AdS/CFT対応とサーフェス演算子

山口哲
Satoshi Yamaguchi
(Seoul National University)

E. Koh, SY, arXiv:0812.1420 JHEP 0902:012,2009
に基づく

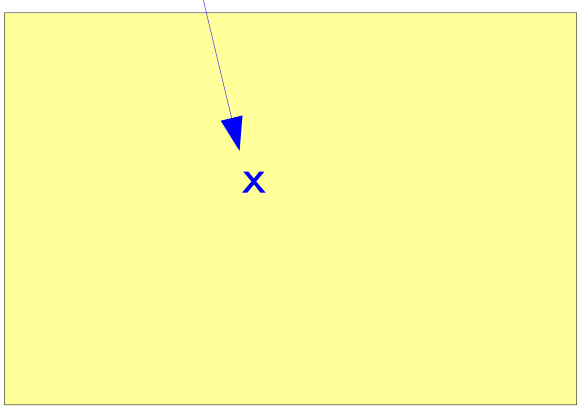
導入

場の量子論における非局所演算子

局所演算子 (場)

O(x)

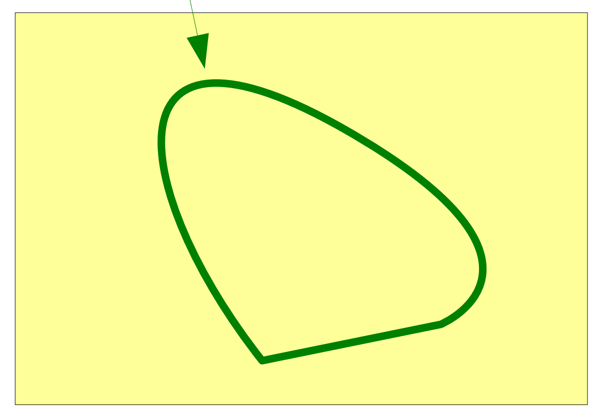
時空内の一点



非局所演算子

O(Σ)

多数の点、線、面、…



例: Wilson ループ

部分空間に局在化した演算子を調べたい

動機

- 場の理論の相構造

- AdS/CFT対応を通じて、弦理論における「brane」の理解

分類

部分空間に局在している演算子はその部分空間の次元で分類できる。

4次元の場の理論で

0 dim　　局所演算子

1 dim　　ループ演算子　(例 Wilson ループ)
試験粒子を導入

2 dim　　サーフェス演算子
試験渦糸を導入　　後で詳しく

3 dim　　インターフェース演算子
(2つの異なる場の理論をつなぐことができる)

試験膜(壁)を導入

AdS/CFT対応

AdS / CFT

AdS = IIB 超弦理論 AdS5 x S5

CFT = 4dim N=4 Super YM theory SU(N)

対応物 ⟷ (局所 or 非局所)演算子

- 場の揺らぎ
- 基本弦
- D-brane probe
- NS5-brane probe
- 重力解　etc.

GKPW の処方 ⟷ 相関関数

話の内容 — AdS/CFT対応とサーフェス演算子

AdS ／ CFT

対応物	⟺	サーフェス演算子
GKPW の処方	⟺	相関関数

- どのようなサーフェス演算子があるか？
- AdS側の対応物は何か？
- 相関関数の計算　一致する！

Plan

- 1/2 BPS サーフェス演算子のレビュー
  - 定義、対称性
  - 重力側の対応物
- 1/4 BPS サーフェス演算子
  - 定義、対称性
  - 重力側の対応物
  - 相関関数

4次元 N=4 SYM
1/2 BPSサーフェス演算子

演算子の定義

すべての演算子がLagrangian の中の場の（汎）関数で書けるわけではない

例:　2次元 massless compact free boson

$$S = \frac{1}{2\pi}\int d^2 z\, \partial_z \phi\, \partial_{\bar{z}} \phi \qquad \phi \simeq \phi + 2\pi R$$

運動量 p の頂点演算子　$O(z) = \exp(ip\phi)$

巻きつきモードの頂点演算子？

境界条件での演算子の定義

巻きつきモードは例えば境界条件(or OPE)で定義

$$\phi(z)\tilde{O}(0) \sim \frac{wR}{2i}(\log z - \log \bar{z})\tilde{O}(0)$$

- 相関関数はこの境界条件の下での経路積分で定義される。

特異点のある古典解 $\phi(z) = \frac{wR}{2i}(\log z - \log \bar{z})$

→ 特異点に局在する演算子

4-dim N=4 超対称Yang-Mills 理論

- 場

  - Vector $A_\mu, \mu=0,1,2,3$
  - Spinors ψ
  - Scalars $\phi_i, i=4,\cdots,9$

  それぞれSU(N)のadjoint表現

- 作用

$$S_{YM}=\frac{2\mathrm{N}}{\lambda}\int d^4x\,\mathrm{tr}\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\cdots\right]$$

$\lambda=g_{YM}^2N$: 't Hooft coupling

大域的対称性

- Conformal symmetry

$$SO(2,4) \simeq SU(2,2)$$

- R-symmetry

$$SO(6) \simeq SU(4)$$

- Super and superconformal symmetry

(4,4) of SU(2,2) x SU(4) (complex)

$\Rightarrow$ $\boxed{PSU(2,2|4)}$

1/2 BPS サーフェス演算子

[Gukov, Witten '06]

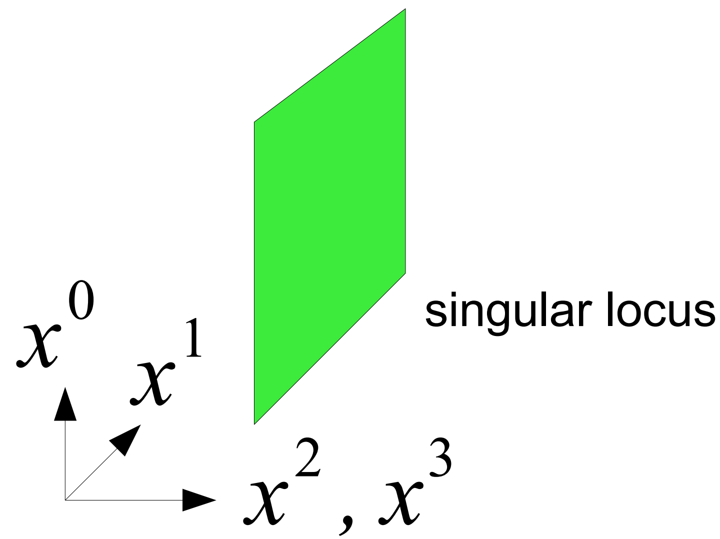
4 次元 N=4 SYM

$$\Phi := \phi_4 + i\,\phi_5$$

$$\Phi = diag\left(\frac{\beta}{z}, 0,0,\ldots,0\right)$$

$$z = x^2 + ix^3$$

β : 定数



- この配位は古典解
- 特異面 $z=0$

  x^0, x^1 方向にのびている

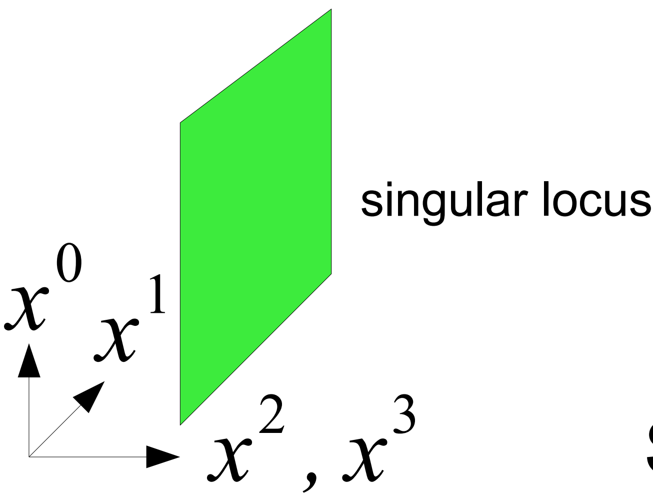
→ $z=0$ に局在する演算子が定義される

古典解の対称性

$$\Phi = diag\left(\frac{\beta}{z}, 0, 0, \ldots, 0\right)$$

$$\Phi := \phi_4 + i\,\phi_5$$

$$z = x^2 + i x^3$$



$\phi^6, \ldots, \phi^9$ の回転

SO(2,2) x SO(2) x SO(4)

2 次元 global conformal symmetry

diagnal subgrop of

- rotation of x^2, x^3
- rotation of ϕ^4, ϕ^5

古典解の超対称性

古典解は半分の超対称性を保つ

$$\delta\psi = D_\mu \phi_I \Gamma^{\mu I} \epsilon = 0 \Longrightarrow (1+\Gamma^{2345})\epsilon = 0$$

$\Longrightarrow$ 1/2 BPS

一般化

M ：整数

$N_i,\quad i=1,\ldots,M$ ：Nの分割 $\qquad \sum_{i=1}^{M} N_i = N$

$$\Phi = \frac{1}{z}\,diag\,\overbrace{\left[\;N_1 \;\middle|\; N_2 \;\middle|\; N_3 \;\middle|\; \quad \;\middle|\; \quad \;\right]}^{N}$$

$$A = \frac{dz}{2\pi i z}\,diag\,\overbrace{\left[\;N_1 \;\middle|\; N_2 \;\middle|\; N_3 \;\middle|\; \quad \;\middle|\; \quad \;\right]}^{N}$$

一般化

$$\Phi = \frac{1}{z} diag(\overbrace{\beta_1, \ldots, \beta_1}^{N_1}, \beta_2, \ldots, \beta_{M-1}, \overbrace{\beta_M, \ldots, \beta_M}^{N_M})$$

$$A = \frac{dz}{2\pi i z} diag(\overbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_1}^{N_1}, \alpha_2, \ldots, \alpha_{M-1}, \overbrace{\alpha_M, \ldots, \alpha_M}^{N_M})$$

$\exp[i\sum_i \eta_i \int_\Sigma tr_{N_i} F]$ の挿入

α_i, η_i :実数

β_i :複素数

パラメーター　$(\beta_i, \alpha_i, \eta_i)$,　$i = 1, \ldots, M$

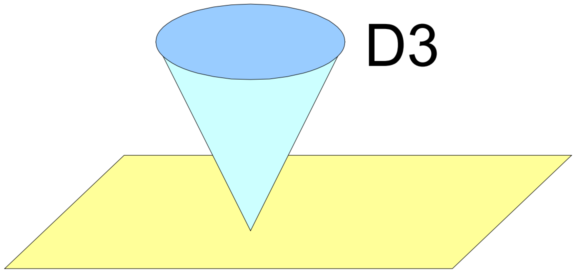
Plan

- 1/2 BPS サーフェス演算子のレビュー
  - 定義、対称性
  - 重力側の対応物
- 1/4 BPS サーフェス演算子
  - 定義、対称性
  - 重力側の対応物
  - 相関関数

Gravity dual of 1/2 BPS surface operator

[Constable, Erdmenger,Guralnik,Kirsch '02], [Gukov, Witten '06], [Gomis, Matsuura '07], [Drukker, Gomis, Matsuura '08], [Lin, Lunin, Maldacena '04], [Lin, Maldacena '05]

- D3-brane probe



AdS3 x S1 shaped

SO(2,2) x SO(2) x SO(4)

超対称性

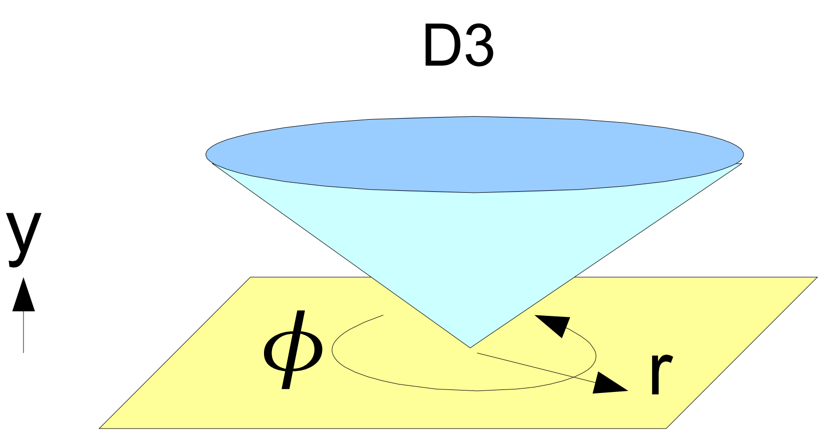
$$\Phi = diag\left(\frac{\beta}{z}, 0, 0, \ldots, 0\right)$$

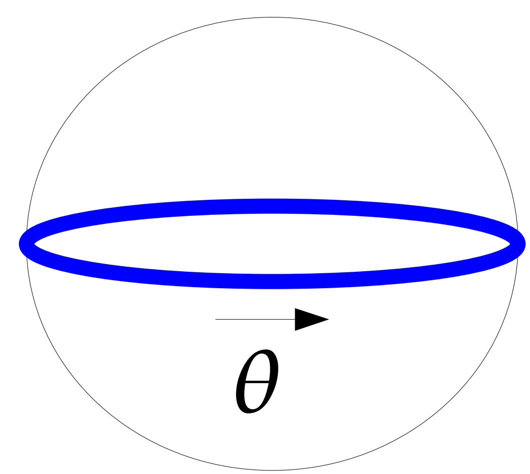
AdS5の座標 $(y, r, \phi, x_{1,} x_2)$

S5の中の一つの大円の座標 θ

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}(dy^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 + dx_0^2 + dx_1^2) + d\theta^2$$

D3-brane $\boxed{\kappa y = r, \quad \theta = \phi}$



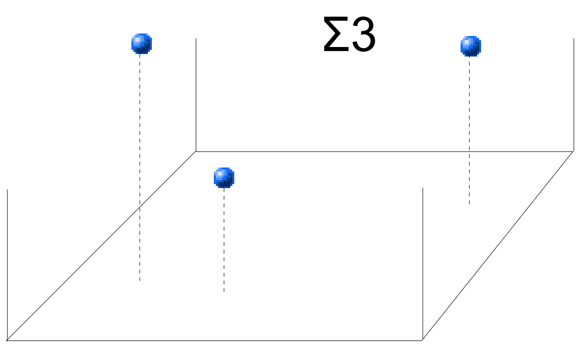


- Bubbling geometry

$N_i \simeq N$ Large number of D3-brane get together and back-reaction cannot be ignored

AdS3 x S3 x S1 x Σ3

SO(2,2) x SO(4) x SO(2)



Plan

- 1/2 BPS サーフェス演算子のレビュー
  - 定義、対称性
  - 重力側の対応物
- 1/4 BPS サーフェス演算子
  - 定義、対称性
  - 重力側の対応物
  - 相関関数

1/4 BPS
サーフェス演算子

結果のまとめ

[Koh, SY]

- 1/4 BPS のサーフェス演算子について調べた

- 重力側の対応物についての提案を行った

- ゲージ理論側、重力側のそれぞれについて同じ超対称性があることを示した。

- 局所演算子との相関関数をゲージ理論側と重力側で計算し、それらが一致することを示した。

なぜ合うのか　？

1/2 BPS サーフェス演算子

4 次元 N=4 SYM

$$\Phi = diag\left(\frac{\beta}{z^1}, 0, 0, \ldots, 0\right)$$

$$\Phi := \phi_4 + i\,\phi_5$$

$$z^1 = x^2 + i x^3$$

β : constant

- 超対称性

$$\delta\psi = D_\mu \phi_I \Gamma^{\mu I} \epsilon = 0 \Rightarrow (1 + \Gamma^{2345})\epsilon = 0$$

1/2 BPS

超対称性を保つために正則性が重要！

- スケール不変性

Φ は次元 1

Dilatation 対称性をたもつために次数 (-1) が重要！

1/4 BPS サーフェス演算子

$$\Phi \sim \frac{1}{\sqrt{z^1 z^2}}$$

多価関数

$$z^1 = x^2 + ix^3$$
$$z^2 = x^0 + ix^1$$

Well-definedか ??

Yes, 次のように定義する.

$$\Phi = \mathrm{diag}\left(\frac{\beta}{\sqrt{z^1 z^2}}, -\frac{\beta}{\sqrt{z^1 z^2}}, 0, \cdots, 0\right), \qquad A_\mu = 0,$$

例えば z^2 が一定で,$z^1 = 0$ のまわりにmonodromyがある

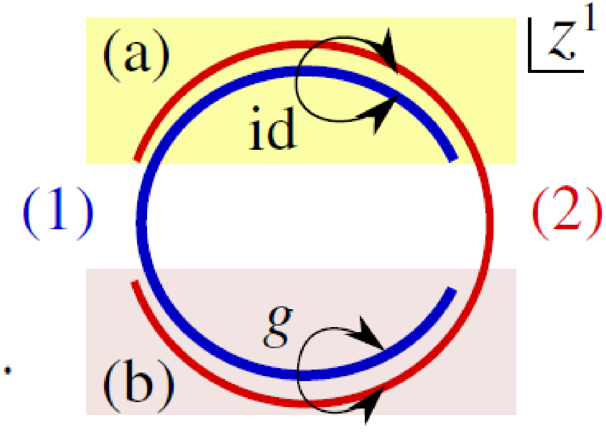
$$z^1 \to z^1 e^{2\pi i}$$

この monodromy を次のようにゲージ場の holonomy を入れて相殺する。

二つのパッチを導入

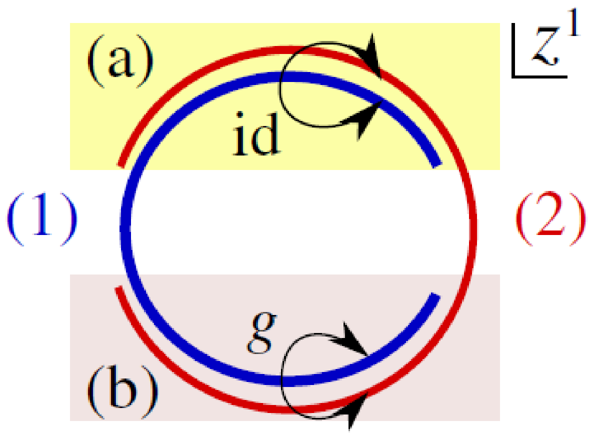
$(1)\ 0 < \phi_1 < 2\pi$ (branch cut at $\phi_1 = \pi$).

$(2)\ -\pi < \phi_1 < \pi$ (branch cut at $\phi_1 = 0$).



$$z^1 = r_1 e^{i\phi_1}$$

(a) の部分で二つのパッチは恒等変換でつなぐ。



(b) の部分では次のような定数行列 g で表されるゲージ変換でつなぐ。

$$g = \begin{pmatrix} i\sigma_1 & 0 \\ 0 & I_{N-2} \end{pmatrix}$$

モノドロミーが相殺されて無矛盾な配位になる。

ゲージ理論側での超対称性

$$\delta\psi = D_\mu \phi_I \Gamma^{\mu I} \epsilon = 0$$

$$(1+\Gamma^{0145})\epsilon = (1+\Gamma^{2345})\epsilon = 0$$

1/4 BPS

Plan

- 1/2 BPS サーフェス演算子のレビュー
  - 定義、対称性
  - 重力側の対応物
- 1/4 BPS サーフェス演算子
  - 定義、対称性
  - 重力側の対応物
  - 相関関数

重力側の対応物 = あるD3-brane の配位

AdS5 x S5 座標 $\left(z^{1}, z^{2}, \omega^{1}, \omega^{2}, \omega^{3}\right)$ すべて複素数

$$ds^{2}=\frac{1}{y^{2}}\left(|dz^{1}|^{2}+|dz^{2}|^{2}\right)+y^{2}\sum_{a=1}^{3}|d\,\omega^{a}|^{2}$$

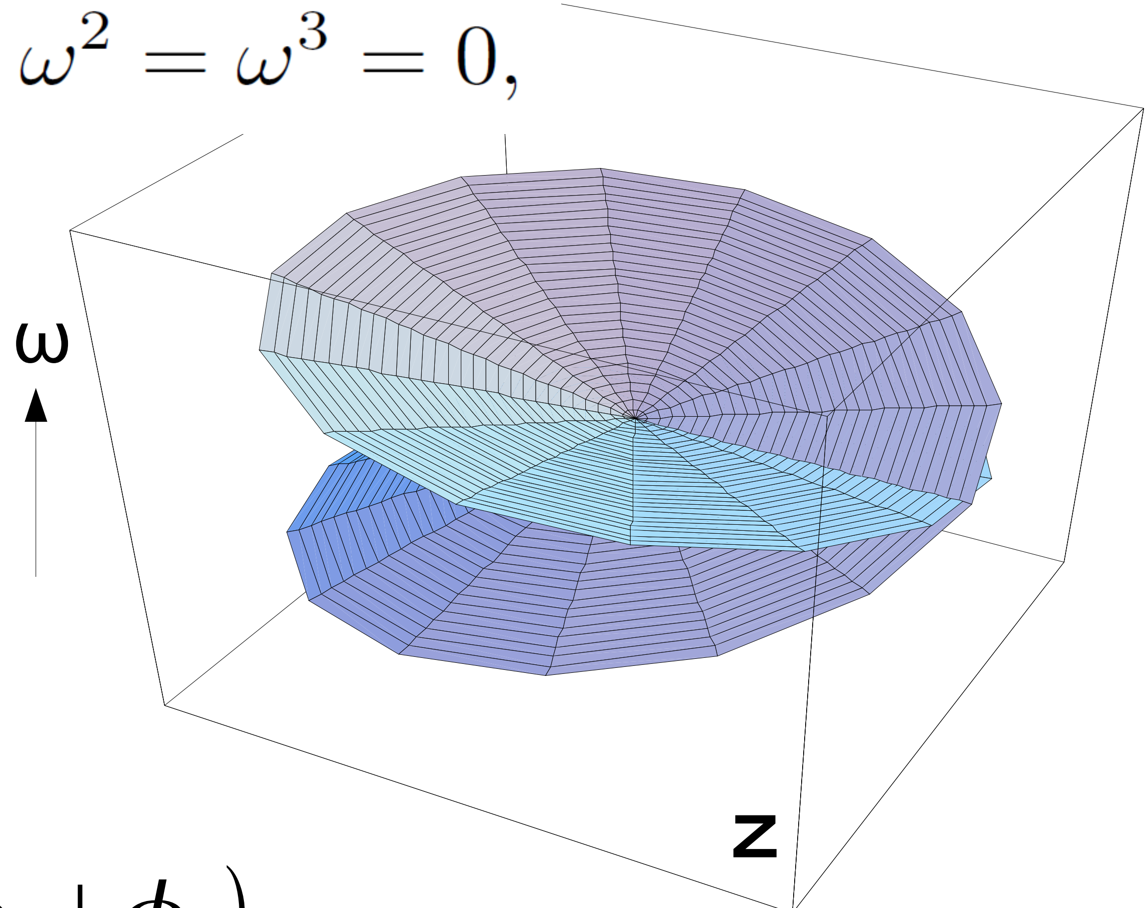
$$y^{-2}:=\sum_{a=1}^{3}|\omega^{a}|^{2}$$

D3-brane 次のような面に巻きついたD3-brane

$$z^1 z^2 (\omega^1)^2 - \kappa^2 = 0, \quad \omega^2 = \omega^3 = 0,$$

κ : constant related to β by $\kappa = \dfrac{2\pi\beta}{\sqrt{\lambda}}$

$$z^1 z^2(\omega^1)^2 - \kappa^2 = 0, \quad \omega^2 = \omega^3 = 0,$$



$$\kappa\, y = \sqrt{r_1 r_2}, \quad \theta = \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2)$$

$$\omega = y^{-1} e^{i\theta}, \quad z_j = r_j e^{i\phi_j}.$$

重力側での超対称性

- Kappa symmetry projection

- 補助的な12 次元空間を使った方法

[Mikhailov '00], [Kim, Lee '06]

Plan

- 1/2 BPS サーフェス演算子のレビュー
  - 定義、対称性
  - 重力側の対応物
- 1/4 BPS サーフェス演算子
  - 定義、対称性
  - 重力側の対応物
  - 相関関数

局所演算子との相関関数 — ゲージ理論側

サーフェス演算子

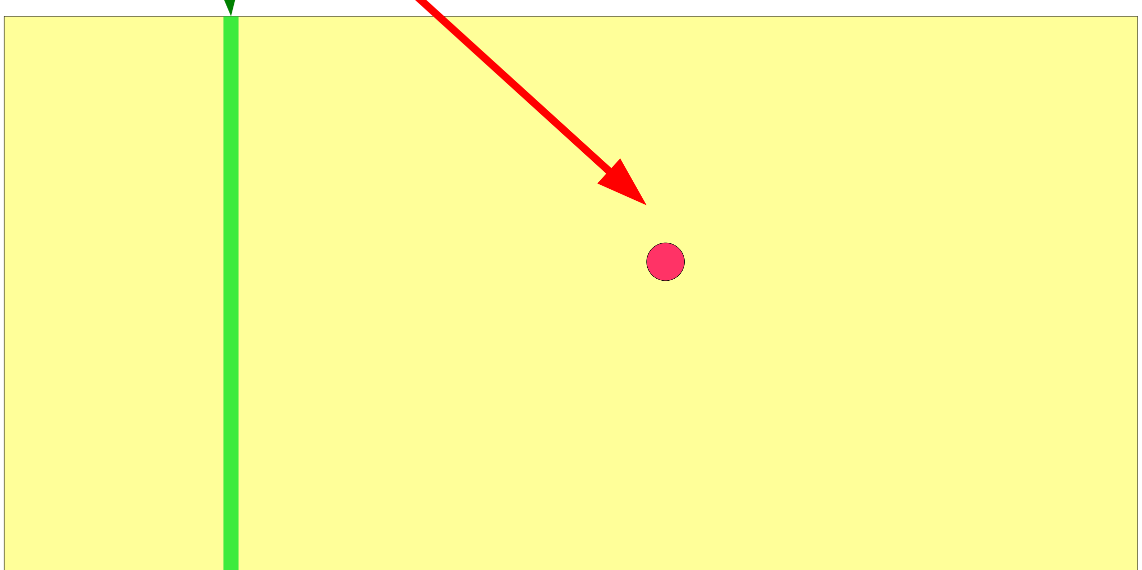
$$\langle O_\Sigma \cdot O(z)\rangle$$

(For 1/2 BPS case [Drukker, Gomis, Matsuura])

局所演算子
“chiral primary”

$$O(z) = C^{I_1\cdots I_\Delta}\, tr[\phi_{I_1}\cdots\phi_{I_\Delta}]$$

Traceless, symmetric tensor



$$\frac{\langle \mathcal{O}_\Sigma \cdot \mathcal{O}(\zeta) \rangle}{\langle \mathcal{O}_\Sigma \rangle} = \frac{1}{\langle \mathcal{O}_\Sigma \rangle} \int_{\text{boundary condition}} [DAD\psi D\phi]\, \mathcal{O}(\zeta)\, e^{-S}$$

$$\cong \mathcal{O}|_\Sigma(\zeta)$$

古典近似
単に古典解を代入する

ゲージ理論側の結果 (古典近似)

$$\boxed{\frac{\langle O_\Sigma O_{\Delta,k}(\zeta) \rangle}{\langle O_\Sigma \rangle} = \frac{(8\pi^2)^{\Delta/2}}{\lambda^{\Delta/2}\sqrt{\Delta}} C_{\Delta,k} \frac{\beta^\Delta}{(\bar{\zeta}^1 \bar{\zeta}^2)^{(\Delta-k)/2} (\zeta^1 \zeta^2)^{(\Delta+k)/2}} (1+(-1)^\Delta)}$$

局所演算子との相関関数 — 重力理論側

計量と RR4-form場のある種のゆらぎ

$\Longleftrightarrow$ Chiral primary 演算子

GKPW: AdSの境界にソースを挿入し、
古典的な作用を計算せよ.

D3-brane を probe として取り扱う

重力側の作用 $S_{gravity} = S_{IIB\ sugra} + S_{D3}$

$$S_{D3} = S_{DBI} - S_{WZ}, \quad S_{DBI} = T_{D3} \int d^4\xi \sqrt{|\det G_{mn}|}, \quad S_{WZ} = T_{D3} \int_{\Sigma_4} C_4.$$

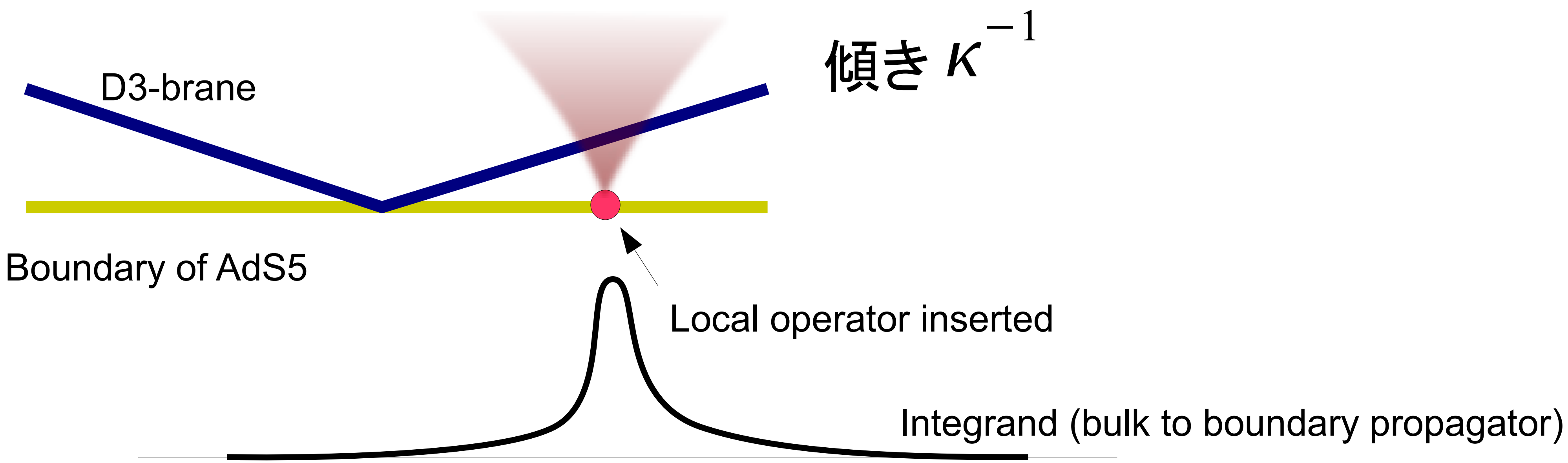
$$\frac{\langle \mathcal{O}_{\Delta,k} \cdot \mathcal{O}_{\Sigma} \rangle}{\langle \mathcal{O}_{\Sigma} \rangle} = \frac{\delta S_{gravity}}{\delta s_0(\zeta)}\Big|_{s_0=0} = \frac{\delta S_{D3}}{\delta s_0(\zeta)}\Big|_{s_0=0}$$

$$= -2\Delta T_{D3}\, c(\Delta) C_{\Delta,k} \int d^4 z \frac{\omega^{-\frac{\Delta-k}{2}}(z)\bar{\omega}^{-\frac{\Delta+k}{2}}(\bar{z})}{L^{\Delta+2}} \frac{|\zeta^m \partial_m \omega(z)|^2}{|\omega(z)|^2}$$

$$L \equiv \sum_{m=1,2} |z^m - \zeta^m|^2 + |\omega|^{-2} \qquad \omega(z) = \frac{\kappa}{\sqrt{z^1 z^2}}$$

It is not easy to evaluate exactly this integral

近似 $\kappa \to \infty$



The integrand has a SHARP PEAK in this limit!

重力側の結果　$\kappa \to \infty$

$$\frac{\langle O_\Sigma O_{\Delta,k}(\zeta)\rangle}{\langle O_\Sigma\rangle} = \frac{2^{\Delta/2}}{\sqrt{\Delta}} C_{\Delta,k} \frac{\kappa^\Delta}{(\bar{\zeta}^1 \bar{\zeta}^2)^{(\Delta-k)/2} (\zeta^1 \zeta^2)^{(\Delta+k)/2}} (1+(-1)^\Delta)$$

(ゲージ理論側の結果

$$\frac{\langle O_\Sigma O_{\Delta,k}(\zeta)\rangle}{\langle O_\Sigma\rangle} = \frac{(8\pi^2)^{\Delta/2}}{\lambda^{\Delta/2}\sqrt{\Delta}} C_{\Delta,k} \frac{\beta^\Delta}{(\bar{\zeta}^1 \bar{\zeta}^2)^{(\Delta-k)/2} (\zeta^1 \zeta^2)^{(\Delta+k)/2}} (1+(-1)^\Delta)$$

)

ゲージ理論側の結果と一致する。ただし次の関係式を使う。

$$\kappa = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{\lambda}}$$

補正

$$\frac{\langle O_\Sigma O_{\Delta,k}(\zeta)\rangle}{\langle O_\Sigma\rangle}=(leading)\left[1+\frac{\lambda}{4\pi^2\beta^2}\frac{\Delta^2-k^2}{16(\Delta-1)}\left(\frac{|\zeta^1|^2+|\zeta^2|^2}{|\zeta^1\zeta^2|}\right)+\cdots\right]$$

λ の正ベキの展開になっている ！

状況は BMN のplane wave 極限と似ている

β が大きいため、形式的に λ の摂動展開の
ような感じになっている

これとゲージ理論側の摂動論的な補正を比較するのは
興味深い問題である。

まとめ

- サーフェス演算子についてAdS/CFT対応の枠組みで議論を行った

- 1/4 BPS のサーフェス演算子について調べた

- 重力側の対応物についての提案を行った

- ゲージ理論側、重力側のそれぞれについて同じ超対称性があることを示した。

- 局所演算子との相関関数をゲージ理論側と重力側で計算し、それらが一致することを示した。

Thank you