 $h^\mu_\nu$  で摂動展開することを意味する。このとき、 $I^{(4)}$  は共形因子場  $\phi$  に依存しないが、低階微分項  $I_{\text{EG}}$  には  $\phi$  の指数因子が現れる。また、以下で示す 4 階微分の重力作用は  $\phi$  の多項式で与えられる事にも注意する。

量子化の鍵は理論を実用的な背景時空  $\hat{g}_{\mu\nu}$  上の場の量子論に書き換えることである。分配関数は

$$Z = \int [dg]_g e^{iI(g)} = \int [d\phi dh]_{\hat{g}} e^{iI_{\text{QG}}(\phi, \bar{g})} \quad (\text{B.2})$$

と表され、作用は  $I_{\text{QG}}(\phi, \bar{g}) = S(\phi, \bar{g}) + I(g)$  に変更される。ここで、 $e^{iS}$  は経路積分測度を背景時空上の測度書き換える際のヤコビアンで、一般座標不変性を保つために必要な量である。 $S$  は Wess-Zumino 積分条件を満たす Wess-Zumino 作用で (第 4 章の脚注 2 を参照)、それを共形変分したものが一般に共形異常と呼ばれている量である。

Wess-Zumino 作用  $S$  が共形因子場  $\phi$  の 4 階微分ダイナミクスを担っている。Riegert 作用と呼ばれる結合定数  $t$  のゼロ次でも残るそれは特に重要で、

$$S_{\text{R}}(\phi, \bar{g}) = -\frac{b_1}{(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} (2\phi \bar{\Delta}_4 \phi + \bar{E}_4 \phi)$$

で与えられる。ここで、 $E_4 = G_4 - 2\nabla^2 R/3$  は全微分項だけ修正された Euler 密度、 $\sqrt{-g}\Delta_4$  はスカラー量に対して共形不変になる 4 階微分演算子で、 $\Delta_4 = \nabla^4 + 2R^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu - 2R\nabla^2/3 + \nabla^\mu R\nabla_\mu/3$  である。バー付きは  $\bar{g}_{\mu\nu}$  で定義された量で、これらの間には関係式  $\sqrt{-g}E_4 = \sqrt{-\bar{g}}(4\bar{\Delta}_4\phi + \bar{E}_4)$  が成り立つ。係数  $b_1 = b_c + o(t^2)$  の最低次  $b_c$  は、 $N_{\text{X}}$ ,  $N_{\text{F}}$ ,  $N_{\text{A}}$  をそれぞれ物質項  $\mathcal{L}_{\text{M}}$  に属するスカラー場、Dirac フェルミオン及びゲージ場の数とすると、

$$b_c = \frac{1}{360} (N_{\text{X}} + 11N_{\text{F}} + 62N_{\text{A}}) + \frac{769}{180} \quad (\text{B.3})$$

で与えられる。例えば、標準模型では  $b_c$  は 7.0,  $SU(5)$  GUT 模型では 9.1,  $SO(10)$  GUT 模型では 12.0 になる。また、 $t$  の高次になれば  $\phi^{n+1}\sqrt{-\bar{g}}(2\bar{\Delta}_4\phi + \bar{E}_4)$  や  $\phi^n\sqrt{-\bar{g}}\bar{C}_{\mu\nu\lambda\sigma}^2$ , ゲージ場  $F_{\mu\nu}$  に対しては  $\phi^n\sqrt{-\bar{g}}\bar{F}_{\mu\nu}^2$ , のような相

相互作用項が Wess-Zumino 作用として現れる<sup>1</sup>。このとき  $\sqrt{-g} C_{\mu\nu\lambda\sigma}^2 = \sqrt{-\bar{g}} \bar{C}_{\mu\nu\lambda\sigma}^2$  と  $\sqrt{-g} F_{\mu\nu}^2 = \sqrt{-\bar{g}} \bar{F}_{\mu\nu}^2$  に注意。最後の相互作用は時空相転移時の物質生成に寄与する。

Riegert 作用は Weyl 作用とともに  $t \rightarrow 0$  で背景時空独立性の代数的な表現である BRST 共形不変性を実現する上で鍵となるパーツである。それは背景時空を  $\hat{g}_{\mu\nu} \rightarrow e^{2\sigma} \hat{g}_{\mu\nu}$  と Weyl 変換しても物理の結果は変わらないことを表している。またそれ故に、背景として簡単な Minkowski 計量を使って重力を量子化することが正当化される。

ベータ関数  $\beta_t = \mu dt/d\mu = -\beta_0 t^3 + o(t^5)$  は負になり、その 1 ループの係数は  $\beta_0 = [(N_X + 6N_F + 12N_A)/240 + 197/60]/(4\pi)^2$  で与えられる。 $\mu$  は量子化の際に導入された任意の質量スケールである。これに対応する Weyl 作用部分に対する有効作用は、運動量表示で、

$$\begin{aligned} \Gamma_W &= - \left[ \frac{1}{t^2} - 2\beta_0 \phi + \beta_0 \log \left( \frac{q^2}{\mu^2} \right) \right] \sqrt{-g} C_{\mu\nu\lambda\sigma}^2 \\ &= - \frac{1}{\bar{t}^2(Q)} \sqrt{-g} C_{\mu\nu\lambda\sigma}^2 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

で与えられる。第 1 列の第 2 項が Wess-Zumino 作用、3 項が非局所的なループ補正項で、それらと第 1 項がランニング結合定数  $\bar{t}^2(Q) = [\beta_0 \log(Q^2/\Lambda_{\text{QG}}^2)]^{-1}$  の形にまとまる。ここで、 $Q^2 = q^2/e^{2\phi}$  (7.3) で、量子重力の力学的スケールは  $\Lambda_{\text{QG}} = \mu e^{-1/2\beta_0 t^2}$  と表すことが出来る。それは  $d\Lambda_{\text{QG}}/d\mu = 0$  を満たす繰り込み群不変な物理定数の一つである。高次補正を含めるとランニング結合定数及び力学的スケールの表式はより複雑になるが、同じことが言える。

有効作用  $\Gamma_\Lambda = -\Lambda_{\text{cos}} \sqrt{-g}$  で定義される、 $d\Lambda_{\text{cos}}/d\mu = 0$  を満たす物理的

<sup>1</sup>厳密なことを言えば、これらの項を  $S$  として含むような高次の経路積分を正しく実行するためには、一般座標不変性を保ちながら高次ループ計算ができる唯一の方法として知られている次元正則化法を用いて (B.2) を定式化する必要がある (第 10 章参照)。



宇宙定数は

$$\begin{aligned}\Lambda_{\cos} = & \Lambda + (7 - 2 \log 4\pi) \frac{\Lambda}{b_c} - \left( \frac{\Lambda}{b_c} - \frac{9\pi^2 M^4}{2b_c^2} \right) \log \left( \frac{64\pi^2}{\mu^4} \frac{\Lambda}{b_c} \right) \\ & - \frac{9\pi^2}{2} \left( \frac{25}{3} - 4 \log 4\pi \right) \frac{M^4}{b_c^2} \\ & - 6\pi \frac{M^2}{b_c} \sqrt{\frac{\Lambda}{b_c} - \frac{9\pi^2 M^4}{4b_c^2}} \arccos \left( \frac{3\pi M^2}{2\sqrt{b_c \Lambda}} \right) \\ & + \frac{5}{128} \alpha_t^2 M^4 \left( \log \frac{\pi^2 \alpha_t^2 M^4}{\mu^4} - \frac{21}{5} \right)\end{aligned}$$

で与えられる。ここで、 $\alpha_t = t^2/4\pi$  である。 $M = 1/\sqrt{8\pi G}$  と  $\Lambda$  は作用に含まれる Planck 質量と宇宙定数のそれぞれの繰り込まれた量である。この表式を導く際に、ラージ  $b_c$  近似を採用している。それは物質場の種類が多い場合に相当して、 $\Lambda/b_c$  と  $M^4/b_c^2$  が、そして  $\alpha_t/4\pi$  と  $1/b_c$  が同等に小さな値であることを仮定している。

最後に、第 8 章で議論した静的で球状な励起状態を記述する運動方程式を以下に書き下しておく。それは重力ポテンシャル  $\Phi$  と  $\Psi$  の結合線形微分方程式として、

$$\frac{b_c}{8\pi^2} B(r) \left( -\frac{4}{3} \partial^4 \Phi - \frac{2}{3} \partial^4 \Psi \right) + M_P^2 (-4 \partial^2 \Phi - 2 \partial^2 \Psi) = 0$$

と

$$\begin{aligned}& \frac{b_c}{8\pi^2} B(r) \left( -\frac{8}{9} \partial^4 \Phi - \frac{4}{9} \partial^4 \Psi \right) + \frac{1}{\bar{t}^2(r)} \left( -\frac{8}{3} \partial^4 \Phi + \frac{8}{3} \partial^4 \Psi \right) \\ & + M_P^2 (-2 \partial^2 \Phi - 2 \partial^2 \Psi) = 0\end{aligned}$$

で与えられる。ここで、 $\partial^2 = \partial_r^2 + (2/r) \partial_r$  は空間の Laplace 演算子である。 $B(r) = [1 + a_1 \bar{t}^2(r)]^{-1}$  は Riegert 作用に対する高次 Wess-Zumino 作用補正項を足し上げてモデル化した因子である。 $1/\bar{t}^2(r)$  を含む項は Weyl 作用から、 $M_P$  を含む項は Einstein 項から導かれる。宇宙項や物質パートはゼロとしている。

## 参考文献

- ACBAR Collaboration, Reichardt, C. L., *et al.*, *High-Resolution CMB Power Spectrum from the Complete ACBAR Data Set*, *Astrophys. J.* **694** (2009) 1200.
- Adler, S. L., Collins, J. C., and Duncan, A., *Energy-Momentum-Tensor Trace Anomaly in Spin-1/2 Quantum Electrodynamics*, *Phys. Rev. D* **15** (1977) 1712.
- Agishtein, M. E. and Migdal, A. A., *Simulations of Four-Dimensional Quantum Gravity as Dynamical Triangulation*, *Mod. Phys. Lett. A* **7** (1992) 1039.
- Agishtein, M. E. and Migdal, A. A., *Critical Behavior of Dynamically Triangulated Quantum Gravity in Four Dimensions*, *Nucl. Phys.* **B385** (1992) 395.
- Alpher, R. A., Bethe, H. A., and Gamow, G., *The Origin of Chemical Elements*, *Phys. Rev.* **73** (1948) 803.
- Ambjørn, J. and Jurkiewicz, J., *Four-Dimensional Simplicial Quantum Gravity*, *Phys. Lett.* **B278** (1992) 42.
- Andrews, G., Baxter, R., and Forrester, P., *Eight-Vertex SOS Model and Generalized Roger-Ramanujan-Type Identities*, *J. Stat. Phys.* **35** (1984) 193.
- Antoniadis, I. and Mottola, E., *4D Quantum Gravity in the Conformal Sector*, *Phys. Rev. D* **45** (1992) 2013.
- Antoniadis, I., Mazur, P., and Mottola, E., *Conformal Symmetry and Central Charges in Four Dimensions*, *Nucl. Phys.* **B388** (1992) 627.

- Antoniadis, I., Mazur, P., and Mottola, E., *Physical States of the Quantum Conformal Factor*, Phys. Rev. D **55** (1997) 4770.
- Antoniadis, I., Mazur, P., and Mottola, E., *Conformal Invariance and Cosmic Background Radiation*, Phys. Rev. Lett. **79** (1997) 14.
- Arnowitt, R., Deser, S., and Misner, C., *Dynamical Structure and Definition of Energy in General Relativity*, Phys. Rev. **116** (1959) 1322.
- Arnowitt, R., Deser, S., and Misner, C., *An Introduction to Current Research*, in Gravitation, edited by L. Witten (Wiley, NY, 1962) p. 227.
- Ashtekar, A., *New Variables for Classical and Quantum Gravity*, Phys. Rev. Lett. **57** (1986) 2244.
- Atiyah, M. F. and Singer, I. M., *The Index of Elliptic Operators on Compact Manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963) 322.
- Becchi, C., Rouet, A., and Stora, R., *Renormalization of the Abelian Higgs-Kibble Model*, Comm. Math. Phys. **42** (1975) 127.
- Becchi, C., Rouet, A., and Stora, R., *Renormalization of Gauge Theories*, Ann. Phys. **98** (1976) 287.
- Belavin, A., Polyakov, A., Schwartz, A., and Tyupkin, Y., *Pseudoparticle Solutions of the Yang-Mills Equations*, Phys. Lett. **59B** (1975) 85.
- Belavin, A., Polyakov, A., and Zamolodchikov, A., *Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory*, Nucl. Phys. **B241** (1984) 333.
- Bessis, D., Itzykson, C., and Zuber, J., *Quantum Field Theory Techniques in Graphical Enumeration*, Adv. Appl. Math. **1** (1980) 109.
- Boulatov, D., *A Model of Three-Dimensional Lattice Gravity*, Mod. Phys. Lett. **A7** (1992) 1629.
- Brezin, E., Itzykson, C., Parisi, G., and Zuber, J., *Planar Diagrams*, Commun. Math. Phys. **59** (1978) 35.
- Brezin, E. and Kazakov, V., *Exactly Solvable Field Theories of Closed Strings*, Phys. Lett. **B236** (1990) 144.

- Brown, L. and Collins, J., *Dimensional Renormalization of Scalar Field Theory in Curved Space-time*, Ann. Phys. **130** (1980) 215.
- Capper, D. and Duff, M., *Trace Anomalies in Dimensional Regularization*, Nuovo Cimento A **23** (1974) 173.
- Chern, S. and Simons, J., *Characteristic Forms and Geometric Invariants*, Ann. Math. **99** (1974) 48.
- COBE Collaboration, Bennett, C. N., *et al.*, *Four Year COBE DMR Cosmic Microwave Background Observations: Maps and Basic Results*, Astrophys. J. 464 (1996) L1.
- Creutz, M., *Monte Carlo Study of Quantized  $SU(2)$  Gauge Theory*, Phys. Rev. D **21** (1980) 2308.
- David, F., *Planar Diagrams, Two-Dimensional Lattice Gravity and Surface Models*, Nucl. Phys. **B257** [FS14] (1985) 45.
- David, F., *Conformal Field Theories coupled to 2-D Gravity in the Conformal Gauge*, Mod. Phys. Lett. A **3** (1988) 1651.
- Deser, S. and Nieuwenhuizen, P., *Nonrenormalizability of the Quantized Einstein-Maxwell System*, Phys. Rev. Lett. **32** (1974) 245.
- Deser, S., Duff, M., and Isham, C., *Non-local Conformal Anomalies*, Nucl. Phys. **B111** (1976) 45.
- DeWitt, B. S., *Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory*, Phys. Rev. **160** (1967) 1113.
- DeWitt, B. S., *Quantum Theory of Gravity. II. The Manifestly Covariant Theory*, Phys. Rev. **162** (1967) 1195.
- DeWitt, B. S., *Quantum Theory of Gravity. III. Applications of the Covariant Theory*, Phys. Rev. **162** (1967) 1239.
- Distler, J. and Kawai, H., *Conformal Field Theory and 2D Quantum Gravity*, Nucl. Phys. **B321** (1989) 509.
- Dolan, F. and Osborn, H., *Conformal Four Point Functions and the Operator Product Expansion*, Nucl. Phys. **B599** (2001) 459.

- Dolan, F. and Osborn, H., *Conformal Partial Wave and the Operator Product Expansion*, Nucl. Phys. **B678** (2004) 491.
- Dolan, F. and Osborn, H., *Conformal Partial Waves: Further Mathematical Results*, arXiv:1108.6194.
- Douglas, M. and Shenker, S., *Strings in Less Than One Dimension*, Nucl. Phys. **B335** (1990) 635.
- Duff, M., *Observations on Conformal Anomalies*, Nucl. Phys. **B125** (1977) 334.
- Duff, M., *Twenty Years of The Weyl Anomaly*, Class. Quantum Grav. **11** (1994) 1387.
- Dyson, F. J., *The Radiation Theories of Tomonaga, Schwinger, and Feynman*, Phys. Rev. **75** (1949) 486.
- Dyson, F. J., *The S Matrix in Quantum Electrodynamics*, Phys. Rev. **75** (1949) 1736.
- Eguchi, T. and Freund, P., *Quantum Gravity and World Topology*, Phys. Rev. Lett. **37** (1976) 1251.
- Eguchi, T., Gilkey, P. B., and Hanson, A. J., *Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry*, Phys. Rep. **66** (1980) 213.
- Einstein, A., *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, Annalen der Phys. **49** (1916) 769.
- Einstein, A., *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie*, Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte, (1917) 142.
- Einstein, A., *Prinzipielles zur allgemeinen Relativitätstheorie*, Annalen der Phys. **55** (1918) 241.
- El-Showk, S., Paulos, M., Poland, D., Rychkov, S., Simmons-Duffin, D. and Vichi, A., *Solving the 3D Ising Model with the Conformal Bootstrap*, Phys. Rev. D **86** (2012) 025022.

- Ferrara, S., Grillo, A., and Gatto, R., *Tensor Representations of Conformal Algebra and Conformally Covariant Operator Product Expansion*, Ann. Phys. **76** (1973) 161.
- Ferrara, S., Gatto, R., and Grillo, A., *Positivity Restriction on Anomalous Dimensions*, Phys. Rev. D **9** (1974) 3564.
- Feynman, R. P., *Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics*, Rev. of Mod. Phys. **20** (1948) 367.
- Feynman, R. P., *Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics*, Phys. Rev. **76** (1949) 769.
- Feynman, R. P., *The Theory of Positrons*, Phys. Rev. **76** (1949) 749.
- Feynman, R. P., *Mathematical Formulation of the Quantum Theory of Electromagnetic Interaction*, Phys. Rev. **80** (1950) 440.
- Fradkin, E. and Tseytlin, A., *Renormalizable Asymptotically Free Quantum Theory of Gravity*, Nucl. Phys. **B201** (1982) 469.
- Friedan, D., Qiu, Z., and Shenker, S., *Conformal Invariance, Unitarity, and Critical Exponents in Two Dimensions*, Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 1575.
- Friedmann, A., *Über die Krümmung des Raumes*, Z. Phys. **10** (1922) 377.
- Friedmann, A., *Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes*, Z. Phys. **21** (1924) 326.
- Gamow, G., *The Origin of Elements and the Separation of Galaxies*, Phys. Rev. **74** (1948) 505.
- Gell-Mann, M., *A Schematic Model of Baryons and Mesons*, Phys. Lett. **8** (1964) 214.
- Glashow, S. L., *Partial Symmetries of Weak Interactions*, Nucl. Phys. **22** (1961) 579.
- Gross, D. J. and Wilczek, F., *Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories*, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1343.

- Gross, D. and Migdal, A., *Nonperturbative Two-Dimensional Quantum Gravity*, Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 127.
- Guth, A., *The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems*, Phys. Rev. D **23** (1981) 347.
- Hamada, K. and Sugino, F., *Background-Metric Independent Formulation of 4D Quantum Gravity*, Nucl. Phys. **B553** (1999) 283.
- Hamada, K., *Resummation and Higher Order Renormalization in 4D Quantum Gravity*, Prog. Theor. Phys. **108** (2002) 399.
- Hamada, K. and Horata, S., *Conformal Algebra and Physical States in a Non-critical 3-brane on  $R \times S^3$* , Prog. Theor. Phys. **110** (2003) 1169.
- Hamada, K. and Yukawa, T., *CMB Anisotropies Reveal Quantized Gravity*, Mod. Phys. Lett. A **20** (2005) 509.
- Hamada, K., Horata, S., and Yukawa, T., *Space-time Evolution and CMB Anisotropies from Quantum Gravity*, Phys. Rev. D **74** (2006) 123502.
- Hamada, K., Horata, S., and Yukawa, T., *From Conformal Field Theory Spectra to CMB Multipoles in Quantum Gravity Cosmology*, Phys. Rev. D **81** (2010) 083533.
- Hamada, K., *Background-Free Quantum Gravity based on Conformal Gravity and Conformal Field Theory on  $M^4$* , Phys. Rev. D **85** (2012) 024028.
- Hamada, K., *BRST Analysis of Physical Fields and States for 4D Quantum Gravity on  $R \times S^3$* , Phys. Rev. D **86** (2012) 124006.
- Hamada, K., *Determination of Gravitational Counterterms Near Four Dimensions from Renormalization Group Equations*, Phys. Rev. D **89** (2014) 104063.
- Hamada, K., *Renormalization Group Analysis for Quantum Gravity with a Single Dimensionless Coupling*, Phys. Rev. D **90** (2014) 084038.
- Hamada, K. and Matsuda, M., *Two-Loop Quantum Gravity Corrections to The Cosmological Constant in Landau Gauge*, Phys. Rev. D **93** (2016) 064051.

- Hamada, K. and Matsuda, M., *Physical Cosmological Constant in Asymptotically Background-Free Quantum Gravity*, Phys. Rev. D **96** (2017) 026010.
- Hamada, K., *Localized Massive Excitation of Quantum Gravity as a Dark Particle*, Phys. Rev. D **102** (2020) 026024.
- Hamada, K., *Diffeomorphism Invariance Demands Conformal Anomalies*, Phys. Rev. D **102** (2020) 125005.
- Hamada, K., *Revealing A Trans-Planckian World Solves The Cosmological Constant Problem*, Prog. Theor. Exp. Phys. **2022** (2022) 103E02.
- Harrison, E., *Fluctuations at the Threshold of Classical Cosmology*, Phys. Rev. D **1** (1970) 2726.
- Hathrell, S., *Trace Anomalies and  $\lambda\phi^4$  Theory in Curved Space*, Ann. Phys. **139** (1982) 136.
- Hathrell, S., *Trace Anomalies and QED in Curved Space*, Ann. Phys. **142** (1982) 34.
- Hawking, S. W., *Black hole explosions?*, Nature. **248** (1974) 30.
- Hawking, S. W., *Particle Creation by Black Holes*, Commun. Math. Phys. **43** (1975) 199.
- Hawking, S. W. and Pope, C., *Generalized Spin Structures in Quantum Gravity*, Phys. Lett. **73B** (1978) 42.
- Hawking, S. W., *Path Integral Approach to Quantum Gravity* in General Relativity, an Einstein Centenary Survey, eds. S. Hawking and W. Israel (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1979) p. 746.
- Hilbert, D., *Die Grundlagen der Physik*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen ? Mathematisch-Physikalische Klasse, **3** (1915) 395.
- Horata, S., Egawa, H., and Yukawa, Y., *Clear Evidence of A Continuum Theory of 4D Euclidean Simplicial Quantum Gravity*, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **106** (2002) 971.



- Horata, S., Egawa, H., and Yukawa, T., *Grand Canonical Simulation of 4D Simplicial Quantum Gravity*, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **119** (2003) 921.
- Hubble, E., *A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae*, Proceedings of the National Academy of Sciences. **15** (1929) 168.
- Kajita, T., *et al.*, *Evidence for Oscillation of Atmospheric Neutrinos*, Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 1562.
- Kazakov, V. A., Kostov, I. K., and Migdal, A. A., *Critical Properties of Randomly Triangulated Planar Random Surfaces*, Phys. Lett. **B157** (1985) 295.
- Knizhnik, K., Polyakov, A., and Zamolodchikov, A., *Fractal Structure of 2D-Quantum Gravity*, Mod. Phys. Lett. A **3** (1988) 819.
- Kugo, T. and Ojima, I., *Local Covariant Operator Formalism of Non-Abelian Gauge Theories and Quark Confinement Problem*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **66** (1979) 1.
- Lee, T. D. and Wick, G. C., *Negative Metric and Unitarity of the S-Matrix*, Nucl. Phys. **B9** (1969) 209.
- Lemaître, G., *Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques*, Annales de la Société Scientifique de Bruxelles **A47** (1927) 49.
- Lovelock, D., *The Einstein Tensor and its Generalizations*, J. Math. Phys. **12** (1971) 498.
- Mack, G., *Duality in Quantum Field Theory*, Nucl. Phys. **B118** (1977) 445.
- Mack, G., *All Unitary Ray Representations of the Conformal Group  $SU(2,2)$  with Positive Energy*, Commun. Math. Phys. **55** (1977) 1.
- Maldacena, J., *The Large  $N$  Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity*, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231.

- Nambu, Y., *Quark Model and the Factorization of the Veneziano Amplitude* (talk presented at International Conference on Symmmetries and Quark Models, Wayne University, 1969) Gordon and Breach (1970).
- Osborn H. and Petkou, A., *Implications of conformal invariance in field theories for general dimensions*, Ann. Phys. **231** (1994) 311.
- Osterwalder, K. and Schrader, R., *Axioms for Euclidean Green's Functions I.*, Commun. Math. Phys. **31** (1973) 83.
- Osterwalder, K. and Schrader, R., *Axioms for Euclidean Green's Functions II.*, Commun. Math. Phys. **42** (1975) 281.
- Penzias, A. and Wilson, R., *A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080-Mc/s*, Astrophys. J. **142** (1965) 419.
- Perlmutter, S., *et al.*, *Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 High-Redshift Supernovae*, Astrophys. J. **157** (1999) 565.
- Petkou, A., *Conserved currents, consistency relations and operator product expansions in the conformally invariant  $O(N)$  vector model*, Ann. Phys. **249** (1996) 180.
- Planck, M., *Über irreversible Strahlungsvorgänge*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften **5** (1899) 440.
- Planck Collaboration, Ade, P., *et al.*, Astron. Astrophys., doi:10.1051/0004-6361/201321591 (2014).
- Politzer, H. D., *Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?*, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1346.
- Ponzano, G. and Regge, T., *Semiclassical Limit of Racah Coefficients* in Spectroscopic and group theoretical methods in physics, eds. F. Bloch, S. G. Cohen, A. De-Shalit, S. Sambursky, and I. Talmi (North-Holland Publishing, Amsterdam, 1968) p.1.
- Polyakov, A., *Nonhamiltonian Approach to Conformal Quantum Field Theory*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **66** (1974) 23.
- Polyakov, A., *Quantum Geometry of Bosonic Strings*, Phys. Lett. **103B** (1981) 207.

- Prosperi, G. M., Raciti, M., and Simolo, C., *On the running coupling constant in QCD*, Progress in Particle and Nuclear Physics **58** (2007) 387.
- Regge, T., *General Relativity without Coordinates*, Nuovo Cimento **19** (1961) 558.
- Riegert, R., *A Non-Local Action for the Trace Anomaly*, Phys. Lett. **134B** (1984) 56.
- Riess, A. G., Schmidt, B., *et al.*, *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant*, Astron. J. **116** (1998) 1009.
- Rovelli, C. and Smolin, L., *Knot theory and quantum gravity* Phys. Rev. Lett. **61** (1988) 1155.
- Salam, A., *Weak and Electromagnetic Interactions*, Conf. Proc. **C 680519** (1968) 367.
- Sato, K., *First Order Phase Transition of a Vacuum and Expansion of the Universe*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **195** (1981) 467.
- Schwarzschild, K., *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften **7** (1916) 189.
- Schwinger, J., *On Quantum-Electrodynamics and the Magnetic Moment of the Electron*, Phys. Rev. **73** (1948) 416.
- Schwinger, J., *Quantum Electrodynamics. I. A Covariant Formulation*, Phys. Rev. **74** (1948) 1439.
- Schwinger, J., *On Green's functions of quantized fields I + II*. PNAS. **37** (1951) 452.
- Silk, J., *Cosmic Black-Body Radiation and Galaxy Formation*. Astrophys. J. **151** (1968) 459.
- Starobinsky, A., *A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity*, Phys. Lett. **91B** (1980) 99.
- Stelle, K., *Renormalization of Higher-Derivative Quantum Gravity*, Phys. Rev. **D16** (1977) 953.

- 't Hooft, G., *Renormalizable Lagrangians for Massive Yang-Mills Fields*, Nucl. Phys. **B35** (1971) 167.
- 't Hooft, G. and Veltman, M. J. G., *Regularization and Renormalization of Gauge Fields*, Nucl. Phys. **B44** (1972) 189.
- 't Hooft, G. and Veltman, M. J. G., *One-Loop Divergencies in the Theory of Gravitation*, Ann. Inst. Henri Poincaré **XX** (1974) 69.
- Tomboulis, E., *1/N Expansion and Renormalization in Quantum Gravity*, Phys. Lett. **70B** (1977) 361.
- Tomboulis, E., *Renormalizability and Asymptotic Freedom in Quantum Gravity*, Phys. Lett. **97B** (1980) 77.
- Tomonaga, S., *On a Relativistically Invariant Formulation of the Quantum Theory of Wave Fields*, Prog. Theor. Phys. **1** (1964) 27.
- Turaev, V. and Viro, O., *State Sum Invariants of 3-Manifolds and Quantum 6j-Symbols*, Topology **31** (1992) 865.
- Tyutin, I., Lebedev preprint FIAN, 1975.
- Utiyama, R., *Invariant Theoretical Interpretation of Interaction*, Phys. Rev. **101** (1956) 1597.
- Utiyama, R. and DeWitt, B., *Renormalization of a Classical Gravitational Field Interacting with Quantized Matter Fields*, J. Math. Phys. **3** (1962) 608.
- Veltman, M. J. G., *Quantum Theory of Gravitation* in Methods in Field Theory, Les Houches 1975.
- Weinberg, S., *A Model of Leptons*, Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1264.
- Weinberg, S., *Ultraviolet Divergences in Quantum Theories of Gravitation* in General Relativity, an Einstein Centenary Survey, eds. S. Hawking and W. Israel (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1979) p. 790.
- Weinberg, S., *The Cosmological Constant Problem*, Rev. Mod. Phys. **61** (1989) 1.

- Weingarten, D., *Euclidean Quantum Gravity on a Lattice*, Nucl. Phys. **B210** [FS6] (1982) 229.
- Wess, J. and Zumino, B., *Consequences of Anomalous Ward Identities*, Phys. Lett. **37B** (1971) 95.
- Weyl, H., *Reine Infinitesimalgeometrie*, Mathematische Zeitschrift **2** (1918) 384.
- Wheeler, J. A., *Geometrodynamics and the Issue of the Final State* in Relativity, Groups and Topology, eds B. S. DeWitt and C. M. DeWitt (Gordon and Breach, NY, 1964) p. 317.
- Wick, G. C., *Properties of Bethe-Salpeter Wave Functions*. Phys. Rev. **96** (1954) 1124.
- Wilson, K. G., *Confinement of Quarks*, Phys. Rev. D **10** (1974) 2445.
- Wilson, K. G., *The Renormalization Group: Critical Phenomena and the Kondo Problem*, Rev. of Mod. Phys. **47** (1975) 773.
- Witten, E., *2 + 1-Dimensional Gravity as an Exactly Soluble System*, Nucl. Phys. **B311** (1988) 46.
- Witten, E., *Anti-de Sitter space and holography*, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 253.
- Witten, E., *Anti-De Sitter Space, Thermal Phase Transition, and Confinement in Gauge Theories*, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 505.
- WMAP Collaboration, Spergel, D., *et al.*, *First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters*, Astrophys. J. Suppl. Ser. **148** (2003) 175.
- WMAP9 Collaboration, Bennett, C., *et al.*, *Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Final Maps and Results*, Astrophys. J. Suppl. Ser. **208** (2013) 20.
- Yang, C. N. and Mills, R. L., *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*, Phys. Rev. **96** (1954) 191.
- Zel'dovich, Ya. B., *Cosmological Constant and Elementary Particles*, Pis'ma Zh. Eksp. Theor. Fiz. **6** (1967) 883 [JETP letters **6** (1967) 316].

Zel'dovich, Ya. B., *A Hypothesis, Unifying the Structure and the Entropy of the Universe*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **160** (1972) P1.