Yangian symmetry in WZNW model on squashed sphere

京大理　川口維男　Domenico Orlando氏(IPMU),吉田健太郎氏(京大理)との共同研究に基づく

1.イントロダクション

曲がった時空上の弦理論(非線形シグマ模型)

EX.　AdS/CFT対応およびその拡張

↓

非線形な運動方程式

ターゲット空間によっては可積分　→　無限次元対称性

FACT

対称商空間上の非線形シグマ模型は
無限次元対称性を持つ

対称商空間の例：AdS$_n$, S^n

対称商空間以外では無限次元対称性の存在？

無限次元対称性を持つ非対称商空間上の弦理論の構成

2.squashed S^{3}上のWess-Zumino-Novikov-Witten模型

以前の論文　[I.K., K.Yoshida]

squashed S^{3}上の非線形シグマ模型が
無限次元(Yangian)対称性を持つ

↓ 拡張

Wess-Zumino項を加えたときの

①　無限次元対称性　　②　くりこみ群の流れ

squashed S^3

$$ds^2 = \frac{L^2}{4}\left[\underbrace{d\theta^2+\cos^2\theta d\phi^2}_{S^2} + (1+C)\underbrace{(d\psi+\sin\theta d\phi)^2}_{S^1}\right]$$

$$SU(2)_{\mathrm{L}}\times U(1)_{\mathrm{R}}$$

$C=0$: S^3, $SU(2)_{\mathrm{L}}\times SU(2)_{\mathrm{R}}$　⟷　$C=-1$: S^2, $SU(2)_{\mathrm{L}}$

SU(2)としてのsquashed S^3

$$g\in SU(2) \;\rightarrow\; J=g^{-1}dg=T_1J^1+T_2J^2+T_3J^3$$

$$ds^2=\frac{L^2}{4}\left[(J^1)^2+(J^2)^2+(1+C)(J^3)^2\right]$$

作用

$$S=S_{\sigma M}+S_{WZ}$$

$$S_{\sigma M}=-\frac{1}{2\lambda^2}\iint dtdx h^{\mu\nu}\left[J^1_\mu J^1_\nu+J^2_\mu J^2_\nu+(1+C)J^3_\mu J^3_\nu\right]$$

$$S_{WZ}=-\frac{n}{8\pi}\int_0^1 ds\iint dtdx\epsilon^{\hat\mu\hat\nu\hat\rho}\tilde J^1_{\hat\mu}\tilde J^2_{\hat\nu}\tilde J^3_{\hat\rho}\ ,\quad n\in\mathbb{Z}$$

$$\tilde g(x,0)=1,\quad \tilde g(x,1)=g(x)$$

SU(2)保存カレント：　$I^A_\mu=\left(h_{\mu\nu}-\frac{\lambda^2 n}{8\pi}\epsilon_{\mu\nu}\right)\left[\partial^\nu g\cdot g^{-1}\right]^A+CJ^3_\mu n^A$

$n^A=\left[gT_3g^{-1}\right]^A$　：　S^{2}上の単位ベクトル

FACT

保存カレントの平坦条件　→　無限個の保存量

$$\epsilon^{\mu\nu}\left(\partial_\mu I^A_\nu-\frac12 f^A{}_{BC}I^B_\mu I^C_\nu\right)=0$$

$$\rightarrow\;\begin{cases} Q^A_{(0)}=\int dx j^A_t(x)\\ Q^A_{(1)}=\frac14\iint dxdy f^A{}_{BC}\epsilon(x-y)j^B_t(x)j^C_t-\int dx j^A_x(x)\\ Q^A_{(2)},\ Q^A_{(3)}\cdots\end{cases}$$

今の場合

$$\epsilon^{\mu\nu}\left(\partial_\mu I^A_\nu-\frac12\varepsilon^A{}_{BC}I^B_\mu I^C_\nu\right)=\left(C-\frac{C}{1+C}\left(\frac{\lambda^2 n}{8\pi}\right)^2\right)n^A\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu J^3_\nu$$

→　$C=0,\ \left(\frac{\lambda^2 n}{8\pi}\right)^2-1$　ならば平坦

その他のパラメータであっても
保存カレントの改良で平坦にできる：　$j^A_\mu=I^A_\mu+X\epsilon_{\mu\nu}\partial^\nu n^A$

$$\epsilon^{\mu\nu}\left(\partial_\mu j^A_\nu-\frac12\varepsilon^A{}_{BC}j^B_\mu j^C_\nu\right)=\left(C-\frac{C}{1+C}\left(\frac{\lambda^2 n}{8\pi}\right)^2-X^2\right)n^A\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu J^3_\nu$$

$$\rightarrow\; X=\pm\sqrt{C-\frac{C}{1+C}\left(\frac{\lambda^2 n}{8\pi}\right)^2}$$

無限個の保存量　→　Yangian代数

squasheした後もYangian対称性が残る

くりこみ群

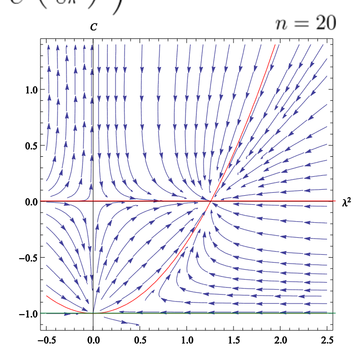
$$\mu\frac{\partial\lambda^2}{\partial\mu}=-\frac{\lambda^4}{4\pi}\left(1-C-\frac{1}{1+C}\left(\frac{\lambda^2 n}{8\pi}\right)^2\right)$$

$$\mu\frac{\partial C}{\partial\mu}=\frac{\lambda^2}{2\pi}C(1+C)$$

SU(2)WZW模型が
赤外固定点

C=0の線に流れ込む

C>-1の領域で
信用できる解析



まとめと展望

squashed S^{3}上のWZNW模型は、

①　SU(2) Yangian対称性を持つ

②　くりこみ群の流れはSU(2)WZW模型を赤外固定点に持つ

今後の展望

超対称化しても無限次元対称性が残るか？

量子化後も無限次元対称性が残るか？