

# Entanglement Entropy of Two Black Holes and Entanglement Entropic Force

芝 暢郎 (阪大理 D1)

N.Shiba, “Entanglement entropy of two black holes and entanglement entropic force” Phys. Rev. D 83, 065002 (2011)  
arXiv:1011.3760v1 [hep-th]

2011年 KEK理論研究会2011

# 1. Introduction

- 量子的な相関、entanglementを測る量として entanglement entropy (EE)がある。これは、複合系の一部を測定しないと仮定した場合の残りの系のエントロピーである。
- EEは black hole の外側の観測者が地平線の内部を観測できない状況で自然に現れる。
- EEをblack holeエントロピーの量子補正として解釈できる。

G.'t Hooft **Nucl.Phys.B256:727,1985**

T.Jacobson **gr-qc/9404039**



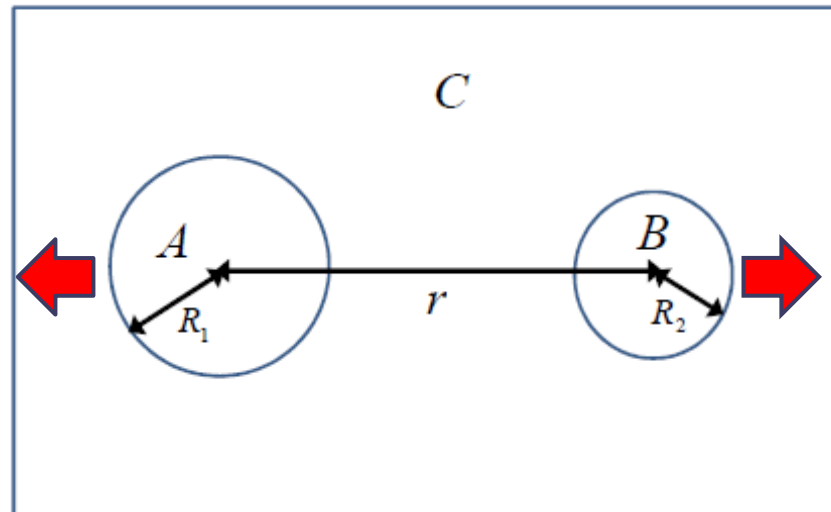
# Motivation

- Black holeが2つあるときの外側の場のEEを考える。
- このEEを熱力学的エントロピーと同じように考えられるなら、EEが大きいほうが系は安定だと考えられる。





E E の  $r$  依存性から  
場が BH に及ぼす **entropic force** が分かる

**Entropic force**



# 今回の研究内容

- $(d+1)$ 次元時空のmassless free scalar field  $d \geq 2$
- $(d+1)$ 次元Minkowski時空で距離 $r$ が大きい時の $r$ 依存性を調べた。



主要項は  $-\frac{1}{r^{2d-2}}$  に比例して増加する。

- Minkowski時空と同じ計算法を使い、2つのBHがあるときの $r$ 依存性を推測した。

- 
- scalar field がBHに及ぼすentropic force の効果を議論した。

## 2. Entanglement entropyの定義と性質

定義  $S_A = -\text{tr}_A \rho_A \log \rho_A$   $\rho_A = \text{tr}_B \rho_{AB}$

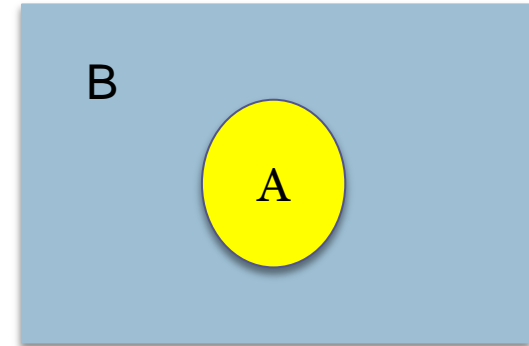
一般的性質 複合系ABが純粋状態のとき  $S_{AB} = 0$   $S_A = S_B$   
 $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$  のとき  $S_{AB} = S_A + S_B$

場の理論のEE (geometric entropy)

部分系への分割は空間の分割として幾何学的に行う

全系: 空間的多様体N

部分系: Nの領域A



場の理論のEEの面積則

(d+1)次元場の理論において全系が真空のとき

$$S_A = \gamma \cdot \frac{\text{Area}(\partial A)}{a^{d-1}} + \text{subleading terms}$$

多くの例で上の面積則が成り立つ。  
aは格子定数(UVカットオフ)

←  $\gamma$  は定数

$S_A = S_B$  から予想される

### 3. (d+1)次元Minkowski時空

(d+1)次元時空 massless free scalar field の真空状態

・計算法

Scalar場を無限個の連結調和振動子として表しEEを直接求める

L.Bombelli,R.K.Koul,J.Lee,R.D.Sorkin **Phys.Rev.D34:373-383,1986**

M. Srednicki **Phys.Rev.Lett.71:666-669,1993.**

$$L = \frac{1}{2} G_{MN} \dot{q}^M \dot{q}^N - \frac{1}{2} V_{MN} q^M q^N$$

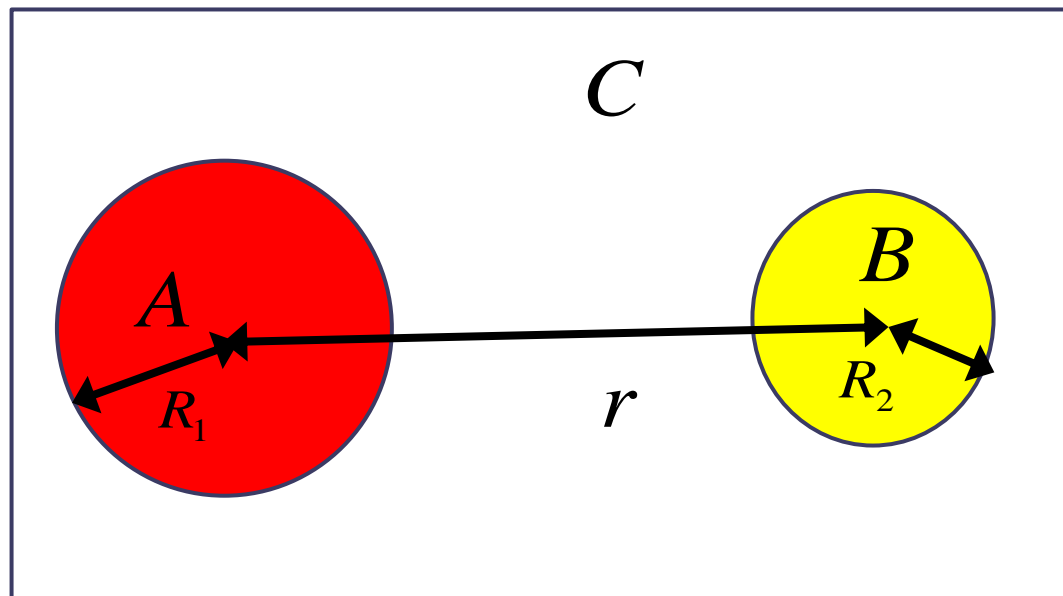
曲がった時空でも使える

全系が純粋状態なので

$$S_C = S_{AB}$$



$S_{AB}$  を考える



# 3. (d+1)次元Minkowski時空

(d+1)次元時空 massless free scalar field の真空状態

・計算法

Scalar場を無限個の連結調和振動子として表し計算する

L.Bombelli,R.K.Koul,J.Lee,R.D.Sorkin **Phys.Rev.D34:373-383,1986**

M. Srednicki **Phys.Rev.Lett.71:666-669,1993.**

$$L = \frac{1}{2} G_{MN} \dot{q}^M \dot{q}^N - \frac{1}{2} V_{MN} q^M q^N$$



曲がった時空でも使える

$$L = \int d^d x \frac{1}{2} [\dot{\phi}^2 - (\nabla \phi)^2].$$

$$\frac{1}{2} V_{AB} q^A q^B \rightarrow \int d^d x \frac{1}{2} [(\nabla \phi)^2].$$

$$V(x, y) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} (k^2) e^{ik \cdot (x-y)}$$

$$L = \frac{1}{2} G_{MN} \dot{q}^M \dot{q}^N - \frac{1}{2} V_{MN} q^M q^N$$

曲がった時空でも使える

Minkowski時空の場合

$$L = \int d^d x \frac{1}{2} [\dot{\phi}^2 - (\nabla\phi)^2].$$

$$\frac{1}{2} V_{AB} q^A q^B \rightarrow \int d^d x \frac{1}{2} [(\nabla\phi)^2].$$

$$V(x, y) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} (k^2) e^{ik \cdot (x-y)}$$

## 計算の流れ

$\rho_{ABC}$  から  $\rho_{AB} = \text{tr}_C \rho_{ABC}$  を求める

← ガウス積分

↓  
 $\rho_{AB}$  はガウス型関数になる

↓  
 $\rho_{AB}$  から  $S_{AB} = -\text{tr} \rho_{AB} \ln \rho_{AB}$  を求める (レプリカ法ではない)



$$S_{AB} = \sum_n f(\lambda_n) \quad f(\lambda) \equiv \ln\left(\frac{1}{2}\lambda^{1/2}\right) + (1 + \lambda)^{1/2} \ln[(1 + \lambda^{-1})^{1/2} + \lambda^{-1/2}],$$

$$\Lambda(x, y) = - \int_C d^d z W^{-1}(x, z) W(z, y) \quad x, y \in A \cup B$$

$$\int_{A \cup B} d^d y \Lambda(x, y) f(y) = \lambda f(x)$$

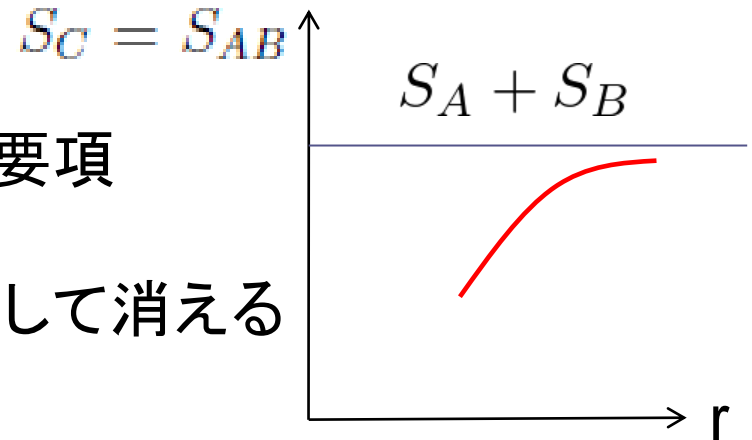
$$W(x, y) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} (k^2)^{1/2} e^{ik \cdot (x-y)} \quad W^{-1}(x, y) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} (k^2)^{-1/2} e^{ik \cdot (x-y)}$$

固有値を求める問題に帰着する

# 結果

$d \geq 2$  で  $r \gg R_1, R_2$  のときの主要項

$\frac{1}{r^{d-1}}$  で展開 1次の項はキャンセルして消える



$$S_{AB}(r, R_1, R_2) - S_A(R_1) - S_B(R_2) = \frac{1}{r^{2d-2}} G(R_1, R_2) \leq 0$$

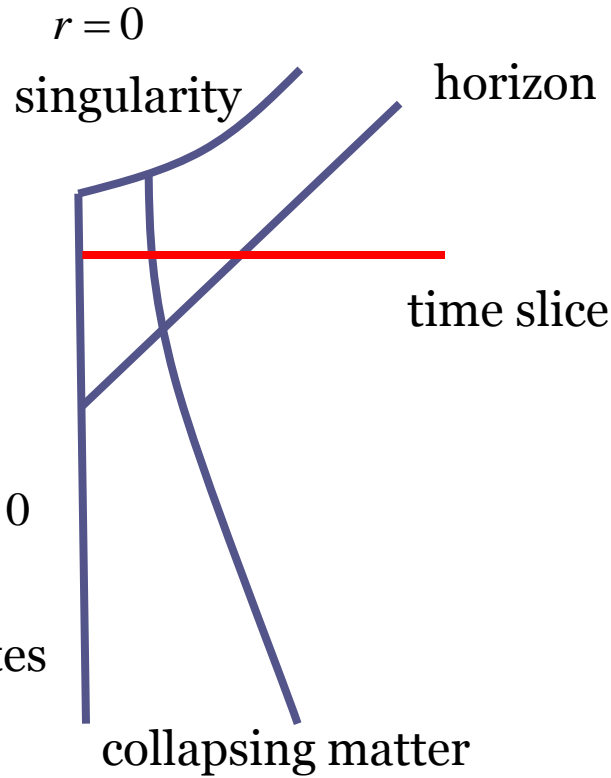
$$G(R_1 = 0, R_2) = G(R_1, R_2 = 0) = 0.$$

次元解析とUVカットオフへの依存性からGを推測

$$G(R_1 = R, R_2 = R) = g R^{2d-2} \left( \frac{R}{l} \right)^m \left( \ln \left( \frac{R}{l} \right) \right)^n \quad d-1 \geq m \geq 0, n \geq 0, g < 0$$

$l$  : UV cutoff length

# 4. Two black holes case

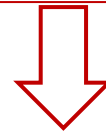


時間座標を指定



真空が決まる

全時空を覆いhorizon上で  
coordinate singularity  
がない座標を使う

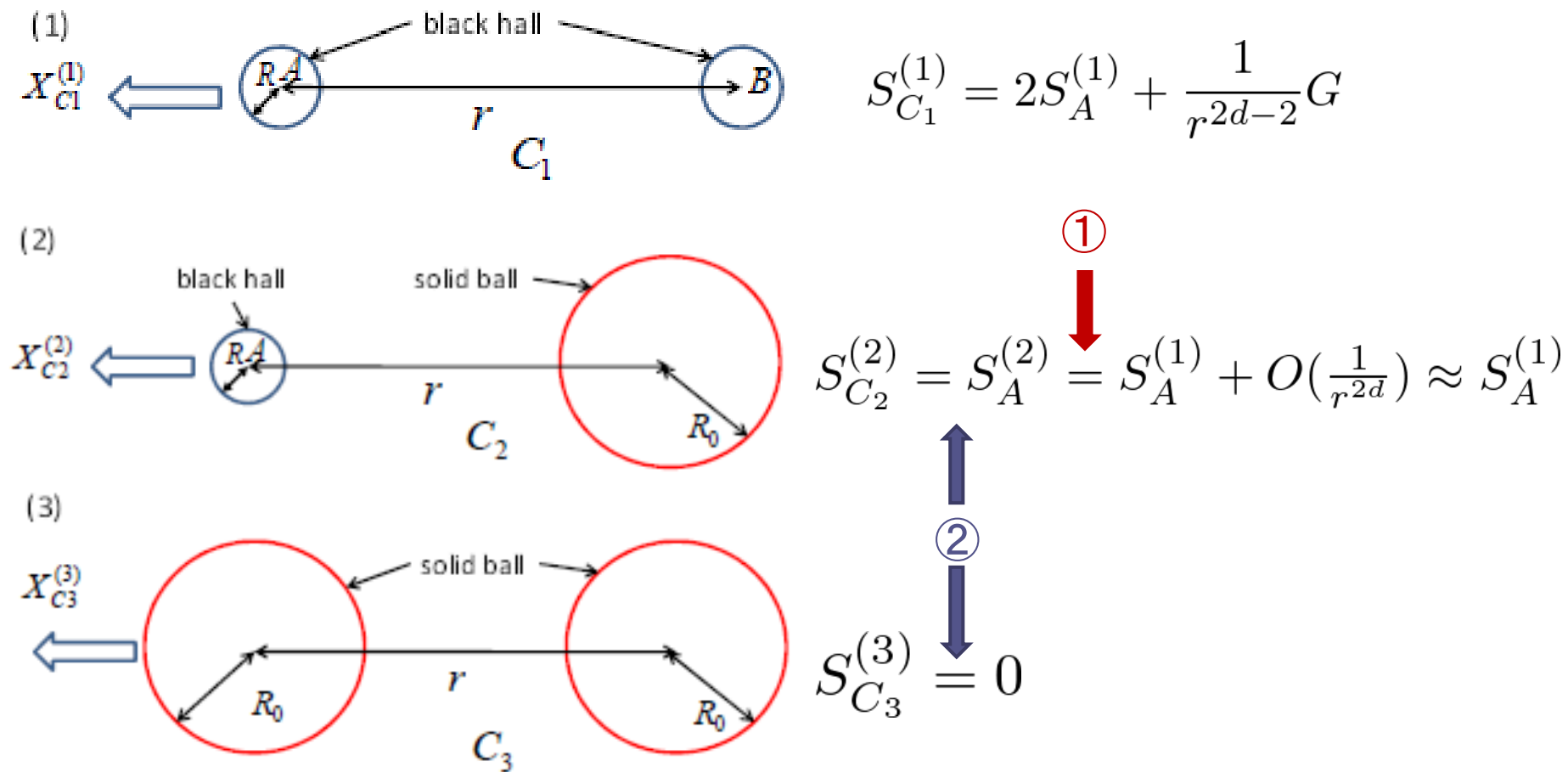


$$S_{AB}(r, R_1, R_2) = S_A(r, R_1, R_2) + S_B(r, R_1, R_2) + \frac{1}{r^{2d-2}} G(R_1, R_2)$$

$$G(R_1, R_2) \leq 0$$

$$G(R_1 = R, R_2 = R) = g_{BH} R^{2d-2} \left(\frac{R}{l}\right)^m \left(\ln\left(\frac{R}{l}\right)\right)^n \quad d-1 \geq m \geq 0, n \geq 0, g_{BH} < 0$$

# 5. The effect of entanglement entropic force



球の質量はBHと同じ

外側の時空の計量はどれも同じ

①

球の内部にはスカラー場は存在しない

球の外部のスカラー場は純粋状態

②

$$F_C(r, R) = E_C(r, R) - TS_C(r, R)$$

$T$  : Hawking temperature

$E_C(r, R)$  : Energy of the scalar field

$F_C(r, R)$  : Free energy of the scalar field

$$X_C(r, R) = -\frac{\partial F_C}{\partial r}$$

$$X_{C_1}^{(1)} - 2X_{C_2}^{(2)} + X_{C_3}^{(3)} \approx -\frac{\partial}{\partial r} [E_{C_1}^{(1)} - 2E_{C_2}^{(2)} + E_{C_3}^{(3)}] - (2d - 2)T \frac{1}{r^{2d-1}} G(R).$$



Casimir force



The effect of entropic force



$S_A^{(1)}$  のr依存性がキャンセルした！

$$F_C(r, R) = E_C(r, R) - TS_C(r, R)$$

$T$  : Hawking temperature

$E_C(r, R)$  : Energy of the scalar field

$F_C(r, R)$  : Free energy of the scalar field

$$X_C(r, R) = -\frac{\partial F_C}{\partial r} \quad \boxed{d = 3}$$

$$X_{C_1}^{(1)} - 2X_{C_2}^{(2)} + X_{C_3}^{(3)} \approx -\frac{\partial}{\partial r} [E_{C_1}^{(1)} - 2E_{C_2}^{(2)} + E_{C_3}^{(3)}] - \frac{g_{BH}}{\pi} \frac{R^3}{r^5} \left(\frac{R}{l}\right)^m \left(\ln\left(\frac{R}{l}\right)\right)^n$$

$$2 \geq m \geq 0, n \geq 0, g_{BH} < 0$$

Casimir force

The effect of entropic force

$= O(1/r^8)$  ← 誘電体球間のCasimir 力からの類推

Entropic force の効果は  $1/r^5$  で現れる！

T. Emig et al (2007)

# Entanglement Entropic Force の大きさの見積もり

$$F_{eef} = -\frac{\hbar c g_{BH}}{\pi} \frac{R^3}{r^5} \left(\frac{R}{l}\right)^m \left(\ln\left(\frac{R}{l}\right)\right)^n$$

$$F_g = -\frac{G_N M^2}{r^2} = -\frac{c^4 R^2}{4G_N r^2} \quad \leftarrow \text{BHに働く重力}$$

$$l = l_p = \left(\frac{G_N \hbar}{c^3}\right)^{\frac{1}{2}} \quad m = 2 \quad n = 0 \quad \text{のとき}$$

$$\frac{F_{eef}}{F_g} = \frac{4g_{BH}}{\pi} \frac{R^3}{r^3} \quad \leftarrow \hbar, c, G_N, k_B \text{ は全て消える}$$

Hawking 温度は小さいがEEは大きいのでEEFは大きくなる

観測で見えうる(?)

## 6. Conclusion

(1)  $(d+1)$ 次元Minkowski時空で  $S_C = S_{AB}$  の  $1/r$  の主要項を求めた。

$$S_{AB}(r, R_1, R_2) - S_A(R_1) - S_B(R_2) = \frac{1}{r^{2d-2}} G(R_1, R_2) \leq 0$$

(2) 2つのblack holeがあるときの  $S_C = S_{AB}$  の  $r$  依存性を推測した。

$$S_{AB}(r, R_1, R_2) = S_A(r, R_1, R_2) + S_B(r, R_1, R_2) + \frac{1}{r^{2d-2}} G(R_1, R_2)$$
$$G(R_1, R_2) \leq 0$$

(3) 3つの状況を考えentropic force の効果を抜き出した。

$$X_{C_1}^{(1)} - 2X_{C_2}^{(2)} + X_{C_3}^{(3)} \approx -\frac{\partial}{\partial r} [E_{C_1}^{(1)} - 2E_{C_2}^{(2)} + E_{C_3}^{(3)}] - \frac{g_{BH}}{\pi} \frac{R^3}{r^5} \left(\frac{R}{l}\right)^m \left(\ln\left(\frac{R}{l}\right)\right)^n$$



# 展望

$$X_{C_1}^{(1)} - 2X_{C_2}^{(2)} + X_{C_3}^{(3)} \approx -\frac{\partial}{\partial r} [E_{C_1}^{(1)} - 2E_{C_2}^{(2)} + E_{C_3}^{(3)}] - \frac{g_{BH}}{\pi} \frac{R^3}{r^5} \left(\frac{R}{l}\right)^m \left(\ln\left(\frac{R}{l}\right)\right)^n$$

$$2 \geq m \geq 0, n \geq 0, g_{BH} < 0$$

m, n を決定して entanglement entropic force (EEF) の大きさを求める

m=2 なら EEF の効果が観測で見えるかもしれない

$$\frac{F_{eef}}{F_g} = \frac{4g_{BH}}{\pi} (l_p)^2 \frac{R}{r^3} \left(\frac{R}{l}\right)^m \left(\ln\frac{R}{l}\right)^n$$

EEF がブラックホール連星の公転周期などに影響するかもしれない