PADN- 212 (PADN212ImageChargv1.doc)
Begun to write since March 15th, 2010. Reformed on. Revised on.
※注：20090717 時点においては、未だ個人見解レベルの検討書です。

**Particle Accelerator Development Note**

---

物理数学基礎
～ No.12: 影像電荷法の適用例 ～

報告者： 中村英滋 (KEK 加速器研究施設)

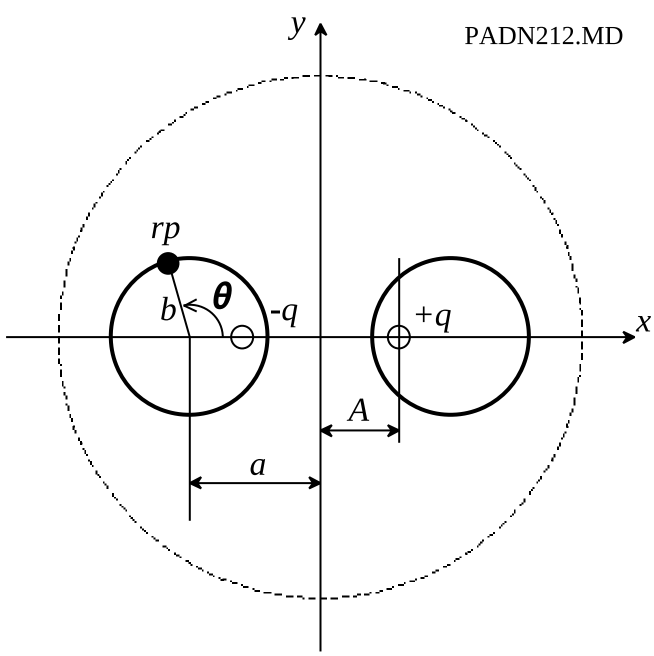
---

***要約***
影像電荷法の適用の代表例を示しておく。

---

有限な太さ（半径ｂ）を有する平行導線が、中心距離 2 a で配置されている場合の静的な電界・電位計算を行う。
境界条件としては、それぞれの導体表面上で同一電位であることと、 x = 0 上では、電位がゼロであることである。
多くの一般書に記載されているので、下記には流れを示す。

境界条件を満足させるために、電場を張る電荷を配置する。対象軸(y 軸)上でゼロという条件があるため、左右に正負の２つの電荷を配置する。その位置は、x 軸上の等しい距離の位置 A で、この値は、後程、導体表面の境界条件を付与することで決定する。



まずは、無限長平行導体を円筒座標で記述する。点電荷Ｑから距離ｒ離れた電界と電位は

$$\boldsymbol{D} = \rho \qquad \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\iiint dV\,(\quad \boldsymbol{E}) = \iiint dV\,\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\iint d\boldsymbol{S}\quad \boldsymbol{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E_r\ 2\pi r l = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E_r = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ \frac{1}{r}$$

$$\phi - \phi_0 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ \ln\left[\frac{r_0}{r}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 l}\ \ln\left[\frac{r_0^2}{r^2}\right]$$

前頁の図の両方の電荷を重畳し、導体表面の電位を求めると、

$$r_+^2 = (a + b\cos\theta - A)^2 + (b\sin\theta)^2$$
$$= (a - A)^2 + b^2 + 2b(a - A)\cos\theta$$
$$r_-^2 = (a + b\cos\theta + A)^2 + (b\sin\theta)^2$$
$$= (a + A)^2 + b^2 + 2b(a + A)\cos\theta$$

$$\phi = \phi_+ + \phi_- = \frac{+q}{4\pi\varepsilon_0 l}\ \ln\left[\frac{r_0^2}{r_+^2}\right] + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 l}\ \ln\left[\frac{r_0^2}{r_-^2}\right]$$
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\ \ln\left[\frac{r_-^2}{r_+^2}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\ \ln\left[\frac{(a + A)^2 + b^2 + 2b(a + A)\cos\theta}{(a - A)^2 + b^2 + 2b(a - A)\cos\theta}\right]$$

対数の内部の分子・分母が比例関係にあれば、θによらず一定の解があることになる。これを用いて、導体表面の境界条件を設定する。

$$\{(a + A)^2 + b^2\}(a - A) = \{(a - A)^2 + b^2\}(a + A)$$
$$A^2 = a^2 - b^2$$

となり、前頁の図のような軌跡を表現でき、条件を満足する。このときの電位は、

$$a - A = \frac{b^2}{a + A}$$

$$\phi_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\ \ln\left[\frac{(a + A)^2 + b^2 + 2b(a + A)\cos\theta}{\left(\frac{b^2}{a + A}\right)^2 + b^2 + 2b\left(\frac{b^2}{a + A}\right)\cos\theta}\right]$$
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\ \ln\left[\frac{(a + A)^2 + b^2 + 2b(a + A)\cos\theta}{b^2 + (a + A)^2 + 2b(a + A)\cos\theta}\ \frac{(a + A)^2}{b^2}\right]$$
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\ \ln\left[\frac{(a + A)^2}{b^2}\right]$$

$$\phi_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\ \ln\left[\frac{\left(a + \sqrt{a^2 - b^2}\right)^2}{b^2}\right] = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ \ln\left[f + \sqrt{f^2 - 1}\right]; \quad f \equiv \frac{a}{b}$$

このときの電界強度は、最大近接点において、

*For* $\theta = 0$ ,

$$E_p = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\frac{1}{r_+} + \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\frac{1}{r_-}$$

$$= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\left\{\frac{1}{A-(a-b)} + \frac{1}{a-b+A}\right\}$$

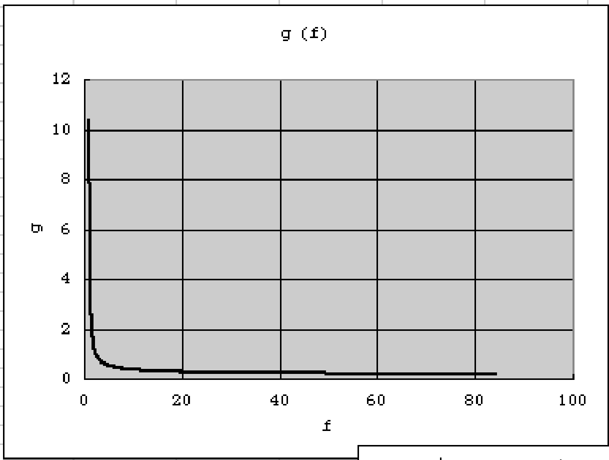
$$= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\frac{2A}{A^2-(a+b)^2} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{a^2-b^2-(a+b)^2}$$

$$= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{2b(a-b)} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\frac{1}{b}\frac{\sqrt{f^2-1}}{f-1}$$

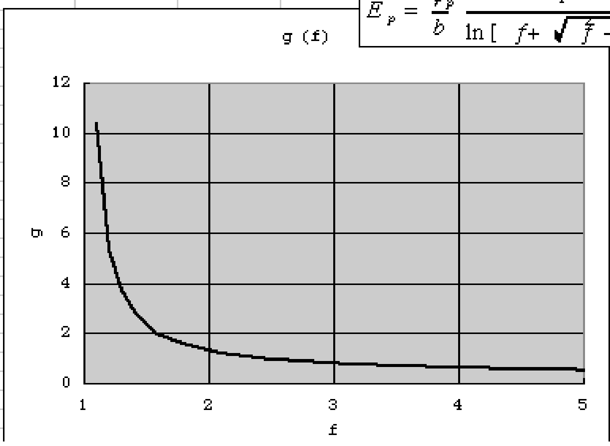
$$E_p = \frac{\phi_p}{b}\frac{1}{\ln[f+\sqrt{f^2-1}]}\frac{\sqrt{f^2-1}}{f-1}$$

フォームファクターの部分は、下図のようになる。

| f | f^2-1 | g (f) |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 1.1 | 0.21 | 10.3311625 |
| 1.2 | 0.44 | 5.32908839 |
| 1.3 | 0.69 | 3.66043648 |
| 1.4 | 0.96 | 2.8251997 |
| 1.5 | 1.25 | 2.32337181 |
| 1.6 | 1.56 | 1.98828061 |
| 1.7 | 1.89 | 1.74849256 |
| 1.8 | 2.24 | 1.56828893 |
| 1.9 | 2.61 | 1.42782445 |
| 2 | 3 | 1.31519072 |
| 2.1 | 3.41 | 1.22280871 |
| 2.2 | 3.84 | 1.14562491 |
| 2.3 | 4.29 | 1.0801401 |
| 2.4 | 4.76 | 1.02385426 |
| 2.5 | 5.25 | 0.97493361 |
| 2.6 | 5.76 | 0.9320024 |
| 2.7 | 6.29 | 0.89400828 |
| 2.8 | 6.84 | 0.86013245 |
| 2.9 | 7.41 | 0.82972826 |
| 3 | 8 | 0.80227816 |
| 3.1 | 8.61 | 0.77736302 |
| 3.2 | 9.24 | 0.75463973 |
| 3.3 | 9.89 | 0.73382472 |
| 3.4 | 10.56 | 0.71468157 |
| 3.5 | 11.25 | 0.69701154 |
| 3.6 | 11.96 | 0.68064641 |
| 3.7 | 12.69 | 0.66544277 |
| 3.8 | 13.44 | 0.65127761 |
| 3.9 | 14.21 | 0.63804485 |
| 4 | 15 | 0.62565245 |
| 4.1 | 15.81 | 0.61402021 |
| 4.2 | 16.64 | 0.60307792 |
| 4.3 | 17.49 | 0.5927638 |
| 4.4 | 18.36 | 0.58302331 |
| 4.5 | 19.25 | 0.57380812 |
| 4.6 | 20.16 | 0.56507521 |
| 4.7 | 21.09 | 0.55678619 |
| 4.8 | 22.04 | 0.54890669 |
| 4.9 | 23.01 | 0.54140583 |
| 5 | 24 | 0.53425578 |
| 5.1 | 25.01 | 0.52743143 |
| 5.2 | 26.04 | 0.52091001 |
| 5.3 | 27.09 | 0.51467089 |
| 5.4 | 28.16 | 0.50869524 |
| 5.5 | 29.25 | 0.50296595 |
| 5.6 | 30.36 | 0.49746733 |
| 5.7 | 31.49 | 0.49218504 |




$$E_p = \frac{\phi_p}{b}\frac{1}{\ln[f+\sqrt{f^2-1}]}\frac{\sqrt{f^2-1}}{f-1}$$




例えば、b=0.5mm,a=5.0mm に 10kV を印加すると、Ep = 10 kV / 2 / 0.5mm x 0.37 = 37 kV/cm になる。大気中の放電限界を 35kV/cm にすると、ほぼ放電限界点になる。

[補足１]　式の妥当性の検証の一例

　ちなみに、ｂ >> ｄ（＝ａ－ｂ）にとると、近似的に平行平板になるはずである。

$d \equiv a - b \quad and \quad d << b$

$$f = \frac{a}{b} = \frac{b+d}{b} = 1 + \frac{d}{b} \qquad f^2 - 1 = \left(1 + \frac{d}{b}\right)^2 - 1 = \left(2 + \frac{d}{b}\right)\frac{d}{b}$$

$$E_p \sim \frac{\phi_p}{b} \frac{1}{\ln\left[1 + \frac{d}{b} + \sqrt{2\frac{d}{b}}\right]} \frac{\sqrt{2\frac{d}{b}}}{\frac{d}{b}} \sim \frac{\phi_p}{d} \frac{\sqrt{2\frac{d}{b}}}{\ln\left[1 + \sqrt{2\frac{d}{b}}\right]}$$

$$E_p \sim \frac{\phi_p}{d} \frac{\sqrt{2\frac{d}{b}}}{\sqrt{2\frac{d}{b}}} = \frac{\phi_p}{d}$$

となり、ＯＫ。

［補足２］　特性インピーダンス

　平行導体の議論ができたので、折角なので、磁場を求めて、ラインインピーダンスを算出してみる。但し、一点だけ注意が必要である。ここでは、上述の点電荷を基準に線電流を流すことにするが、実際は、この点だけを流れるわけではない。極端な例としてその位置も導体内部でかわりうる。過渡応答、周波数等のパラメーターに依存するところであるが、それぞれに応じて対応戴きたい。ここではあくまで一例を示すのみとする。

$$C = \frac{q}{\phi_p} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln[f+\sqrt{f^2-1}]} \quad [\mathrm{F}]$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{r_+}+\frac{1}{r_-}\right)$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi}\ln\left[\frac{r_-}{r_+}\right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[\frac{r_-^2}{r_+^2}\right] = \frac{\mu_0 I l}{2\pi}\ln[f+\sqrt{f^2-1}]$$

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln[f+\sqrt{f^2-1}]$$

$$\sqrt{CL} = \sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln[f+\sqrt{f^2-1}]}\frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln[f+\sqrt{f^2-1}]} = l\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = \frac{l}{c}$$

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln[f+\sqrt{f^2-1}]}{\frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln[f+\sqrt{f^2-1}]}}} = \frac{1}{2\pi}\ln[f+\sqrt{f^2-1}]\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\ln[f+\sqrt{f^2-1}]}{2\pi} Z_{vac.}$$

f ＝ 10 の場合は、約 180 Ωとなる。