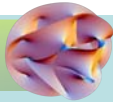


Open Mirror Symmetry for Pfaffian Calabi-Yau 3-folds

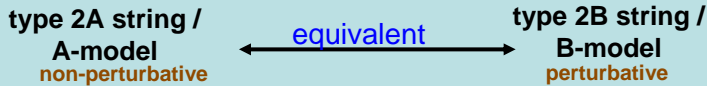
清水将英 (Masahide Shimizu), 北海道大学D3

Open mirror symmetry



CY M \leftrightarrow mirror CY W

A-brane(sLG submfld.) L \leftrightarrow B-brane(hol. submfld.) C



Open mirror symmetry

CY Mとその中のspecial Lagrangian submfld Lの組は, mirror CY Wと、その中のmirror braneであるholomorphic submfld Cの組と、「等価」である。

(物理) type2A stringをCY+SUSY cycle(sLG)でコンパクト化して得られる低エネルギー4d N=1 超対称有効場の理論の、非摂動的効果を含む有効超ポテンシャルを, mirror B-sideの摂動計算から導出できる。

(数学) あるCY内のsLGに境界を持つ正則円盤(genus 0 / tree level)の数を、別のmirror CYの古典的な幾何学の計算の結果から予言できる。

A-side ディスク分配関数

worldsheet instanton

disk area: u
 \Rightarrow deformation parameter of A-brane

A-brane $L(u)$

CY_3

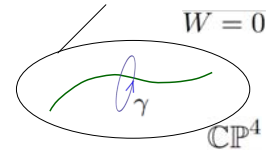
$$W(t, u) = F_{\text{disk}}(t, u) = \sum_{d,e} \tilde{n}_{d,e} q^d y^e = \sum_{d,e} \sum_{k \geq 1} \frac{n_{d,e}}{k^2} q^{kd} y^{ke}$$

$q = e^{2\pi i t}$
 $y = e^{2\pi i u}$

[Ooguri-Vafa 00], counting degeneracy of BPS states

B-side 相対周期

compact CY : toric 多様体の中の超曲面など



正則3形式 [Griffiths-Dwork]

$$\Omega = \int_{\gamma} \frac{1}{W} \Delta \quad \Delta = \sum_{i=1}^5 (-1)^i x_i dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_5$$

(相対)周期: この正則3形式の、3-チェーン上の積分。ただし、3-チェーンの境界がbraneである。

\Rightarrow この相対周期は(拡張)Picard-Fuchs方程式の解として得られる。背後にはN=1 special幾何学がある。[Lerche 03]

compact case

•toricの手法が使えなかった。(CYを(p,q)-webで表せない) c.f. non-compact (toric CY) [Aganagic-Vafa 00], topological vertex [Aganagic-Klemm-Marino-Vafa 05],

•open moduli (brane moduli) が(genericには)離散的になり、典型的にはZ_2-vacuaの構造を持つ。BPS statesは4次元でdomainwallとなり(D6-D4 systems)、このBPS domainwallの tension (両真空を表すbraneの超ポテンシャルの差)が4次元有効場の理論の超ポテンシャルとして現れる。

•典型的にはB-braneはholomorphic curveで、BPS domainwallの張力は次の3-chain上の正則3形式の積分で表される。

$$T = W(C_+) - W(C_-) = \int_{\Gamma, \partial\Gamma=C_+-C_-} \Omega$$

Open mirror symmetry for compact CY (06~)

Walcherはcompact CYのopen mirror symmetryの最初の一步を踏み出した。B-sideの超ポテンシャル(BPS domainwallの張力)は、非斉次Picard-Fuchs方程式の解で表される。[Walcher 06][Morrison-Walcher 07]

$$\mathcal{L}T_B(z) = \frac{15}{16\pi^2} \sqrt{z} \quad \mathcal{L} = \theta^4 - 5z(\theta + 1)(\theta + 2)(\theta + 3)(\theta + 4)$$

この解をMirror写像で写しA-modelの超ポテンシャルに読み替えれば、CYの中のspecial Lagrangian submanifoldに境界を持つ正則円盤数の予言を与える。これは後にlocalizationの直接計算で数学的にも厳密に確認された。[Pandharipande-Solomon-Walcher 06]

$$T_B(z) = T_A(t) = \sum_{d:\text{odd}} N_d^0 q^{d/2} = \sum_{d:\text{odd}, k:\text{odd}} \frac{2n_{d,k}^{(0,\text{real})}}{k^2} q^{dk/2} \quad (q = e^{2\pi i t})$$

d	number of disks n_d
1	30
3	1530
5	1088250
7	975996780
9	1073087762700
11	1329027103924410
13	1781966623841748930
15	2528247216911976589500
17	374205669225835644651980
19	5723452081398475208950800270

その後、様々な超曲面、完全交差の、moduliが1~3の場合について続々とmirror計算が行われた。[Krefl-Walcher 08][Knapp-Scheidegger 08] 更なる理論的進展としては、off-shellのopen moduliという描像の導入で、non-compactな場合と同様な定式化が可能になり、N=1 special geometryによる統一的記述が可能になった。[Jockers-Sorouch 08] しかし、これまで計算例は全てmoduliの少ないCYの範疇に留まっていた。

Direct Integration via the analytic continuation

我々は周期 / 相対周期積分の計算に対し、直接積分の方法を開発した。これは非常にシンプルかつ直感的な方法で、PF方程式の解として求めていた周期積分を、うまく局所座標を取ることで直接積分して得るというものである。

実際この方法により既に計算された様々な超曲面/完全交差の結果を容易に再現できる。[Fuji-Nakayama-M.S.-Suzuki, 10]

更に、これまで解析されていない新しいCY (pfaffian CY) の正則円盤数の予言についても可能だとわかった。[M.S.-Suzuki, 10]

局所座標の取り方は非常にシンプルである。B-braneは典型的には二つの超曲面で表されるが、まずその上に局所座標を導入し、その後、超曲面で切った後のCYの定義方程式に残る項の比として残りの局所座標を導入する。

Quinticでの取り方は以下の通り。

$$\{x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 - 5\psi x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 = 0\} \subset CP^4 / (Z_5^2)$$

$$x_1 + x_2 = 0 \quad x_3 + x_4 = 0$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, x_2 = T \\ x_3 &= Y^a \zeta, x_4 = Y^a \zeta^{-1} \\ \frac{x_5^4}{x_1 x_2 x_3 x_4} &= 5\psi w \end{aligned}$$

このように局所座標を取って計算すると、各変数について積分が分離する!!

Application to Pfaffian CYs (M.S. and H.Suzuki, 10)

Pfaffian CYは大域的には完全交差として表せず局所的にのみ表せる多様体で、局所的な定義方程式や貼り合わせ方の情報が1つの反対称行列で表されている。

local patch

CP^6 (the ambient space in which CY3 is defined)

$P_{ijk} \neq 0$

$P_{abc} \neq 0$

CY3-fold

この新しいクラスのCYにも直接積分の方法は威力を発揮する。周期積分は以下。

$$\int_{\{3\text{-cycle or chain}\}} \Omega^{3,0} = \frac{|G|}{(2\pi i)^6} \int_{T_\epsilon(X \cap \{3\text{-cycle or chain}\})} \frac{P_{\nu_0 \nu_1 \nu_2}}{P_{\nu_0} P_{\nu_1} P_{\nu_2}} \omega_0$$

$P_1 = P_2 = P_3 = 0$
 $P_0 = P_0 = P_0 = 0$

新しい局所座標で書き換え、moduliについて展開すると、周期積分は各変数について分離した形になる。全ての変数について閉経路で極を拾うと基本周期が得られる。ある1つの変数について閉経路を線積分にする(その両端点がプレーンの位置を解釈される)と、domainwallの張力を得る。

ミラーの通常の議論に従いミラー写像でA-modelの量へ移行し、正則円盤の数を読み取ると、整数を予言する!! この結果は、非完全交差に対する開ミラー対称性の解析や正則円盤の数え上げとしての最初の例である。

Moduli space of Pfaffian CYs

A-side

B-side

mirror map

mirror map

large moduli limit

small moduli limit

totally different

$$\Pi_{\text{large}} = \int \frac{C}{A - z^{1/2} B} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n/2} \int \frac{B^n C}{A^{n+1}}$$

$$\Pi_{\text{small}} = \int \frac{C}{A - z^{1/2} B} = -z^{-1/2} \int \frac{C}{B - z^{-1/2} A} = -z^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n/2} \int \frac{A^n C}{B^{n+1}}$$

Conclusion

compact CYの開mirror対称性の研究が近年活発に進行中だが、我々はその中に直接積分の方法を提案した。この手法は既に計算された例だけでなく、完全交差で表せない新しいCY、pfaffian CYに対しても機能する。

計算できる例が飛躍的に増えることが期待でき、得られた超ポテンシャルの現象論・宇宙論への応用という方向への広がりも期待される。