No-Ghost Theorem for Neveu-Schwarz-Ramond String via Similarity Transformation

京大基研　高力麻衣子 (D2)　共同研究者: 国友浩, 村田仁樹　(Based on arXiv:1009.0107[hep-th] and work in progress)

主題 No-ghost 定理の証明 (NS string は 0-picture)

動機 Superstring Field Theory への応用

方法 BRST 量子化 ＋ 相似変換

なぜ 0-picture NS string か？

picture とは

Superghost β, γ の生成・消滅演算子の選び方には任意性がある:

$$\beta_r \left|0\right\rangle_l = 0 \ (r > -\tfrac{3}{2} - l), \quad \gamma_r \left|0\right\rangle_l = 0 \ (r > \tfrac{1}{2} + l)$$

ここで l を picture 数, $\left|0\right\rangle_l$ を l-picture Fock vacuum と呼ぶ.
(NS,R) 場は通常 $(-1, -\frac{1}{2})$-picture をとる. (“natural picture”)

(−1)-picture 生成	(−1)-picture 消滅	0-picture 生成	0-picture 消滅
$\ldots, \beta_{-\frac{3}{2}}, \beta_{-\frac{1}{2}}$	$\beta_{\frac{1}{2}}, \beta_{\frac{3}{2}}, \ldots$	$\ldots, \beta_{-\frac{3}{2}}$	$\beta_{-\frac{1}{2}}, \beta_{\frac{1}{2}}, \ldots$
$\ldots, \gamma_{-\frac{3}{2}}, \gamma_{-\frac{1}{2}}$	$\gamma_{\frac{1}{2}}, \gamma_{\frac{3}{2}}, \ldots$	$\ldots, \gamma_{-\frac{1}{2}}, \gamma_{\frac{1}{2}}$	$\gamma_{\frac{3}{2}}, \ldots$

Picture を変化させるには picture changing operator (PCO) X, Y を用いる. X と Y は, それぞれ picture 数を $+1, -1$ だけ変化させる. PCO は同じ演算子が同一点に集まると発散する.

$$\lim_{\epsilon \to 0} X(z) X(z+\epsilon) = \infty \quad (Y \text{ も同様})$$

0-picture を選ぶ動機: String Field Theory への応用

Natural picture の Cubic 型 Superstring Field Theory[1]

$$S = \int \left(\tfrac{1}{2} A Q_B A + \tfrac{1}{3} X A^3\right), \quad \delta_\Lambda A = Q_B \Lambda + X(A\Lambda - \Lambda A)$$

は, 作用の無限小変分 $\delta_\Lambda S$ や散乱振幅が発散するため不整合.
整合的な理論としては (NS,R) 場を $(0, -\frac{1}{2})$-picture にとった Modified Cubic SSFT[2] が知られている:

$$S = \int Y\bar{Y} \left(\tfrac{1}{2} A Q_B A + \tfrac{1}{3} A^3\right), \quad \delta_\Lambda A = Q_B \Lambda + A\Lambda - \Lambda A$$

弦の第一量子化は, これまで bosonic string[3], natural picture superstring[4] において議論されてきたが, SSFT への応用のためには 0-picture の第一量子化が必要である. また 0-picture の物理的状態は X を用いて

$$\left|\mathrm{phys}\right\rangle_0 \overset{?}{=} X \left|\mathrm{phys}\right\rangle_{-1}.$$

と予想される. しかし X, Y には kernel が存在するため, 異なる picture の物理的状態が一対一に対応するかは非自明である.

BRST 量子化と相似変換

物理的 Hilbert 空間は BRST charge Q_B の cohomology で与えられる.

$$Q_B = \sum_m c_{-m} L_m^{(\mathrm{m})} + \sum_r \gamma_{-r} G_r^{(\mathrm{m})} - \sum_{m,n} \frac{1}{2}(n-m) :b_{-m-n} c_m c_n: + \sum_{m,r} \left[\left(r - \frac{m}{2}\right) :\beta_{-m-r} c_m \gamma_r: - :b_{-m} \gamma_{m-r} \gamma_r: \right]$$

それぞれの演算子の normal ordering は 0-picture Fock vacuum についてとる.

我々は NS string に対して, Q_B をより単純な演算子に移す相似変換を導いた. ([5] の bosonic string に対する手法を応用.)

$$Q_B = \delta + Q_0 + d_1 + d_2 + d_3 = \mathrm{e}^{-R} (\delta + Q_0)\, \mathrm{e}^{R}$$

$$\delta = \sqrt{2\alpha'} p^+ \left(\sum_{n \neq 0} c_{-n} \alpha_n^- + \sum_r \gamma_{-r} \psi_r^- \right), \quad Q_0 = c_0 L_0$$

$$R_2 = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'} p^+} \left(\sum_{\substack{m,n \neq 0 \\ m+n \neq 0}} \left[\frac{m+n}{2mn} \alpha_{-m}^+ \alpha_{-n}^+ \alpha_{m+n}^- + \frac{n}{m} \alpha_{-m}^+ c_{-n} b_{m+n} \right] + \sum_{m \neq 0, n} \frac{1}{2m} \alpha_{-m}^+ \alpha_{-n}^i \alpha_{m+n}^i - \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{n}\right) \alpha_{-n}^+ \gamma_{-r} \beta_{n+r} \right.$$
$$\left. + \sum_{n \neq 0, r} \left[\left(\frac{3}{2} + \frac{r}{n}\right) \alpha_{-n}^+ \psi_{-r}^+ \psi_{n+r}^- + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{r}{n}\right) \alpha_{-n}^+ \psi_{-r}^i \psi_{n+r}^i + \psi_{-r}^+ \alpha_{-n}^i \psi_{n+r}^i + n \psi_{-r}^+ c_{-n} \beta_{n+r} - \psi_{-r}^+ b_{-n} \gamma_{n+r} \right] \right)$$

$$R_3 = \frac{b_0}{2\alpha' p^+ p^-} d_3, \qquad R = R_2 + R_3$$

また, DDF 演算子 A_n^i, B_r^j は縦波モード演算子 α_n^i, ψ_r^j に変換される:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \alpha_n^i = \mathrm{e}^R A_n^i\, \mathrm{e}^{-R}, \quad \psi_r^j = \mathrm{e}^R B_r^j\, \mathrm{e}^{-R}.$$

[1] E. Witten, Nucl. Phys. B276 (1986) 291.

[2] C. R. Preitschopf, C. B. Thorn and S. A. Yost, Nucl. Phys. B 337 (1990) 363.
I. Y. Arefeva, P. B. Medvedev and A. P. Zubarev, Phys. Lett. B 240 (1990) 356.

[3] M. Kato and K. Ogawa, Nucl. Phys. B 212 (1983) 443.

[4] N. Ohta, Phys. Rev. D 33 (1986) 1681.
M. Ito, T. Morozumi, S. Nojiri and S. Uehara, Prog. Theor. Phys. 75 (1986) 934.

[5] Y. Aisaka, Y. Kazama, JHEP 0404 (2004) 070. [hep-th/0404141].
K. Furuuchi, N. Ohta, Prog. Theor. Phys. 116 (2006) 601-604. [hep-th/0607105].

YITP YUKAWA INSTITUTE FOR THEORETICAL PHYSICS

0-picture NS string の第一量子化

物理的状態

1. 物理的状態 $\left|\mathrm{phys}\right\rangle$ の条件:

$$b_0 \left|\mathrm{phys}\right\rangle = 0, \quad Q_B \left|\mathrm{phys}\right\rangle = 0$$

二つ目の条件式を相似変換すると

$$(\delta + c_0 L) \left|\mathrm{phys}\right\rangle^{(R)} = 0, \quad \mathrm{e}^R \left|\mathrm{phys}\right\rangle = \left|\mathrm{phys}\right\rangle^{(R)}$$
$$\Rightarrow \quad L \left|\mathrm{phys}\right\rangle^{(R)} = 0 \ \text{[on-shell 条件]}, \quad \delta \left|\mathrm{phys}\right\rangle^{(R)} = 0$$

2. 相似変換された空間で δ-cohomology を解く.

$$\delta \left|0\right\rangle_0 = \sqrt{2\alpha'} p^+ \gamma_{\frac{1}{2}} \psi_{-\frac{1}{2}}^- \left|0\right\rangle_0 \neq 0$$

より, 物理的状態の基底は 0-picture Fock vacuum $\left|0\right\rangle_0$ ではなく

$$\left|\mathrm{tach}\right\rangle_0^{(R)} = \psi_{-\frac{1}{2}}^- \left|0, k_1\right\rangle_0$$

である. (ただし k_1 は on-shell 条件 $\alpha' k^\mu k_\mu = \frac{1}{2}$ を満たす.)

3. 逆相似変換で得られる $\left|\mathrm{tach}\right\rangle_0 = \mathrm{e}^{-R} \left|\mathrm{tach}\right\rangle_0^{(R)}$ が物理的状態の基底:

$$\left|\mathrm{tach}\right\rangle_0 = \left(\psi_{-\frac{1}{2}}^- - \frac{1}{\sqrt{2\alpha'} k^+} b_{-1} \gamma_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4\alpha'(k^+)^2} \psi_{-\frac{1}{2}}^+ \right) \left|0, k_1\right\rangle_0$$
$$= X(z=0) \left|0\right\rangle_{-1}$$

一般の物理的状態は $\left|\mathrm{tach}\right\rangle_0$ に DDF 演算子を作用させて得られる:

$$\left|\mathrm{phys}\right\rangle_0 = A_{n_1}^{i_1^\dagger} A_{n_2}^{i_2^\dagger} \cdots B_{m_1}^{j_1^\dagger} B_{m_2}^{j_2^\dagger} \cdots \left|\mathrm{tach}\right\rangle_0$$
$$= X(0) \left|\mathrm{phys}\right\rangle_{-1} \qquad (\because) \text{ DDF 演算子と } X(z) \text{ は可換}$$

0- と (−1)-picture の物理的状態は一対一に対応し, PCO X は物理的空間に kenel を持たない.

No-ghost 定理

1. 内積は picture 数の合計が -2 でなければゼロなので, 0-picture でのノルムを定義するためには

$${}_0\langle \alpha | \mathcal{G} | \beta \rangle_0 \neq 0$$

のように, picture 数 -2 を与える計量 $\mathcal{G}$ が必要. $\mathcal{G}$ は次の条件を満たす:

$${}_0\langle \mathrm{tach} | \mathcal{G} | \mathrm{tach} \rangle_0 = 1, [L, \mathcal{G}] = 0, \quad [Q_B, \mathcal{G}] = 0, \quad [A^{i\dagger}_n, \mathcal{G}] = [B^{j\dagger}_r, \mathcal{G}] = 0.$$

2. $\left|\mathrm{phys}\right\rangle_0^{(R)}$ の空間で δ-cohomology を求め, ノルムの正定値性を示す.
この空間の計量 $\mathcal{G}^{(R)}$ は次式で与えられる:

$$\mathcal{G}^{(R)} = \psi_{-\frac{1}{2}}^+ \delta(\gamma_{-\frac{1}{2}}) \delta(\gamma_{\frac{1}{2}}) \psi_{\frac{1}{2}}^+$$

δ の1重項　→　縦波演算子 α_n^i, ψ_r^i (正ノルムを持つ)
4重項　→　$((\alpha_n^+, c_n), (b_n, \alpha_n^-)), ((\psi_r^+, \gamma_r), (\beta^r, \psi_r^-))$

$\gamma_{\frac{1}{2}}, \beta_{-\frac{1}{2}}$ の生成・消滅の役割が入れ替わっているのに伴い, それらと BRST 2重項を成す $\psi_{\frac{1}{2}}^+, \psi_{-\frac{1}{2}}^-$ がそれぞれ生成, 消滅演算子となっていることに注意が必要.

3. 逆相似変換で Q_B-cohomology を求め, ノルムの正定値性を示す.
計量は $\mathcal{G}^{(R)}$ を逆変換して得られる:

$$\mathcal{G} = \mathrm{e}^{-R} \mathcal{G}^{(R)}\, \mathrm{e}^R$$

まとめと今後の課題

- 0-picture NS 場の no-ghost 定理を示した. (内積の定義が必要)
0-picture と (−1)-picture の物理的状態の一対一対応を示した.
- NS 場の相似変換を導き, 証明を簡略化. (相似変換は picture と無関係)

$$\delta\text{-cohomology} \xleftrightarrow[\text{相似変換}]{} Q_B\text{-cohomoogy}$$

- ○ $(0, \frac{1}{2})$-picture の SSFT の可能性:

$$\lim_{\epsilon \to 0} Y_{\mathrm{nc}}(z) Y_{\mathrm{nc}}(z+\epsilon) = \text{finite}, \quad \text{同様に } n \text{ 乗も有限}$$

$$S = \tfrac{1}{2} \int Y_{\mathrm{nc}}^2 A * Q_B A + \tfrac{1}{3} \int Y_{\mathrm{nc}}^2 A * A * A + \tfrac{1}{2} \int Y_{\mathrm{nc}}^3 \Psi * Q_B \Psi + \int Y_{\mathrm{nc}}^3 A * \Psi * \Psi,$$

- ○ Ramond 場の相似変換は進展中.

$$R = R_2 + R_3 + \cdots + R_8 + \cdots ? \cdots$$