Entropic formulation of relativistic continuum mechanics

酒谷 雄峰 (京大理)
福間将文氏 (京大理) との共同研究:　[1] arXiv:1102.1557,　[2] arXiv:1104.1416.

動機と結果

連続体の不可逆な運動を **Onsager の非平衡熱力学**の枠組みから理解したい.
相対論的連続体力学を記述する一般的枠組みを与え (このポスターでは省略),
その枠組みで相対論的流体力学や相対論的粘弾性体力学を記述する.

主な結果

1. 局所熱平衡が仮定できるスケールよりも大きいスケールの
   非平衡系の **entropy** を **effective** に記述する **entropy functional** を導入し,
   相対論的連続体力学の再定式化を行った.
2. 相対論的粘弾性体力学を定式化した. これは様々な粘弾性体 **model** を含み
   かつ, 因果的相対論的流体力学として知られている **Israel-Stewart model**
   (の簡略版) も含む理論になっている.
3. 提案した **entropy functional** は, 非平衡状態にある連続体の **entropy** を,
   各時刻での熱力学量の汎関数として与える.
   ⇒ **holographic dual** の非平衡 **black hole** の物理への示唆を与えると期待.

Review: Onsager's linear regression law

系を特徴付ける熱力学変数 $a^r(t,x^i)$ が, その平衡状態での値 $a_0^r(t,x^i)$ の
まわりでゆらいでいるとき, 系全体の **entropy** は二次形式で近似できる:

$$\hat{S}(t) = \hat{S}_0(t) \underbrace{- \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^D y \, (a-a_0)^r(t,y^i) \overset{\text{正定値}}{\beta_{rs}} (a-a_0)^s(t,y^i)}_{\equiv \Delta\hat{S}} ,$$

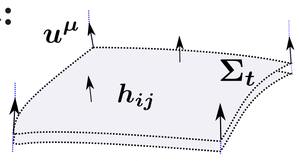
Onsager's linear regression hypothesis:

$$[\dot{a}^r(t,\mathrm{x})]_{\mathrm{irr}} = -\gamma^r{}_s \, (a-a_0)^s = \underset{\text{不可逆な発展}}{} \quad \underset{\text{現象論的係数}}{L^{rs}} \quad \times \underset{\text{熱力学力}}{\frac{\delta \Delta\hat{S}}{\delta a^s(t,\mathrm{x})}}$$

セットアップ

$(D+1)$ 次元時空上の連続体力学を考える (局所座標 x^μ, **Lorentzian** 計量 $g_{\mu\nu}$).
速度場 u^μ を **energy flux** p_μ に並行になるよう定義 (**Landau-Lifshitz frame**):
$u^\mu(x) \equiv g^{\mu\nu} p_\nu(x)/e(x)$　　($e(x) = \sqrt{-p_\mu(x)p^\mu(x)}$: **energy** 密度)

u^μ を **hypersurface orthogonal** と仮定し, 各々の **hypersurface** を Σ_t と記す.
⇒ $u_\mu \mathrm{d}x^\mu = -N(x)\mathrm{d}\mathrm{t}(x)$　($\mathrm{t}(x)$: **scalar**; $N(x) \equiv 1/\sqrt{-g^{\mu\nu}\partial_\mu \mathrm{t} \partial_\nu \mathrm{t}}$)
$\mathrm{t}(x) = x^0$ とする座標系 $(x^\mu) = (t, x^i)$ を選ぶ:



$$\begin{aligned} u_\mu \mathrm{d}x^\mu &= -N \, \mathrm{d}t \, , \\ \mathrm{d}s^2 &= g_{\mu\nu}(x) \, \mathrm{d}x^\mu \, \mathrm{d}x^\nu \\ &= -N^2(x) \, \mathrm{d}t^2 + h_{ij}(x) \left(\mathrm{d}x^i - N^i(x) \, \mathrm{d}t\right) \left(\mathrm{d}x^j - N^j(x) \, \mathrm{d}t\right) , \end{aligned}$$

Σ_t 上の **volume form**: $\sqrt{h} \, \mathrm{d}^D x = \sqrt{\det(h_{ij})} \, \mathrm{d}^D x$　($\sqrt{h} = N^{-1}\sqrt{-g}$)

不可逆な時間発展を記述するため, 時間微分 $\dot{} \equiv \mathrm{D}/\mathrm{D}t$ を定義.
以下の条件を満たす微分が欲しい:

(1) $(\mathrm{D}/\mathrm{D}t)\, t = 1$, **(2)** $(\mathrm{D}/\mathrm{D}t)\, u^\mu = 0$, **(3) Leibniz rule.**
⇒　$(\mathrm{D}/\mathrm{D}t) \equiv N \pounds_u$　を用いる.

Navier-Stokes 流体

Navier-Stokes 流体の熱力学変数は,
運動量と粒子数　$(a^r) = (\tilde{p}_\mu \equiv \sqrt{h}\, p_\mu \, , \quad \tilde{n} \equiv \sqrt{h}\, n)$,
および, 外場としての重力場 $g_{\mu\nu}$:

local entropy:　$\tilde{s}(x) \equiv \sqrt{h}\, s(x) = \tilde{s}(\tilde{p}_\mu(x), \tilde{n}(x), g_{\mu\nu}(x))$.

状態方程式の変分:

$$\begin{aligned} \delta\tilde{s}(x) &= -\frac{u^\mu}{T} \delta\tilde{p}_\mu - \frac{\mu}{T}\delta\tilde{n} + \frac{\sqrt{h}}{2T}\left(e u^\mu u^\nu + P h^{\mu\nu}\right) \delta g_{\mu\nu} \\ &\left(= \frac{1}{T}\delta\tilde{e} - \frac{\mu}{T}\delta\tilde{n} + \frac{P}{T}\delta\sqrt{h} \right) . \end{aligned}$$

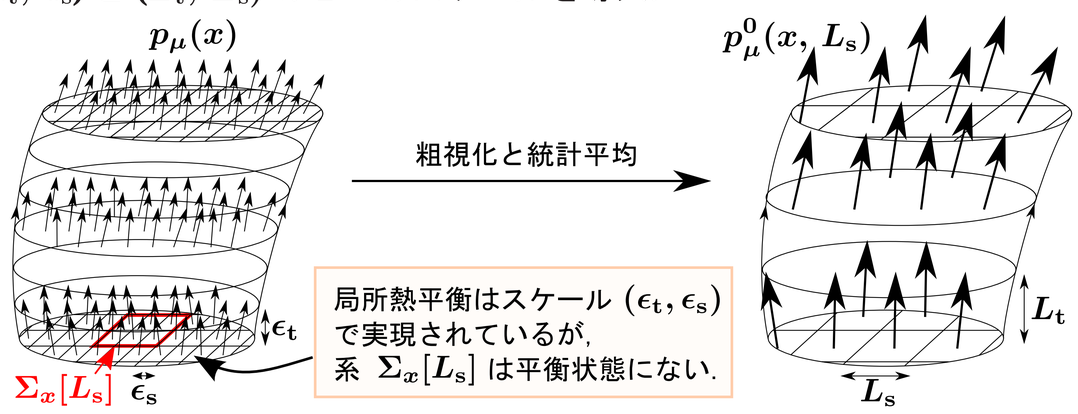
公式:　$\dot{\tilde{n}} = \sqrt{-g}\, \nabla_\nu (n u^\nu) \, , \qquad \dot{\tilde{p}}_\mu = \sqrt{-g}\, \nabla_\nu (p_\mu u^\nu)$.

$\tilde{p}_\mu$ と $\tilde{n}$ の可逆な時間発展は次式で与えられる:

$$[\dot{\tilde{n}}]_{\mathrm{rev}} = 0 \, , \qquad [\dot{\tilde{p}}_\mu]_{\mathrm{rev}} = -\sqrt{-g}\, \nabla_\nu \left(P h^\nu_\mu\right) \quad (\text{完全流体}) .$$

1. The entropy functional [1] arXiv:1102.1557

$(\epsilon_{\mathrm{t}}, \epsilon_{\mathrm{s}})$ と $(L_{\mathrm{t}}, L_{\mathrm{s}})$ の 2 つのスケールを導入.



局所熱平衡はスケール $(\epsilon_{\mathrm{t}}, \epsilon_{\mathrm{s}})$ で実現されているが,
系 $\Sigma_x[L_{\mathrm{s}}]$ は平衡状態にない.

変数 $a^r(x)$ を **large-scale variable** $a_0^r(x)$ と, その周りのゆらぎを記述する
small-scale variable $(a-a_0)^r(x)$ に分離する.
領域 $\Sigma_x[L_{\mathrm{s}}]$ の **total entropy**

$$\hat{S}(t;\, \Sigma_x[L_{\mathrm{s}}]) \equiv \int_{\Sigma_x[L_{\mathrm{s}}]} \mathrm{d}^D y \, \tilde{s}\left(\tilde{p}_\mu(t,y^i),\, \tilde{n}(t,y^i),\, g_{\mu\nu}(t,y^i)\right) ,$$

を考え, これを平衡状態での値 $\hat{S}_0$ とその変化分に分離:

$$\hat{S}(t;\, \Sigma_x[L_{\mathrm{s}}]) = \hat{S}_0(t;\, \Sigma_x[L_{\mathrm{s}}]) + \Delta\hat{S}(t;\, \Sigma_x[L_{\mathrm{s}}]) \, .$$

Navier-Stokes 流体に対しては $\Delta\hat{S}$ が以下の形に書ける [arXiv:1102.1557]:

$$\begin{aligned} &\Delta\hat{S}(t;\, \Sigma_x[L_{\mathrm{s}}]) \\ &= -\frac{1}{2}\int_{\Sigma_x[L_{\mathrm{s}}]} \mathrm{d}^D y \, \sqrt{-g} \left[\ell^{\mu\ \ \nu}_{\alpha,\,\beta} \, \nabla_\mu\left(\frac{\partial\tilde{s}}{\partial\tilde{p}_\alpha}\right) \nabla_\nu\left(\frac{\partial\tilde{s}}{\partial\tilde{p}_\beta}\right) + m^{\mu\nu}\, \partial_\mu\left(\frac{\partial\tilde{s}}{\partial\tilde{n}}\right) \partial_\nu\left(\frac{\partial\tilde{s}}{\partial\tilde{n}}\right) \right] . \end{aligned}$$

($\ell^{\mu\ \ \nu}_{\alpha,\,\beta}$, $m^{\mu\nu}$: 空間的な正定値の対称 **tensor**)

すると, $\tilde{n}$ の時間発展は次式で与えられる:

$$\underset{(=\sqrt{-g}\nabla_\mu(nu^\mu))}{\dot{\tilde{n}}(x) = [\dot{\tilde{n}}(x)]_{\mathrm{irr}}} = \underset{\text{現象論的係数}}{\sqrt{h}\, M} \, \frac{\delta\Delta\hat{S}}{\delta\tilde{n}(x)} = \sqrt{-g}\, \underset{\text{およそ定数}}{M\, s_{nn}}\, \nabla_\mu\left[m^{\mu\nu}\, \partial_\nu\left(-\frac{\mu}{T}\right)\right] ,$$

$$\Rightarrow \quad \nabla_\mu(nu^\mu + \nu^\mu) = 0 \, , \quad \nu^\mu \equiv \underbrace{M\,(-s_{nn})\, m^{\mu\nu}}_{= \sigma T^2 h^{\mu\nu}} \partial_\nu\left(-\frac{\mu}{T}\right) . \quad \leftarrow \text{(等方性を仮定)}$$

同様に, 運動量 $\tilde{p}_\mu$ に対する時間発展も得られる:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{p}}_\mu(x) - [\dot{\tilde{p}}_\mu(x)]_{\mathrm{rev}} &= \sqrt{-g}\, \nabla_\nu(p_\mu u^\nu + P h^\nu_{\ \mu}) \\ &= [\dot{\tilde{p}}_\mu(x)]_{\mathrm{irr}} \sim \underset{\text{現象論的係数}}{\sqrt{h}\, L_{\mu\nu}} \frac{\delta\Delta\hat{S}}{\delta\tilde{p}_\nu(x)} \sim -\sqrt{-g}\, \nabla_\nu \tau^{(\mathrm{d})\,\nu}_\mu \, , \end{aligned}$$

$$\tau^{\mu\nu}_{(\mathrm{d})} \equiv -\frac{1}{T} L_{\tilde{p}}\, \ell^{\mu\nu,\rho\sigma} \nabla_\rho u_\sigma \underset{\text{等方性}}{=} -\zeta\, \nabla_\rho u^\rho\, h^{\mu\nu} - 2\eta\, \nabla^{\langle\mu} u^{\nu\rangle} .$$

これらは, **Navier-Stokes** 方程式を再現する:

$$\nabla_\mu\left(e u^\mu u^\nu + P h^{\mu\nu} + \tau^{\mu\nu}_{(\mathrm{d})}\right) = 0 \, , \quad \nabla_\mu\left(n u^\mu + \nu^\mu\right) = 0 .$$

2. Relativistic viscoelastic fluid mechanics

[1] arXiv:1102.1557 and [2] arXiv:1104.1416.

より一般的な連続体として粘弾性体を考えるため, 熱力学変数として
さらに **strain (歪み) tensor**, $E_{\mu\nu} \equiv \theta\, u_\mu u_\nu + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_\mu u_\nu + \varepsilon_\nu u_\mu\right) + \varepsilon_{\mu\nu}$ を加える.
すると, **entropy functional** は次のような形に書ける:

$$\begin{aligned} &\Delta\hat{S}(t;\, \Sigma_x[L_{\mathrm{s}}]) \\ &= -\frac{1}{2}\int_{\Sigma_x[L_{\mathrm{s}}]} \mathrm{d}^D y \, \sqrt{-g} \left[\left(\varepsilon_{\langle\mu\nu\rangle}\ \nabla^{\langle\mu}(\partial\tilde{s}/\partial\tilde{p}_{\nu\rangle})\right) \begin{pmatrix} \ell_1^{\langle\mu\nu\rangle,\langle\rho\sigma\rangle} & \ell_2^{\langle\mu\nu\rangle,} \\ \ell_2{}^{\langle\rho\sigma\rangle} & \ell_3{}^{\langle\mu\nu\rangle,\langle\rho\sigma\rangle} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon^{\langle\rho\sigma\rangle} \\ \nabla^{\langle\rho}(\partial\tilde{s}/\partial\tilde{p}_{\sigma\rangle}) \end{pmatrix} \right. \\ &\qquad + \left(\varepsilon_\mu\ \partial_\mu(\partial\tilde{s}/\partial\tilde{n})\right) \begin{pmatrix} \ell_1^{\mu\nu} & \ell_2^{\mu\nu} \\ \ell_2^{\mu\nu} & \ell_3^{\mu\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon^\nu \\ \partial_\nu(\partial\tilde{s}/\partial\tilde{n}) \end{pmatrix} \\ &\qquad \left. + \left(\mathrm{tr}\,\varepsilon\ \theta\ \nabla_\mu(\partial\tilde{s}/\partial\tilde{p}_\mu)\right) \begin{pmatrix} \ell_1^{\mathrm{s}} & \ell_2^{\mathrm{s}} & \ell_4^{\mathrm{s}} \\ \ell_2^{\mathrm{s}} & \ell_3^{\mathrm{s}} & \ell_5^{\mathrm{s}} \\ \ell_4^{\mathrm{s}} & \ell_5^{\mathrm{s}} & \ell_6^{\mathrm{s}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{tr}\,\varepsilon \\ \theta \\ \nabla_\mu(\partial\tilde{s}/\partial\tilde{p}_\mu) \end{pmatrix} \right] . \end{aligned}$$

この理論は塑性変形の力学を記述し, いくつかの緩和時間を含んでいる.

特に, いくつかのパラメータを 0 に置くと, $\tau^{(\mathrm{d})}_{\langle\mu\nu\rangle} \propto \varepsilon_{\langle\mu\nu\rangle}$,
$\mathrm{tr}\,\tau^{(\mathrm{d})} \propto \mathrm{tr}\,\varepsilon$ かつ $\nu^\mu \propto \varepsilon^\mu$ となり,　**strain** の緩和方程式は
simplified Israel-Stewart model の構成方程式に一致する:

$$\begin{aligned} \tau^{(\mathrm{d})}_{\langle\mu\nu\rangle} &= -\tau_{\mathrm{s}}\, \pounds_u \tau^{(\mathrm{d})}_{\langle\mu\nu\rangle} - 2\eta\, \nabla_{\langle\mu} u_{\nu\rangle} \, , \quad \mathrm{tr}\,\tau^{(\mathrm{d})} = -\tau_{\mathrm{b}}\, \pounds_u(\mathrm{tr}\,\tau^{(\mathrm{d})}) - D\zeta\, \nabla_\mu u^\mu \, , \\ \nu_\mu &= -\tau_\sigma\, \pounds_u \nu_\mu + \sigma T^2\, h_\mu^{\ \nu} \partial_\nu\left(-\frac{\mu}{T}\right) . \end{aligned}$$

□ この理論の非相対論極限は以下で提案された粘弾性体理論を含んでいる:
[1]. C. Eckart, Phys. Rev. 73, 373 (1948).
[2]. T. Azeyanagi, M. Fukuma, H. Kawai and K. Yoshida,
Phys. Lett. B 681 (2009) 290 [arXiv:0907.0656 [hep-th]]