

注：20090717 時点においては、未だ個人見解レベルの検討書です。

Particle Accelerator Development Note

一般物理？

～ No.11: 強 d /dt 場の磁場計測：従来技法の実務的計測限界 ～

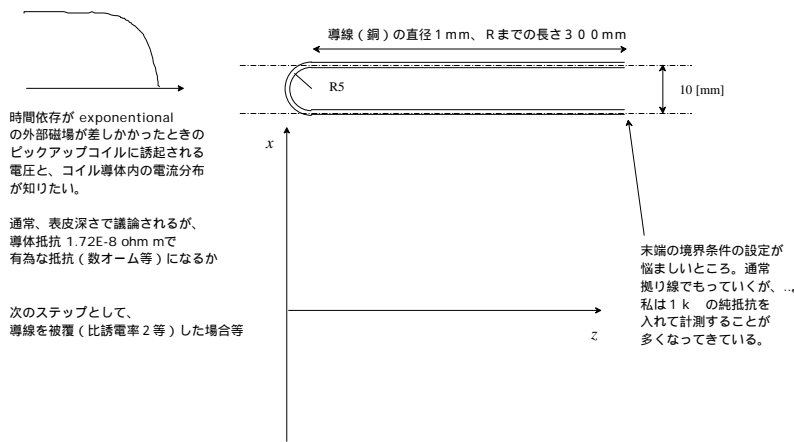
報告者： 中村英滋 (KEK 加速器研究施設)

**要約**

科研費基盤研究 21540310 を推進中であるが、その成果として強 d /dt デジタル磁場の形成が確認された。しかしながら、予想以上の成果となっており、従来技法であるロングピックアップコイルに誘起する電圧が、おそらく 10kV/10mm を越え、ピックアップコイルじたいで放電してしまう現象が確認された (Fig.26 in the paper written by Eiji Nakamura, “Fast-rise high-field multi-turn coil kicker magnet operating in saturation region”, NIM-A (2010), accepted)。当然ながら、このままでは計測できない状況になってしまうため、現状の明確化と新しい技術の導入が必要である (参照:NIM-A)。今後の発展のためにも、性能評価法としては少なくとも3倍程度までは計測できるものを用意したい。まずは、現状を把握するためにモデルを提示する。

計算のための概要 (下図の縮尺は、縦横比が 1 : 1 になってませんのでご注意ください)。ピックアップコイルに出力される誘導電圧がどの程度か？また、導体内部の電流路が表皮深さ程度なのか (また、電流路が局所的になることにより導体抵抗が妨げになる値かどうか)？等、シミュレーションで出せればありがたいです。それぞれのパラメーターは次頁に記載しておきます。

PADN311.MD



PADN311.exp

$$B_y = B_0 \{ 1 - \exp[-(t - z/c)/\tau] \} \quad \text{for } t > 0 \quad \text{and } t - z/c > 0 ; \quad 0 \quad \text{for others.}$$

$$B_0 = 0.3 [T] \tau = 30 [ns]$$

$$\frac{\Phi}{t} \sim \frac{B_0}{\tau} S \sim \frac{0.3}{3E-8} 0.3[m] \times 0.01 [m] = 30 [kV]$$

外場  $B_y$  は x 方向には一様と仮定してください。

上記のように概算で 30kV/cm 以上になってしまい、大気中で放電してもおかしくない値になります。計測手法の開発として位置づけたいので、この3倍、約 100kV/cm を対象にしたいと思ってます。ただ、この値は常識を越えているので、某かの勘違いがあるかもしれません。その検証も含めてシミュレーションをお願いしたいと思っておりま。なお、影像電荷法を用いて、少し真面目に出すと、30kV のとき既に 100kV/cm になってます。(とりあえずここまで)

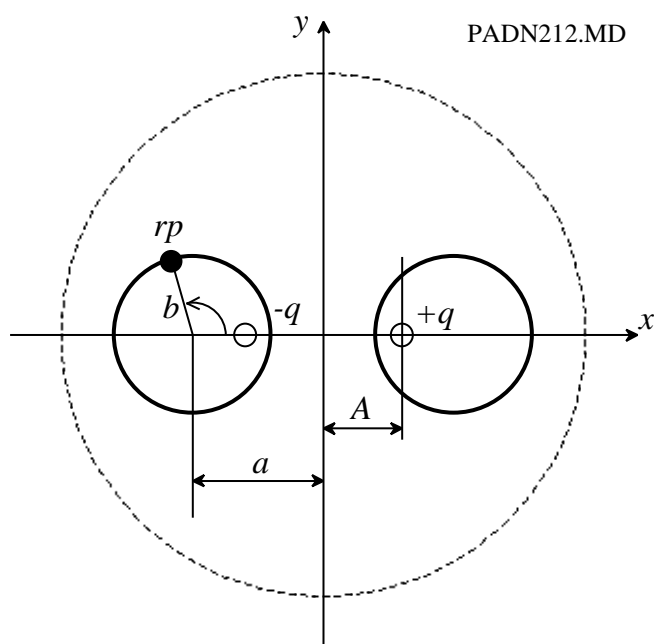
[付録] PADN-212 から抜粋

有限な太さ(半径  $b$ ) を有する平行導線が、中心距離  $2a$  で配置されている場合の静的な電界・電位計算を行う。

境界条件としては、それぞれの導体表面上で同一電位であることと、 $x = 0$  上では、電位がゼロであることである。

多くの一般書に記載されているので、下記には流れを示す。

境界条件を満足させるために、電場を張る電荷を配置する。対象軸( $y$  軸)上でゼロという条件があるため、左右に正負の2つの電荷を配置する。その位置は、 $x$  軸上の等しい距離の位置  $A$  で、この値は、後程、導体表面の境界条件を付与することで決定する。



まずは、無限長平行導体を円筒座標で記述する。点電荷 Q から距離 r 離れた電界と電位は

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D} &= \rho \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
 \iiint dV (\mathbf{E}) &= \iiint dV \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
 \iint dS \mathbf{E} &= \frac{Q}{\epsilon_0} \\
 E_r \cdot 2\pi r l &= \frac{Q}{\epsilon_0} \\
 E_r &= \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 l r} \\
 \phi - \phi_0 &= \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 l} \ln \left[ \frac{r_0}{r} \right] = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 l} \ln \left[ \frac{r_0^2}{r^2} \right]
 \end{aligned}$$

前頁の図の両方の電荷を重畳し、導体表面の電位を求めると、

$$\begin{aligned}
 r_+^2 &= (a + b \cos \theta - A)^2 + (b \sin \theta)^2 \\
 &= (a - A)^2 + b^2 + 2b(a - A) \cos \theta \\
 r_-^2 &= (a + b \cos \theta + A)^2 + (b \sin \theta)^2 \\
 &= (a + A)^2 + b^2 + 2b(a + A) \cos \theta \\
 \phi &= \phi_+ + \phi_- = \frac{+q}{4\pi \epsilon_0 l} \ln \left[ \frac{r_0^2}{r_+^2} \right] + \frac{-q}{4\pi \epsilon_0 l} \ln \left[ \frac{r_0^2}{r_-^2} \right] \\
 &= \frac{q}{4\pi \epsilon_0 l} \ln \left[ \frac{r_-^2}{r_+^2} \right] = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 l} \ln \left[ \frac{(a + A)^2 + b^2 + 2b(a + A) \cos \theta}{(a - A)^2 + b^2 + 2b(a - A) \cos \theta} \right]
 \end{aligned}$$

対数の内部の分子・分母が比例関係にあれば、 $\theta$  によらず一定の解があることになる。これを用いて、導体表面の境界条件を設定する。

$$\begin{aligned}
 \{ (a + A)^2 + b^2 \} (a - A) &= \{ (a - A)^2 + b^2 \} (a + A) \\
 A^2 &= a^2 - b^2
 \end{aligned}$$

となり、前頁の図のような軌跡を表現でき、条件を満足する。このときの電位は、

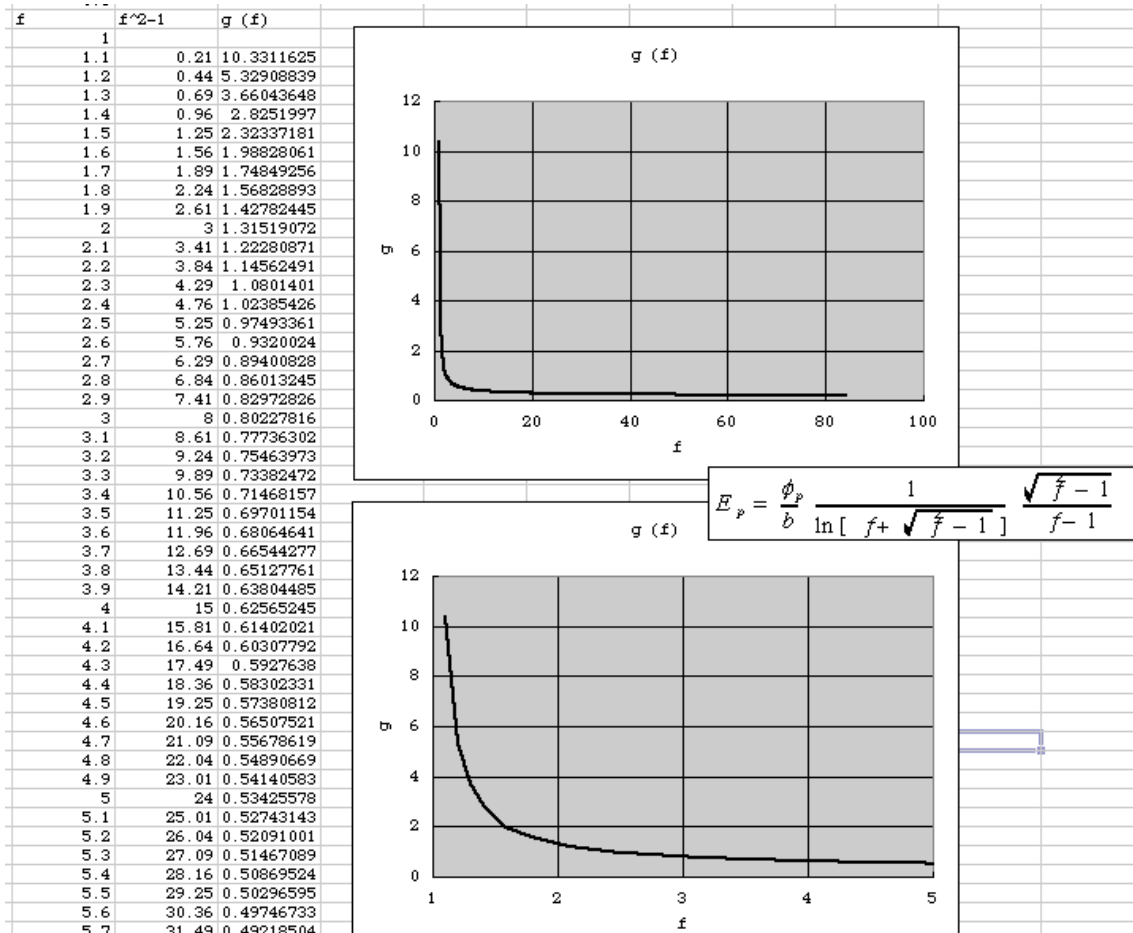
$$\begin{aligned}
 a - A &= \frac{b^2}{a + A} \\
 \phi_p &= \frac{q}{4\pi \epsilon_0 l} \ln \left[ \frac{(a + A)^2 + b^2 + 2b(a + A) \cos \theta}{\left( \frac{b^2}{a + A} \right)^2 + b^2 + 2b \left( \frac{b^2}{a + A} \right) \cos \theta} \right] \\
 &= \frac{q}{4\pi \epsilon_0 l} \ln \left[ \frac{(a + A)^2 + b^2 + 2b(a + A) \cos \theta}{b^2 + (a + A)^2 + 2b(a + A) \cos \theta} \frac{(a + A)^2}{b^2} \right] \\
 &= \frac{q}{4\pi \epsilon_0 l} \ln \left[ \frac{(a + A)^2}{b^2} \right] \\
 \phi_p &= \frac{q}{4\pi \epsilon_0 l} \ln \left[ \frac{(a + \sqrt{a^2 - b^2})^2}{b^2} \right] = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 l} \ln \left[ f + \sqrt{f^2 - 1} \right]; \quad f = \frac{a}{b}
 \end{aligned}$$

このときの電界強度は、最大近接点において、

For  $\theta = 0$ ,

$$\begin{aligned}
 E_p &= \frac{q}{2 \epsilon_0 l r_+} + \frac{q}{2 \epsilon_0 l r_-} \\
 &= \frac{q}{2 \epsilon_0 l} \left\{ \frac{1}{A - (a - b)} + \frac{1}{a - b + A} \right\} \\
 &= \frac{q}{2 \epsilon_0 l} \frac{2A}{A^2 - (a + b)^2} = \frac{q}{2 \epsilon_0 l} \frac{2 \sqrt{a^2 - b^2}}{a^2 - b^2 - (a + b)^2} \\
 &= \frac{q}{2 \epsilon_0 l} \frac{2 \sqrt{a^2 - b^2}}{2b(a - b)} = \frac{q}{2 \epsilon_0 l b} \frac{\sqrt{f - 1}}{f - 1} \\
 E_p &= \frac{\phi_p}{b} \frac{1}{\ln[f + \sqrt{f - 1}]} \frac{\sqrt{f - 1}}{f - 1}
 \end{aligned}$$

フォームファクターの部分は、下図のようになる。



例えば、 $b=0.5\text{mm}$ ,  $a=5.0\text{mm}$  に  $10\text{kV}$  を印加すると、 $E_p = 10 \text{ kV} / 2 / 0.5\text{mm} \times 0.37 = 37 \text{ kV/cm}$  になる。大気中の放電限界を  $35\text{kV/cm}$  にすると、ほぼ放電限界点になる。

[補足 1] 式の妥当性の検証の一例

ちなみに、 $b \gg d$  ( $= a - b$ ) にとると、近似的に平行平板になるはずである。

$$d \sim a - b \text{ and } d \ll b$$

$$f = \frac{a}{b} = \frac{b+d}{b} = 1 + \frac{d}{b} \quad \hat{f} - 1 = \left(1 + \frac{d}{b}\right)^2 - 1 = \left(2 + \frac{d}{b}\right) \frac{d}{b}$$

$$E_p \sim \frac{\phi_p}{b} \frac{1}{\ln\left[1 + \frac{d}{b} + \sqrt{2 \frac{d}{b}}\right]} \frac{\sqrt{2 \frac{d}{b}}}{\frac{d}{b}} \sim \frac{\phi_p}{d} \frac{\sqrt{2 \frac{d}{b}}}{\ln\left[1 + \sqrt{2 \frac{d}{b}}\right]}$$

$$E_p \sim \frac{\phi_p}{d} \frac{\sqrt{2 \frac{d}{b}}}{\sqrt{2 \frac{d}{b}}} = \frac{\phi_p}{d}$$

となり、OK。

[補足2] 特性インピーダンス

平行導体の議論ができたので、折角なので、磁場を求めて、ラインインピーダンスを算出してみる。但し、一点だけ注意が必要である。ここでは、上述の点電荷を基準に線電流を流すことにするが、実際は、この点だけを流れるわけではない。極端な例としてその位置も導体内部でかわりうる。過渡応答、周波数等のパラメータに依存するところであるが、それぞれに応じて対応戴きたい。ここではあくまで一例を示すのみとする。

$$C = \frac{q}{\phi_p} = \frac{2 \epsilon_0 l}{\ln [ f + \sqrt{f^2 - 1} ]} \quad [F]$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2} \left( \frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right)$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I l}{2} \ln \left[ \frac{r_-}{r_+} \right] = \frac{\mu_0 I}{4} \ln \left[ \frac{r_-^2}{r_+^2} \right] = \frac{\mu_0 I l}{2} \ln [ f + \sqrt{f^2 - 1} ]$$

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 l}{2} \ln [ f + \sqrt{f^2 - 1} ]$$

$$\sqrt{CL} = \sqrt{\frac{2 \epsilon_0 l}{\ln [ f + \sqrt{f^2 - 1} ]} \frac{\mu_0 l}{2} \ln [ f + \sqrt{f^2 - 1} ]} = l \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{l}{c}$$

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\frac{\mu_0 l}{2} \ln [ f + \sqrt{f^2 - 1} ]}{\frac{2 \epsilon_0 l}{\ln [ f + \sqrt{f^2 - 1} ]}}} = \frac{1}{2} \ln [ f + \sqrt{f^2 - 1} ] \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\ln [ f + \sqrt{f^2 - 1} ]}{2} Z_{vac.}$$

f = 10 の場合は、約 180 となる。