低次元における Large-N ゲージ理論の熱力学とその応用

JHEP 1002:034, 2010 Gautam Mandal, Manavendra Mahato, T. M.
arXiv:1103.1558 Gautam Mandal, T. M.

Takeshi Morita (クレタ大学)

目標

Large N pure YM 理論の confinement/deconfinement 相転移が解析的に解ける状況を探し、その性質を理解する。

動機

- pure YM 理論はもっとも基本的な場の理論の一つ
- Holography の検証、ゲージ理論を用いた重力の解析
- Lattice との比較

結果

- D+2 次元トーラス上の YM は D 次元トーラスの体積が十分小さければ 1/D 展開である程度解ける。(D≧2)
- この場合の相図や相転移の次数を求めた。
- non-supersymmetric なゲージ理論に対する holography を用いた解析は多少問題がある。

以下、研究の詳細

・D+2 次元トーラス上の SU(N)YM 理論の性質

$$S=\int_0^\beta dt\left(\prod_{M=1}^{D+1}\int_0^{L_M}dx^M\right)\frac{1}{4g_{D+2}^2}TrF_{\mu\nu}^2 \qquad x_\mu=x_\mu+L_\mu \quad t=t+\beta$$

有限体積なので通常の相転移は起こらないが、Large N 極限で Large N 相転移が起こる。

◆ オーダーパラメータ : D+2 個の Wilson loop

$$W_\mu=\frac{1}{N}TrP\left(\exp\left[i\int_0^{L_\mu}A_\mu dx^\mu\right]\right) \sim \exp\left(-S_{q,\mu}\right) \qquad \mu=0,..,D-1$$

クオーク 1 個がトーラスのサイクルに巻き付くエネルギー

c.f.) confinement/deconfinement 相転移

$\beta\gg1$ (低温) → $W_0=0$ (confinement 相、Z_N 対称)

$\beta\ll1$ (高温) → $W_0\neq0$ (deconfinement 相、Z_N 対称性の破れ)

◆ Z_N^{D+2} 対称性 : $W_\mu\to h_\mu W_\mu$ $\quad(h_\mu\in Z_N$: center)

W_μ がゼロの場合 Z_N 対称性があり、ノンゼロの場合 Z_N 対称性が破れる。

(一般化された confinement/deconfinement 相転移)

→ 少なくとも 2^{D+2} 個の相がある。

・small D 次元トーラス limit (KK reduction)

→ 2 次元トーラス上の模型に reduction でき、解析が簡単化

$$S=\int_0^\beta dt\int_0^L dx\,Tr\left(\frac{1}{2g^2}F_{01}^2+\sum_{I=1}^{D}\frac{1}{2}\left(D_\mu Y^I\right)^2+\frac{m^2}{2}(Y^I)^2-\sum_{I,J}\frac{g'^2}{4}[Y^I,Y^J][Y^I,Y^J]\right)$$

- Y^I は A_{I+1} の KK zero mode
- KK mode からの loop 補正で Y^I は質量 $m^2\sim\lambda$ を得る。
- 2 次元 gauge coupling g と Y^I の相互作用結合定数 g' は量子効果で異なる。
- $W_{I+1}\neq0(I=1,...,D)$ の相にいる。
- $W_0\equiv TrU,\ W_1\equiv TrV$ で特徴付けられる少なくとも 4 つの相が存在する。

・1/D 展開

Nucl. Phys. B 545 543 1999 Hotta, Nishimura, Tsuchiya
JHEP 1002:034, 2010 Mandal, Mahato, T. M.

$$g,g'\to0,\quad N,D\to\infty\quad s.t.\quad \tilde\lambda\equiv g^2DN,\quad \tilde\lambda'\equiv g'^2DN\quad \text{fixed}$$

この極限の下で、上の 2 次元ゲージ理論を解析すると以下のようなことがわかる。

- $\langle TrY^IY^I\rangle=\frac{N}{2g'^2}\triangle_0^2$ で特徴付けられる非摂動的な真空が存在する。
- この真空では Y^I は質量 $m^2+\Delta_0^2$ を持つ。Y^I の相互作用は 1/D で suppress される。
  (1/D 展開のリーディングでは Y^I をほぼ自由場として扱うことができる。)
- Y^I を積分し A_μ の有効理論を求めることができる。
- 大きい D の場合には数値解析と定量的に非常によい一致。
  D=2 でも定性的な一致が見られる。

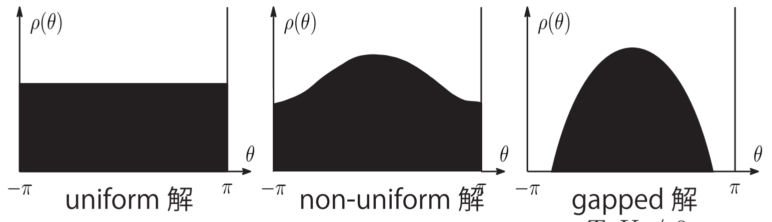
・ゲージ場の有効理論 1 (大きい L)

- 1/D 展開を使うことで Y^I を積分しゲージ場に対する有効理論を求めることができる。
- g は小さいとしている。
- L が大きいところ ($TrV=0$) では次のような有効理論が得られる。

$$S/DN^2=\int_0^L dx\left[\frac{1}{2N}Tr\left(|\partial_xU|^2\right)-\frac{\xi}{N^2}\left|TrU\right|^2\right] \qquad \xi=\sqrt{\frac{\sqrt{\Delta_0^2+m^2}}{2\pi\tilde\lambda^2\beta^3}}e^{-\beta\sqrt{\Delta_0^2+m^2}}$$

$$U=\exp\left[i\int_0^\beta A_0dt\right] \qquad \left(V=\exp\left[i\int_0^L A_1dx\right]\right)$$

- この作用は次のような A_0 の固有値分布で特徴付けられる 3 つの型の解が存在する。



uniform 解 $TrU=0$ ｜ non-uniform 解 $TrU\neq0$ ｜ gapped 解 $TrU\neq0$

(Semenoff, Tirkkonen, Zarembo (1996))

- 低温では uniform 解が安定、高温では gapped 解が安定。(non-uniform 解は不安定)
- 温度を変えるとこれらの解の間で一次相転移が起きる。(下記の相図の直線 B2C)

・ゲージ場の有効理論 2 (小さい L)

- L が十分小さければ ($TrV\neq0$) さらに L 方向を KK reduction できる。
- 次のような有効理論が得られる。

$$S_{eff}/DN^2=a\left|\frac{1}{N}TrU\right|^2+b\left|\frac{1}{N}TrU\right|^4+\cdots \qquad a=\left(\frac{1}{D}-e^{-\beta\sqrt{\Delta_0^2+m^2}}\right)\quad b=\frac{\beta\tilde\lambda_1}{3\Delta_0^2+2m^2}e^{-2\beta\sqrt{\Delta_0^2+m^2}}$$

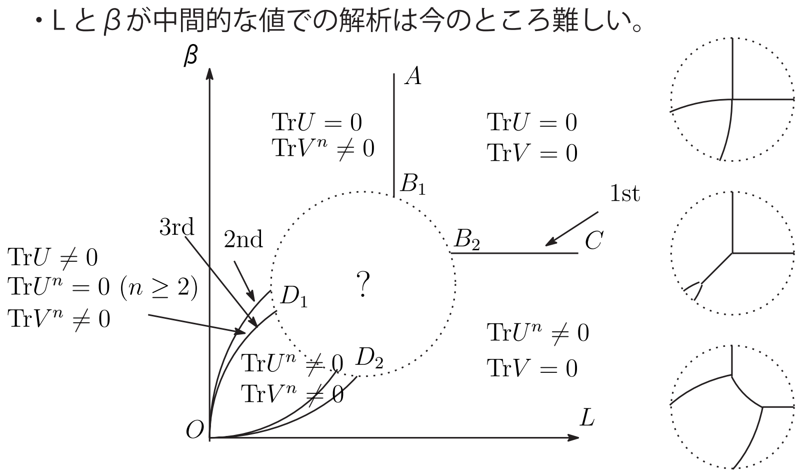
$$\tilde\lambda_1=(g')^2N(D+1)/L$$

- 低温では uniform 解、高温では gapped 解が安定。これらの解の間の狭い領域で non-uniform 解 ($TrU\neq0,\ TrU^n=0(n\geq2)$) が安定に存在する。
- uniform と non-uniform 解の間は 2 次、non-uniform と gapped 解の間は 3 次相転移

(Aharony, Marsano, Minwalla, Papadodimas, Raamsdonk (2004)) (下記の相図の曲線 OD1)

・2 次元ゲージ理論の相図

- 上の 2 つの結果と β と L を入れ替える対称性を用いると次のような相図が得られる。
- L と β が中間的な値での解析は今のところ難しい。



Lattice と Holography はこのパターンを示唆

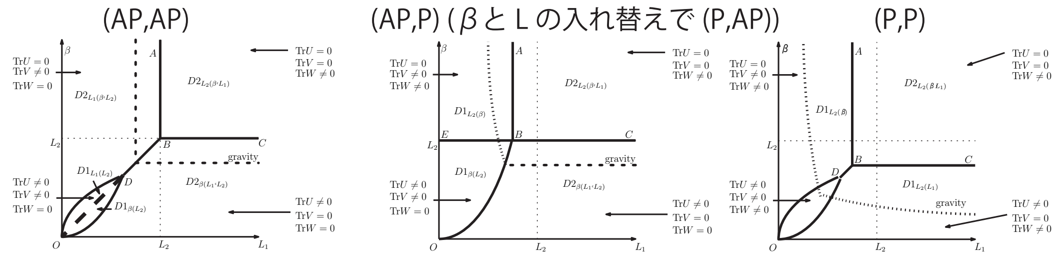
・Holography による解析とその問題

標準的な non-supersymmetric な理論に対する Holography の構成を次のように行う。

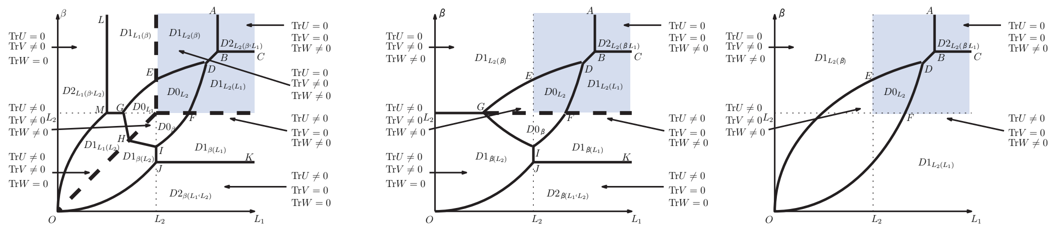
- N 枚の D2 ブレーンを 3 次元トーラス上 $(\beta,L_1=L,L_2)$ で考える。
- L_2 方向の fermion に anti-periodic 境界条件 (AP) を課し、超対称性を壊す。
- $L_2\to0$ の下で今考えている 2 次元ゲージ理論 (D=8) が得られる。
- 与えられた境界条件で重力解を探し、それらの間の自由エネルギーを比較し相図を求める。(オーダーパラメータ : TrU,TrV,TrW) $\quad\left(W=\exp\left[i\int_0^{L_2}A_2dx\right]\right)$
- しかし $L_2\to0$ をとると弦の励起が重要になり超重力解が破綻。
  → L_2 を有限に残し L_2 を Lattice における格子間隔のようなものだと思う。

問題点 : fermion の β、L 方向への境界条件 (anti-periodic (AP) or periodic (P)) の取り方に相図が依存してしまう。(4 通りの予言 !?) → ゲージ理論に対する予言ができない。

(AP,AP) ｜ (AP,P) (β と L の入れ替えで (P,AP)) ｜ (P,P)



重力解が $L_2\to0$ でも形式的に有効だとすると $L_1\geq L_2,\ \beta\geq L_2$ の領域で 4 つの予言が収束しゲージ理論の解析と consistent な相図が得られる。(超弦理論の無矛盾性を示唆 ?)



$L_2\to0$ における相図 (それぞれの相図の境界条件は上図と同じ)