※注：20090717 時点においては、未だ個人見解レベルの検討書です。

Particle　Accelerator　Development　Note

物理数学基礎
～　No.05: 曲線座標系　～

報告者：　中村英滋（KEK 加速器研究施設）

要約
(x,y,z)，極座標等、いわゆる直交座標系を用いるのが一般的であるが、若干複雑な体系になると、むしろ曲線座標系（非直交座標系）を用いる方が理解し易い場合がある。ここでは、より一般的な曲線座標による一般式を導出する。

(x, y, z) <-> (u, v, w) の座標変換を考える。相互に一意に決まるパラメーターであるとして、下記の通りの記述となる。

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(x,\ y,\ z) = \boldsymbol{R}(u_1,\ u_2,\ u_3)$$

$$x = x(u_1, u_2, u_3)\ ;\quad y = y(u_1, u_2, u_3)\ ;\quad z = z(u_1, u_2, u_3)$$
$$u_1 = u_1(x,\ y,\ z)\ ;\quad u_2 = u_2(x,\ y,\ z)\ ;\quad u_3 = u_3(x,\ y,\ z)$$

まず、それぞれに基準となる方向ベクトルを定める。基の座標系（x, y, z）において、微少変化を与えたときの新しい座標の変化量が、そのパラメーターの方向ベクトルとみなせる。直線座標系においては、方向ベクトルの内積（・）が、同一のパラメーターでは１、異種のパラメーターでは０となる。他方、非直線座標系においては必ずしも０、１になるとは限らず、殆どのケースにおいて、関数を媒介として結合するため、「平行（非平行）」＝「内積１（０）」とはならなず（例：第１軸 x = 0[y 軸]，第２軸 x + y = 0)、一般的な標識が必要となる。その際、考え方をかえて、「平行」＝「直交成分は無い」とすれば厳格な規程となりうる。この場合、方向ベクトルと座標の変化量の外積（×）がゼロになるように定義すればよいことになる。

新しい座標系の変化量と、それぞれの方向ベクトルを

$$u_1\ ,\quad u_2\ ,\quad u_3\ ;\quad \boldsymbol{q}_1\ ,\quad \boldsymbol{q}_2\ ,\quad \boldsymbol{q}_3$$

とすると、直交座標系と同じように、

$$u_i \quad \boldsymbol{q}_j = \delta_{i\ j}$$

の関係で定義したい。この一般解を求めるが、上述のように $\boldsymbol{q}_i = \nabla u_i$ には限らない。つまり、基準ベクトルとして、∇u_i の３つを選んで、

$$\boldsymbol{q}_j = q_{j1} \quad u_1 + q_{j2} \quad u_2 + q_{j3} \quad u_3$$

としてもそれぞれの係数 q_i は一意には決められない。そこで３つの基準ベクトルとして、それぞれの外積項 $\nabla u_i \times \nabla u_j$ を用いる。当たり前ではあるが、∇u_i はそれぞれ平行ではないように選ぶ。従って、２種類のベクトルの外積は、他の３つの組合せとも平行ではない。

$$(\quad u_1 \times \quad u_2),(\quad u_2 \times \quad u_3),(\quad u_3 \times \quad u_1)$$

これらを基準ベクトルとして、下記のように記述する。

$$\boldsymbol{q}_j = q^1_j \quad u_2 \times \quad u_3 + q^2_j \quad u_3 \times \quad u_1 + q^3_j \quad u_1 \times \quad u_2$$

これを解くべき方程式に代入すると、

$$u_i \quad (q^1_j \quad u_2 \times \quad u_3 + q^2_j \quad u_3 \times \quad u_1 + q^3_j \quad u_1 \times \quad u_2) = \delta_{i\ j}$$

まず、$\boldsymbol{q}_1$ を求める。

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 \quad (q_1^1 \quad u_2 \times \quad u_3 + q_1^2 \quad u_3 \times \quad u_1 + q_1^3 \quad u_1 \times \quad u_2) = \delta_{1\ 1} = 1 \\ u_2 \quad (q_1^1 \quad u_2 \times \quad u_3 + q_1^2 \quad u_3 \times \quad u_1 + q_1^3 \quad u_1 \times \quad u_2) = \delta_{2\ 1} = 0 \\ u_3 \quad (q_1^1 \quad u_2 \times \quad u_3 + q_1^2 \quad u_3 \times \quad u_1 + q_1^3 \quad u_1 \times \quad u_2) = \delta_{3\ 1} = 0 \end{array} \right.$$

となる。整理すると、

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1^1 \quad u_1 \quad (\quad u_2 \times \quad u_3) = 1 \\ q_1^2 \quad u_2 \quad (\quad u_3 \times \quad u_1) = 0 \\ q_1^3 \quad u_3 \quad (\quad u_1 \times \quad u_2) = 0 \end{array} \right.$$

３つのベクトル内積項は、順番を入れ替えることが可能で、全て有為な同じ値になり、この値は良く知られるヤコビアン J の逆数となる。従って、各係数は、下記のようにシンプルな形となり、

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1^1 = J \\ q_1^2 = 0 \\ q_1^3 = 0 \end{array} \right.$$

従って、

$$\boldsymbol{q}_1 = J \quad u_2 \times \quad u_3 = \frac{u_2 \times \quad u_3}{u_1 \quad (\quad u_2 \times \quad u_3)}$$

同様に、

$$\boldsymbol{q}_i = J \quad u_j \times \quad u_k = \frac{u_j \times \quad u_k}{u_i \quad (\quad u_j \times \quad u_k)}$$

と、より一般的な形式で表現できることになる。

同様に、基礎物理ベクトル量 A を

$$\boldsymbol{A} = A^1 \quad u_1 + A^2 \quad u_2 + A^3 \quad u_3$$

とした場合、それぞれの係数(成分)は、

$$A^i = \frac{\boldsymbol{A} \quad u_j \times \quad u_k}{u_i \quad (\quad u_j \times \quad u_k)}$$

で求められることになる。なお、繰返しになるが、直交座標系では、

$$A_i = \frac{\boldsymbol{A} \quad u_i}{\left| \quad u_i \right|}$$

も成立し、上記と同じ値になるが、非直交座標系においては、これは必ずしも成り立たない。ゆえに、ベクトル外積を用いた表記をとるのが、より一般的な形となる。