N=4 instanton effective action in 10-dimensional Omega-background and D3/D(-1)-brane system in R-R background

Shin Sasaki (Tokyo Institute of Technology)

In collaboration with K. Ito (Tokyo Institute of Technology),
H. Nakajima (KIAS, Kyungpook National Univ.) and T. Saka (Tokyo Institute of Technology)

Abstract：6次元時空で定義されたOmega背景変形により、N=2超対称ゲージ理論のインスタントンモジュライ籍分が正則化され、分配関数が直接計算可能なことがNekrasovにより示された。Omega変形されたNekrasov分配関数は様々な系と関係している。Omega背景は2つの変形パラメーターϵ_1,ϵ_2により特徴づけられており、これらパラメーターは2次元CFTのcentral chargeに対応している(Alday-Gaiotto-Tachikawa (2009))。一方、$\epsilon_1=\hbar,\epsilon_2=0$となる極限を考えると、Nekrasov分配関数は一次元量子可籍分系と密接に関連していることが知られている(Nekrasov-Shatashivli (2009)).。我々は、10次元で定義された拡張されたOmega背景を導入し、N=4およびN=2^{*}超対称ゲージ理論におけるインスタントン有効作用を調べた。拡張されたOmega背景は従来のOmega変形より多くのパラメーターを含み、より大きな変形自由度を持っている。我々はインスタントン有効作用を場の理論側からADHM構成法により計算し、弦理論側からはR-R 3-form背景場中のD3/D(-1)-brane systemにより構成し、両者を比較した。

Introduction

Omega-deformed N=2 super Yang-Mills theoryにおけるインスタントン分配関数
[Nekrasov (2003)]

$$Z_{\rm inst}=\int d\mathcal{M}\ \exp[-S^{(0)}_{\rm eff}]\qquad S^{(0)}_{\rm eff}$$ *: instanton effective action*

モジュライ積分 – 発散→ Omega-backgroundによるregularization

Omega-background – non-trivial fibration of R^4 over T^2

$$ds^2_{6D}=2dzd\bar z+(dx^m+\Omega^m dz+\bar\Omega^m dz)^2,$$
$$\Omega^m=\Omega^{mn}x_n,\ \bar\Omega^m=\bar\Omega^{mn}x_n$$

$$\Omega^{mn}=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0&i\epsilon_1&0&0\\-i\epsilon_1&0&0&0\\0&0&0&-i\epsilon_2\\0&0&i\epsilon_2&0\end{pmatrix},\quad \bar\Omega^{mn}=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0&-i\bar\epsilon_1&0&0\\i\bar\epsilon_1&0&0&0\\0&0&0&i\bar\epsilon_2\\0&0&-i\bar\epsilon_2&0\end{pmatrix}$$

Omega変形された分配関数

$$Z_{inst}(\phi^0,\epsilon_1,\epsilon_2)=\exp\left(\frac{1}{\epsilon_1\epsilon_2}(\mathcal{F}_{\rm SW}(\phi^0,\Lambda)+\mathcal{O}(\epsilon_1,\epsilon_2))\right)$$

$\mathcal{F}_{\rm SW}$ **: Seiberg-Witten prepotential**

Instanton solution – ADHM construction で得られる
解はインスタントンモジュライを用いて表される

Omega-bakground の物理的意味– graviphoton補正
- **Topological string computations** *[Antoniadis-Gava-Narain-Taylor (1993)]*
- **D3/D(-1)-brane system with R-R 3-form background** *[Billo-Frau-Fucito-Lerda (2006)]*
- **Explicit construction of instanton solutions in SYM with graviphoton corrections** *[Ito-Nakajima-S.S (2008), Ito-Nakajima-Saka-S.S (2009)]*

他の物理系でのOmega-bakgroundの解釈
- **``Planck constant $\hbar$ " in quantum integrable systems** $\epsilon_1=\hbar,\epsilon_2=0$
[Nekrasov-Shatashvili (2009), Mironov-Morozov (2009)]
- **Central charges in 2d CFT via AGT relation**
[Alday-Gaiotto-Tachikawa (2009), Alday-Gaiotto-Gukov-Tachikawa-Verlinde (2009)]

Nekrasovにより導入されたOmega-backgroundをさらに一般化できないか？

***拡張されたOmega背景場*の導入**

Super Yang-Mills theories in extended Omega-background

N=1 super Yang-Mills theory in ten-dimensions with the metric

$$ds^2_{10D}=(dx^a)^2+(dx^m+\Omega_{ma}dx^a)^2,\qquad \Omega^{mna}=\begin{pmatrix}0&\epsilon_1^a&0&0\\-\epsilon_1^a&0&0&0\\0&0&0&-\epsilon_2^a\\0&0&\epsilon_2^a&0\end{pmatrix}$$
$$(m=0,\cdots,3,\ a=4,\cdots,9)$$

4次元へdimensional reduction
→拡張されたOmega背景場でのN=4 super Yang-Mills理論

N=2^* 理論 -- 6次元方向のSO(6) 対称性をゲージ化
→ SU(4) R-symmetry Wilson line を導入

$$\mathbf{A}^A{}_B=\mathcal{A}^{aA}{}_B dx^a,\qquad (a=5,\cdots,10,\ A,B=1,\cdots 4)$$

Wilson lineを適切に選ぶ事でN=2 hypermultiplet mass を与えることができる
→ N=2^* gauge theoryも構成できる

これらの理論のインスタントン解を求めたい
Semi-classical近似ではgauge coupling g のleading order解を求めれば十分
→ *Constrained instanton [Affleck (1981)]* を考える

解はADHM構成法により与えられる

Deformed twisted SUSY

Omega背景場により一般に超対称性は壊れている
→ SU(4) R-symmetryをゲージ化し T^6方向のWilson lineを導入
→ 変形された超対称性 の存在

SU(4)の部分代数SU(2)をLorentz対称性SO(4)=SU(2)_L x SU(2)_Rの部分代数SU(2)_Rと同一視 – Topological twist *[Witten (1988)]*

$$\bar Q_\Omega\equiv\varepsilon^{\dot\alpha I}\bar Q_{\dot\alpha I}$$ **--(Deformed) BRST電荷とみなせる**

Instanton effecitve actionはBRST exactの形に書くことができる

$$S^{(0)}_{\rm eff}=\bar Q_\Omega\Xi$$

モジュライ積分は固定点からの寄与の足し上げ

このような書き換えは常にできるわけではない
(Nekrasov's Omega背景場との違い)
→Omega背景場、Wilson line, VEVはある条件式を満たす必要がある
[Ito-Nakajima-Saka-S.S (To appear)]

条件式を満たす解は存在することがわかった

ADHM construction of instantons And instanton effective action

Instanton背景でのOmega変形されたgのleading order運動方程式

→解はADHM構成法により得られる *[Atiyah-Drinfel'd-Hitchin-Manin (1978)]*

$$A^{(0)}_m=-i\bar U\partial_m U,$$
$$\Lambda^{(0)A}_\alpha=\bar U(\mathcal{M}^A f\bar b_\alpha-b_\alpha f\bar{\mathcal{M}}^A)U,$$
$$\varphi^{a(0)}=-\frac14(\bar\Sigma^a)_{AB}\bar U\mathcal{M}^A f\bar{\mathcal{M}}^B U+\bar U\begin{pmatrix}\phi^{a0}&0\\0&\chi_a\mathbf{1}_2-\boxed{i\mathbf{1}_k\Omega^a}\end{pmatrix}U$$

Omega背景場による効果

ADHM constraint

$$(\tau^c)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}(\bar w^{\dot\beta}w_{\dot\alpha}+\bar a'^{\dot\beta\alpha}a'_{\alpha\dot\alpha})=0,\quad a'_m=\bar a'_m,$$
$$\bar\mu^A w_{\dot\alpha}+\bar w_{\dot\alpha}\mu^A+[\mathcal{M}'^{\alpha A},a'_{\alpha\dot\alpha}]=0,\quad \mathcal{M}'^A_\alpha=\bar{\mathcal{M}}'^A_\alpha$$

モジュライの物理的意味

a'_m : "position" of instantons,
$\mathcal{M}'_\alpha{}^A$: superpartner of a'_m,
$\chi_a, D^c(c=1,2,3),\bar\psi^{\dot\alpha}_A$: bosonic and fermionic auxiliary variables,
$w_{\dot\alpha},\bar w^{\dot\alpha}$: "size" of instantons
$\mu^A,\bar\mu^A$: superpartners of $w_{\dot\alpha},\bar w^{\dot\alpha}$

モジュライ有効作用 – 解を作用へ代入 gauge coupling gの
leading orderを抜き出し、4次元時空上で体積積分を実行

$$S^{(0)}_{\rm eff}=S^{(0)}_{\rm eff}({\rm moduli},\Omega^{mna})$$

***Omega変形されたInstanton effective actionが* 計算される**

Deformed instanton effective action In D3/D(-1)-brane system

このような拡張されたOmega背景場の物理的意味は何だろうか？
→String理論への埋め込みを考え調べてみる
→N=4 gravity and vector multiplet背景場の効果と読み取れる

4d ゲージ理論 – D3-brane上のopen string massless mode
ADHM moduli – D3/D(-1)-brane systemでのmassless mode

拡張されたOmega背景場 – D3-brane方向の R-R 3-form flux

$$\mathcal{F}_{mna}\ (m,n=1,2,3,4,a=5,\cdots,10)$$

SU(4) Wilson line – bulk方向の R-R 3-form flux

$$\mathcal{F}_{abc}$$

Instanton effective action = D(-1)-brane有効理論

D(-1)-brane上でR-R背景場の効果を弦の散乱振幅を計算

R-R vertex operator を挿入した disk振幅

Zero-slope limit – 変形されたD(-1)-brane有効理論
→ Omega背景場上で評価されたモジュライ作用と一致

Z_2-orbifoldし、D3-braneをorbifold fixed pointに置くことで
Nekrasovによるomega背景場が再現される

詳細は今後発表予定の論文 [Ito-Nakajima-Saka-S.S (To appear)]にて。